# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

## СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

### Том 23



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1959

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 3—34

А. И. КОСТРИКИН

# О ПРОБЛЕМЕ БЕРНСАЙДА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе решается в утвердительном смысле ослабленная проблема Бернсайда для любого простого показателя $p$.

## Введение

С тех пор как Магнусом в 30-х годах была выдвинута идея представления групп в кольце формальных степенных рядов, интерес к развитому впоследствии на этой основе новому аппарату в теории групп постоянно возрастал, главным образом благодаря открывшейся возможности использовать его для доказательства гипотезы Бернсайда (в ослабленной форме). Напомним ее утверждение (для простого показателя $p$). Класс $X$ конечных групп с заданным числом $k$ образующих и тождественным соотношением $x^p = 1$ содержит, с точностью до изоморфизма, только конечное число групп. Иначе говоря, любая группа из класса $X$ является фактор-группой некоторой группы $\overline{B}_{k,p} \in X$.

Неизвестно, следует ли из этого утверждения конечность фактор-группы $B_{k,p}$ свободной группы $F$ с $k$ образующими по нормальному делителю $F^p$, порожденному $p$-ми степенями элементов из $F$ (проблема Бернсайда для показателя $p$ в неослабленной форме). Вообще говоря, утверждение ослабленной гипотезы Бернсайда означает только, что число конечных фактор-групп группы $B_{k,p}$ ограничено сверху. Но для многих целей, например в теории конечных $p$-групп, важна именно ослабленная проблема Бернсайда. А так как к решению проблемы Бернсайда в целом почти никаких подходов нет, то и не удивительно, что основной поток исследований был направлен либо на доказательство существования группы $\overline{B}_{k,p}$ (это удалось сделать только для $p \leqslant 7$), либо на изучение свойств конечных фактор-групп группы $B_{k,p}$. Все работы последних двух десятилетий связывали ослабленную проблему Бернсайда с теорией колец Ли.

Проблемы бернсайдовского типа получили широкое распространение во всей современной алгебре. Для различных классов ассоциативных и неассоциативных колец были поставлены вопросы об их локальной нильпотентности (или локальной конечности) при условии выполнения определенных тождественных соотношений, играющих роль уравнения $x^n = 1$ в группах. На некоторые из этих вопросов получены ответы. В кольцах Ли, которые, собственно, и составят предмет нашего исследования,

«проблема Бернсайда» формулируется так: будет ли нильпотентным кольцо Ли с $k$ образующими и $n$-м условием Энгеля

$$[\ldots[[uv]v]\ldots v] = [uv^n] = 0\,?$$

Ближайшее рассмотрение показывает, что выбор средств для решения данного вопроса существенно зависит от структуры аддитивной группы кольца. Чтобы учесть это обстоятельство, кольцо Ли предполагается операторным, причем наиболее важным является тот случай, когда область операторов есть простое поле некоторой характеристики $p \geqslant 0$. Мы не будем, однако, говорить об алгебре, предпочитая употреблять термин «кольцо Ли характеристики $p$».

Из связи, установленной между группами и кольцами, вытекает следующий вывод. Для положительного решения ослабленной проблемы Бернсайда в случае простого показателя $p$ достаточно доказать локальную нильпотентность кольца Ли характеристики $p$, удовлетворяющего $(p-1)$-му условию Энгеля. Вопрос об эквивалентности этих двух задач является трудным и до конца он еще не решен [см. ([1])]. Ранее нам уже представлялась возможность делать ссылки на соответствующую литературу [см. ([1]) и ([2])], и мы сочтем себя свободными от обязанности составления новой библиографии, тем более что в данный момент специфика вышеупомянутой редукции групповой задачи к теоретико-кольцевой нас совершенно не интересует.

Сформулируем окончательный результат, путь доказательства которого намечен в наших кратких публикациях ([3]) и ([4]), а полное изложение этого доказательства является главной целью настоящей работы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Произвольное кольцо Ли $L$, удовлетворяющее $n$-му условию Энгеля и имеющее характеристику $p \geqslant n$ (или $p = 0$), локально нильпотентно.*

Следствие. *Среди конечных групп с данным числом $k$ образующих и тождественным соотношением $x^p = 1$ ($p$ — простое) существует группа некоторого максимального порядка, зависящего только от $k$ и $p$.*

Отметим, что всюду речь будет идти исключительно о кольцах Ли с характеристикой $p > n$, но равенство $p = n$ в основной теореме можно добавить (для полноты), исходя из следующих простых соображений Пусть $L$ — кольцо Ли характеристики $p$ с $p$-м условием Энгеля и конечным числом образующих. Если для $n = p-1$ теорема верна, то $L^\rho \subset I$, где $\rho$ — некоторое число, а $I$ — идеал в $L$, порожденный всеми элементами вида $[xy^{p-1}]$, $x, y \in L$. Но

$$[xy^{p-1}z] = -[z[xy^{p-1}]] = -\sum_{0\leqslant i\leqslant p-1} [zy^i xy^{p-1-i}] = \sum [zu_k^p] = 0,$$

поэтому $L^{\rho+1} = 0$.

Между прочим, этим же замечанием, но отнесенным к кольцу $L$ с бесконечным числом образующих, снимается поставленный Коном вопрос о существовании разрешимого, но ненильпотентного кольца Ли характеристики $p$, удовлетворяющего $p$-му условию Энгеля (см. Kohn P. M., Proc. Cambridge Phil. Soc., 51. ч. 3 (1955), 401; там же есть ссылка на результат Хиггинса о нильпотентности разрешимых колец Ли с $p > n$).

С точки зрения общей теории колец Ли было бы интересно рассмот-

реть вопрос об их локальной нильпотентности в случае $p < n$. Если кольцо Ли $L$ характеристики $p=2$ имеет две образующие и удовлетворяет 3-му условию Энгеля, то нетрудно проверить, что $L^6 = 0$. По-видимому, утверждение теоремы можно обобщить в этом направлении. С другой стороны, неизвестно, является ли основная теорема локальной по существу (особенно для $n = p - 1$).

Остановимся на некоторых соображениях, положенных в основу доказательства теоремы. Как доказано в работе ([2]), радикал $N(L)$ энгелева ($n < p$) кольца Ли $L$ (сумма локально нильпотентных идеалов из $L$) является локально нильпотентным идеалом и $N(L/N(L)) = 0$. Рассуждая далее по индукции относительно $n$, будем на протяжении всей работы считать установленной локальную нильпотентность колец Ли с $(n-1)$-м условием Энгеля и заданной характеристикой $p$. Предположим, что найдется локально регулярное (т. е. не локально нильпотентное) кольцо Ли $L$ характеристики $p$, удовлетворяющее $n$-му условию Энгеля, $n < p$. Так как всегда можно перейти к фактор-кольцу по радикалу, то удобно с самого начала понимать под $L$ ненулевое кольцо без радикала:

$$L \neq 0, \quad N(L) = 0.$$

В частности, $L$ будет кольцом без центра и, следовательно, изоморфным с кольцом $D_L$ внутренних дифференцирований $p_y$:

$$x \to [xy], \quad x,\ y \in L, \quad p_y \in D_L.$$

Нам придется доказывать много тождеств, которым удовлетворяют элементы из $D_L$. Чтобы избавиться от излишне громоздких обозначений и большого числа однообразных переходов от $u$ к $p_u$ и обратно, мы отождествим кольца $L$ и $D_L$, условившись под кольцом Ли понимать всюду множество элементов (обозначаемых малыми латинскими буквами $a, b, \ldots$), замкнутое относительно операции сложения и «скобочного» умножения

$$[uv] = uv - vu.$$

Элементы обертывающего кольца $\mathfrak{A}_L$ обозначим большими латинскими буквами $A$, $B, \ldots$ . Если

$$A = a_1 a_2 \ldots a_m = 0,$$

то это означает, что

$$[uA] = [\ldots[[ua_1]a_2]\ldots a_m] = [ua_1a_2\ldots a_m] = 0$$

при любом $u \in L$. Обратно, из соотношения

$$[ua_1a_2\ldots a_m] = 0,$$

тождественного относительно $u$, следует равенство

$$A = a_1a_2\ldots a_m = 0.$$

В дальнейшем мы будем постоянно пользоваться тем обстоятельством [см., например, ([2])], что при $p > n$ любое произведение $x_1x_2\ldots x_s$, $x_i \in L$, можно записать в виде:

$$x_1x_2\ldots x_s = \sum u_i^{n-1} + \sum v_j^{n-2} + \ldots + \sum w_k, \qquad (*)$$

где $u_i$, $v_j, \ldots, w_k \in L$ (если $s < n-1$, то справа встретятся лишь степени $u^\alpha$, $\alpha \leqslant s$).

Для достижения стоящей перед нами цели нужно найти в $L$ отличный от нуля локально нильпотентный идеал, исключив тем самым предпосылки, из которых мы исходили. Реализация этого плана заключается в том, что доказывается существование в кольце $L$ главного идеала $\mathfrak{N}=\{c\}\neq 0$, который является даже коммутативным: $\mathfrak{N}^2=0$. Пользуясь тождеством (*), мы можем любой элемент $h\in\mathfrak{N}$ записать в виде:

$$h=\sum [cu_i^{k_i}],\quad 0\leqslant k_i\leqslant n-1.$$

Поэтому требование коммутативности идеала $\mathfrak{N}$ в точности означает, что имеют место соотношения:

$$cu^\alpha c=0,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant n-1,\quad u\in L. \tag{1}$$

Доказательство существования в $L$ элемента $c\neq 0$ с такими свойствами распадается на ряд этапов, каждому из которых соответствует конструирование отдельного члена в последовательности элементов $c_{(m)}\in L$, характеризуемых условиями:

$$c_{(m)}\neq 0,\quad c_{(m)}u^\alpha c_{(m)}=0,\quad \alpha=0,\ 1,\dots,2m-1,\quad m\geqslant 1,\quad u\in L. \tag{2}$$

Идея строить цепочку $c_{(1)}$, $c_{(2)}$, $c_{(3)},\dots$ рекуррентно, исходя из ее первого члена $c_{(1)}$ (существование которого устанавливается особо), является основной и определяет собой структуру всей работы. Доказывается, что переход от $c_{(m)}$ к $c_{(m+1)}$ возможен, когда $2m+5\leqslant p$. Так как $n<p$, и, следовательно, $2\left[\frac{n-1}{2}\right]+3\leqslant p$, то в конечном счете получится элемент

$$c=c_{(m_0)},\quad m_0=\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

удовлетворяющий всем тождествам (1). Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться тождествами

$$\begin{Bmatrix} u & v\\ 1 & n-1\end{Bmatrix}=\sum_{0\leqslant i\leqslant n-1} v^i u v^{n-1-i}=0,$$

$$\begin{Bmatrix} u & v\\ 2 & n-2\end{Bmatrix}=uv^{n-1}u+\sum_{0\leqslant i+j\leqslant n-2,\, j<n-2} v^i u v^j u v^{n-2-i-j}=0, \tag{3}$$

которые являются результатом линеаризации соотношения $u^n=0$, эквивалентного $n$-му условию Энгеля.

Предварительные указания на то, что намеченный нами путь построения цепочки $c_{(1)}$, $c_{(2)},\dots$ отвечает существу дела, можно получить из следующих простых соображений. Как легко видеть, условия (2) равносильны следующим:

$$c_{(m)}\neq 0,\quad c_{(m)}u^{2\alpha}c_{(m)}=0,\quad \alpha=0,\ 1,\dots,\ m-1. \tag{2'}$$

Это прямо вытекает из того, что

$$[ueu^{2k}e]=-2eu^{2k+1}e=0,$$

если

$$eu^\alpha e=0,\quad \alpha=0,\ 1,\dots,\ 2k.$$

Обозначив $c_{(m)}=c$ и предположив, что $[cu^{2m+1}c]=0$ при всех $u\in L$, мы придем к тождеству

$$[vcu^{2m}c]=-[cvu^{2m}c]=\sum [cu_i^{2m+1}c]=0,$$

или

$$cu^{2m}c=0.$$

Но, согласно сделанному замечанию, это означает, что $c$ можно взять в качестве одного из элементов $c_{(m+1)}$. Если же $c_0 = [ca^{2m+1}c] \neq 0$ для некоторого $a$ из $L$, то во всяком случае такой одночлен удовлетворяет всем требованиям (2′), предъявляемым к элементу $c$. Действительно, тождества

$$c_0 u^\alpha c_0 = 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2m-3,$$

очевидны. Далее,

$$c_0 u^{2m-2} c_0 = (2m+1)^2\, ca^{2m}cau^{2m-2}aca^{2m}c = (2m+1)^2 ca^{2m}ca^2u^{2m-2}ca^{2m}c,$$

но

$$\binom{2m+2}{2} ca^{2m}ca^2u^{2m-2}c = c\,[ca^{2m+2}]\, u^{2m-2}c = \sum_{k_i \leqslant 2m-1} cu_i^{k_i}\, c = 0,$$

т. е. и

$$c_0 u^{2m-2}\, c_0 = 0.$$

Можно надеяться, что элемент $c_0$ приобретает некоторые дополнительные свойства. Из крайне простых по идее (но довольно громоздких) вычислений § 1 следует (лемма 1. 2), что это действительно так, если $m \geqslant 2$. Как оказывается (доказательство теоремы 1), еще одно коммутирование того же рода

$$c_1 = [c_0\, b^{2m+1}\, c_0]$$

является здесь последним: элемент $c_1$ уже удовлетворяет тождеству

$$c_1 u^{2m} c_1 = 0,$$

т. е. [см. (2′)] совпадает с элементом $c_{(m+1)}$.

Таким образом, использование своеобразного итерационного процесса без особых затруднений позволяет перейти от $c_{(2)}$ к искомому элементу $c_{(m_0)}$, $m_0 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Более широкое применение метода итерирования, заключающегося в разнообразных способах конструирования элементов, сохраняющих некоторое фиксированное свойство (с постепенным улучшением его в нужную сторону), лежит в основе всех последующих рассуждений (§ 2 и 3).

Заметим, что хотя по своему смыслу § 1 должен занимать обособленное положение, результаты, в нем содержащиеся, частично используются в конце § 3. Там же (доказательство леммы 3.5) находит применение теорема 3, не имеющая, на первый взгляд, прямого отношения к нашей конструкции. Впрочем, если ставить перед собой более узкую (и совершенно не интересную с точки зрения теории групп) задачу — доказательство основной теоремы при дополнительном ограничении на характеристику $p > n + \left[\frac{n}{2}\right]$, то излишними оказываются и теорема 2 и весь § 3. Для решения этой задачи достаточны результаты остальной части работы (более легкой и формальной) в соединении с леммой 3 работы ([3]).

### § 1. Получение элементов $c_{(m+1)}$ из $c_{(m)}$ при $m \geqslant 2$

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если в энгелевом* ($n < p$) *кольце Ли* $L$ *существует элемент* $c_{(m)}$, $7 \leqslant 2m+3 < p$, *то в нем найдется и элемент* $c_{(m+1)}$.

Имея в виду понятия и соображения, высказанные во введении, ут-

верждение теоремы 1 можно сформулировать так: в энгелевом ($n < p$) кольце Ли $L \neq 0$ без радикала ($N(L) = 0$) существование элемента $c_{(2)}$ исключено.

Обозначим для удобства $c = c_{(m)}$, т. е.

$$c \neq 0, \quad cu^{\alpha}c = 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2m - 1.$$

Очевидно, определение элемента $c$ эквивалентно (см. тождество (*) введения) следующему: $c \neq 0$, $cu_1u_2\ldots u_\alpha c = 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2m-1$, $u_i$ — произвольные элементы из $L$. Так как

$$cu_1\ldots u_iu_j\ldots u_{2m}c = cu_1\ldots u_ju_i\ldots u_{2m}c + cu_1\ldots[u_iu_j]\ldots u_{2m}c$$

и

$$cu_1\ldots[u_iu_j]\ldots u_{2m}c = 0$$

по условию, то

$$cu_1u_2\ldots u_{2m}c = cu_{i_1}u_{i_2}\ldots u_{i_{2m}}c,$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_{2m}$ — любая перестановка индексов $1, \ldots, 2m$. В дальнейшем будут применяться также соотношения

$$cvu^{2m-1+\nu}c = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \nu} \alpha_i cu^{2m-1+\nu-i}vu^ic, \tag{4}$$

$$cu^{2m-1+\nu}vc = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \nu} \beta_i cu^ivu^{2m-1+\nu-i}c, \quad \nu \geqslant 0, \tag{5}$$

способ получения которых столь же прост, как и в только что рассмотренном частном случае $\nu = 0$. Точные значения коэффициентов $\alpha_i$ и $\beta_i$ нам не понадобятся.

Доказательство теоремы 1 носит совершенно элементарный характер. Простота его существенно связана с ограничением $m \geqslant 2$ и обусловлена, в частности, тождествами:

$$A = ca^{2m}ca^{2m-1}uc = 0, \tag{6}$$

$$B_1 = ca^{2m}ca^{2m}uc = 0, \quad B_2 = ca^{2m+1}ca^{2m-1}uc = 0 \text{ *},$$

которые при $m = 1$ уже не имеют места.

Будем обозначать

$$\bar{S} = a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1, \quad a_i \in L,$$

если

$$S = a_1a_2\ldots a_{k-1}a_k.$$

Очевидно, наряду с (6), выполнены также соотношения

$$\bar{A} = 0, \quad \bar{B}_1 = 0, \quad \bar{B}_2 = 0. \tag{7}$$

ЛЕММА 1.1.

$$[ca^{2m+1}c]\, u^{2m}ca^{2m}c = ca^{2m}cu^{2m}\, [ca^{2m+1}c] = 0$$

*при любых* $a, u \in L$.

---

* Первое из тождеств (6) справедливо в силу того, что

$$c\,[ca^{2m+2}]\,a^{2m-3}uc = \binom{2m+2}{2} A = 0,$$

а последние два — в силу того, что

$$(-1)^{\delta}ca^{\delta}\,[ca^{2m+3}]\,a^{2m-3-\delta}uc = \binom{2m+3}{3+\delta} B_1 - \binom{2m+3}{2+\delta} B_2 = 0, \quad \delta = 0{,}1.$$

Доказательство. Мы имеем:

$$[ca^{2m+1}c]\, u^{2m} ca^{2m} c = K_1 - K_2,$$

где

$$K_1 = [ca^{2m+1}]\, cu^{2m} ca^{2m} c, \quad K_2 = c\,[ca^{2m+1}]\, u^{2m}\, ca^{2m} c.$$

В соответствии с тождеством (4) можно выполнить следующее преобразование:

$$K_1 = [ca^{2m+1}]\, c[cu^{2m}]\, a^{2m} c = \alpha_0 [ca^{2m+1}]\, ca^{2m} [cu^{2m}] c + \alpha_1 [ca^{2m+1}] ca^{2m-1} [cu^{2m}] ac =$$
$$= \alpha_0 [ca^{2m+1}]\, ca^{2m} cu^{2m} c - 2m\alpha_1 [ca^{2m+1}]\, ca^{2m-1} ucu^{2m-1} ac.$$

Но $[ca^{2m+1}]\, ca^{2m} c$ и $[ca^{2m+1}]\, ca^{2m-1} uc$ записываются в виде суммы произведений $A$ и $B_2$, которые равны нулю [тождества (6)]. Поэтому $K_1 = 0$. Аналогично,

$$K_2 = \alpha_0 cu^{2m}\, [ca^{2m+1}]\, ca^{2m} c + \alpha_1 cu^{2m-1} [ca^{2m+1}]\, uca^{2m} c = 0,$$

так как $ca^{2m-1} uca^{2m} c = 0$ и $ca^{2m} uca^{2m} c = 0$ [тождества (7)].

Проверку второго соотношения $ca^{2m} cu^{2m}\, [ca^{2m+1}c] = 0$, симметричного с первым, можно опустить.

ЛЕММА 1.2. *Если* $c_0 = [ca^{2m+1}c]$ *и* $u$, $v$ — *любые элементы из* $L$, *то имеет место тождество*

$$T = c_0\, u^{2m} c_0 v^{2m} c_0 = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Очевидно,

$$T = 2c_0 u^{2m} ca^{2m+1} cv^{2m} c_0,$$

так как

$$c_0 = 2ca^{2m+1}c - (2m+1)\, ca^{2m} ca - (2m+1)\, aca^{2m} c,$$

а произведения

$$(c_0\, u^{2m} c\, a^{2m} c)\, av^{2m} c_0, \quad c_0\, u^{2m} a\, (c\, a^{2m} c\, v^{2m} c_0)$$

содержат (заключенные в круглые скобки) одночлены, по лемме 1.1 равные нулю.

Далее,

$$S = c_0\, u^{2m} ca^{2m+1} c = -(2m+1)\, aS_1 + S_2 - S_3,$$

где

$$S_1 = ca^{2m} cu^{2m} ca^{2m+1} c, \quad S_2 = ca^{2m+1} cu^{2m} ca^{2m+1} c, \quad S_3 = c\,[ca^{2m+1}]\, u^{2m} ca^{2m+1} c.$$

Пользуясь тождествами (5) и (7), находим:

$$S_1 = ca^{2m}\, [cu^{2m}]\, ca^{2m+1}\, c = \beta_0 c\, [cu^{2m}]\, a^{2m} ca^{2m+1} c + \beta_1 ca\, [cu^{2m}]\, a^{2m-1} ca^{2m+1} c =$$
$$= \beta_0\, cu^{2m}\, (ca^{2m} ca^{2m+1} c) - 2m\beta_1 cu^{2m-1} a\, (cua^{2m-1} ca^{2m+1} c) = 0.$$

$S_2$ и $S_3$, вообще говоря, отличны от нуля; преобразуем их с помощью тождеств (4) — (7):

$$S_2 = ca^{2m+1}\, [cu^{2m}]\, ca^{2m+1} c = \beta_0\, c\, [cu^{2m}]\, a^{2m+1} ca^{2m+1} c + \beta_1 ca\, [cu^{2m}]\, a^{2m} ca^{2m+1} c +$$
$$+ \beta_2\, ca^2\, [cu^{2m}]\, a^{2m-1} ca^{2m+1} c = \beta_1'\, cau^{2m} ca^{2m} ca^{2m+1} c + \beta_2'\, ca^2 u^{2m-1} cua^{2m-1} ca^{2m+1} c +$$
$$+ \beta_3'\, cu^{2m} ca^{2m+1} ca^{2m+1} c + \beta_4'\, cu^{2m-1} acua^{2m} ca^{2m+1} c +$$
$$+ \beta_5'\, cu^{2m-2} a^2 cu^2 a^{2m-1} ca^{2m+1} c.$$

Обозначив одночлен с коэффициентом $\beta_i'$ через $R_i$, мы видим, что $R_1 = R_2 = 0$ (см. (7): $\overline{B}_2 = 0$). Кроме того, $R_5$ выражается через $R_3$, $R_4$ и

$$R = cu^{2m-2}a^3cu^2a^{2m-2}ca^{2m+1}c,$$

так как

$$cu^{2m-2}[cu^2a^{2m+1}]ca^{2m+1}c = 0.$$

Очевидно,

$$R = \alpha cu^{2m-2}a^3cu^2a^{2m-1}ca^{2m}c,$$

поскольку

$$cu^{2m-2}a^3cu^2a^{2m-4}[cu^{2m+3}]c = 0,$$

а из системы соотношений

$$c\dots cxa^{2m-3-\delta}[ca^{2m+4}]a^{\delta}c = 0, \quad \delta = 0,1 \quad (x = a \text{ или } u)$$

с определителем $\Delta \equiv 0\,(2m+5)$ получаем, что $R_3$ и $R_4$ при $p > 2m+5$ также записываются через элементы вида $c\dots c\dots ca^{2m}c$.

Совершенно аналогичные рассуждения применимы и к одночлену $S_3$ ($S_3 = \alpha_0 cu^{2m}[ca^{2m+1}]ca^{2m+1}c + \alpha_1 cu^{2m-1}[ca^{2m+1}]uca^{2m+1}c$ и т. д.).

Снова обращаясь к тождествам леммы 1.1, находим, что

$$S_i v^{2m}[ca^{2m+1}c] = 0,$$

т. е. $T = 0$, если $p > 2m+5$.

В случае $p = 2m+5$ произведений $R_3$ и $R_4$ мы не будем менять, но, проделав с одночленом

$$\overline{S(v)} = ca^{2m+1}cv^{2m}[ca^{2m+1}c]$$

такие же преобразования, как и с $S$, выразим $T$ в виде линейной комбинации элементов

$$W = c\dots cxa^{2m}ca^{2m+1}ca^{2m}yc\dots c,$$

где $x = a$ или $u$, $y = a$ или $v$.

Так как $n < p$, то условие $2m+5 = p$ означает, что $2m+4 \geqslant n$ (точнее, $n = 2m+4-\delta$, $\delta = 0,1$, поскольку $m \leqslant \left[\frac{n-3}{2}\right]$).

Используя тождества (3), (6) и (7), получаем соотношение

$$c\dots cxa^{2m-3}\begin{Bmatrix} c_0 & a \\ 1 & n-1 \end{Bmatrix}a^{2m+4-n}yc\dots c =$$

$$= c\dots cxa^{2m}[ca^{2m+1}c]a^{2m}yc\dots c = 2W = 0,$$

которое завершает доказательство леммы 1.2.

Перейдем к решению основной задачи этого параграфа.

Пусть дан элемент $c = c_{(m)}$, $7 \leqslant 2m+3 < p$. Предполагая, что $cu^{2m}c$ не для всех $u$ из $L$ равно нулю (ибо иначе было бы $c = c_{(m+1)}$), мы (при некотором $a \in L$) получим новый элемент

$$c_0 = [ca^{2m+1}c] \neq 0,$$

обладающий всеми свойствами элемента $c$. Но, помимо этого, для $c_0$ выполняется тождество (8).

Если еще $c_0 \neq c_{(m+1)}$, то элемент $[c_0 b^{2m+1} c_0] \neq 0$, во всяком случае, является искомым, т. е.

$$H = [c_0 b^{2m+1} c_0]\, u^{2m}\, [c_0 b^{2m+1} c_0] = 0.$$

В самом деле, имея в виду лемму 1.1, получим:

$$H = 2\,[c_0\,b^{2m+1}c_0]\,u^{2m}c_0\,b^{2m+1}c_0 - (2m+1)\,[c_0\,b^{2m+1}c_0]\,u^{2m}bc_0b^{2m}c_0.$$

Но из тождества (8) следует:

$$[c_0\,b^{2m+1}c_0\,u^{2m}c_0] = [c_0\,b^{2m+1}c_0]\,u^{2m}c_0 - c_0\,u^{2m}\,[c_0\,b^{2m+1}c_0] = 0.$$

Поэтому

$$[c_0\,b^{2m+1}c_0]\,u^{2m}c_0\,b^{2m+1}c_0 = c_0\,u^{2m}\,[c_0\,b^{2m+1}c_0]\,b^{2m+1}c_0 = 2c_0\,u^{2m}c_0\,b^{2m+1}c_0\,b^{2m+1}c_0$$

[см. (6) и (8)]. Из системы соотношений:

$$c_0u^{2m}c_0b^{\delta}\,[c_0b^{2m+3}]\,b^{2m-1-\delta}c_0 = 0, \quad \delta = 0,1,$$

с определителем

$$\Delta = \frac{1}{3}\binom{2m+3}{2}\binom{2m+4}{2} \neq 0$$

находим:

$$c_0\,u^{2m}c_0\,b^{2m+1}c_0\,b^{2m+1}c_0 = c_0\,u^{2m}c_0\,b^{2m+2}c_0\,b^{2m}c_0 = 0. \qquad (9)$$

Таким образом,

$$[c_0\,b^{2m+1}c_0]\,u^{2m}c_0\,b^{2m+1}c_0 = 0.$$

Далее, тождество [см. (6), (8) и (9)]

$$(m+1)\,\{2c_0\,b^{2m+1}c_0\,bu^{2m}c_0b^{2m}c_0 - (2m+1)\,c_0\,b^{2m}c_0\,b^2u^{2m}c_0\,b^{2m}c_0\} =$$

$$= -c_0\,[c_0\,b^{2m+2}]\,u^{2m}c_0\,b^{2m}c_0 = -c_0u^{2m}\,[c_0\,b^{2m+2}]\,c_0\,b^{2m}c_0 = 0$$

показывает, что элемент

$$[c_0\,b^{2m+1}c_0]\,u^{2m}bc_0b^{2m}c_0 = [c_0\,b^{2m+1}c_0]\,bu^{2m}c_0\,b^{2m}c_0 =$$

$$= 2c_0\,b^{2m+1}c_0bu^{2m}c_0\,b^{2m}c_0 - (2m+1)\,c_0\,b^{2m}c_0b^2u^{2m}c_0\,b^{2m}c_0$$

также равен нулю.

Теорема 1 доказана.

## § 2. Элементы второго порядка в энгелевых кольцах Ли

Будем говорить, что $a \in L$ имеет порядок $k > 1$, если $a^{k-1} \neq 0$, $a^k = 0$. В соответствии с принятой ранее терминологией любой элемент второго порядка может быть взят в качестве элемента $c_{(1)}$.

ТЕОРЕМА 2. *В произвольном кольце Ли L с n-м условием Энгеля и характеристикой $p > n$ (или $p = 0$) существует элемент второго порядка.*

Доказательство. По определению, $u^n = 0$ для всех $u \in L$. Пусть $v^m = 0$, $4 \leqslant m \leqslant n$. Докажем, что $[uv^{m-1}]^{m-1} = 0$.

Действительно,

$$[uv^{m-1}]^{m-1} = \sum \alpha_{i_1\ldots i_m} v^{i_1}uv^{i_2}uv^{i_3}\ldots uv^{i_m}.$$

Если бы какое-то $i_k$, $2 \leqslant k \leqslant m-1$, было равно нулю, то, очевидно, в произведение

$$T = v^{i_1}u\ldots v^{i_k}u\ldots v^{i_m}$$

этой суммы входила бы комбинация вида

$$v^{m-1}uv^{m-1}u^2v^{m-1} \quad \text{или} \quad v^{m-1}u^2v^{m-1}uv^{m-1}.$$

Но

$$[uv^m] = \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \binom{m}{i} v^i u v^{m-i} = 0, \tag{10}$$

так как $v^m = 0$. В частности,

$$v^{m-2}[uv^m] = -mv^{m-1}uv^{m-1} = 0,$$

откуда следует, что $T = 0$.

Далее, с помощью тождества (10) все встречающиеся произведения $vuv^{m-1}$ выражаются через одночлены $v^k u v^{m-k}$, $k \geqslant 2$. Начиная подобные преобразования с индекса $i_m$, затем с $i_{m-1}$ и т. д., мы придем, в конце концов, к единственно возможному элементу

$$[uv^{m-1}]^{m-1} = \alpha v^{m-1}(uv^{m-2})^{m-1}. \tag{11}$$

Рассмотрим тождества:

$$v^{m-3}[uv^m] = \binom{m}{2} v^{m-1}uv^{m-2} - mv^{m-2}uv^{m-1} = 0,$$

$$(-1)^{m-1}[uv^m]v^{m-3} = mv^{m-1}uv^{m-2} - \binom{m}{2} v^{m-2}uv^{m-1} = 0.$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \binom{m}{2} & m \\ m & \binom{m}{2} \end{vmatrix} = \frac{(m-3)\, m^2\, (m+1)}{4} \neq 0,$$

если $m < n$ или $m = n < p - 1$. Поэтому $v^{m-1}uv^{m-2} = 0$, что, в силу равенства (11), приводит к нужному соотношению.

Пусть $m = n = p - 1$. Используя тождество (10):

$$v^{m-2}[uv^{m-3}uv^m] = 0$$

и то обстоятельство, что $p$ нечетно, получаем:

$$v^{m-1}[uv^{m-3}u]v^{m-1} = 2v^{m-1}uv^{m-3}uv^{m-1} = 0.$$

Следовательно,

$$v^{m-1}uv^{m-2}uv^{m-2} = -v^{m-1}uv^{m-3}uv^{m-1} = 0,$$

т. е. и в этом случае

$$[uv^{m-1}]^{m-1} = 0.$$

Начиная с $m = n$ и применяя описанный метод спуска, мы после конечного числа шагов придем к элементу $b$ третьего порядка. Переход от $b$ к $c_{(1)}$ уже не так прост и требует привлечения дополнительных соображений.

Найдем сначала соотношения, вытекающие непосредственно из определения элемента $b: b^2 \neq 0$, $b^3 = 0$.

Прежде всего

$$[ub^3] = 3b^2ub - 3bub^2 = 0,$$

т. е.

$$bub^2 = b^2ub \tag{12}$$

и

$$b^2ub^2 = 0. \tag{13}$$

Заменяя в (13) $u$ на $[bu^3]$, получаем:

$$b^2u^2b^2ub - bub^2u^2b^2 = 0. \tag{14}$$

С помощью тождеств (12) — (14) легко проверить, что

$$[ub^2]^2 = b^2u^2b^2, \tag{15}$$

$$[u\,[bu]\,b^2]^2 = b^2\,[bu^2]^2\,b^2 = b^2u^2b^2u^2b^2. \tag{16}$$

Рассмотрим вспомогательный элемент

$$g_m = g_m(u) = [u\,[bu]^m b^2], \quad m \geqslant 0,$$

и некоторые тождества, связанные с ним. Прежде всего докажем, что

$$(g_m(u))^2 = b^2\,(u^2b^2)^{m+1}. \tag{17}$$

Действительно, для $m = 0,1$ тождество (17) совпадает с (15) и (16). Используем индукцию относительно $m$. Очевидно,

$$[bu]\,b^2 = -b^2\,[bu]$$

[см. (12)], так что

$$g_m = (-1)^m\,[ububub^2\,[bu]^{m-2}] = (-1)^m\,[ub^2u^2b^2\,[bu]^{m-2}]$$

(тождество Якоби!). Но из тождества (14) следует:

$$b^2u^2b^2\,[bu] = -[bu]\,b^2u^2b^2,$$

поэтому

$$g_m = [g_{m-2}u^2b^2] = [u\,[bu]^{m-2}b^2u^2b^2] = [u\,[bu]^{m-2}\,[ub^2]^2]$$

[см. (15)]. Так как $[ub^2]^3 = 0$ [см. (13) и (15)], то, заменяя в (15) $u$ на $[u\,[bu]^{m-2}]$ и $b$ — на $[ub^2]$, получаем:

$$g_m^2 = [ub^2]^2\,[u\,[bu]^{m-2}]^2\,[ub^2]^2 =$$
$$= b^2u^2b^2\,[u\,[bu]^{m-2}]^2b^2u^2b^2 = b^2u^2\,[u\,[bu]^{m-2}b^2]^2u^2b^2 =$$
$$= b^2u^2g_{m-2}^2u^2b^2 = b^2u^2b^2\,(u^2b^2)^{m-1}u^2b^2 = b^2\,(u^2b^2)^{m+1}.$$

Тождество (17) доказано.

Очевидно,

$$g_{n-1}(u) = (-1)^{n-1}\,[ub^2\,[bu]^{n-1}] = (-1)^{n-1}\,[b\,[bu]^n] = 0.$$

Таким образом, из тождества (17) следует, что

$$b^2\,(u^2b^2)^t = 0, \quad 1 \leqslant t \leqslant n, \quad u \in L, \tag{18}$$

для любого элемента $b$ третьего порядка. Если $t = 1$, то нашу задачу решают тождества (15) и (18), так как в этом случае $[ab^2]^2 = 0$. При $t > 1$ имеет место, конечно, равенство $g_m^2 = 0$ $(m \geqslant t-1)$, но может случиться, что также $g_m = 0$, и прямого следствия, нам необходимого, не получается. Оказывается, однако, что существует элемент $b_0$ третьего порядка (очень просто связанный с $b$), для которого тождество (18) выполнено с показателем $s = \left[\frac{t}{2}\right]$:

$$b_0^2\,(u^2b_0^2)^s = 0.$$

Так как у нас элемент $b$ произвольный, то, применяя к $b_0$ те же самые рассуждения, мы придем к элементу третьего порядка с соответствую-

щим показателем $\left[\frac{s}{2}\right]$ в тождестве (18) и т. д., пока, наконец, не получится элемент с $t=1$. Доказательство теоремы тем самым будет завершено.

Итак, пусть для некоторого $f\in L$ $g_m(f)\neq 0$, но $g_{m+1}(f)=0$.

Положим $a=[f[bf]^m]$. Нетрудно проверить, что $[ab^2ab]=0$. В самом деле,

$$[ab^2ab]=[g_m(f)\,ab]=[f[bf]^m b^2 f[bf]^m b]=$$
$$=[f[bf]^m b^2[fb]\ldots]+\sum\pm[f[bf]^m b^2f^2b^2\ldots]=$$
$$=[g_{m+1}\ldots]+\sum[g_{m+2}\ldots]=0.$$

Здесь мы использовали соотношения между $g_m$, $g_{m+1}$ и $g_{m+2}$, одно из которых ($[g_m[fb]]=g_{m+1}$) является простым следствием тождества (12), а второе ($g_m f^2b^2]=g_{m+2}$) получено в ходе доказательства тождества (17).

Таким образом,

$$w=[ab^2ab]=b^2a^2b+ba^2b^2+2abab^2+2b^2aba-4babab=0.$$

Отсюда при помощи равенств (12) — (14) последовательно получаем:

$$wb=b^2a^2b^2-2b^2abab=0,$$
$$wab^2=b^2a^2b^2ab+2bab^2a^2b^2-4bababab^2=b^2a^2b^2ab=0,$$
$$whb^2=b^2a^2b^2hb+2bab^2ahb^2-4b^2ababhb=2bab^2ahb^2-b^2a^2b^2hb=0.$$

Наконец,

$$bawhb^2=b^2a^2b^2hab^2=0. \tag{19}$$

Аналогично,

$$b^2ahb^2a^2b^2=0. \tag{20}$$

Положив $b_0=[ab^2]=g_m(f)\neq 0$, рассмотрим одночлен $H$:

$$H=b_0^2(h^2b_0^2)^s=b^2a^2b^2(h^2b^2a^2b^2)^s,\quad s=\left[\frac{t}{2}\right]$$

(показатель $t$ взят из тождества (18)).

Обозначим

$$u=h+\lambda a,\quad \lambda\neq 0,\quad \delta=2s+1-t.$$

По условию,

$$(b^2a^2)^\delta b^2\{(h+\lambda a)^2b^2\}^t=H_{2\delta}+\lambda H_{2\delta+1}+\cdots+\lambda^{2(s+1-\delta)}H_{2s+2}+\cdots=0.$$

Здесь $H_k$ — однородная составляющая степени $k$ относительно $a$ и степени $4s+2-k$ относительно $h$. Очевидно, $H_{2\delta}=0$ [тождество (18)] и $H_{2s+2}=H$. В самом деле любое расположение $2s$ элементов $h$ в $H_{2s+2}$, отличное от их расположения в $H$, приведет к тому, что обязательно встретится произведение $b^2a^2b^2hab^2$ (или $b^2ahb^2a^2b^2$), равное, в соответствии с (19) [и (20)], нулю. По той же причине все однородные составляющие $H_k$, $k>2s+2$, суть тождественные нули.

Таким образом, имеем соотношение:

$$H_{2\delta+1}+\lambda H_{2\delta+2}+\cdots+\lambda^{2(s-\delta)}H_{2s+1}+\lambda^{2(s-\delta)+1}H=0$$

при любом $\lambda\neq 0$.

Очевидно, всегда выполнено неравенство $2(s-\delta)+1\leqslant p-2$, так как $t\leqslant n\leqslant p-1$. Придавая $\lambda$ значения $1,2,\ldots,2(s+1-\delta)$, мы получим линейную систему с определителем Вандермонда, из которой следует, что $H=0$, или

$$b_0^2(h^2b_0^2)^s = 0, \quad s = \left[\frac{t}{2}\right], \quad h \in L.$$

Теорема 2 доказана.

Таким образом, множество $\mathfrak{T}$ элементов второго порядка в энгелевом ($n < p$) кольце Ли $L$ непусто. Следующий факт, который мы хотим установить (и который нам пригодится в дальнейшем), заключается в утверждении, что кольцо Ли с образующими из $\mathfrak{T}$ локально нильпотентно. То обстоятельство, что это кольцо вложено в $L$, является несущественным и при доказательстве не используется.

ТЕОРЕМА 3. *Энгелево ($n < p$) кольцо Ли $\mathfrak{M} = \{x_0, x_1, \ldots, x_d\}$ с образующими второго порядка ($x_i^2 = 0$, $i = 0, 1, \ldots, d$) нильпотентно.*

Доказательство. Рассуждая по индукции относительно числа образующих, будем считать, что нильпотентность кольца $\mathfrak{M}_0 = \{x_1, \ldots x_d\}$ уже доказана. В качестве базисных коммутаторов кольца $\mathfrak{M}_0$ выберем правонормированные произведения $f_1, f_2, \ldots, f_\rho$, где $\rho$ — некоторое зависящее от $d$ число. Если $a^2 = 0$, $b^2 = 0$, то и $[ab]^2 = 0$. Поэтому выполнены соотношения

$$f_i^2 = 0, \quad i = 1, \ldots, \rho.$$

Предположим, что $\mathfrak{M}$ — регулярное (т. е. ненильпотентное) кольцо Ли и $N(\mathfrak{M}) = 0$. Ход доказательства теоремы подсказывается результатами § 1: нам достаточно найти в $\mathfrak{M}$ элемент $c_{(2)}$, т. е. такой элемент второго порядка, который удовлетворяет еще дополнительному тождеству

$$c_{(2)}u^2c_{(2)} = 0.$$

Это просто сделать, если установить существование в $\mathfrak{M}$ произведений

$$c = [a_0a_1a_2a_3a_4] \neq 0 \quad (a_j \in \mathfrak{M}; \quad a_i^2 = 0, \ i = 1, 2, 3, 4), \tag{21}$$

инвариантных относительно любой перестановки элементов $a_i$, $i > 0$:

$$c = [a_0a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}a_{i_4}].$$

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся некоторыми вспомогательными соотношениями.

Так как $a_i^2 = a_iua_i = 0$, то $[cua_i] = [a_0a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}a_iua_i] = 0$, т. е.

$$ca_i = cua_i + a_iuc = 0.$$

Поэтому

$$cu^2a_ia_ja_k = c[a_iu^2]a_ja_k + 2cua_iua_ja_k = -a_j[a_iu^2]ca_k + 2a_iua_juca_k = 0.$$

Аналогично,

$$a_ia_ja_ku^2c = 0.$$

Точно так же проверяются тождества:

$$cu^2a_ia_jva_ka_l = 0, \quad a_ka_lva_ia_ju^2c = 0 \quad (i, j, k, l > 0).$$

Рассмотрим одночлен $cu^2cv^2c$. Запишем его в виде суммы

$$cu^2cv^2c = \sum \pm cu^2a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}a_{i_4}a_{i_5}v^2c.$$

Легко видеть, что каждое слагаемое содержит произведение одного из рассмотренных выше типов. Поэтому $cu^2cv^2c = 0$. Кроме того,

$$c^2 = c[a_0a_1a_2]a_3a_4 = -a_3[a_0a_1a_2]ca_4 = 0.$$

Отсюда и из леммы 3.2 следует, что в $\mathfrak{M}$ существует элемент $c_{(2)}$. Для того чтобы проведенное здесь доказательство не зависело от результатов § 3, нужно ссылку на лемму 3.2 заменить следующим дополнительным рассуждением. Пусть $cu^2c \neq 0$ (т. е. $c \neq c_{(2)}$); тогда для некоторого $b \in \mathfrak{M}$ $[cb^3c] \neq 0$, причем можно считать, что

$$b = b_1 + b_2 + b_3, \quad b_i^2 = 0.$$

Последнее замечание вытекает из того факта, что любой элемент $u \in \mathfrak{M}$ допускает представление

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_k, \quad u_i^2 = 0.$$

Далее, не составляет большого труда проверить справедливость соотношения

$$[cb^3c]\, u^2\, [cb^3c] = 0.$$

Мы на этом останавливаться не будем. Таким образом, оставляя в силе предположение о регулярности кольца $\mathfrak{M}$, нужно считать одновременно, что в $\mathfrak{M}$ нет элементов вида (21).

Пусть теперь $c_0 \in \mathfrak{M}$ есть произвольный элемент второго порядка, перестановочный со всеми базисными коммутаторами $f_i$ из $\mathfrak{M}_0$:

$$[c_0 f_i] = 0$$

(в качестве $c_0$ можно, например, взять центральный элемент кольца $\mathfrak{M}_0$).

Главный идеал $\mathfrak{N}_0 = \{c_0\} \neq 0$ будет регулярным, так как $N(\mathfrak{M}) = 0$. В частности, $[c_0 x_0] \neq 0$. Множество элементов вида

$$[c_0 x_0 f_{i_1} \ldots f_{i_\alpha}] \neq 0$$

является конечным, так как вместе с $\mathfrak{M}_0$ нильпотентным является и обертывающее кольцо $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}_0}$ [см. теорему 2 работы (2)].

Рассмотрим произведение

$$h = [c_0 x_0 f_{i_1} \ldots f_{i_s}]$$

с максимальным индексом $s$ (их может быть несколько, но мы берем одно). Из этого условия, в частности, следует, что

$$[h x_i] = 0, \quad i > 0.$$

Если $h$ не инвариантно относительно каких-либо перестановок элементов $f_{i_1}, \ldots, f_{i_s}$, то отличными от нуля будут произведения типа

$$[c_0\, x_0\, f_{i_1} \ldots [f_{i_k} f_{i_{k+1}}] \ldots].$$

К этим произведениям применяем аналогичные рассуждения до тех пор, пока не получится элемент

$$c_1 = [c_0\, x_0\, a_1 a_2 \ldots a_m] \neq 0,$$

допускающий любую перестановку $a_i$ между собой (очевидно, $m \leqslant s$). Все $a_\nu$ суть произведения типа $f_i$, $[f_i f_j [f_k f_l]]$, $[f_i f_j f_k]$ и т. д., поэтому

$$a_\nu^2 = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots m.$$

Кроме того, имеет место условие

$$[c_1 x_i] = 0, \quad i = 1, \ldots, d,$$

так как всегда можно вернуться к первоначальной записи, представив $c_1$ в виде суммы

$$c_1 = \sum [c_0 x_0 f_{\alpha_1} \ldots f_{\alpha_s}],$$

где каждое слагаемое получено перестановкой $f_i$ в $h$ и поэтому обладает исходным свойством максимальности индекса $s$. Далее, $[c_1x_0] \neq 0$, в силу регулярности идеала $\mathfrak{N}_1 = \{c_1\}$. Отсюда следует, что $m \geqslant 2$. Отсутствие же в $\mathfrak{M}$ элементов вида (21) приводит к точному равенству $m = 2$, поскольку

$$c_1 = -[x_0\, c_0\, a_1 \ldots a_m] \text{ и } [c_0\, a_i] = 0,$$

в соответствии с выбором $c_0$.

Итак,

$$c_1 = [c_0\, x_0\, a_1 a_2] \neq 0.$$

Из $c_1$ точно таким же образом получим элемент

$$c_2 = [c_0 x_0 a_1 a_2 x_0 b_1 b_2] \neq 0, \quad [c_2 x_i] = 0, \quad i > 0.$$

Разумеется, этот процесс можно продолжить неограниченно. Заменяя каждый из элементов $a_i, b_i, \ldots \in \mathfrak{M}_0$ суммой базисных коммутаторов $f_j$, мы найдем в результате произведение

$$u_\tau = [c_0 x_0 f_{\nu_1} f_{\mu_1} x_0 f_{\nu_2} f_{\mu_2} x_0 \ldots x_0 f_{\nu_\tau} f_{\mu_\tau} x_0] \neq 0$$

с произвольно большим индексом $\tau$. Так как

$$[a x_0 b_1 b_2 x_0] = [a\, [x_0 b_1 b_2]\, x_0],$$

то

$$u_\tau = [c_0 y_1 y_2 \ldots y_\tau x_0],$$

где $y_i = [x_0 f_{\nu_i} f_{\mu_i}]$. Число различных $y_i$, очевидно, не превосходит $\rho(\rho-1)$.

По предположению, кольцо Ли характеристики $p$, удовлетворяющее $(n-1)$-му условию Энгеля, локально нильпотентно. В частности,

$$y_1 y_2 \ldots y_\tau = \sum_j z_j^{k_j} w_j^{n-1},$$

где $z_j$ и $w_j$ — элементы кольца Ли с образующими

$$[x_0 f_\alpha f_\beta], \quad \alpha,\ \beta = 1, 2, \ldots, \rho, \quad \alpha \neq \beta.$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что

$$u^{n-1} v = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n-2} u^i\, [uv]\, u^{n-2-i} + v u^{n-1} =$$

$$= \begin{Bmatrix} u & [uv] \\ n-2 & 1 \end{Bmatrix} + v u^{n-1} = v u^{n-1} + \sum_k u_k^{n-1}$$

[см. тождество (3)]. Образующие $y_i$ обладают тем свойством, что $[y_i x_0] = 0$, поэтому также $[w_j x_0] = 0$.

Следовательно,

$$n y_1 y_2 \ldots y_\tau x_0 = \sum_j z_j^{k_j} \sum_{i=0}^{n-1} w_j^i x_0 w_j^{n-1-i} = \sum_j z_j^{k_j} \begin{Bmatrix} w_j & x_0 \\ n-1 & 1 \end{Bmatrix} = 0,$$

или $u_\tau = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

## § 3. Доказательство существования элемента $c_{(2)}$

В предыдущем параграфе был найден элемент $c_{(1)} = c$ в любом энгелевом $(n < p)$ кольце Ли $L$. Переход от $c_{(1)}$ к $c_{(2)}$, к осуществлению которого мы сейчас приступаем, содержит в себе основную трудность ра-

боты. Идея конструирования элементов методом итераций, высказанная во введении, реализуется здесь далеко не в столь формальном плане, как это было в § 1.

ТЕОРЕМА 4. *В кольце Ли $L$ характеристики $p > 5$, удовлетворяющем $n$-му условию Энгеля, где $n < p$ ($n$ — любое, если $p = 0$), существует элемент $c_{(2)}$.*

Доказательство теоремы 4 распадается естественным образом на ряд самостоятельных предложений, высказанных в виде лемм. В некоторых случаях оказывается полезным применение оператора линеаризации (или некоммутативного дифференцирования) $\mathfrak{D}$. По определению [см., например, ([1])], если $f(x, y, z, \ldots)$ — элемент из $L$ или $\mathfrak{A}_L$ степени $m \leqslant p$ относительно $x$, то

$$f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r, y, z, \ldots) = \sum_{s_1 + \cdots + s_r = m} \alpha_1^{s_1} \ldots \alpha_r^{s_r} \mathop{\mathfrak{D}}_{\substack{s_1 x \to u_1 \\ \cdots\cdots \\ s_r x \to u_r}} f(x, y, z, \ldots).$$

$\mathop{\mathfrak{D}}\limits_{s_i x \to u_i} f(x, y, z, \ldots) = 0$, если $f(x, y, z, \ldots) = 0$, тождественно относительно $x$. Заимствуем из § 1 способ обозначений симметричных элементов:

$$\bar{S} = a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1,$$

если

$$S = a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k, \quad a_i \in L.$$

Допустим, что $cu^2c = 0$ для всех $u \in L$. Тогда $c = c_{(2)}$ и доказывать нечего. Мы увидим, что элемент $c_{(2)}$ существует и в том случае, если выполнено более слабое соотношение:

$$cu_1^2 cu_2^2 c \ldots cu_m^2 c = 0,$$

где $m$ — некоторое конечное число, а $u_i$ — произвольные элементы из $L$. Этому вопросу посвящены первые две леммы.

ЛЕММА 3.1. *Пусть $c_0^2 = c^2 = cc_0 = c_0 c = 0$. Тогда $c_1^2 = 0$, где $c_1 = [c_0 a^2 c]$, $a \in L$. Если, кроме того, $[c_0 u^2 c v^2 c] = 0$ при любых $u$, $v \in L$, то*

$$T = c_1 u^2 c_1 v^2 c_1 = 0.$$

Доказательство. Мы имеем:

$$cuc_0 + c_0 uc = 0, \tag{22}$$

так как $[ucc_0] = 0$. Поэтому

$$cac_0 [c_0 a^3] c + (cac) [c_0 a^3] c_0 = 0,$$

т. е.

$$cac_0 [c_0 a^3] c = 3cac_0 a^2 c_0 ac = 0.$$

Отсюда сразу вытекает нужное нам тождество:

$$c_1^2 = [c_0 a^2 c]^2 = -c [c_0 a^2]^2 c = -4cac_0 a^2 c_0 ac = 0.$$

Пусть теперь $[c_0 u^2 cv^2 c] = 0$. Тогда $[wc_0 ucv^2 c] = 0$ и $[w [c_0 v^2 c] uc] = 0$, т. е.

$$c_0 ucv^2 c = 0 \tag{23}$$

и, соответственно,

$$cv^2 cuc_0 = 0. \tag{24}$$

Воспользуемся тождеством:

$$[c_1u^2c] = c_1u^2c - cu^2c_1 = 0. \qquad (25)$$

Очевидно,

$$T = c_1u^2[c_0a^2]cv^2c_1 - c_1u^2c[c_0a^2]v^2c_1.$$

Оба слагаемых в правой части равны нулю. Докажем это, например, для первого из них.

Принимая во внимание тождества (22) — (25), получаем:

$$S = c_1u^2[c_0a^2]cv^2c_1 = c_1u^2[c_0a^2]c_1v^2c = S_1 + 2S_2 - S_3 + 2S_4,$$

где

$$S_1 = c_1u^2c_0a^2c_0a^2cv^2c, \quad S_2 = c_1u^2c_0a^2cac_0av^2c,$$
$$S_3 = c_1u^2c_0a^2ca^2c_0v^2c, \quad S_4 = c_1u^2ac_0aca^2c_0v^2c.$$

Обозначим

$$S'_1 = cu^2c_1[c_0a^4]c_0v^2c, \quad S'_2 = cu^2c_1ac_0a^2c_0av^2c, \quad S'_3 = cu^2c_1ac_0a^3c_0v^2c.$$

Заменяя в тождестве (22) $u$ на $[c_0a^4]$, находим:

$$c[c_0a^4]c_0 - 4c_0a^3c_0ac + 6c_0a^2c_0a^2c = 0,$$

что вместе с (23) и (25) приводит к соотношению

$$6S_1 = -S'_1.$$

Далее, $S_2 = -S'_2$ и $S_4 = c_1u^2ac_0a^2cac_0v^2c = 0$ [см. (23)], так как

$$c_0[ca^3]c_0 = 3c_0a^2cac_0 - 3c_0aca^2c_0 = 0.$$

Аналогично, используя (22), (23), (25) и тождество

$$c_0[ca^4]c_0 = 6c_0a^2ca^2c_0 + 4cac_0a^3c_0 + 4c_0a^3c_0ac = 0,$$

получим:

$$3S_3 = -2S'_3.$$

Легко проверить, что $S'_1 = S'_2 = S'_3 = 0$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Пусть*

$$cu_1^2cu_2^2c\ldots cu_m^2c = 0 \qquad (26)$$

*при любых* $u_i \in L$ *и некотором конечном* $m \geqslant 2$. *Тогда в* $L$ *существует элемент* $c_{(2)}$.

Доказательство. Если индекс $m$ в тождестве (26) является минимальным и

$$c_1 = [ca_1^3ca_2^2c\ldots ca_{m-1}^2c] \neq 0$$

при некоторых элементах $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ из $L$, то

$$c_1^2 = c_1u^2c_1v^2c_1 = 0.$$

Первое из этих соотношений легко доказывается индукцией по $m$. Для $m = 2$, когда $c_1 = [ca_1^3c]$, оно уже было проверено ранее (см. введение). Пусть установлено, что $c_0^2 = 0$, где

$$c_0 = [ca_1^3ca_2^2c\ldots ca_{m-2}^2c].$$

Тогда мы будем находиться в условиях леммы 3.1:

$$c_1 = [c_0a_{m-1}^2c]$$

и, очевидно,

$$c_0c = cc_0 = 0.$$

Поэтому

$$c_1^2 = 0.$$

При $m > 2$ из этой же леммы следует и второе соотношение, потому что

$$[c_0 u^2 c v^2 c] = 0$$

[тождество (26)]. Случай $m = 2$, к которому вышеизложенное рассуждение позволяет всегда свести дело, рассмотрим особо.

Итак, пусть

$$c \neq 0, \quad c^2 = cu^2cv^2c = 0, \quad u,\ v \in L.$$

В соответствии с определением элемента $c$,

$$c\,[cx^5]\,c = 0$$

и

$$cu^2cx^\delta\,[cx^5]\,x^{1-\delta}c = 0, \quad \delta = 0,1;$$

следовательно, имеют место тождества:

$$cx^2cx^3c - cx^3cx^2c \quad = 0,$$
$$cu^2cx^3cx^3c = cu^2cx^4cx^2c = 0$$
$$(cx^3cx^3cu^3c = cx^2cx^4cu^2c = 0),$$

которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

I. Обозначим

$$A_1 = ca^2cuvaca^2c, \quad A_2 = caucva^2ca^2c,$$
$$B_1 = cau^2ca^3ca^2c, \quad B_2 = ca^2uca^2uca^2c, \quad B_3 = cauca^3uca^2c.$$
$$B_4 = ca^3cau^2ca^2c, \quad B_5 = ca^2ca^2u^2ca^2c, \quad B_6 = ca^3cu^2ca^3c.$$

Из тождеств

$$c\,[ca^3u]\,vca^2c = 3A_1 + 3A_2 = 0, \quad caucv\,[ca^4]\,c = 6A_2 = 0$$

следует, что $A_1 = A_2 = 0$. Поэтому $a$ и $u$ в одночленах $B_i$ и $\bar{B}_i$ можно считать коммутирующими между собой. Например,

$$B_3 = cauca^2uaca^2c = caucua^3ca^2c$$

и т. д.

Найдем соотношения между $B_i$, используя свойства элемента $c$:

$$\underset{\substack{2x\to u\\ 4x\to a}}{\mathfrak{D}}\ cx^3cx^3ca^2c = 3B_1 + 9B_2 + 3B_4 = 0,$$
$$\underset{\substack{2x\to u\\ 4x\to a}}{\mathfrak{D}}\ cx^2cx^4ca^2c = 8B_3 + 6B_5 = 0,$$
$$cu\,[ca^4u]\,ca^2c = 4B_1 + 6B_2 - 4B_3 = 0,$$
$$[ca^3cu^2c]\,a^3c = 3B_1 - 3\bar{B}_4 + 2B_6 = 0.$$

Очевидно, к этим четырем соотношениям вида

$$\sum \alpha_i B_i + \sum \beta_i \bar{B}_i = 0$$

можно добавить еще четыре, симметричных к ним:

$$\sum \alpha_i \bar{B}_i + \sum \beta_i B_i = 0.$$

В результате получаем:

$$\left.\begin{aligned} 2B_3 = 2B_1 + 3B_2, \quad B_4 = -B_1 - 3B_2,\\ 3B_5 = -4B_1 - 6B_2, \quad 2B_6 = -6B_1 - 9B_2,\\ \bar{B}_i = B_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \quad [ca^3c]\,u^2\,[ca^3c] = -12B_1.\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

II. Если $c^2 = cu^2cv^2c = 0$, то элемент $c_1 = [ca^3c]$ удовлетворяет тождествам

$$c_1^2 = c_1u^2c_1v^2c_1 = c_1u^2c_1v^3c_1w^2c_1 = 0.$$

Действительно,

$$c_1u^2c_1v^2c_1 = -12B_1v^2c_1 = -12c\ldots ca^3ca^2cv^2[ca^3c] = 36\cdot c\ldots ca^3A_1 = 0.$$

Далее,

$$c_1u^2c_1v^3c_1w^2c_1 = \alpha B_1(u)v^3\overline{B_1(w)} = \alpha c\ldots c\ldots ca^2cv^3ca^2c\ldots c\ldots c = 0,$$

так как

$$[cv^3ca^2c] = [cv^3c]a^2c - ca^2[cv^3c] = 0$$

и, следовательно,

$$4ca^2cv^3ca^2c = 2ca^2[cv^3c]a^2c = 2ca^2ca^2[cv^3c] =$$
$$= -6ca^2ca^2vcv^2c = -c[ca^4]vcv^2c = 0.$$

III. Пусть

$$c^2 = cu^2cv^2c = cu^2cv^3cw^2c = 0, \quad c_1 = [ca^3c].$$

Тогда

$$c_1u^2c_1v^3c_1 = 0$$

($a, u, v, w$ — любые элементы из $L$). В самом деле, рассмотрим одночлены:

$$F_1 = ca^2ca^3cv^3ca^3c, \qquad F_2 = ca^2ca^3cv^3aca^2c,$$
$$F_3 = ca^2ca^3cv^2acva^2c, \qquad F_4 = ca^2ca^3cv^2a^2cvac,$$
$$F_5 = ca^2ca^3cva^2cv^2ac, \qquad F_6 = ca^2ca^3cva^3cv^2c.$$

Очевидно, $v$ и $a$ в $F_i$ коммутируют между собой, так как

$$ca^2ca^3c = ca^3ca^2c,$$

а

$$ca^2cu^3cv^2c = 0.$$

По той же причине элементы вида $ca^2ca^4cu^3cv^2c$ будут равны нулю ($ca^\delta[ca^5]a^{1-\delta}cu^3cv^2c = 0,\ \delta = 0,1$).

Используя это замечание, из тождеств

$$ca^2ca^3c[cv^3a^2]ac = -F_1 + 2F_2 - 6F_3 + 3F_4 - 3F_5 = 0,$$
$$\underset{\substack{3x\to v\\3x\to a}}{\mathfrak{D}}\ ca^2ca^3cx^3cx^3c = F_1 + 9F_3 + 9F_5 = 0,$$
$$\underset{\substack{3x\to v\\3x\to a}}{\mathfrak{D}}\ ca^2ca^3cx^4cx^2c = 4F_2 + 12F_4 + 4F_6 = 0,$$
$$ca^2c[ca^5]v^2cvac = -10F_4 = 0,$$
$$ca^2c[ca^5]vcv^2ac = -10F_5 = 0,$$
$$ca^2c[ca^5]avcv^2c = -10F_6 = 0$$

находим, что $F_1 = F_2 = 0$. Следовательно,

$$c_1u^2c_1v^3c_1 = -12B_1v^3c_1 = -12(2cu^2aF_1 - 3cu^2aF_2) = 0.$$

Исходя из всего предшествующего, можно легко получить элемент $c_{(2)}$. Действительно, в самом начале доказательства леммы был указан метод построения элемента, для которого тождество (26) выполнялось бы при $m = 2$ (обозначим его снова через $c$):

$$c^2 = cu^2cv^2c = 0.$$

При помощи пп. I—III можно установить, что

$$c_0^2 = c_0 u^\alpha c_0 v^\beta c_0 = 0, \quad \alpha + \beta \leqslant 5,$$

где $c_0 = [[ca^3c]b^3[ca^3c]]$, $a$, $b$, $u$, $v$ — любые элементы из $L$. Применяя к $c_0$ соотношения (27), находим, что

$$[c_0 g^3 c_0]\, u^2\, [c_0 g^3 c_0] = 0,$$

так как $B_1 = 0$.

Лемма доказана.

В дальнейшем найдут широкое применение различные частные результаты, не стоящие, однако, в непосредственной связи с основными пунктами конструкции элемента $c_{(2)}$. Все они, объединенные сходством доказательств, содержатся в нижеследующем предложении.

ЛЕММА 3. 3. *Пусть* $c_0 = [hc_1] \neq 0$, *где* $c_1^2 = 0$, *а для* $h$ *выполнено одно из следующих условий:*

1) $h^2 = 0$,

2) $h = [c_1 a^3]$,

3) $h = [ac_2]$, $c_2^2 = [c_1 c_2] = 0$, $a \in L$.

*Если* $[c_0 u^2 c_1 u v c_1] = 0$ *для всех* $a$, $u$, $v$ *из* $L$, *то элемент* $c_{(2)}$ *в* $L$ *существует.*

Доказательство. Как легко видеть, во всех трех случаях (различающихся формой элемента $h$) имеют место соотношения:

$$c_0^2 = c_0 c_1 = c_1 c_0 = c_0 u c_1 + c_1 u c_0 = 0.$$

Предположим сначала, что $[c_0 u^2 c_1] = 0$ (усилив тем самым условие леммы). В качестве следствия получаются тождества

$$c_0 u c_1 = c_1 u c_0 = c_0 u^2 c_1 - c_1 u^2 c_0 = 0.$$

1′) $h^2 = 0$. Так как $hc_0 = c_0 h = 0$, то

$$c_0 u^2 c_0 v^2 c_0 = c_0 u^2 h c_1 v^2 c_0 - c_0 u^2 c_1 h v^2 c_0 = c_0 u^2 (hc_0) v^2 c_1 - c_1 u^2 (c_0 h) v^2 c_0 = 0$$

и, следовательно, применима лемма 3.2.

2′) $h = [c_1 a^3]$. Здесь никакого нового высказывания не содержится, потому что тождества $[c_0 u^2 c_1] = 0$ и $c_1 u^2 c_1 v^2 c_1 = 0$ эквивалентны, в силу произвольности элемента $a$.

3′) $h = [ac_2]$. Из условия $[hc_1 u^2 c_1] = 0$ получаем тождество $c_1 c_2 u^2 c_1 = 0$, а так как $c_0 u c_1 = 0$, то $c_1 v c_2 u c_1 = 0$. В частности, $c_1 u c_2 u c_1 = 0$, поэтому

$$c_1 u^2 c_1 c_2 = c_1 [c_2 u^2] c_1 = 0.$$

Используя соотношения

$$c_0 u^2 c_1 c_2 = c_1 u^2 (c_0 c_2) = 0,$$

$$2c_0 u^2 c_1 a c_2 = 2c_1 u^2 c_0 a c_2 = -2c_1 u^2 c_2 a c_1 a c_2 = -c_1 u^2 c_2 a^2 c_1 c_2,$$

находим:

$$2c_0 u^2 c_0 = 2(c_0 u^2 a c_1 c_2 - c_0 u^2 c_2 a c_1 + c_0 u^2 c_1 c_2 a -$$
$$- c_0 u^2 c_1 a c_2) = 2c_0 u^2 a c_1 c_2 + c_1 u^2 c_2 a^2 c_1 c_2 - 2c_0 u^2 c_2 a c_1.$$

Таким образом,

$$2c_0 u^2 c_0 v^2 c_0 = 2c_0 u^2 a c_1 c_2 v^2 c_0 + c_1 u^2 c_2 a^2 c_1 c_2 v^2 c_0 -$$

$$- 2c_0u^2c_2ac_1v^2c_0 = 2c_0u^2a(c_2c_0)v^2c_1 +$$
$$+ c_1u^2c_2a^2(c_2c_0)v^2c_1 - 2c_0u^2c_2ac_0v^2c_1 = 2c_0u^2c_2ac_1ac_2v^2c_1 = 0.$$

Существование $c_{(2)}$ вытекает из леммы 3.2.

Пусть теперь $c = [c_0b^2c_1] \neq 0$, но $[c_0u^2c_1uvc_1] = 0$. Согласно первому утверждению леммы 3.1, $c^2 = 0$. Чтобы можно было воспользоваться второй частью леммы 3.1, а затем — леммой 3.2, достаточно доказать тождество

$$[c_0u_1^2c_1u_2^2c_1 \ldots c_1u_m^2c_1] = 0$$

для некоторого $m \geqslant 2$. Очевидно,

$$[c_0u^2c_1v^2c_1] = [c_0v^2c_1u^2c_1],$$

так как

$$\underset{u \to v}{\mathfrak{D}}[c_0u^2c_1uvc_1] = [hc_1u^2c_1v^2c_1] + 2[hc_1uvc_1uvc_1] = 0,$$
$$c_1[c_1u^2v^2]c_1 = c_1u^2c_1v^2c_1 + c_1v^2c_1u^2c_1 + 4c_1uvc_1uvc_1 = 0.$$

Пусть уже известно, что элемент

$$e = [hc_1u_1^2c_1 \ldots c_1u_m^2c_1]$$

симметричен относительно $u_1, u_2, \ldots, u_m$ при некотором $m \geqslant 2$, т. е.

$$e = [hc_1u_{\alpha_1}^2c_1 \ldots c_1u_{\alpha_m}^2c_1].$$

Докажем это и для $m+1$.

Обозначив для удобства

$$f = [hc_1u_1^2c_1 \ldots c_1u_{m-2}^2], \quad u_{m-1} = x, \quad u_m = y, \quad u_{m+1} = z$$

и используя равенства

$$c_1y^2c_1z^2c_1 = c_1z^2c_1y^2c_1 + 2c_1[c_1y^2z]zc_1, \quad [fc_1x^2c_1y^2c_1] = [fc_1y^2c_1x^2c_1],$$

последовательно получим:

$$[fc_1x^2c_1y^2c_1z^2c_1] - [fc_1x^2c_1z^2c_1y^2c_1] =$$
$$= 2[fc_1x^2c_1[c_1y^2z]zc_1] = 2[fc_1[c_1y^2z]zc_1x^2c_1] =$$
$$= [fc_1y^2c_1z^2c_1x^2c_1] - [fc_1z^2c_1y^2c_1x^2c_1] = 0.$$

Но это и означает, что все одночлены $u_i^2$ в элементе

$$[hc_1u_1^2c_1 \ldots c_1u_m^2c_1]$$

при любом конечном $m$ перестановочны.

Далее,

$$[hc_1u_1^2c_1 \ldots c_1u_m^2c_1] = [h[c_1u_1^2][c_1u_2^2] \ldots [c_1u_m^2]c_1],$$

а так как

$$6c_1u^2c_1u^2c_1 = c_1[c_1u^4]c_1 = 0,$$

то

$$n![hc_1u_1^2c_1u_2^2c_1 \ldots c_1u_n^2c_1] = \sum_{i_1,\ldots,i_n}[hc_1u_{i_1}^2c_1u_{i_2}^2c_1 \ldots c_1u_{i_n}^2c_1] =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n}[h[c_1u_{i_1}^2][c_1u_{i_2}^2] \ldots [c_1u_{i_n}^2]c_1] = [h([c_1u_1^2[+[c_1u_2^2] + \ldots + [c_1u_n^2])^nc_1] = 0.$$

Следовательно, существует $m \leqslant n$ такое, что

$$[hc_1u_1^2c_1u_2^2c_1 \ldots c_1u_m^2c_1] = 0.$$

Лемма доказана.

Согласно теореме 3, $c_{i_1}c_{i_2} \ldots c_{i_\rho} = 0$ ($\rho$ — некоторое число), если $c_i$ взяты из произвольного конечного множества элементов второго порядка в $L$.

Не менее важной для нас стороной связи между всеми элементами кольца $L$ и содержащимися в нем элементами второго порядка является следующий факт.

ЛЕММА 3.4. *Если $c = c_{(1)}$ и при любых $u$, $v$ из $L$ выполнено соотношение*

$$[cu^3c] \cdot [cv^3c] = 0, \tag{28}$$

*то элемент $c_{(2)}$ в $L$ существует.*

Доказательство. В самом деле, если $c \neq c_{(2)}$, то $c_0 = [hc] \neq 0$, где $h = [ca^3]$, $a$ — некоторый элемент из $L$. Но, по условию,

$$[v\,[ca^3c]\,[cu^3c]] = 0$$

для всех $a, u, v \in L$. Следовательно,

$$[c_0u^2cuvc] = 0.$$

Используя предыдущую лемму, получаем нужное утверждение.

Далее все рассуждение ведется от противного. Допустим, что в $L$ нет элемента $c_{(2)}$. Тогда, очевидно, тождество (28) неверно и имеет место альтернативное утверждение, суть которого сводится к тому, что в кольце Ли $L$ существуют два элемента $c_1$, $c_2$, удовлетворяющих условиям:

$$c_1c_2 \neq 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = [c_1c_2] = 0. \tag{29}$$

То обстоятельство, что $c_1$ и $c_2$ можно взять в форме $[ca_1^3c]$ соответственно $[ca_2^3c]$, является пока несущественным, но в конце доказательства мы им еще воспользуемся. Поставим задачей улучшить свойства элементов $c_1$ и $c_2$ в такой мере, чтобы к условиям (29) добавились тождества

$$c_iu^\alpha c_1c_2 = 0, \quad i = 1,2, \quad \alpha = 2, 3, 4, \ldots, n-1.$$

Нижеследующая лемма делает в этом направлении первый и, как станет ясно, самый важный шаг.

ЛЕММА 3.5. *Если в энгелевом $(n < p)$ кольце Ли $L$ отсутствует элемент $c_{(2)}$, то в этом кольце можно найти пару элементов $c_1$, $c_2$, удовлетворяющих условиям:*

$$c_1c_2 \neq 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = [c_1c_2] = c_1u^2c_1c_2 = c_2u^2c_1c_2 = 0. \tag{30}$$

Доказательство. I. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m \geqslant 3)$ — любая конечная последовательность элементов второго порядка, возможно, с повторениями. Если элемент $c = [c_1c_2 \ldots c_m]$ таков, что $[cc_i] = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $cc_k = cc_l = 0$, где $k$ и $l$ — два фиксированных индекса $(k \neq l)$, меньших, чем $m$, то $c = 0$.

В самом деле, элемент $c_0 = [c_1c_2 \ldots c_{m-1}]$ записывается в виде суммы произведений $A = c_{i_1} \ldots c_{i_s}c_k\,c_{j_1} \ldots c_{j_t}c_l \ldots$ и $B = \ldots c_l \ldots c_k \ldots$

Очевидно,

$$cc_0 = c_0c = 0.$$

Далее, так как

$$cc_{j_1}\dots c_{j_t}c_l = c_{j_1}\dots c_{j_t}cc_l = 0$$

и

$$cuc_k + c_kuc = 0,$$

то

$$c[uc_{i_1}\dots c_{i_s}]c_kc_{j_1}\dots c_{j_t}c_l = 0,$$

или

$$cuc_{i_1}\dots c_{i_s}c_kc_{j_1}\dots c_{j_t}c_l + \sum\dots cuc_{\nu_1}\dots c_{\nu_r}c_kc_{j_1}\dots c_{j_t}c_l = 0,$$

где $r < s$. Замечая, что $cuc_kc_{j_1}\dots c_{j_t}c_l = 0$, индукцией по $s$ получаем тождество

$$cuc_{i_1}\dots c_{i_s}c_kc_{j_1}\dots c_{j_t}c_l = 0.$$

В силу равноправия индексов $k$ и $l$, можно утверждать, что $cuA = 0$ и $cuB = 0$. Следовательно, $cuc_0 = c_0uc = 0$, т. е.

$$[c_mc_0u^2c_0] = -[cu^2c_0] = 0.$$

Лемма 3.3, в формулировке которой следует положить $h = c_m$, обеспечивает существование элемента $c_{(2)}$, если $[c_mc_0] \neq 0$. Принимая во внимание условие доказываемой леммы, остается принять единственно возможный вариант $c = 0$.

II. Если $cc_0 = 0$, где $c = [c_0c_1c_2]$ и $c_1^2 = c_2^2 = [c_1c_2] = 0$, то $c = 0$.

Действительно, $[cuc_1] = [c_0c_2c_1uc_1] = 0$, т. е. $cc_1 = 0$, поэтому непосредственно применимо утверждение п. I.

III. Пусть $c_0, c_1, c_2$ — произвольные элементы второго порядка. Если $c_0$ и $c = [c_0c_1c_2]$ удовлетворяют условиям (29) (т. е. $c_0c \neq 0$), но не удовлетворяют условиям (30), то $[c_0c_1c_2[c_0a^3c_0]] \neq 0$ для некоторого $a \in L$.

В самом деле, предположив обратное, получаем тождество

$$[c_0vu^2c_0[c_0c_1c_2]] = 0,$$

или

$$c_0u^2c_0c_1c_2c_0 = 0.$$

Но в таком случае, очевидно,

$$c_0c_iu^2c_0c_1c_2c_0 = c_0u^2c_ic_0c_1c_2c_0 = 0, \quad i = 1,2.$$

Кроме того, из соотношений:

$$c_0c_1c_2u^2c_0c_1c_2c_0 - c_0c_1uc_2uc_0c_1c_2c_0 = c_0c_1[c_2u]uc_0c_1c_2c_0 = c_0[c_2u]uc_1c_0c_1c_2c_0 = 0,$$

$$c_0c_1uc_2uc_0c_1c_2c_0 = c_0c_1u^2c_2c_0c_1c_2c_0 + c_0c_1u[c_2u]c_0c_1c_2c_0 = c_0u[c_2u]c_1c_0c_1c_2c_0 = 0$$

вытекает, что

$$c_0c_1c_2u^2c_0c_1c_2c_0 = 0.$$

Следовательно,

$$[c_0c_1c_2]u^2c_0c_1c_2c_0 = 0,$$

а это есть противоречие, так как одновременное выполнение тождеств $c_0u^2c_0c = 0$ и $cu^2c_0c = 0$ по условию исключено.

IV. Если утверждение леммы неверно, то всегда можно найти три элемента второго порядка $c_0, c_1, c_2$ таких, что

$$[c_0c_1c_2] \neq 0, \quad [c_1c_2] = 0.$$

Будем исходить из пары $c_1, c_2$ с условиями (29). Рассмотрим отдельно два случая.

а) В $L$ нет элементов с условиями (29), для которых выполнялось бы также хотя бы одно из дополнительных тождеств (30).

В частности, $[c_2a^3c_2c_1] \neq 0$, а отсюда, согласно лемме 3.3 (роль $h$ играет $[c_2a^3c_2]$), вытекает, что

$$[c_2a^3c_2c_1f\,[c_1b^3c_1]] = -3\,[c_2a^3c_2c_1fbc_1b^2c_1] \neq 0$$

для некоторых $a, b, f \in L$.

Следовательно,

$$c_1\,[c_2a^3c_2\,[c_1b^3c_1]] \neq 0.$$

По условию, это означает, что также

$$[c_1u^2c_1\,[c_2\,a^3c_2]\,[c_1b^3c_1]] \neq 0,$$

т. е.

$$[c_2a^3c_2\,[c_1b^3c_1]\,[c_1g^3c_1]] \neq 0.$$

б) Пусть

$$[c_1c_2] = c_1^2 = c_2^2 = c_1u^2c_1c_2 = 0, \quad [c_2\,a^3\,c_2\,c_1] \neq 0.$$

Как и в предшествующем случае,

$$c_1\,[c_2a^3c_2\,[c_1b^3c_1]] = c_1\,[c_2a^3c_2]\,[c_1b^3c_1] = 3c_1c_2\,[c_2a^3]\,bc_1b^2c_1 \neq 0.$$

Но

$$c_1u^2c_1\,[c_2a^3c_2\,[c_1b^3c_1]] = 3\,(c_1u^2c_1c_2)\,[c_2a^3]\,bc_1b^2c_1 = 0.$$

Поэтому

$$[c_1b^3c_1]\,u^2c_1\,[c_2a^3c_2\,[c_1b^3c_1]] \neq 0,$$

так как иначе было бы также

$$[[c_2a^3c_2]\,[c_1b^3c_1]]\,u^2c_1\,[c_2a^3c_2\,[c_1b^3c_1]] = [c_1b^3c_1]\,u^2\,[c_2a^3c_2]\,c_1\,[c_2a^3c_2\,[c_1b^3c_1]] = 0,$$

что противоречит принятому допущению.

В результате получаем:

$$[c_2a^3c_2c_1\,[c_1b^3c_1g^3\,[c_1b^3c_1]]] \neq 0.$$

После соответствующих изменений в обозначениях приходим к сформулированному в п. IV утверждению.

V. Если лемма неверна, то найдутся элементы $c_0, c_1, c_2, c_3$, удовлетворяющие соотношениям

$$c_0^2 = c_1^2 = c_2^2 = c_3^2 = [c_1c_2] = [c_1c_3] = 0 \tag{31}$$

и такие, что $[c_0c_1c_2c_3c_0] \neq 0$.

Допустим, что это не так, т. е. что $[c_0c_1c_2c_3c_0] = 0$, если выполнены соотношения (31).

Возьмем элемент $[c_0c_1c_2] \neq 0$ ($[c_1c_2] = 0$), существование которого доказано в п. IV. Из пп. II и III следует, что для некоторого $a_1 \in L$

$$[c_0\,c_1c_2\,[c_0\,a_1^3c_0]] \neq 0.$$

В дальнейшем будем обозначать $c = \underline{c}_i$, если $cc_i = [cc_i] = 0$, и $c = c_{1,2}$, если $[cc_1] = [cc_2] = 0$. Когда возникнет необходимость рассматривать не-

сколько элементов типа $\underline{c}_i$, снабдим их дополнительными значками $\underline{c}'_i$, $\underline{c}''_i$, $c^0_{1,2}$ и т. д.

Итак, имеем

$$e_1 = [c_0 c_1 c_2 \underline{c}_0] \neq 0, \quad [c_1 c_2] = 0.$$

Очевидно, $e_1 c_0 = 0$, поэтому, согласно п. I, $e_1 c_1 \neq 0$. Так как

$$e_1 = -[c_1 c_0 [c_2 \underline{c}_0]],$$

то из п. III следует, что

$$[e_1 [c_1 a_2^3 c_1]] \neq 0.$$

Таким образом,

$$e_2 = [c_0 c_1 c_2 \underline{c}_0 \underline{c}_1] \neq 0.$$

Исходя из соотношения $e_2 c_1 = 0$, можно считать, что $e_2 c_2 \neq 0$, ибо иначе действует утверждение п. I. Поскольку

$$e_2 = -[c_2 [c_0 c_1] [\underline{c}_0 \underline{c}_1]],$$

то, снова применяя утверждение п. III, приходим к неравенству

$$[e_2 [c_2 a_3^3 c_2]] \neq 0,$$

или

$$e_3 = [c_0 c_1 c_2 \underline{c}_0 \underline{c}_1 \underline{c}_2] \neq 0.$$

Заметим, что $e_3$ допускает также следующую запись:

$$e_3 = [c_0 c_1 c_2 [\underline{c}_0 \underline{c}_1 \underline{c}_2]] = -[\underline{c}_0 c_1 c_2 [c_0 \underline{c}_1 \underline{c}_2]],$$

причем

$$[c_2 \underline{c}_1] = [c_2 [\underline{c}_0 \underline{c}_1 \underline{c}_2]] = [c_2 [c_0 \underline{c}_1 \underline{c}_2]] = 0.$$

Поэтому, в соответствии с предположением, должно быть

$$[e_3 c_0] = [e_3 \underline{c}_0] = 0.$$

Если

$$[c_0 c_1 c_2 \underline{c}_0 [\underline{c}_1 \underline{c}_2]] = 0,$$

то

$$e_3 c_1 = e_3 c_2 = 0,$$

и мы снова получили бы противоречие с утверждением п. I. Следовательно,

$$e_4 = [c_0 c_1 c_2 \underline{c}_0 c_{1,2}] \neq 0,$$

где $c_{1,2} = [\underline{c}_1 \underline{c}_2]$. Очевидно, $c_1 c_2 c_{1,2} = 0$, так что $e_4 = [c_0 c_1 c_2 [\underline{c}_0 c_{1,2}]]$ и $e_4 c_i \neq 0$, где $i = 1$ или 2. Пусть, например, $e_4 c_1 \neq 0$. Поскольку

$$e_4 = -[c_1 [c_0 c_2] [\underline{c}_0 c_{1,2}]],$$

то

$$[e_4 [c_1 a_4^3 c_1]] \neq 0$$

(см. п. III). Таким образом,

$$e_5 = [c_0 c_1 c_2 \underline{c}_0 c_{1,2} \underline{c}'_1] \neq 0.$$

Но одновременно

$$e_5 = [c_0 c_1 c_2 [\underline{c}_0 c_{1,2} \underline{c}'_1]] = -[\underline{c}_0 c_1 c_2 [c_0 c_{1,2} \underline{c}'_1]],$$

поэтому

$$[e_5 c_0] = [e_5 \underline{c}_0] = 0.$$

Так как $e_5 c_1 = 0$, то

$$[c_0 c_1 c_2 \underline{c}_0 [c_{1,2} \underline{c}'_1]] \neq 0,$$

ибо иначе добавится соотношение $e_5 c_{1,2} = 0$, что невозможно (см. п. I).

Итак,

$$e_6 = [c_0c_1c_2\underline{c}_0c'_{1,2}] \neq 0,$$

где $c'_{1,2} = [c_{1,2}\underline{c}'_1]$. Очевидно,

$$[c'_{1,2}c_1] = c'_{1,2}c_1 = 0$$

и

$$[\underline{c}'_{1,2}c_2] = -[\underline{c}'_1c_2c_{1,2}] = -[c_1a_4^3c_1c_2c_{1,2}] = 0,$$

поскольку $c_1c_2c_{1,2} = 0$. Так как

$$e_6 = -[c_0c_2c'_{1,2}\underline{c}_0c_1],$$

то $e_6c_1 = 0$. Поэтому $e_6c_2 \neq 0$. Но

$$e_6 = -[c_2[c_0c_1][\underline{c}_0c'_{1,2}]],$$

и снова получается, что

$$[e_6[c_2a_5^3c_2]] \neq 0$$

или

$$e_7 = [c_0c_1c_2\underline{c}_0c'_{1,2}\underline{c}'_2] \neq 0.$$

Как легко видеть,

$$[c_2c_1] = [c_2[\underline{c}_0c'_{1,2}\underline{c}'_2]] = [c_2[c_0c'_{1,2}\underline{c}'_2]] = 0$$

и

$$e_7 = [c_0c_1c_2[\underline{c}_0c'_{1,2}\underline{c}'_2]] = -[\underline{c}_0c_1c_2[c_0c'_{1,2}\underline{c}'_2]],$$

следовательно,

$$[e_7c_0] = [e_7\underline{c}_0] = 0.$$

Далее, $e_7c_1 \neq 0$, поскольку $e_7c_2 = 0$ (см. п. I). Отсюда заключаем, что

$$e_8 = [c_0c_1c_2\underline{c}_0c'_{1,2}\underline{c}'_2\underline{c}''_1] = [e_7\underline{c}''_1] \neq 0,$$

где $\underline{c}''_1 = [c_1a_6^3c_1]$.

Элемент $e_8$ запишем в виде

$$e_8 = [c_0c_1c_2\underline{c}_0c'_{1,2}c^0_{1,2}],$$

$$c^0_{1,2} = [\underline{c}'_2\underline{c}''_1], \quad c_1c_2c^0_{1,2} = 0.$$

Так как $e_8c_1 = 0$ ($[e_8uc_1] = -[c_0c_2c'_{1,2}\underline{c}_0c_1c^0_{1,2}uc_1] = -[c_0c_2c'_{1,2}\underline{c}_0c^0_{1,2}c_1uc_1] = 0$), то, повторно используя те же рассуждения, приходим сначала к неравенству $e_8c_1 \neq 0$, а затем — к элементу

$$e_9 = [c_0c_1c_2\underline{c}_0c'_{1,2}c^0_{1,2}\underline{c}''_2] \neq 0, \quad \underline{c}''_2 = [c_2a_7^3c_2].$$

В соответствии с предположением имеем:

$$[e_9c_0] = [e_9\underline{c}_0] = 0,$$

потому что

$$e_9 = [c_0c_1c_2[\underline{c}_0c'_{1,2}c^0_{1,2}\underline{c}''_2]] = -[\underline{c}_0c_1c_2[c_0c'_{1,2}c^0_{1,2}\underline{c}''_2]]$$

и

$$[c_2c_1] = [c_2[\underline{c}_0c'_{1,2}c^0_{1,2}\underline{c}''_2]] = [c_2[c_0c'_{1,2}c^0_{1,2}\underline{c}''_2]] = 0.$$

Далее, ввиду сделанного предположения,

$$[e_9[\underline{c}_0c'_{1,2}]] = -[c_0c_1c_2\underline{c}_0c'_{1,2}c^0_{1,2}\underline{c}''_2c'_{1,2}\underline{c}_0] = [\underline{c}_0c_1c_2[c_0c'_{1,2}c^0_{1,2}\underline{c}''_2c'_{1,2}]\,\underline{c}_0] = 0.$$

Таким образом, элемент

$$e_9 = [c_0c_1c_2[\underline{c}_0c'_{1,2}]\,c^0_{1,2}\underline{c}''_2]$$

удовлетворяет соотношениям:

$$[e_9c_0] = [e_9[\underline{c}_0c'_{1,2}]] = [e_9c^0_{1,2}] = [e_9c_1] = [e_9c_2] = e_9c_2 = 0.$$

Из п. I следует, что $e_9c^0_{1,2} \neq 0$, т. е

$$e_{10} = [c_0c_1c_2\underline{c}_0c'_{1,2}c''_{1,2}] \neq 0,$$

где $c''_{1,2} = [c^0_{1,2}\underline{c}''_2]$. Очевидно,

$$[c''_{1,2}c_1] = [c''_{1,2}c_2] = c''_{1,2}c_2 = 0.$$

Легко убедиться в том, что

$$[e_{10}c_0] = [e_{10}\underline{c}_0] = [e_{10}c_1] = [e_{10}c_2] = [e_{10}c'_{1,2}] = [e_{10}c''_{1,2}] = 0.$$

Кроме того,

$$e_{10} = -[c_0c_2c'_{1,2}\underline{c}_0c_1c''_{1,2}] = -[c_0c'_{1,2}c_2\underline{c}_0c''_{1,2}c_1] = [c_0c'_{1,2}c''_{1,2}\underline{c}_0c_1c_2];$$

следовательно, $e_{10}c_1 = 0$ и $e_{10}c_2 = 0$. А это есть противоречие, так как, с одной стороны, $e_{10} \neq 0$, а из п. I получается, что $e_{10} = 0$. Утверждение п. V доказано.

Далее рассуждаем следующим образом. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — произвольная совокупность элементов второго порядка в $L$. Элемент $\widetilde{a} = [ac_{i_1}\ldots c_{i_s}]$, где $i_1, \ldots, i_s$ — некоторая фиксированная последовательность индексов $1, \ldots, m$, назовем $(c_1, \ldots, c_m)$-продолжением элемента $a \in L$ $(a \neq 0)$, если $\widetilde{a} \neq 0$, но $[ac_{j_1}\ldots c_{j_s}c_{j_{s+1}}] = 0$ при любом выборе $c_{j_k}$ из совокупности $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Согласно теореме 3, кольцо Ли $\mathfrak{M} = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ нильпотентно (вместе со своим обертывающим кольцом $\mathfrak{A}_{\mathfrak{M}}$), поэтому существование $\widetilde{a}$ всегда обеспечено. Не исключено, что $\widetilde{a} = a$. Неоднозначность в выборе $\widetilde{a}$ не будет играть никакой роли.

Допустим, что в кольце $L$ нет ни $c_{(2)}$, ни элементов с условиями (30). Как следует из п. V, в $L$ найдется элемент $[c_0c_1c_2c_3c_0] \neq 0$, где $c_i$ подчиняются условиям (31). Имея в виду п. I, можно утверждать, что

$$[c_0c_1c_2c_3c_0]\,c_1 \neq 0.$$

Но

$$[c_0c_1c_2c_3c_0] = [c_1[c_0c_2][c_0c_3]],$$

поэтому (см. п. III)

$$c = [c_0c_1c_2c_3c_0\underline{c}_1] \neq 0, \quad \underline{c}_1 = [c_1a^3c_1].$$

Очевидно,

$$[cc_2] = -[c_0c_2c_3\underline{c}_1c_0c_1c_2] = -[c_0c_3\underline{c}_1c_2c_0c_2c_1] = 0.$$

Аналогично, $[cc_3] = 0$. Так как $cc_1 = 0$ и $[cc_0] = 0$, то (см. п. I) $cc_0 \neq 0$. Но

$$c = -[c_0[c_0c_1c_2c_3]\,\underline{c}_1];$$

следовательно,

$$h_1 = [c_0c_1c_2c_3c_0\underline{c}_1\underline{c}^{(1)}_0] \neq 0, \quad \underline{c}^{(1)}_0 = [c_0b^3_1c_0].$$

Построим $(c_1, c_2, c_3, \underline{c}^{(1)}_0)$-продолжение для $h_1$.

Легко видеть, что

$$\widetilde{h}_1 = [c_0c_1c_2c_3c_0[\underline{c}_1\underline{c}^{(1)}_0\ldots]],$$

т. е. $\widetilde{h}_1$ является на самом деле $(c_1, c_2, c_3, c^{(1)}_0, c_0)$-продолжением. Из п. I

следует, что $\widetilde{h}_1 c_0 \neq 0$, или

$$h_2 = [\widetilde{h}_1 \underline{c}_0^{(2)}] \neq 0, \quad \underline{c}_0^{(2)} = [c_0 b_2^3 c_0].$$

Строим теперь $(c_1, c_2, c_3, \underline{c}_0^{(1)}, \underline{c}_0^{(2)})$-продолжение элемента $h_2$ и т. д. При помощи указанного процесса можно получить сколь угодно много элементов

$$\widetilde{h}_m = [c_0 c_1 c_2 c_3 c_0 \underline{c}_1 \underline{c}_0^{(1)} \ldots \underline{c}_0^{(2)} \ldots \underline{c}_0^{(m)}] \neq 0.$$

Заметим, что $\underline{c}_0^{(i)}$ и $\underline{c}_0^{(j)}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ не могут стоять рядом в $h_m$, поскольку

$$\underline{c}_0^{(i)} = [c_0 b_i^3 c_0], \quad \underline{c}_0^{(i)} \underline{c}_0^{(j)} = -c_0 [c_0 b_i^3]\, \underline{c}_0^{(j)}$$

и в этом случае было бы

$$[c_0 c_1 c_2 c_3 c_0 [\underline{c}_1 \underline{c}_0^{(1)} \ldots]\, \underline{c}_0^{(i)} \underline{c}_0^{(j)} \ldots] = 0.$$

Таким образом, все $\underline{c}_0^{(i)}$ разделены элементами $c_1$, $c_2$, $c_3$, а так как одночлены $c_j \underline{c}_0^{(i)} c_j$ $(j = 1, 2, 3)$ равны нулю, то по крайней мере два элемента $c_k$ и $c_l$ $(k \neq l)$ из тройки $c_1$, $c_2$, $c_3$ должны повториться несколько раз (нам нужно $\geqslant 3$). По той же причине можно считать, что $\widetilde{h}_m$ отлично от $[c_0 c_1 c_2 c_3 c_0 \ldots \underline{c}_0^{(s)}]$ (на этом процесс обрывался бы). Пусть $m$ таково, что

$$h = \widetilde{h}_m = [c_0 c_1 c_2 c_3 c_0 \underline{c}_1 \ldots c_k].$$

Рассмотрим $(c_0, c_1, c_2, c_3, \underline{c}_1, \underline{c}_0^{(1)}, \ldots, \underline{c}_0^{(m)})$-продолжение элемента $h$. Из п. I следует, что $\widetilde{h} \neq h$, так как $hc_k = 0$, а степень $h$ относительно $c_k$, по условию, не меньше 3. Утверждение п. I применимо также в следующих случаях:

1) $\widetilde{h} = [h\underline{c}_1]$. Тогда $\widetilde{h}\underline{c}_1 = 0$ и $\widetilde{h}c_1 = 0$ $([uhc_1] = -[h\underline{c}_1 uc_1] = [hc_1 u\underline{c}_1] = 0$, так как $[hc_1] = 0)$, но $\underline{c}_1$ и $c_1$ входят множителями в $h$.

2) $\widetilde{h} = [h\underline{c}_1 \ldots \underline{c}_1]$. Выполнение всех условий п. I очевидно.

3) $\widetilde{h} = [h\underline{c}_1 \ldots c_0]$. Замечаем, что $c_0$ входит дважды в $c$ и $\widetilde{h}c_0 = 0$.

4) $\widetilde{h} = [h\underline{c}_1 \ldots \underline{c}_0^{(i)}]$. Здесь $\widetilde{h}c_0 = 0$, так как иначе

$$[u\widetilde{h}c_0] = -[\widetilde{h}uc_0] = [h\underline{c}_1 \ldots c_0 u \underline{c}_0^{(i)}] \neq 0,$$

т. е. $[h\underline{c}_1 \ldots c_0] \neq 0$, и мы возвращаемся к случаю 3).

5) $\widetilde{h} = [h\underline{c}_1 \ldots c_1]$. Используем соотношение $\widetilde{h}\underline{c}_1 = 0$ (если оно неверно, то $[u\widetilde{h}\underline{c}_1] = -[\widetilde{h}u\underline{c}_1] = [h\underline{c}_1 \ldots \underline{c}_1 u c_1] \neq 0$, и мы приходим к случаю 2)). Очевидно, единственно опасным является такое положение вещей, когда $k = 2$ или 3, а $l = 1$. Именно, может, например, случиться, что $(c_k, c_l) = (c_2, c_1)$, степень элементов $\widetilde{h}_m$ относительно $c_3$ при любом их построении и произвольном $m$ остается равной 1, в то время как $\widetilde{h}$ имеет вид $[h\underline{c}_1 \ldots c_3]$. Для этого случая мы не получаем непосредственных следствий из п. I. Покажем, что этого на самом деле быть не может. Как отмечалось ранее,

$$h_1 = [c_0 c_1 c_2 c_3 c_0 \underline{c}_1 \underline{c}_0^{(1)}] \neq 0.$$

Мы утверждаем, что при сделанных предположениях $\widetilde{h}_m$ $(m = 4)$ совпадает с элементом

$$h = [c_0 c_1 c_2 c_3 c_0 \underline{c}_1 \underline{c}_0^{(1)} c_2 \underline{c}_0^{(2)} c_1 \underline{c}_0^{(3)} c_2 \underline{c}_0^{(4)} c_1].$$

Действительно,

$$[hc_2] = [c_0c_3c_1c_2c_0\,[\underline{c}_1\underline{c}_0^{(1)}\ldots c_2\underline{c}_0^{(4)}]\,c_1c_2] = 0,$$

так как $[c_1c_2] = 0$, и, следовательно,

$$c_1c_2u^2c_1c_2 = c_1\,[c_2u^2]\,c_1c_2 = 0.$$

Далее,

$$h = \pm\,[c_0c_1c_2c_3c_0\underline{c}_1\underline{c}_0^{(\alpha_1)}c_2\underline{c}_0^{(\alpha_2)}c_1\underline{c}_0^{(\alpha_3)}c_2\underline{c}_0^{(\alpha_4)}c_1],$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ — переставленные индексы 1, 2, 3, 4. Например,

$$[c_0\ldots\underline{c}_0^{(2)}c_1\underline{c}_0^{(3)}c_2\underline{c}_0^{(4)}c_1] + [c_0\ldots\underline{c}_0^{(2)}c_1\underline{c}_0^{(4)}c_2\underline{c}_0^{(3)}c_1] =$$
$$= -\,[c_0\ldots\underline{c}_0^{(2)}c_1\,[c_2\underline{c}_0^{(3)}\underline{c}_0^{(4)}]\,c_1] = 0.$$

Так же это показывается для $\underline{c}_0^{(2)}$ и $\underline{c}_0^{(3)}$, а так как

$$[c_0c_1c_2c_3c_0\underline{c}_1] = -\,[c_0c_2c_3\underline{c}_1c_0c_1],$$

то аналогичные рассуждения применимы и к $\underline{c}_0^{(1)}$, $\underline{c}_0^{(2)}$.

Из сказанного следует, что

$$[h\underline{c}_0^{(i)}] = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Кроме того,

$$[hc_0] = [c_0c_1c_2c_3c_0\,[\underline{c}_1\underline{c}_0^{(1)}\ldots\underline{c}_0^{(4)}c_1]\,c_0] = 0.$$

Нетрудно, наконец, убедиться в том, что $h \neq 0$. Все вместе взятое как раз и означает, что $\widetilde{h}_4 = h$. Но очевидно также, что $[h\underline{c}_1] = 0$, т. е. $(c_0, c_1, c_2, c_3, \underline{c}_1, \underline{c}_0^{(1)}, \ldots, \underline{c}_0^{(4)})$-продолжение элемента $h$ совпадает с ним самим, а это невозможно (см. п. I), так как степень $h$ относительно $c_1$ равна 3 и $hc_1 = 0$.

Мы приходим к выводу, что ни одна из логически мыслимых форм элемента $\widetilde{h}$ не может на самом деле встретиться, так как сделанные нами предположения и утверждение п. I противоречат друг другу.

Лемма 3.5 доказана.

Продолжая считать, что в энгелевом ($n < p$) кольце Ли $L$ нет элемента $c_{(2)}$, без особого труда приходим к результату, о котором упоминалось ранее.

ЛЕММА 3.6. *В $L$ существуют два элемента $c_1$, $c_2$, подчиняющихся требованиям:*

$$c_1c_2 \neq 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = [c_1c_2] = c_1u^\alpha c_1c_2 = c_2u^\alpha c_1c_2 = 0, \quad \alpha \geqslant 0. \qquad (32)$$

Доказательство. Будем исходить из пары $c_1$, $c_2$ с условиями (30). Как показывает утверждение леммы 3.3 (где следует считать $h = [ac_2]$), $c_1c_2g^2c_1fgc_1 \neq 0$ для некоторых элементов $f, g \in L$.

Полагая

$$e_1 = [fc_1c_2], \quad e_2 = [c_1g^3c_1],$$

находим:

$$[e_1e_2] = e_1^2 = e_2^2 = 0, \quad e_1e_2 = 3c_1c_2g^2c_1gfc_1 \neq 0.$$

Кроме того,

$$c_1vc_2u^3c_1c_2 = c_2vc_1u^3c_1c_2 = c_1c_2u^4c_1c_2 = 0,$$

так как (в соответствии с определением $c_1$, $c_2$ в лемме 3.5)

$$c_1v\,[c_2u^3]\,c_1c_2 = 0, \quad c_2v\,[c_1u^3]\,c_1c_2 = 0, \quad c_1\,[c_2u^3]\,uc_1c_2 = 0.$$

Поэтому $e_1u^\alpha e_1e_2 = 0$ для $\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

Пусть у нас уже есть элементы $c_1, c_2$ такие, что

$$c_1c_2 \neq 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = [c_1c_2] = c_1u^\alpha c_1c_2 = 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant s, \quad s \geqslant 3.$$

Рассмотрим связанную с ними пару

$$e_1 = [fc_1c_2] \text{ и } e_2 = [c_1g^3c_1], \quad e_1e_2 = 3c_1c_2g^2c_1fgc_1 \neq 0.$$

Очевидно,

$$e_1u^\alpha e_1e_2 = -3c_1[fc_2]u^\alpha c_1c_2g^2c_1fgc_1 = -3c_1u^\alpha[fc_2]c_2c_1g^2c_1fgc_1 = 0.$$

Далее,

$$e_2u^\alpha e_1e_2 = 3c_1[c_1g^3]u^\alpha c_1c_2g^2c_1gfc_1 = -3c_1u^\alpha[c_1g^3]c_1c_2g^2c_1gfc_1 = 0,$$

так как $[c_1g^3, c_1] = 0$. Следовательно,

$$e_1u^\alpha e_1e_2 = e_2u^\alpha e_1e_2 = 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant s, \quad s \geqslant 3.$$

А если

$$c_1c_2 \neq 0, \quad c_1^2 = c_2^2 = [c_1c_2] = c_1u^\alpha c_1c_2 = c_2u^\alpha c_1c_2 = 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant s, \quad s \geqslant 3,$$

то, пользуясь той же схемой рассуждений, мы найдем пару элементов $e_1$, $e_2$, удовлетворяющих аналогичным условиям с добавочным тождеством

$$e_1u^{s+1}e_1e_2 = 0.$$

Так, продвигаясь шаг за шагом, можно прийти к элементам с условиями (32).

Лемма доказана.

У нас есть теперь все необходимое для доказательства теоремы 4. Допустим, что ее утверждение неверно. Тогда, как было установлено, в кольце $L$ существуют два элемента $c_1$, $c_2$ с условиями (32). Введем в рассмотрение главный идеал $\mathfrak{N} = \{c\} \neq 0$, где $c = [ae^2]$, $e = c_1 + c_2$, $a$ — некоторый элемент из $L$.

Любой элемент $h \in \mathfrak{N}$ можно записать в виде

$$h = \sum_{0 \leqslant k_i \leqslant n-1} [ca_i^{k_i}], \quad a_i \in L,$$

поэтому в $L$ имеет место тождество

$$[he^2] = 0, \text{ т. е. } e^2h - 2ehe = 0, \tag{33}$$

так как $he^2 = 0$. Используя это тождество, докажем, что $cg^2ch^2c = 0$ для всех $g, h \in \mathfrak{N}$. В самом деле,

$$cg^2ch^2c = 4cg^2eaeh^2eae.$$

Но $[eah^2] \in \mathfrak{N}$, поскольку $h \in \mathfrak{N}$. Следовательно (см. тождество (33)),

$$2(cg^2eaeh^2eae - cg^2eaeaeh^2e + 2cg^2eaeahehe - 2cg^2eaeheahe) =$$
$$= 2cg^2eae[eah^2]e = cg^2eae^2[eah^2] = 0.$$

Как легко видеть,

$$2cg^2eaeaeh^2e = 2cg^2c_1ac_2ac_1h^2e + 2cg^2c_2ac_1ac_2h^2e =$$
$$= -cg^2c_1[c_2a^2]c_1h^2e - cg^2c_2[c_1a^2]c_2h^2e = 0,$$

$$2cg^2eaeahehe = cg^2eaeahe^2h = 0,$$
$$2cg^2eaeheahe = cg^2eae^2hahe = 0.$$

Поэтому

$$cg^2eaeh^2eahe = 0,$$

т. е.

$$cg^2ch^2c = 0.$$

Отметим, что для любого центрального элемента $g_0$ в $\mathfrak{N}$ выполнены тождества

$$[g_0 u^\alpha g_0] = 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad u \in L,$$

т. е., в частности, $g_0$ можно взять в качестве $c_{(2)}$.

Но в силу сделанного нами предположения, следует считать, что $g_0 = 0$. Поэтому $\mathfrak{N}$ — кольцо без центра, и к нему может быть отнесено все до сих пор сказанное о кольце $L$.

Применяя лемму 3.2 к элементу $c$ второго порядка с условием

$$cg^2ch^2c = 0, \quad g, h \in \mathfrak{N},$$

и используя затем теорему 1, можно найти в $\mathfrak{N}$ элемент $c_{(m_0)}$, $m_0 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Обозначив его через $c_0$, имеем по определению:

$$c_0 h^\alpha c_0 = 0 \text{ в } \mathfrak{N} \quad (\alpha \geqslant 0),$$

т. е. $[gc_0h^\alpha c_0] = 0$ для всех $g, h \in \mathfrak{N}$. В частности,

$$[c_0 v u^\beta c_0 h^\alpha c_0] = 0, \quad u, v \in L,$$

или

$$c_0 u^\beta c_0 h^\alpha c_0 = 0. \tag{34}$$

Это тождество верно уже в $L$ для всех $u \in L$, $h \in \mathfrak{N}$, $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots$.

Анализ использованных в ходе построения $c_0$ рассуждений показывает, что $c_0^2 = 0$ в $L$. Но можно обойтись и без экскурса в прошлое. А именно, полагая в (34) $\alpha = 0$ и $\beta = 0{,}2$, приходим к выводу, что

$$c_0^3 = 0, \quad c_0 u^2 c_0^2 = 0.$$

Если $c_0^2 \neq 0$, то [см. тождество (15)]

$$[bc_0^2]^2 = c_0^2 b^2 c_0^2 = 0.$$

При этом $[bc_0^2]$ сохраняет все свойства элемента $c_0$.

Допустим, что $c_0 h^2 c_0 \neq 0$ в $L$ для некоторого $h \in \mathfrak{N}$, т. е.

$$e_0 = [c_0 b h^2 c_0] \neq 0, \quad b \in L.$$

В дальнейшем мы используем только тождество (34), поэтому все соотношения будут иметь место в $L$. Очевидно,

$$e_0^2 = \alpha c_0 bh (c_0 bhc_0 h^2 c_0) + \beta c_0 h^2 (c_0 b^2 c_0 h^2 c_0) +$$
$$+ \gamma (c_0 bhc_0 h^2 c_0)\, bhc_0 + \delta c_0 h^2 c_0 bhc_0 bhc_0 = \delta c_0 h^2 c_0 hbc_0 bhc_0 = 0,$$

так как

$$c_0 h^2 c_0 h\, [c_0 b^2]\, hc_0 = 0,$$

т. е. $e_0$ является элементом второго порядка.

Из тождества (34) непосредственно вытекает, что

$$[c_0 bh^2]\, c_0 g^2\, [c_0 bh^2 c_0] = \sum_{i,j} u^i c_0 v^j c_0 g^2\, [[c_0 bh^2]\, c_0] = 0$$

$$c_0 bhc_0\, h[[c_0 bh^2]\, c_0] = 0,$$

так как $[c_0 bh^2] \in \mathfrak{N}$. Поэтому

$$T = e_0 g^2 e_0 = -c_0\, [c_0 bh^2]\, g^2\, [c_0 bh^2 c_0] = -c_0 h^2 c_0 bg^2\, [c_0 bh^2 c_0].$$

Используя то обстоятельство, что $[bg]$, $[bh]$, $[c_0b^2] \in \mathfrak{N}$, без особого труда находим:

$$T = \alpha_1 c_0 h^2 c_0 g^2 b c_0 b h^2 c_0 + \alpha_2 c_0 h^2 c_0 g^2 h b c_0 b h c_0 + \alpha_3 c_0 h^2 c_0 g^2 b c_0 b h c_0 h,$$

или $T = 0$, поскольку

$$c_0 h^2 c_0 g^2 h^\alpha [c_0 b^2] h^\beta c_0 = 0.$$

Таким образом, $e_0^2 = e_0 g^2 e_0 = 0$ в $L$ для всех $g \in \mathfrak{N}$. В частности, имеет место тождество

$$e_0 [e_0 u^3] [e_0 v^3] e_0 = 0,$$

т. е.

$$[e_0 u^3 e_0] [e_0 v^3 e_0] = 0$$

при любых элементах $u, v$ из $L$. А это, согласно лемме 3.4, означает, что в $L$ существует элемент $c_{(2)}$. Полученное противоречие (мы полагали, что $c_{(2)}$ в $L$ отсутствует!) завершает доказательство теоремы 4.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
21. IV. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кострикин А. И., О связи между периодическими группами и кольцами Ли, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 21 (1957), 289—310.

[2] Кострикин А. И., Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 21 (1957), 515—540.

[3] Кострикин А. И., О локальной нильпотентности колец Ли, удовлетворяющих условию Энгеля, Доклады Ак. наук СССР, 118, № 6 (1958), 1074—1077.

[4] Кострикин А. И., О проблеме Бернсайда, Доклады Ак. наук СССР, 119, № 6 (1958), 1081—1084.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 35—66

А. Б. ШИДЛОВСКИЙ

# О КРИТЕРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе устанавливаются общие теоремы о трансцендентности и алгебраической независимости значений в алгебраических точках одного достаточно широкого класса целых функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами.

## § 1. $E$-функции

В 1929—1930 гг. К. Зигель (1) опубликовал метод, который позволяет устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений в алгебраических точках одного класса целых функций, названных им $E$-функциями.

Комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ называются алгебраически независимыми, если они не связаны никаким алгебраическим уравнением с алгебраическими коэффициентами, и алгебраически зависимыми в противном случае.

Из этого определения следует, что если некоторая совокупность чисел алгебраически независима, то каждое из них трансцендентно.

Пусть число $\alpha$ принадлежит к алгебраическому полю $K$ степени $h$ над полем рациональных чисел, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ — числа, сопряженные с $\alpha$ в этом поле. Условимся в дальнейшем обозначать через $\overline{|\alpha|}$ наибольшее из чисел $|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_h|$.

Целая функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}$$

называется $E$-функцией, если:

1) все коэффициенты $c_n$ функции $f(z)$ принадлежат алгебраическому полю $K$ конечной степени над полем рациональных чисел;

2) при любом $\varepsilon > 0$ $\overline{|c_n|} = O(n^{\varepsilon n})$;

3) существует последовательность натуральных чисел $\{q_n\}$ такая, что числа $q_n c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — целые алгебраические, а при любом $\varepsilon > 0$ $q_n = O(n^{\varepsilon n})$.

Нетрудно убедиться, что $E$-функции образуют кольцо функций, замкнутое по отношению к операциям дифференцирования и интегрирования в пределах от 0 до $z$ и замены аргумента $z$ на $\lambda z$, где $\lambda$ — алгебраическое число [см. (1), (2), (3)].

Любая алгебраическая постоянная, всякий многочлен от $z$ с алгебраическими коэффициентами, функция $e^z$, бесселева функция $I_0(z)$ являются простейшими примерами $E$-функций.

Метод Зигеля может быть применен к совокупности $E$-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых являются рациональными функциями от $z$. В работах ([1]), ([2]) Зигель указывает достаточно широкий класс таких функций, названных им гипергеометрическими $E$-функциями. Этот метод является непосредственным обобщением известных классических идей и результатов Эрмита ([4]) и Линдемана ([5]). Существенную роль в нем играет также идея Туэ ([6]) из теории приближения алгебраических чисел рациональными дробями.

Основной результат Зигеля относится к функциям

$$K_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots, \tag{1}$$

удовлетворяющим линейным однородным дифференциальным уравнениям 2-го порядка с полиномиальными коэффициентами и отличающимся только множителем $\dfrac{1}{\Gamma(\lambda+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}}$ от функций Бесселя с соответствующим индексом $\lambda$. Зигель доказал, что если $\lambda$ — рациональное число, не равное половине нечетного числа, то для любого алгебраического значения $\alpha \neq 0$ числа $K_\lambda(\alpha)$ и $K'_\lambda(\alpha)$ алгебраически независимы, а также доказал некоторые обобщения этого предложения.

В 1949 г. Зигель ([2]) изложил свой метод в форме общей теоремы об алгебраической независимости значений в алгебраических точках совокупности $E$-функций, удовлетворяющих системе линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка *. Эта теорема сводит доказательство арифметической проблемы алгебраической независимости значений совокупности $E$-функций к доказательству некоторого аналитического условия нормальности произведений степеней этих функций. Но последнее условие, являясь достаточным для доказательства теоремы, накладывает слишком большие ограничения на исследуемые функции. Зигелю удалось проверить выполнение этого условия и, следовательно, применить свою теорему лишь к совокупности функций, из которых основная удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению 2-го порядка. При проверке условия нормальности для совокупности функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям порядка выше 2-го, до сих пор встают непреодолимые трудности. Поэтому, несмотря не кажущуюся общность теоремы Зигеля, она могла иметь очень мало приложений к конкретным функциям, а применение ее к функциям, являющимся решениями линейных дифференциальных уравнений порядка выше 2-го, до сих пор невозможно.

В 1954 г. теорема Зигеля была доказана автором ([7]) при менее стеснительных предположениях и распространена на случай совокупности функций, удовлетворяющих системе линейных неоднородных дифферен-

* Изложение метода Зигеля можно найти в книге ([3]).

циальных уравнений. Это позволило впервые установить трансцендентность и алгебраическую независимость значений $E$-функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений 3-го и 4-го порядков.

В 1955 г. автору удалось найти [см. ([8])] необходимые и достаточные условия, при которых справедлива теорема об алгебраической независимости в алгебраических точках совокупности $E$-функций, аналогичная теореме Зигеля. Подробное доказательство этой теоремы и будет проведено в данной работе.

## § 2. Формулировки основных результатов

Функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ называются алгебраически независимыми над полем рациональных функций, если они не связаны никаким алгебраическим уравнением с коэффициентами — рациональными функциями от $z$, и алгебраически зависимыми над тем же полем в противном случае.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть совокупность $E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ является решением системы из $m$ линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка*

$$y'_k = Q_{k,0}(z) + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}(z)\, y_i, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

*коэффициенты которых $Q_{k,i}(z)$, $k = 1, \ldots, m$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — рациональные функции от $z$, а $\alpha$ — любое алгебраическое число, отличное от нуля и полюсов всех функций $Q_{k,i}(z)$. Тогда для того чтобы $m$ чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ были алгебраически независимы, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ были алгебраически независимы над полем рациональных функций.*

Замечание. При помощи доказанной ниже леммы 10 легко убедиться, что если совокупность $E$-функций составляет решение системы дифференциальных уравнений (2), коэффициенты которых — рациональные функции, то числовые коэффициенты этих рациональных функций могут быть выбраны целыми алгебраическими числами.

Следствие. *Если $E$-функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы над полем рациональных функций и удовлетворяют условиям основной теоремы, то, в частности, каждое из чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ трансцендентно, трансцендентными числами являются нули и вообще все алгебраические $A$-точки этих функций, отличные от нуля и полюсов системы дифференциальных уравнений* (2).

Аналогичные следствия вытекают и из формулируемых ниже теорем 1 и 2.

Пусть $E$-функция $f(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения $m$-го порядка

$$P_m(z)\, y^m + \cdots + P_1(z)\, y' + P_0(z)\, y = Q(z), \tag{3}$$

где $P_m(z), \ldots, P_0(z), Q(z)$ — многочлены от $z$. Положим

$$f_1(z) = f(z), \quad f_k(z) = f^{(k-1)}(z), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Тогда совокупность $m$ $E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ составляет решение

системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с коэффициентами — рациональными функциями от $z$:

$$y'_k = y_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, m-1,$$

$$y'_m = -\frac{P_{m-1}(z)}{P_m(z)} y_m - \cdots - \frac{P_0(z)}{P_m(z)} y_1 + \frac{Q(z)}{P_m(z)}.$$

Поэтому к этой совокупности функций применима основная теорема и имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Пусть E-функция $f(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения m-го порядка* (3), *коэффициенты которого $P_m(z), \ldots, P_0(z), Q(z)$ — многочлены от $z$, а $\alpha$ — любое алгебраическое число, отличное от нуля и от нулей многочлена $P_m(z)$. Тогда для того чтобы $m$ чисел $f(\alpha), f'(\alpha), \ldots, f^{(m-1)}(\alpha)$ были алгебраически независимы, необходимо и достаточно, чтобы функции $f(z), f'(z), \ldots, f^{(m-1)}(z)$ были алгебраически независимы над полем рациональных функций.*

Из теоремы 1 при $m = 1$ следует

ТЕОРЕМА 2. *Пусть E-функция $f(z)$ трансцендентна и является решением линейного дифференциального уравнения 1-го порядка*

$$P_1(z)\, y' + P_0(z)\, y = Q(z),$$

*где $P_1(z)$, $P_0(z)$, $Q(z)$ — многочлены от $z$, а $\alpha$ — любое алгебраическое число, отличное от нуля и нулей многочлена $P_1(z)$. Тогда число $f(\alpha)$ трансцендентно.*

В частности, показательная функция $e^z$ удовлетворяет уравнению $y' = y$. Поэтому число $e^\alpha$ трансцендентно при любом алгебраическом значении $\alpha \neq 0$.

Далее, функция

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots,$$

является при рациональном $\lambda$ $E$-функцией и удовлетворяет уравнению

$$y' + \left(\frac{\lambda}{z} - 1\right) y = \frac{\lambda}{z}.$$

Значит, число $\varphi_\lambda(\alpha)$ трансцендентно при всяком алгебраическом значении $\alpha \neq 0$ и любом рациональном $\lambda \neq -1, -2, \ldots$.

Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — любые линейно независимые алгебраические числа, то легко проверить, что функции $e^{\alpha_1 z}, \ldots, e^{\alpha_n z}$ алгебраически независимы над полем рациональных функций. Они составляют решение системы дифференциальных уравнений

$$y'_k = \alpha_k y_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Поэтому, по теореме 1, числа $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ алгебраически независимы, а это утверждение эквивалентно известной теореме Линдемана.

Доказательство всех результатов Зигеля (1), (2) об алгебраической независимости значений функций $K_\lambda(z)$ и $K'_\lambda(z)$ при помощи наших теорем существенно упрощается. Отпадает необходимость доказательства алгебраической независимости различных решений уравнения Бесселя и установления нормальности произведений степеней этих функций. Аналогично упрощается доказательство теорем 1—7 в работе автора (7).

При помощи основной теоремы теперь нетрудно устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений в алгебраических точках $E$-функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений любых порядков, так как задача исследования алгебраической независимости над полем рациональных функций совокупности целых функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям, не представляет уже тех трудностей, как проверка условия нормальности Зигеля. Формулировки целого ряда таких теорем опубликованы в работе ([8]), а подробнее доказательство их будет дано в другом месте.

Аналогично основной теореме доказывается

ТЕОРЕМА 3. *Пусть совокупность $E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, где $m \geqslant 1$, является решением системы из $m$ линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка*

$$y'_k = \sum_{k=1}^{m} Q_{k,i}(z)\, y_i, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

*коэффициенты которых $Q_{k,i}(z)$, $k = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, m$, — рациональные функции от $z$, а $\alpha$ — любое алгебраическое число, отличное от нуля и полюсов всех функций $Q_{k,i}(z)$. Тогда для того чтобы числа $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ не были связаны однородным алгебраическим уравнением с алгебраическими коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ не были связаны однородным алгебраическим уравнением с коэффициентами — многочленами от $z$.*

Из теоремы 3 при $m > 1$ непосредственно получается ряд очевидных следствий, справедливых для совокупности $E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, удовлетворяющих условиям этой теоремы, при отсутствии между ними однородных алгебраических связей в поле рациональных функций:

1°. Ни одно из чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ не равно нулю и, следовательно, все нули каждой из функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ трансцендентны, за исключением, быть может, нулей, совпадающих с числом нуль и полюсами системы дифференциальных уравнений (4).

2°. $m-1$ чисел

$$\frac{f_k(\alpha)}{f_s(\alpha)}, \quad k = 1, \ldots, m, \quad k \neq s,$$

при $s = 1, \ldots, m$ алгебраически независимы.

3°. Среди чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ по крайней мере $m-1$ число трансцендентно.

4°. Если одно из чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ алгебраическое, то остальные $m-1$ чисел алгебраически независимы.

Заметим, что если $E$-функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ не связаны однородным алгебраическим уравнением в поле рациональных функций, то среди этих функций не более одной может быть многочленом, а если одна из этих функций — многочлен, то, очевидно, нули этого многочлена являются особыми точками системы дифференциальных уравнений (4). Это согласуется со следствием 1°. Отсюда следует, что при $m = 1$ теорема тривиально справедлива.

Простейшим примером применения теоремы являются функции

$$y_1 = \sin z, \quad y_2 = \cos z.$$

Они являются решением системы

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1,$$

трансцендентны и алгебраически зависимы, так как $y_1^2 + y_2^2 = 1$. Однородное алгебраическое уравнение между $y_1$ и $y_2$ над полем рациональных функций невозможно, так как в противном случае функция

$$\frac{y_1}{y_2} = \operatorname{tg} z$$

была бы алгебраической. Поэтому, по теореме 3, при любом алгебраическом $\alpha \neq 0$ число $\operatorname{tg} \alpha$ трансцендентно, а из чисел $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ хотя бы одно трансцендентно. Но тогда из соотношения $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ получаем, что они оба трансцендентны.

В теореме 3 содержится основная теорема. Действительно, если дано $m$ $E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, то присоединим к ним функцию $f_{m+1}(z) = 1$. Независимо от того, однородной или неоднородной системе дифференциальных уравнений удовлетворяла исходная совокупность функций, новая совокупность функций будет составлять решение системы однородных линейных уравнений. Применяя к функциям $f_1(z), \ldots, f_{m+1}(z)$ теорему 3, получим основную теорему, так как факт алгебраической независимости функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ над полем рациональных функций равносилен отсутствию однородного уравнения в поле рациональных функций между функциями $f_1(z), \ldots, f_{m+1}(z)$ и, аналогично, факт алгебраической независимости чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ равносилен отсутствию однородного уравнения между теми же числами и единицей в поле алгебраических чисел.

Рассмотрим $E$-функцию $f(z)$, удовлетворяющую линейному однородному уравнению вида (3), в котором $Q(z) \equiv 0$. Нетрудно сформулировать теорему, аналогичную теореме 1, которая следует из теоремы 3 подобно тому, как теорема 1 следовала из основной теоремы.

Из теоремы 3 можно получить ряд других важных следствий, в частности для $E$-функций, являющихся решениями дифференциальных уравнений 2-го порядка, но это будет сделано в другом месте.

Метод Зигеля состоит из двух частей: функциональной, где строится совокупность линейных приближающих форм от заданных $E$-функций с отличным от нуля детерминантом, и арифметической, где осуществляется переход от функциональных линейных форм к числовым формам с отличным от нуля детерминантом и доказывается основная лемма о ранге совокупности значений рассматриваемых функций в алгебраических точках. При доказательстве нашей теоремы существенной перестройке и обобщению подвергнута функциональная часть метода, а его арифметическая часть осталась почти без всяких изменений. В этом доказательстве используются почти все рассуждения, на которых основано доказательство теоремы Зигеля ([2]). Те леммы, которые хоть несколько отличаются от соответствующих лемм Зигеля, мы доказываем, и только две леммы Зигеля приводятся без доказательства, так как они используются без изменений.

Имея в виду возможные дальнейшие обобщения, многие леммы мы доказываем при более общих предположениях, чем это необходимо для доказательства основной теоремы.

## § 3. Функциональные линейные приближающие формы

При доказательстве основной теоремы большое значение будут иметь линейные приближающие формы от заданной совокупности $E$-функций, имеющие при $z=0$ нуль достаточно высокого порядка. Эти линейные формы конструируются при помощи формулируемой ниже леммы, доказательство которой основано на применении принципа Дирихле.

ЛЕММА 1 [см. (2), (3)]. *Пусть $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ — целые функции, а $n$ — любое натуральное число. Тогда существует $m$ многочленов $P_1(z), \ldots, P_m(z)$,*

$$P_k(z) = \sum_{s=0}^{2n-1} b_{k,s} z^s, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

*коэффициенты которых $b_{k,s}$ в совокупности отличны от нуля и степени которых не превышают $2n-1$, со следующими свойствами:*

1) *линейная форма*

$$R = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) f_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!} \tag{6}$$

*имеет при $z=0$ нуль по крайней мере порядка $(2m-1)n$, так что*

$$a_\nu = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2mn - n - 1. \tag{7}$$

*Если же функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ являются $E$-функциями, коэффициенты степенных рядов которых принадлежат алгебраическому полю $K$, то при любом $\varepsilon > 0$:*

2) *коэффициенты многочленов (5) $b_{k,s}$ — целые числа поля $K$, удовлетворяющие условию*

$$\left|\overline{b_{k,s}}\right| = O\left[n^{(2+\varepsilon)n}\right] \tag{8}$$

*равномерно по $k$ и $s$, $k = 1, \ldots,$ $s = 0, 1, \ldots, 2n-1$.*

3) *Коэффициенты $a_\nu$ линейной формы $R$ вида (6) при достаточно большом $n$ удовлетворяют условиям:*

$$|a_\nu| = \nu^{\varepsilon\nu} O(n^{2n}), \quad \nu \geqslant 2mn - n, \tag{9}$$

*равномерно по $\nu$.*

## § 4. Некоторые свойства линейных и дробно-линейных форм от заданной совокупности функций

Рассматривая линейные формы от нескольких переменных с коэффициентами, принадлежащими некоторому полю $G$, мы будем говорить о линейной зависимости или независимости таких форм, понимая под этим их линейную зависимость или независимость относительно поля $G$.

Рангом данной совокупности линейных форм называют максимальное число линейно независимых среди этих форм. Ранг не превосходит числа независимых переменных, от которых зависят эти формы.

В настоящей работе нас будут интересовать случаи, когда полем $G$ коэффициентов рассматриваемых линейных форм будет либо некоторое алгебраическое числовое поле, либо поле комплексных чисел, либо поле рациональных функций от $z$.

В последующих рассуждениях нам потребуется утверждение, устанавливающее, что при фиксированных степенях многочленов $P_1, \ldots, P_m$ в линейной форме вида (6) при изменении коэффициентов этих многочленов нельзя получить форму, разложение которой в степенной ряд начинается со сколь угодно большой степени $z$.

ЛЕММА 2. *Для заданной совокупности целых функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ и фиксированного натурального числа $n$ существует натуральное число $N_0$ такое, что, каковы бы ни были многочлены от $z$ $P_1, \ldots, P_m$ со степенями, не превышающими числа $n$, линейная форма*

$$R = \sum_{i=1}^{m} P_i f_i(z)$$

*либо тождественно равна нулю, либо ее разложение в степенной ряд по степеням $z$ начинается со степени $z$, не превосходящей числа $N_0$.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение леммы для случая $n = 0$, т. е. для случая, когда все $P_1, \ldots, P_m$ — комплексные числа.

Допустим противное, т. е. что существует последовательность систем комплексных чисел $P_{k,1}, \ldots, P_{k,m}$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что у функций

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i} f_i(z) = a_{n_k} z^{n_k} + \cdots, \quad a_{n_k} \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

разложение в степенной ряд по степеням $z$ начинается, соответственно с $z^{n_k}$, где

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \tag{11}$$

Предположим, что ранг совокупности линейных форм $R_1, R_2, \ldots$ вида (10) равен $l$, где, ввиду нашего предположения, $1 \leqslant l \leqslant m$. Тогда среди этих форм можно выбрать ровно $l$ линейно независимых. Пусть это будут формы $R_{k_1}, \ldots, R_{k_l}$, где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < \ldots < k_l$. Следовательно, каждая из линейных форм $R_1, R_2, \ldots$ будет линейной комбинацией форм $R_{k_1}, \ldots, R_{k_l}$ с коэффициентами — комплексными числами. Если $R_{k_{l+1}}$ — любая из линейных форм (10) со значением $k_{l+1}$ большим, чем $k_l$, то мы имеем соотношение:

$$R_{k_{l+1}} = \sum_{\nu=1}^{l} c_\nu R_{k_\nu} \tag{12}$$

с комплексными постоянными $c_1, \ldots, c_l$, из которых хотя бы одна отлична от нуля, так как, по предположению, функция $R_{k_{l+1}}$ не равна тождественно нулю по $z$.

Из равенств (10) и неравенств (11) следует, что разложение правой части равенства (12) в степенной ряд по степеням $z$ начинается с $z^N$, где $N \leqslant n_{k_l}$, а разложение левой части этого равенства начинается

$z^{n_{k_{l+1}}}$. Но $k_{l+1} > k_l$ и ввиду неравенств (11)

$$n_{k_{l+1}} > N.$$

Это показывает, что равенство (12) противоречиво. Противоречие доказывает наше утверждение.

Пусть теперь $P_1, \ldots, P_m$ — многочлены от $z$, степени которых не превышают заданного натурального числа $n$. Рассмотрим $(n+1)m$ функций

$$f_{k,i}(z) = z^k f_i(z), \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

и применим к ним только что доказанное утверждение с заменой $m$ на $(n+1)m$. Мы получим, что, каковы бы ни были комплексные числа $b_{k,i}$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, \ldots, n$, линейная форма

$$R = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} b_{k,i} z^k f_i(z) \tag{13}$$

либо тождественно равна нулю, либо ее разложение в степенной ряд по степеням $z$ начинается со степени, не превосходящей некоторого натурального числа $N_0$, зависящего только от функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ и числа $n$. Полагая в равенстве (13)

$$\sum_{k=0}^{n} b_{k,i} z^k = P_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

мы убеждаемся в том, что последнее утверждение совпадает с утверждением леммы 2. Значит, лемма 2 доказана полностью.

В дальнейшем будем говорить, что совокупность аналитических в некоторой области функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ имеет ранг $r$ относительно поля рациональных функций, или, коротко, ранг $r$, если среди этих $m$ функций имеется $r$ и только $r$ функций, линейно независимых над полем рациональных функций; другими словами, если функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ связаны ровно $m-r$ линейными однородными уравнениями вида

$$\sum_{i=1}^{m} A_{k,i} f_i(z) = 0, \quad k = 1, \ldots, m-r,$$

с коэффициентами $A_{k,i}$ — многочленами от $z$.

Пусть совокупность $m$ функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ имеет ранг $r$. Выберем среди них произвольно $r$ линейно независимых функций. Тогда, очевидно, остальные $m-r$ функций этой совокупности единственным образом представятся в виде линейных комбинаций выбранных первоначально линейно независимых функций с коэффициентами — рациональными функциями от $z$.

Всякую рациональную функцию от $z$ будем считать представленной в виде частного взаимно простых многочленов и ее степенью назовем сумму степеней числителя и знаменателя. В частности, для многочленов это определение степени совпадает с обычным.

ЛЕММА 3. *Пусть* $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_s(z)$, $\psi_1(z), \ldots, \psi_m(z)$ — *совокупность функций, аналитических в некоторой области, причем хотя бы одна из функций* $\psi_1(z), \ldots, \psi_m(z)$ *не равна тождественно нулю. Тогда существует натуральное число* $N_0$, *зависящее только от функций* $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_s(z)$, $\psi_1(z), \ldots, \psi_m(z)$, *такое, что ни при каком выборе* $s+m$ *комплексных*

*чисел* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_m$, *при которых выражение*

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \psi_i(z)$$

*не равно тождественно нулю по* $z$, *функция*

$$\omega(z) = \frac{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \varphi_i(z)}{\sum_{i=1}^{m} \beta_i \psi_i(z)} \tag{14}$$

*не может стать рациональной функцией от* $z$ *степени, большей, чем* $N_0$.

Доказательство. Допустим противное, т. е. что существует последовательность систем комплексных чисел $\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,s}, \beta_{k,1}, \ldots, \beta_{k,m}$ $k = 1, 2, \ldots$, такая, что функции

$$\omega_k(z) = \frac{\sum_{i=1}^{s} \alpha_{k,i} \varphi_i(z)}{\sum_{i=1}^{m} \beta_{k,i} \psi_i(z)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

где каждое из выражений

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_{k,i} \psi_i(z), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

не равно тождественно нулю по $z$, являются рациональными функциями от $z$, соответственно, степеней $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, где

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots . \tag{16}$$

Предположим, что совокупность функций $\psi_1(z), \ldots, \psi_m(z)$ имеет ранг $r$ относительно поля рациональных функций. Так как, по условиям леммы, хотя бы одна из этих функций не равна тождественно нулю, то выполняются неравенства $1 \leqslant r \leqslant m$. Нумерация этой совокупности функций в нашем распоряжении. Поэтому в случае, когда $r$ удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant r < m$, мы можем считать, не нарушая общности доказательства, что функции $\psi_1(z), \ldots, \psi_r(z)$ линейно независимы над полем рациональных функций, а функции $\psi_{r+1}(z), \ldots, \psi_m(z)$ линейно выражаются через функции $\psi_1(z), \ldots, \psi_r(z)$ при помощи соотношений

$$\psi_j(z) = \sum_{i=1}^{r} D_{j,i} \psi_i(z), \quad j = r+1, \ldots, m, \tag{17}$$

где $D_{j,i}$, $j = r+1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, r$, — рациональные функции от $z$.

Пользуясь соотношениями (17), можно написать, что

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_{k,i} \psi_i(z) = \sum_{i=1}^{r} \beta_{k,i} \psi_i(z) + \sum_{j=r+1}^{m} \beta_{k,j} \psi_j(z) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \beta_{k,i} \psi_i(z) + \sum_{j=r+1}^{m} \sum_{i=1}^{r} \beta_{k,j} D_{j,i} \psi_i(z) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \Big(\beta_{k,i} + \sum_{j=r+1}^{m} \beta_{k,j} D_{j,i}\Big) \psi_i(z), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_{k,i}\psi_i(z) = \sum_{i=1}^{r} B_{k,i}\psi_i(z), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

где рациональные функции $B_{k,i}$ определены равенствами:

$$B_{k,i} = \beta_{k,i} + \sum_{j=r+1}^{m} \beta_{k,j} D_{j,i}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{19}$$

Равенства (19) будут справедливы и при $r = m$. В этом случае $B_{k,i} = \beta_{k,i}$. Ввиду равенств (18), выражения для функций (15) примут вид:

$$\omega_k(z) = \frac{\sum_{i=1}^{s} \alpha_{k,i}\varphi_i(z)}{\sum_{i=1}^{r} B_{k,i}\psi_i(z)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

По предположению, знаменатели в правых частях равенств (20) не равны тождественно нулю по $z$. Поэтому при каждом значении $k$, $k = 1, 2, \ldots,$ хотя бы одна из рациональных функций $B_{k,1}, \ldots, B_{k,r}$ не равна тождественно нулю по $z$.

Преобразуем равенства (20) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_{k,i}\varphi_i(z) = \omega_k(z) \sum_{i=1}^{r} B_{k,i}\psi_i(z), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

Левые части равенств (21) можно рассматривать как линейные формы $L_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ от $s$ независимых переменных $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_s(z)$, коэффициенты которых — комплексные числа. Пусть ранг совокупности линейных форм $L_1, L_2, \ldots$ равен $l$. По предположению, каждая из функций $\omega_k(z)$ не равна тождественно нулю и, значит, хотя бы одна из функций $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_s(z)$ не равна тождественно нулю. Отсюда следует, что ранг $l$ удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant l \leqslant s$. Поэтому среди этих форм можно выбрать ровно $l$ линейно независимых. Пусть это будут формы $L_{k_1}, \ldots, L_{k_l}$, где $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_l$. Если $L_{k_{l+1}}$ — любая из линейных форм (21) со значением $k_{l+1}$, большим, чем $k_l$, то мы имеем тождественно по $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_s(z)$:

$$\sum_{\nu=0}^{l+1} c_\nu L_{k_\nu} = 0, \quad c_{l+1} \neq 0, \tag{22}$$

с комплексными постоянными $c_1, \ldots, c_{l+1}$. Равенства (21) и тождество (22) позволяют написать соотношение:

$$\sum_{\nu=1}^{l+1} c_\nu \omega_{k_\nu}(z) \sum_{i=1}^{r} B_{k_\nu,i}\psi_i(z) = 0, \quad c_{l+1} \neq 0,$$

из которого, ввиду линейной независимости функций $\psi_1(z), \ldots, \psi_r(z)$ над полем рациональных функций, следуют тождественные по $z$ соотношения:

$$\sum_{\nu=1}^{l+1} c_\nu \omega_{k_\nu}(z) B_{k_\nu,i} = 0, \quad c_{l+1} \neq 0, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{23}$$

При каждом значении $k$, $k = 1, 2, \ldots,$ хотя бы одна из рациональных функций $B_{k,1}, \ldots, B_{k,r}$ не равна тождественно нулю по $z$. Поэтому можно выбрать число $i$ так, чтобы функция $B_{k_{l+1},i}$ была отлична от нуля,

и переписать соответствующее из соотношений (23) следующим образом:

$$c_{l+1}\omega_{k_{l+1}}(z)\,B_{k_{l+1},\,i} = -\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu \omega_{k_\nu}(z)\,B_{k_\nu,\,i}, \tag{24}$$

где левая часть не равна тождественно нулю по $z$, так как $c_{l+1}$ и $B_{k_{l+1},\,i}$ выбраны отличными от нуля, а все рациональные функции $\omega_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, отличны от нуля по предположению.

Числа $k_1, \ldots, k_l$ фиксированы. Значит, правая часть равенства (24) представляет собой линейную комбинацию с постоянными коэффициентами $c_1, \ldots, c_l$, зависящими только от выбора индекса $k_{l+1}$ и фиксированных рациональных функций, определенных равенствами (15), (17) и (19). Поэтому правая часть (24) является рациональной функцией от $z$, имеющей при любых значениях комплексных постоянных $c_1, \ldots, c_l$, а следовательно, и при любом значении $k_{l+1}$, степень, не превосходящую некоторого фиксированного натурального числа.

С другой стороны, левая часть соотношения (24) отлична от нуля и является рациональной функцией от $z$. Степень рациональной функции $B_{k_{l+1},\,i}$, также являющейся линейной комбинацией с постоянными коэффициентами фиксированных рациональных функций, как это видно из равенств (17) и (19), не превосходит некоторого фиксированного натурального числа, а степень рациональной функции $\omega_{k_{l+1}}(z)$ при достаточно большом значении $k_{l+1}$ может быть больше любого наперед заданного натурального числа, как это следует из неравенств (16). Следовательно, последнее утверждение справедливо и для степени левой части равенства (24), а тогда это равенство противоречиво и лемма доказана.

## § 5. Некоторые свойства линейных форм от функций, удовлетворяющих системе линейных однородных дифференциальных уравнений

В § 5 и 6 будем считать, что совокупность целых функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y'_k = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,\,i}(z)\,y_i, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{25}$$

коэффициенты которых $Q_{k,\,i}(z)$, $k, i = 1, \ldots, m$, — рациональные функции от $z$.

Обозначим через $T = T(z)$ многочлен, являющийся общим наименьшим знаменателем всех рациональных функций $Q_{k,\,i}(z)$ в системе (25), а через $y_1, \ldots, y_m$ — произвольное решение этой системы.

Если $R$ — произвольная линейная форма от переменных $y_1, \ldots, y_m$ с коэффициентами — многочленами от $z$, то ее производная по $z$ $R'$ будет линейной формой от переменных $y_1, \ldots, y_m$, $y'_1, \ldots y'_m$ с коэффициентами — многочленами от $z$. Заменяя в выражении $R'$ переменные $y'_1, \ldots, y'_m$ на правые части соответствующих дифференциальных уравнений из системы (25) и умножая результат на $T$, мы получим, что

выражение $TR'$ будет также линейной формой от переменных $y_1, \ldots, y_m$ с коэффициентами от $z$.

Рассмотрим линейную форму

$$R_1 = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}\, y_i, \tag{26}$$

где $P_{1,1}, \ldots, P_{1,m}$ — произвольные многочлены от $z$, и положим

$$R_k = TR'_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots . \tag{27}$$

Ввиду сказанного выше, мы можем написать, что

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i}\, y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

где многочлены $P_{k,i}$ при $k > 1$ находятся по формулам:

$$P_{k,i} = T\left(P'_{k-1,i} + \sum_{j=1}^{m} P_{k-1,i}\, Q_{j,i}\right), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{29}$$

Если в линейной форме (26) подставить вместо переменных $y_1, \ldots, y_m$ функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ и считать эту форму сконструированной по лемме 1, то соотношения (27) и (28) показывают, что путем дифференцирования из одной линейной приближающей формы можно получить целую совокупность таких форм, имеющих при $z = 0$ нуль достаточно высокого порядка.

Обозначим через $\Delta = \Delta(z)$ детерминант системы линейных форм (28):

$$\Delta = \Delta(z) = |P_{k,i}|, \quad k, i = 1, \ldots, m, \tag{30}$$

а через $\Delta_{k,i}$ — алгебраические дополнения элементов $P_{k,i}$ в этом детерминанте. Умножим обе части каждого из $m$ первых равенств (28), соответственно, на $\Delta_{k,i}$, где $k = 1, \ldots, m$ при некотором значении $i$. Складывая почленно полученные при этом равенства, мы, очевидно, придем к соотношениям

$$\Delta y_i = \sum_{k=1}^{m} \Delta_{k,i} R_k, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{31}$$

которые выполняются тождественно по $y_1, \ldots, y_m$.

Пусть $R_1$ — произвольная линейная форма вида (26). Рассмотрим линейные формы $R_1, R_2, \ldots$ (28). Допустим, что формы $R_1, \ldots, R_l$ линейно независимы, но формы $R_1, \ldots, R_{l+1}$ уже линейно зависимы. Тогда между последними существует линейное однородное уравнение с коэффициентами — многочленами от $z$, действительно содержащее форму $R_{l+1}$. Дифференцируя это уравнение нужное число раз и пользуясь равенствами (27), мы получим ряд уравнений, из которых выразим, очевидно, формы $R_{l+1}, R_{l+2}, \ldots$ линейно через формы $R_1, \ldots, R_l$ с коэффициентами — рациональными функциями от $z$. Этим доказана

ЛЕММА 4. *Если $R_1$ — произвольная линейная форма вида* (26), *то ранг совокупности линейных форм $R_1, R_2, \ldots$* (28) *равен $l$, $l \leqslant m$, тогда и только тогда, когда формы $R_1, \ldots R_l$ линейно независимы, но вместе с формой $R_{l+1}$ уже линейно зависимы.*

Детерминант (30) системы линейных форм $R_1, \ldots, R_m$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда эти формы линейно независимы, т. е.

имеют ранг $m$. Если линейная форма $R_1$ обращается в нуль при некотором нетривиальном решении $y_1, \ldots, y_m$ системы (25), то из равенств (27) следует, что при этом решении обращаются в нуль все формы $R_1, R_2, \ldots$, а тогда из соотношений (31) имеем, что $\Delta \equiv 0$ и, следовательно, линейные формы $R_1, \ldots, R_m$ линейно зависимы. Нетрудно убедиться, что имеет место обратное утверждение. В частности, это следует из более общего нижеследующего предложения.

ЛЕММА 5. *Пусть $R_1$ — произвольная линейная форма вида* (26), *а ранг системы линейных форм $R_1, \ldots, R_m$* (28) *равен $l$, где $1 \leqslant l \leqslant m$. Тогда можно выбрать фундаментальную систему решений системы дифференциальных уравнений* (25) *$y_{i,s}$, $i, s = 1, \ldots, m$, так, что формы $R_1, R_2, \ldots$ обращаются в нуль при подстановке в них вместо переменных $y_1, \ldots, y_m$ некоторых $\mu = m - l$ различных решений этой фундаментальной системы решений.*

Доказательство. Так как ранг системы линейных форм $R_1, \ldots, R_m$ равен $l$, то, по лемме 4, линейные формы $R_1, \ldots, R_l$ линейно независимы, а формы $R_1, \ldots, R_l, R_{l+1}$ линейно зависимы. Поэтому можно найти $l+1$ многочленов от $z$ $A_1, \ldots, A_{l+1}$ таких, что тождественно по переменным $y_1, \ldots, y_m$ и $z$ выполняется соотношение:

$$A_1R_1 + A_2R_2 + \ldots + A_{l+1}R_{l+1} = 0, \quad A_{l+1} \not\equiv 0. \tag{32}$$

Пользуясь равенствами (27), тождество (32) можно переписать следующим образом:

$$B_lR_1^{(l)} + \ldots + B_1R_1' + B_0R_1 = 0, \qquad B_l = A_{l+1}T^l \not\equiv 0, \tag{33}$$

где $B_0, \ldots, B_l$ — многочлены от $z$.

Так как соотношения (32) и (33) тождественны по переменным $y_1, \ldots, y_m$ и $z$, то линейная форма $R_1$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению (33) порядка $l$, $l \leqslant m$, при любом решении $y_1, \ldots, y_m$ системы (25). Поэтому, выбирая в качестве решения $y_1, \ldots, y_m$ $m$ решений какой-либо фундаментальной системы решений системы (25) $y_{i,s}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant s \leqslant m$, мы видим, что каждая из функций

$$R_{1,s} = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}\, y_{i,s}, \quad 1 \leqslant s \leqslant m, \tag{34}$$

удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению (32) порядка $l$, $l \leqslant m$.

Если $l < m$, то функции (34) линейно зависимы в обычном смысле, и мы имеем соотношение

$$\sum_{s=1}^{m} c_s R_{1,s} = 0$$

с постоянными $c_s$, из которых хотя бы одна отлична от нуля. Но

$$\sum_{s=1}^{m} c_s R_{1,s} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} P_{1,i}\, c_s y_{i,s} = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}\, y_i^*, \tag{35}$$

где $y_1^*, \ldots, y_m^*$ — некоторое решение системы (25).

Среди постоянных $c_1, \ldots, c_m$ хотя бы одна отлична от нуля. Значит, решение $y_1^*, \ldots, y_m^*$ не является тривиальным решением системы (25). Так как в наших рассуждениях фундаментальная система решений системы (25) была совершенно произвольной, выберем ее так, чтобы

$$y_i^* = y_{i,1}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{36}$$

и в остальном — снова произвольной. Тогда соотношение (35) будет обозначать, что

$$R_{1,1} = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}\, y_{i,1} = 0. \tag{37}$$

Положим $\mu = m - l$. Если $\mu > 1$, то каждая из $m - 1$ функций

$$R_{1,s} = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}\, y_{i,s}, \quad s = 2, \ldots, m,$$

удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению (33) порядка $l$, $l < m - 1$. Следовательно, эти функции линейно зависимы в обычном смысле. Повторяя предшествующие рассуждения, мы получим, что

$$\sum_{i=1}^{m} P_{1,i}\, y_i^{**} = 0. \tag{38}$$

Очевидно, нетривиальное решение $y_i^{**}, \ldots, y_m^{**}$, являющееся линейной комбинацией $m-1$ решений $y_{i,s}$, $i = 1, \ldots, m$, $s = 2, \ldots, m$, и решение $y_{1,1}, \ldots, y_{m,1}$ линейно независимы. Поэтому фундаментальную систему решений системы (25) можно выбрать так, чтобы в нее входило решение $y_{1,1}, \ldots, y_{m,1}$ и чтобы

$$y_i^{**} = y_{i,2}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

и в остальном — снова произвольной. Тогда ввиду равенств (37) и (38), мы можем написать, что

$$R_{1,s} = \sum_{i=1}^{m} P_{1,i}\, y_{i,s} = 0, \quad s = 1, 2. \tag{39}$$

Этот процесс можно повторить ровно $\mu$ раз. В результате мы получим, что соотношение (39) выполняется при $s = 1, \ldots, \mu$, а тогда равенства (27) дают:

$$R_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i}\, y_{i,s} = 0, \quad s = 1, \ldots, \mu, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

что полностью доказывает лемму.

## § 6. Детерминант системы линейных приближающих форм

Одним из существенных пунктов доказательства методом Зигеля алгебраической независимости значений совокупности $E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений при алгебраических значениях аргумента, обеспечивающих переход от функциональных линейных приближающих форм $R_1(z)$, $R_2(z), \ldots$ к числовым линейным приближающим формам $R_{k_1}(\alpha), \ldots, R_{k_m}(\alpha)$ с отличным от нуля детерминантом и хорошо приближающими число нуль, является то, что детерминант $\Delta$ (30) системы линейных форм $R_1, \ldots, R_{\mu_{N,m}}$

от совокупности

$$\mu_{N,\,m} = \frac{(N+m)!}{N!\,m!}$$

произведений степеней рассматриваемых функций

$$f_1^{k_1}(z)\ldots f_m^{k_m}(z), \quad 0 \leqslant k_1 + \cdots + k_m \leqslant N, \tag{41}$$

из которых форма $R_1$ сконструирована по лемме 1 при достаточно большом $n$, не равен тождественно нулю при любом $N = 1,2,\ldots$ . В доказательстве теоремы Зигеля (2) достаточным условием, обеспечивающим выполнение этого факта, является условие нормальности совокупностей функций (41) при любом $N = 1,2,\ldots$ . В нашем доказательстве [см. (7)] это условие было заменено также достаточным, но менее стеснительным условием неприводимости совокупностей тех же функций. В настоящей работе устанавливается условие, при котором этот факт выполняется, являющееся, вообще говоря, не только достаточным, но и необходимым.

Предположим, что целые функции $f_1(z),\ldots, f_m(z)$, составляющие решение системы дифференциальных уравнений (25), линейно независимы над полем рациональных функций от $z$. Тогда ни одна из этих функций не равна тождественно нулю, и мы можем обозначить через $p$ наименьший из порядков нуля при $z=0$ у этих функций. Обозначим через $q$ наибольшую из степеней $m^2+1$ многочленов $T$ и $TQ_{k,\,i}(z)$, $k,\ i = 1,\ldots, m$, и положим

$$t = n + p + q\,\frac{m(m-1)}{2} - 1. \tag{42}$$

ЛЕММА 6. *Пусть совокупность целых функций $f_1(z),\ldots, f_m(z)$ является решением системы линейных однородных дифференциальных уравнений (25) и линейно независима над полем рациональных функций от $z$. Пусть, далее, линейная приближающая форма $R_1$ (26) сконструирована по лемме 1 при некотором значении $n$ с последующей заменой функций $f_1(z),\ldots, f_m(z)$ на произвольное решение $y_1,\ldots, y_m$ системы (25). Тогда существует такое натуральное число $n_0$, что при любом значении $n \geqslant n_0$ детерминант $\Delta$ (30) системы линейных форм $R_1,\ldots, R_m$ (28) не равен тождественно нулю по $z$ и имеет вид:*

$$\Delta(z) = z^{(2m-1)n-m-p-1}\Delta_1(z), \quad \Delta_1(z) \not\equiv 0, \quad n \geqslant n_0, \tag{43}$$

*где $\Delta_1(z)$ — многочлен от $z$ степени $r_1$, а $r_1$ удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leqslant r_1 \leqslant t. \tag{44}$$

Доказательство. Пусть линейная форма $R_1$ удовлетворяет условиям леммы, а ранг линейных форм $R_1,\ldots, R_m$ равен $l$, где $l \leqslant m$. По лемме 1 имеем, что $l > 0$.

Рассмотрим линейные формы $R_1,\ldots, R_l$:

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} P_{k,\,i}\,y_i\,, \quad k = 1,\ldots, l, \tag{45}$$

и прямоугольную матрицу из коэффициентов этих форм

$$\|P_{k,\,i}\|, \quad k = 1,\ldots, l, \quad i = 1,\ldots, m. \tag{46}$$

По лемме 4, формы (45) линейно независимы, а тогда ранг матрицы (46)

равен $l$ и она содержит хотя бы один минор порядка $l$, детерминант из элементов которого отличен от нуля. Не нарушая общности доказательства, можно считать, что это будет детерминант

$$\Delta_0 = \Delta_0(z) = |P_{k,i}|, \quad k, \ i = 1, \ldots, l, \tag{47}$$

так как нумерация функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ в нашем распоряжении.

Если $l < m$, то каждый из столбцов матрицы (46) с номерами $j > l$ будет линейной комбинацией первых $l$ столбцов, и мы можем написать, что

$$P_{k,j} = \sum_{i=1}^{l} P_{k,i} D_{i,j}, \quad k = 1, \ldots, l, \quad j = l+1, \ldots, m, \tag{48}$$

где все $D_{i,j}$ — рациональные функции от $z$.

Согласно равенствам (45) и (48),

$$R_k = \sum_{i=1}^{m} P_{k,i}\, y_i = \sum_{i=1}^{l} P_{k,i}\, y_i + \sum_{j=l+1}^{m} P_{k,j}\, y_i = \sum_{i=1}^{l} P_{k,i} y_i +$$
$$+ \sum_{j=l+1}^{m} \sum_{i=1}^{l} P_{k,i} D_{ij}\, y_i = \sum_{i=1}^{l} P_{k,i}\Bigl(y_i + \sum_{j=l+1}^{m} D_{i,j}\, y_j\Bigr), \quad k = 1, \ldots, l. \tag{49}$$

Следовательно, линейные формы, $R_1, \ldots, R_l$ можно представить в виде

$$R_k = \sum_{i=1}^{l} P_{k,i}\, u_i, \quad k = 1, \ldots, l, \tag{50}$$

где

$$u_i = y_i + \sum_{j=l+1}^{m} D_{i,j}\, y_j, \quad i = 1, \ldots, l, \quad l \leqslant m; \tag{51}$$

при этом в случае, когда $l = m$, в соответствии с равенствами (51) положим $u_i = y_i$.

Покажем, что рациональные функции $D_{i,j}, i = 1, \ldots, l, \ j = l+1, \ldots, m$, определены единственным образом и какова бы ни была линейная форма $R_1$, сконструированная по лемме 1 при любом значении $n$, степени всех рациональных функций $D_{i,j}$ не превосходят некоторого фиксированного натурального числа, зависящего только от совокупности функций $f_1(z), \ldots$ $\ldots, f_m(z)$ и не зависящего от числа $n$.

Так как $1 \leqslant l < m$, то, по лемме 5, можно выбрать матрицу фундаментальной системы решений системы (25)

$$\|y_{i,s}\|, \quad i, s = 1, \ldots, m, \tag{52}$$

так, что линейные формы $R_1, \ldots, R_l$ обращаются в нуль при подстановке в них вместо переменных $y_1, \ldots, y_m$ первых $\mu = m - l$, $\mu > 0$, решений этой фундаментальной системы решений, т. е. что выполняются соотношения (40). Поэтому, если мы обозначим

$$u_{i,s} = y_{i,s} + \sum_{j=l+1}^{m} D_{i,j}\, y_{j,s}, \quad i = 1, \ldots, l, \quad s = 1, \ldots, \mu, \tag{53}$$

то, ввиду равенств (40), (50), (51) и (53), имеют место соотношения:

$$R_{k,s} = \sum_{i=1}^{l} P_{k,i}\, u_{i,s} = 0, \quad k = 1, \ldots, l, \quad s = 1, \ldots, m. \tag{54}$$

Рассмотрим при каждом фиксированном значении $s$, $1 \leqslant s \leqslant \mu$, систему из $l$ линейных однородных уравнений (54) относительно $l$ величин $u_{1, s}, \ldots, u_{l, s}$. Ввиду того что детерминант этой системы есть детерминант $\Delta_0(z)$, а $\Delta_0(z) \not\equiv 0$, то система имеет лишь тривиальное решение. В силу равенств (53), это означает, что выполняются соотношения

$$u_{i, s} = y_{i, s} + \sum_{j=l+1}^{m} D_{i, j} y_{j, s} = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \quad s = 1, \ldots, \mu. \tag{55}$$

При каждом фиксированном значении $i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, равенства (55) составляют систему из $\mu$ линейных уравнений относительно $\mu$ функций $D_{i, j}$, $j = l+1, \ldots, m$. При любом значении $i$ эта система будет иметь единственное решение, если ее детерминант

$$\lambda = | y_{j, s} |, \quad j = l+1, \ldots, m, \quad s = 1, \ldots, \mu, \tag{56}$$

не равен тождественно нулю по $z$.

Предположим противное, т. е. что детерминант $\lambda$ равен тождественно нулю по $z$, и рассмотрим детерминант $\sigma$ матрицы (52). Зафиксируем какое-либо значение $i$, $1 \leqslant i \leqslant l$, и сложим строку детерминанта $\sigma$ с номером $i$ со строками с номерами $l+1, \ldots, m$, умножив предварительно каждую из них с номером $j$, $j = l+1, \ldots, m$, соответственно на $D_{i, j}$. Ввиду соотношений (55), после этого в $i$-й строке детерминанта $\sigma$ первые $\mu$ элементов будут нулями. Проделав это при всех значениях $i$, $i = 1, \ldots, l$, мы получим, что в детерминанте $\sigma$ в левом верхнем углу будет расположен прямоугольный ящик из $l$ строк и $\mu$ столбцов, все элементы которого равны нулю. Итак, первые $\mu$ столбцов детерминанта $\sigma$ состоят из указанного ящика, целиком заполненного нулями, а под ним расположен квадратный ящик из $\mu$ строк и столбцов, детерминант из элементов которого $\lambda$ равен тождественно нулю по $z$. Поэтому, по теореме Лапласа, детерминант $\sigma$ матрицы (52) равен тождественно нулю по $z$. Но это для детерминанта матрицы фундаментальной системы решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений невозможно.

Полученное противоречие доказывает, что детерминант $\lambda$ отличен от нуля и, следовательно, все функции $D_{i, j}$, $i = 1, \ldots, l$, $j = l+1, \ldots, m$, определяются единственным образом из уравнений (55), независимо от выбора матрицы фундаментальной системы решений (52), обладающей необходимыми нам свойствами. Заметим, что матрицу (52) мы можем выбирать различными способами, но не произвольно. Выбор ее связан с выбором линейной формы $R_1$.

Рассмотрим матрицу

$$\| y_{i, s} \|, \quad i = 1, \ldots, l, \quad s = 1, \ldots, \mu, \tag{57}$$

и обозначим через $\lambda_{i, j}$ детерминант, который получается из детерминанта (56), если в нем заменить строку

$$y_{j, 1}, \ldots, y_{j, \mu}, \quad l+1 \leqslant j \leqslant m,$$

на строку матрицы (57)

$$y_{i, 1}, \ldots, y_{i, \mu}, \quad 1 \leqslant i \leqslant l.$$

Тогда из уравнений (55) находим:

$$D_{i, j} = -\frac{\lambda_{i, j}}{\lambda}, \quad \lambda \not\equiv 0, \quad i = 1, \ldots, l, \quad j = l+1, \ldots, m. \tag{58}$$

Пусть

$$\| y^*_{i,\,k} \|, \quad i, k = 1, \ldots, m, \tag{59}$$

– любая, но фиксированная матрица фундаментальной системы решений системы дифференциальных уравнений (25). Из прямоугольной матрицы

$$\| y^*_{j,\,k} \|, \quad j = l+1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{60}$$

можно составить

$$m_1 = C_m^{m-l} = \frac{m!}{(m-l)!\, l!}$$

иноров порядка $\mu$. Занумеруем их любым способом и обозначим через

$$\psi_1(z), \ldots, \psi_{m_1}(z). \tag{61}$$

Если в матрице (60) заменить строку

$$y^*_{j,\,1}, \ldots, y^*_{j,\,m}, \quad l+1 \leqslant j \leqslant m,$$

на строку матрицы (59)

$$y^*_{i,\,1}, \ldots, y^*_{i,\,m}, \quad 1 \leqslant i \leqslant l,$$

то из полученной таким образом матрицы аналогично можно составить $m_1$ миноров порядка $\mu$. Занумеруем их произвольным образом и обозначим через

$$\varphi_{i,\,j,\,1}(z), \ldots, \varphi_{i,\,j,\,m_1}(z), \quad 1 \leqslant i \leqslant l, \quad l+1 \leqslant j \leqslant m. \tag{62}$$

Выбранная нами матрица (52) отличается от фиксированной матрицы (59) матричным множителем

$$\| c_{k,\,s} \|, \quad k,\ s = 1, \ldots, m, \tag{63}$$

где квадратная матрица (63) имеет своими элементами постоянные числа $c_{k,\,s}$ и такова, что ее детерминант отличен от нуля. Поэтому

$$\| y_{i,\,s} \|_{i,\ s=1,\ldots,\ m,} = \| y_{i,\,k} \|_{i,k=1,\ldots,m} \| c_{k,\,s} \|_{k,\ s=1,\ldots,\ m,} =$$
$$= \Big\| \sum_{k=1}^{m} y^*_{i,\,k} c_{k,\,s} \Big\|_{i,\ s=1,\ldots,\ m}. \tag{64}$$

Рассмотрим соответствующие равенства (58), выражающие исследуемую совокупность рациональных функций $D_{i,\,j}$ через элементы матрицы (52). Пользуясь равенствами (64), для знаменателя $\lambda$ равенств (58) получим выражение:

$$\lambda = | y_{j,\,s} | = \Big| \sum_{k=1}^{m} y^*_{j,\,k} c_{k,\,s} \Big|, \quad j = l+1, \ldots, m, \quad s = 1, \ldots, \mu. \tag{65}$$

Детерминант в правой части равенств (65) можно рассматривать как детерминант произведения двух прямоугольных матриц:

$$\| y_{j,\,k} \|, \quad j = l+1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{66}$$

$$\| c_{k,\,s} \|, \quad k = 1, \ldots, m, \quad s = 1, \ldots, \mu. \tag{67}$$

По известной формуле Бине — Коши, этот детерминант равен сумме произведений всевозможных миноров максимального $\mu$-го порядка матрицы (66) на соответствующие миноры того же порядка матрицы (67). Поэтому, пользуясь обозначениями (61), мы можем написать, что

$$\lambda = \sum_{k=1}^{m_1} \beta_k \psi_k(z), \quad \lambda \not\equiv 0,$$

где постоянные $\beta_1, \ldots, \beta_{m_1}$ — однородные выражения измерения $\mu$ от элементов матрицы (67).

Аналогичным образом, используя обозначения (62), получим:

$$-\lambda_{i,\,j} = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_{i,\,j,\,k}\,\varphi_{i,\,j,\,l}(z), \quad i=1,\ldots,l, \quad j=l+1,\ldots,m,$$

где постоянные $\alpha_{i,\,j,\,k}$ — также однородные выражения измерения $\mu$ от элементов матрицы (67). Следовательно, равенства (58) принимают вид:

$$D_{i,\,j} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m_1} \alpha_{i,\,j,\,k}\,\varphi_{i,\,j,\,k}(z)}{\sum\limits_{k=1}^{m_1} \beta_k \psi_k(z)}, \quad i=1,\ldots,l, \quad j=l+1,\ldots,m, \tag{68}$$

$$\sum_{k=1}^{m_1} \beta_k \psi_k(z) \not\equiv 0.$$

Рассматривая всевозможные линейные формы $R_1$, сконструированные по лемме 1 при различных значениях $n$, мы можем, вообще говоря, получать различные совокупности рациональных функций $D_{i,\,j}$, причем, быть может, даже соответствующие различным значениям $l$, $1 \leqslant l \leqslant m-1$.

При фиксированной форме $R_1$ совокупность функций $D_{i,\,j}$ зависит еще от выбора минора матрицы (46) с отличным от нуля детерминантом (выбор нумерации функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$). Если такой минор фиксирован, то совокупность функций $D_{i,\,j}$ определяется единственным образом из уравнений (55), независимо от выбора матрицы фундаментальной системы решений (52), обладающей необходимыми нам свойствами. причем эти функции могут быть представлены в виде правых частей равенств (68).

Итак, каковы бы ни были значение $n$ и линейная форма $R_1$, сконструированная по лемме 1, при $l < m$ совокупность функций $D_{i,\,j}$ всегда определяется равенствами (68) при некотором возможном значении $l$ и некоторой возможной нумерации функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$.

Числители и знаменатели правых частей равенств (68) являются линейными комбинациями функций (61) и (62) с постоянными коэффициентами, а функции (61) и (62) являются определенными детерминантами, составленными из фиксированной матрицы (59) фундаментальной системы решений системы дифференциальных уравнений (25), и при фиксированном значении $l$ и фиксированной нумерации функций $f_1(z), \ldots$ $\ldots, f_m(z)$ определяются однозначно; следовательно, они зависят только от функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Но число различных нумераций функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ равно $m!$, а число различных значений $l$ равно $m-1$. Поэтому число возможных различных типов равенств (68) не превосходит $(m-1)\,m!$ и, значит, не зависит от $n$.

При каждом возможном значении $l$ и возможной фиксированной нумерации функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ при помощи равенств (68) мы можем получать, вообще говоря, различные совокупности функций $D_{ij}$, соответствующие различным линейным формам $R_1$, но для них числители и знаменатели правых частей равенств (68) будут отличаться только чис-

ловыми коэффициентами, которые зависят от выбора формы $R_1$ и выбора матрицы (52). Поэтому, применяя к каждой из функций $D_{ij}$ лемму 3, мы получим, что степень этой функции не превосходит некоторого фиксированного натурального числа $v$, зависящего только от функций (61) и (62). Это означает, что число $v$ зависит только от функций $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ и не зависит от числа $n$ и коэффициентов формы $R_1$.

Число всех функций $D_{i,j}$ равно $l(m-l)$ и не превосходит числа $\frac{m^2}{4}$, не зависящего от $n$. Поэтому мы можем обозначить через $v_0$ наибольшее из конечного числа чисел $v$, соответствующих различным возможным значениям $l$, различным способам нумерации функций $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ и всевозможным значениям $i$ и $j$, $i=1,\ldots,l$, $j=l+1,\ldots,m$. Тогда мы получим, что, какова бы ни была линейная форма $R_1$, сконструированная по лемме 1 при любом значении $n$, при $l<n$ степени всех рациональных функций $D_{i,j}$, определяемых равенствами (48) и (68), не превосходят фиксированного натурального числа $v_0$, зависящего только от совокупности функций $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ и не зависящего от числа $n$.

Этим доказано утверждение, сформулированное после равенств (51).

Вернемся к рассматриваемым прежде приближающим формам $R_1,\ldots,R_l$ и равенствам (50), (51). Подставим в эти равенства вместо переменных $y_1,\ldots,y_m$ функции $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ и обозначим через $T_1=T_1(z)$ общий наименьший знаменатель всех рациональных функций

$$D_{i,j},\quad i=1,\ldots,l,\quad j=l+1,\ldots,m,$$

в случае, если $l<m$, а в случае, когда $l=m$, положим $T_1=1$. Тогда выражения

$$L_i=T_1u_i,\quad i=1,\ldots,l,\quad l\leqslant m, \tag{69}$$

будут линейными формами от переменных $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ с коэффициентами — многочленами от $z$.

В силу линейной независимости функций $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ над полем рациональных функций, из равенств (51) и (69) заключаем, что ни одна из переменных $L_1,\ldots,L_l$ не равна тождественно нулю по $z$. Поэтому мы можем обозначить через $r$ наименьший из порядков нуля при $z=0$ у переменных $L_1,\ldots,L_l$. При $l=m$ имеем $r=p$.

При $l=m$ число $r$ зависит только от функций $f_1(z),\ldots,f_m(z)$, а при $l<m$ — еще от той совокупности рациональных функций $D_{i,j}$, которая определяется уравнениями (55) и равенствами (58). По доказанному выше, степени всех этих функций $D_{i,j}$ не превосходят числа $v_0$. Значит, степени многочленов — коэффициентов всех линейных форм (69) — не превосходят некоторого фиксированного числа, не зависящего от $n$ и выбранной линейной формы $R_1$. Следовательно, при каждом возможном и фиксированном значении $l$ и каждой возможной и фиксированной нумерации функций $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ разложение любой из переменных $L_1,\ldots,L_l$ в степенной ряд по степеням $z$ начинается, по лемме 2, со степени $z$, не превосходящей некоторого фиксированного натурального числа $r'$. Обозначим через $r_0$ наибольшее из конечного числа чисел $r'$, соответствующих каждой из функций $L_1,\ldots,L_l$ при любом возможном значении $l$ и любой возможной нумерации функций $f_1(z),\ldots,f_m(z)$. Тогда,

каково бы ни было значение $n$ и какова бы ни была линейная форма $R_1$, построенная по лемме 1, число $r$ не превосходит фиксированного натурального числа $r_0$, зависящего только от функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ и не зависящего от $n$.

Положим

$$n_0 = r_0 + q\frac{m(m-1)}{2}. \tag{70}$$

Обозначим через $\Delta_{k,i}$ алгебраические дополнения элементов $P_{k,i}$ в детерминанте $\Delta_0$ (47) и умножим обе части каждого из $l$ равенств (50) соответственно на $\Delta_{k,i}$, $k=1,\ldots,l$, при некотором значении $i$. Складывая почленно полученные при этом равенства, мы, очевидно, придем к соотношениям:

$$\Delta_0(z)\,u_i = \sum_{k=1}^{l}\Delta_{k,i}R_k, \quad 1\leqslant i\leqslant l. \tag{71}$$

Умножив обе части равенств (71) на многочлен $T_1$, ввиду 69), получим:

$$\Delta_0(z)\,L_i = T_1\sum_{k=1}^{l}\Delta_{k,i}R_k, \quad 1\leqslant i\leqslant l. \tag{72}$$

Выберем значение $i$, $1\leqslant i\leqslant l$, так, чтобы переменная $L_i$ имела при $z=0$ нуль порядка $r$, и рассмотрим соответствующие из равенств (72).

По лемме 1, линейная форма $R_1$ имеет при $z=0$ нуль, по крайней мере, порядка $(2m-1)n$, а тогда, ввиду равенств (27), форма $R^k$ при $z=0$ имеет нуль порядка не меньше чем $(2m-1)n-k+1$. Поэтому из равенства (72) находим, что детерминант $\Delta_0(z)$ имеет при $z=0$ нуль порядка не меньше чем $(2m-1)n-l-r+1$, и мы можем написать:

$$\Delta_0(z) = z^{(2m-1)n-l-r+1}\Delta_1(z), \quad r\leqslant r_0, \tag{73}$$

где $\Delta_1(z)$ — многочлен от $z$, не равный тождественно нулю по $z$, так как $\Delta_0(z)\not\equiv 0$.

С другой стороны, ввиду равенства (29), многочлены $P_{k,i}$, $k, i=1,\ldots,l$, по лемме 1, имеют степень не выше чем

$$2n-1+(k-1)q.$$

Поэтому степень детерминанта $\Delta_0$ порядка $l$ не превосходит числа

$$(2n-1)l + q\frac{l(l-1)}{2}.$$

Обозначим через $r_1$ степень многочлена $\Delta_1(z)$. Тогда $r_1$ не превосходит числа

$$(2n-1)l + q\frac{l(l-1)}{2} - (2m-1)n + l + r - 1,$$

т. е. выполняются неравенства:

$$0\leqslant r_1\leqslant -2n(m-l)+n+r+q\frac{l(l-1)}{2}-1. \tag{74}$$

Выберем $n\geqslant n_0$, где число $n_0$ определено равенством (70). Так как $r\leqslant r_0$, то правая часть неравенств (74) будет отрицательна, если $m-l\geqslant 1$. Значит, при $n\geqslant n_0$

$$m=l \text{ и } \Delta_0(z)\equiv\Delta(z)\not\equiv 0.$$

Далее, при $l = m$, ввиду того что $r = p$, равенство (73) и неравенства (74) перейдут, соответственно, в равенство (43) и неравенства (44).

Этим все утверждения леммы 6 доказаны полностью.

Нетрудно показать, что в случае линейной зависимости функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ над полем рациональных функций для любой линейной формы $R_1$, сконструированной по лемме 1 при всех достаточно больших значениях $n$, детерминант $\Delta$ линейных форм $R_1, \ldots, R_m$ будет тождественно равен нулю по $z$. Мы не приводим доказательства этого утверждения, так как оно не используется в дальнейших рассуждениях, но оно показывает, что лемма 6 до конца решает вопрос об обращении в нуль детерминанта $\Delta$ системы линейных форм $R_1, \ldots, R_m$, из которых форма $R_1$ сконструирована по лемме 1.

## § 7. Переход от функциональных к числовым линейным приближающим формам

До сих пор мы считали функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ произвольными целыми функциями, составляющими решение системы дифференциальных уравнений (25). Теперь будем считать их $E$-функциями с коэффициентами степенных рядов из некоторого алгебраического поля $K$, также составляющими решение системы дифференциальных уравнений (25), в которых числовые коэффициенты рациональных функций $Q_{k,i}(z)$ являются целыми алгебраическими числами из поля $K$.

По лемме 6, при $n \geqslant n_0$ можно построить $m$ линейно независимых функциональных приближающих форм $R_1 = R_1(z), \ldots, R_m = R_m(z)$ от $E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Но числовые линейные приближающие формы $R_1(\alpha), \ldots, R_m(\alpha)$, получающиеся из этих функциональных форм при $z = \alpha$, могут, вообще говоря, оказаться линейно зависимыми. Тем не менее оказывается, что среди достаточно большого числа первых из форм $R_1(\alpha)$, $R_2(\alpha), \ldots$ все же можно выбрать $m$ линейно независимых, как это можно заключить из нижеследующей леммы.

ЛЕММА 7. *Пусть совокупность $E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ удовлетворяет условиям леммы* 6, *число $n_0$ определено равенством* (70), *число $t$ — равенством* (42), *$\alpha$ — любое комплексное число, отличное от нуля и нулей многочлена $T(z)$, а линейная приближающая форма $R_1 = R_1(z)$ сконструирована по лемме* 1 *при любом значении $n \geqslant n_0$. Тогда матрица коэффициентов числовых линейных форм $R_1(\alpha)$, $R_2(\alpha), \ldots, R_{m+t}(\alpha)$* (28)

$$\| P_{k,i}(\alpha) \|, \quad k = 1, \ldots, m+t, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{75}$$

*имеет ранг $m$* [см. ([2])].

Доказательство. Так как выполнены все условия леммы 6, то при $n \geqslant n_0$, по этой лемме, имеют место равенство (43) и неравенства (44).

По условиям леммы 7, число $\alpha$ удовлетворяет условию $\alpha T(\alpha) \neq 0$. Поэтому если многочлен $\Delta(z)$ имеет при $z = \alpha$ нуль порядка $\tau$, то ввиду равенства (43) и неравенств (44), мы имеем:

$$0 \leqslant \tau \leqslant t. \tag{76}$$

Рассмотрим линейные формы $R_1, \ldots, R_m$ и напишем для них соотношения (31):

$$\Delta(z)\, y_i(z) = \sum_{k=1}^{m} \Delta_{k,i}(z) R_k(z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \Delta_{k,1}(z)\,[P_{k,1}(z)\, y_1(z) + \cdots + P_{k,m}(z)\, y_m(z)], \quad i = 1, \ldots, m, \quad (77)$$

которые выполняются тождественно по переменным $y_1 = y_1(z), \ldots$ $\ldots, y_m = y_m(z)$ и $z$. Продифференцируем по $z$ обе части равенства (77) и умножим результат на многочлен $T(z)$. Воспользовавшись при этом равенствами (27), мы получим тождественные по $y_1, \ldots, y_m$ и $z$ соотношения:

$$T(z)\,\Delta'(z)\, y_i(z) + \Delta(z)\, L_{0,1,i} = \sum_{k=1}^{m+1} M_{k,1,i}(z)\, R_k(z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} M_{k,1,i}(z)\,[P_{k,1}(z)\, y_1(z) + \cdots + P_{k,m}(z)\, y_m(z)], \quad i = 1, \ldots, m, \quad (78)$$

где $L_{0,1,i}$ — некоторые линейные формы от переменных $y_1, \ldots, y_m$ с коэффициентами — многочленами от $z$, а $M_{k,1,i}(z)$ — некоторые многочлены от $z$.

Повторяя этот процесс $\tau$ раз, мы придем к тождественным по $y_1, \ldots$ $\ldots, y_m$ и $z$ соотношениям:

$$T^{\tau}(z)\,\Delta^{(\tau)}(z)\, y_k + \sum_{k=0}^{\tau-1} \Delta^{(k)}(z)\, L_{k,\tau,i} = \sum_{k=1}^{m+\tau} M_{k,\tau,1}(z)\, R_k(z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m+\tau} M_{k,\tau,i}(z)\,[P_{k,1}(z)\, y_1(z) + \cdots + P_{k,m}(z)\, y_m(z)], \quad i = 1, \ldots, m, \quad (79)$$

где $L_{k,\tau,i}$ — некоторые линейные формы от переменных $y_1, \ldots, y_m$ с коэффициентами — многочленами от $z$, а $M_{k,\tau,i}(z)$ — некоторые многочлены от $z$.

В силу наших предположений, выполняются равенства:

$$\Delta^{(k)}(\alpha) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \tau - 1,$$

$$T^{\tau}(\alpha)\,\Delta^{(\tau)}(\alpha) = \beta \neq 0.$$

Поэтому если в соотношениях (79) положить $z = \alpha$ и обозначить $M_{k,\tau,i}(\alpha) = \beta_{k,i}$, то они примут вид:

$$\beta y_i(\alpha) = \sum_{k=1}^{m+\tau} \beta_{k,i}\,[P_{k,1}(\alpha)\, y_1(\alpha) + \cdots + P_{k,m}(\alpha)\, y_m(\alpha)], \quad \beta \neq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \quad (80)$$

Но $y_1(z), \ldots, y_m(z)$ — произвольное решение системы дифференциальных уравнений (25), а тогда равенства (80) показывают, что переменные $y_1(\alpha), \ldots, y_m(\alpha)$ представляются как линейные комбинации $m + \tau$ линейных форм

$$P_{k,1}(\alpha)\, y_1(\alpha) + \cdots + P_{k,m}(\alpha)\, y_m(\alpha), \quad k = 1, \ldots, m + \tau.$$

ак как число $\tau$ удовлетворяет неравенствам (76), то отсюда следует, го ранг матрицы (75) действительно равен $m$. Лемма доказана.

Коэффициенты степенных рядов $E$-функций $f_0(z), \ldots, f_m(z)$ и многоенов $T(z)$ и $TQ_{k,i}(z)$, $k, i = 1, \ldots, m$, принадлежат некоторому полю . Из леммы 1 и соотношений (29) следует, что и коэффициенты всех ногочленов $P_{k,i}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, \ldots, m$, также принадлежат полю . Рассматривая произвольное алгебраическое число $\alpha$, мы всегда можем итать алгебраическое поле $K$ таким, что к нему принадлежат не только эффициенты степенных рядов функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, но и число $\alpha$.

Сформулированная ниже лемма дает необходимые в дальнейшем оценки личин $|P_k(\alpha)|$ и $|\overline{P_{k,i}(\alpha)}|$ в любой алгебраической точке $\alpha$ из поля $K$.

ЛЕММА 8 [см. [2], [3]]. *Пусть линейная форма $R_1 = R_1(z)$ (26) онструирована по лемме 1, коэффициенты степенных рядов $E$-функций $(z), \ldots, f_m(z)$ и число $\alpha$ принадлежат алгебраическому полю $K$, а число определено равенством* (42). *Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для всякого значея $k$, удовлетворяющего неравенству $k \leqslant m + t$, для значений линейлх форм $R_k(z)$* (27) — (28) *и их коэффициентов $P_{k,i}(z)$ имеют место отношения:*

$$|R_k(\alpha)| = O\left[n^{-(2m-5-\varepsilon)n}\right], \tag{81}$$

$$|\overline{P_{k,i}(\alpha)}| = O\left[n^{(3+\varepsilon)n}\right], \quad i = 1, \ldots, m. \tag{82}$$

## § 8. Ранг совокупности чисел $f_1(z), \ldots, f_m(z)$

Будем говорить, что совокупность $m$ комплексных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ меет ранг $r$ относительно алгебраического поля $K$, если среди них меется $r$ и только $r$ чисел, линейно независимых над полем $K$, или, ругими словами, что эти числа связаны ровно $m - r$ линейно независимыми над полем $K$ линейными однородными уравнениями вида

$$\sum_{i=1}^{m} c_{k,i}\, \alpha_i = 0, \quad k = 1, \ldots, m - r,$$

коэффициентами из поля $K$.

ЛЕММА 9. *Пусть совокупность $E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ является шением системы линейных однородных дифференциальных уравнений* (25) *линейно независима над полем рациональных функций, а коэффициенты тепенных рядов этих функций и число $\alpha$ принадлежат к алгебраиюму полю $K$ степени $h$ над полем рациональных чисел, причем $\alpha T(\alpha) \neq 0$. огда ранг $m$ чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ относительно поля $K$ не меньше м $\frac{m}{2h}$* [см. [2]].

Доказательство. Пусть ранг совокупности чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ тносительно поля $K$ равен $r$. Точка $\alpha$ не является особой точкой коэфициентов системы дифференциальных уравнений (25). Поэтому среди исел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ имеются отличные от нуля. Отсюда следует, что $\geqslant 1$. Если $r = m$, то лемма выполняется. Если же $r < m$, то имеют есто ровно $m - r$ соотношений

$$L_k = \sum_{i=1}^{m} c_{k,i} f_i(\alpha) = 0, \quad k = r + 1, \ldots, m, \tag{83}$$

где $L_{r+1}, \ldots, L_m$ — линейно независимые линейные формы от величин $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ с коэффициентами $c_{k,i}$ — целыми числами из поля $K$, причем

$$\overline{|c_{k,i}|} < c, \quad k = r+1, \ldots, m, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{84}$$

где $c$ — постоянная.

Пусть $R_1$ — какая-либо линейная форма от функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$, сконструированная по лемме 1 при $n \geqslant n_0$. Рассмотрим линейные формы $R_1, \ldots, R_{m+t}$. Ввиду условий леммы 9, согласно лемме 7, матрица (75) для этих форм имеет ранг $m$ и поэтому среди числовых линейных приближающих форм $R_1(\alpha), \ldots, R_{m+t}(\alpha)$ имеется $m$ линейно независимых. Тогда среди этих линейных форм можно выбрать $r$ форм, например, при $s = s_1, \ldots, s_r$ так, что эти $r$ форм

$$R_s(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} P_{s,i}(\alpha) f_i(\alpha), \quad s = s_1, \ldots, s_r, \quad s_k \leqslant m+t, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{85}$$

вместе с $m-r$ линейными формами (83) были бы линейно независимы.

Выберем целое рациональное число $a$ так, чтобы число $a\alpha$ было целым числом поля $K$. Из равенств (29) и леммы 1 следует, что многочлены $P_{k,i}(z)$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots$, имеют степень не выше, чем $2n - 1 + (k-1)q$. Поэтому если положить

$$g = 2n - 1 + q(m+t-1) = (q+2)n + O(1) = O(n), \tag{86}$$

то числа $a^g P_{k,i}(\alpha)$, $k = 1, \ldots, m+t$, $i = 1, \ldots, m$, будут целыми числами поля $K$. Если обозначить

$$L_k = a^g R_{s_k}(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} a^g P_{s_k,i}(\alpha) f_1(\alpha), \quad s_k \leqslant m+t, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{87}$$

то $m$ линейных форм $L_1, \ldots, L_m$ вида (87) и (83) будут линейно независимыми линейными формами от величин $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ с коэффициентами — целыми числами поля $K$.

Обозначим через $\delta$ детерминант из $m^2$ коэффициентов $a^g P_{s_k,i}(\alpha)$, $k = 1, \ldots, r$, $i = 1, \ldots, m$, и $c_{k,i}$, $k = r+1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, m$, линейных форм $L_1, \ldots, L_m$, а через $\delta_{k,i}$ — алгебраическое дополнение элемента $k$-й строки и $i$-го столбца в этом детерминанте. Так как все коэффициенты линейных форм $L_1, \ldots, L_m$ — целые числа поля $K$, то $\delta$ — целое число из поля $K$. Умножая линейные формы $L_k$, $k = 1, \ldots, m$, соответственно на $\delta_{k,i}$ при некотором значении $i$ и складывая результаты умножения, мы, в силу равенств (87) и (83), придем к соотношениям:

$$\delta f_i(\alpha) = \sum_{k=1}^{r} \delta_{k,i} L_k(\alpha), \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{88}$$

При любом $\varepsilon > 0$, по лемме 8, имеют место оценки:

$$R_{s_k}(\alpha) = O\left[n^{-\left(2m-5-\frac{\varepsilon}{2}\right)n}\right], \quad k = 1, \ldots, r, \tag{89}$$

$$P_{s_k}(\alpha) = O\left[n^{\left(3+\frac{\varepsilon}{2}\right)n}\right], \quad k = 1, \ldots, r, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{90}$$

так как значения $s_1, \ldots, s_r$ не превосходят числа $m+t$.

П, и помощи равенств (87), (83), (86), (90) и неравенства (84) полуаем оценку:

$$|\delta_{\kappa,i}| < m^m c^{m-r} \left\{a^{O(n)} O\left[n^{\left(3+\frac{\varepsilon}{2}\right)n}\right]\right\}^{r-1} = O\left[n^{(3+\varepsilon)(r-1)n}\right],$$

$$k = 1, \ldots, r, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{91}$$

, аналогично,

$$|\overline{\delta}| = O\left[n^{(3+\varepsilon)rn}\right]. \tag{92}$$

Выберем число $i$ так, чтобы $f_i(\alpha) \neq 0$. Тогда из соответствующего из авенств (88) при помощи равенств (87) и оценок (86), (89) и (91) находим:

$$|\delta| \leqslant \frac{1}{|f_i(\alpha)|} \sum_{k=1}^{r} |\delta_{k,i}| \, |L_k(\alpha)| = \frac{a^g}{|f_i(\alpha)|} \sum_{k=1}^{r} |\delta_{k,i}| \, |R_{s_k}(\alpha)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{ma^{O(n)}}{|f_i(\alpha)|} O\left[n^{(3+\varepsilon)(r-1)n}\right] O\left[n^{-\left(2m-5-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right], \tag{93}$$

ткуда

$$\delta = O\left[n^{[(3+\varepsilon)r-2(m-1)]n}\right]. \tag{94}$$

Равенства (92) и (94) дают:

$$N(\delta) = O\left[n^{[(3+\varepsilon)rh-2(m-1)]n}\right], \tag{95}$$

се $N(\delta)$ — норма целого алгебраического числа $\delta$ в поле $K$. Но норма елого алгебраического числа является целым рациональным числом, а ак как, в силу линейной независимости линейных форм $L_1(\alpha), \ldots, L_m(\alpha)$, детерминант $\delta$ отличен от нуля, то должно выполняться неравенство

$$|N(\delta)| \geqslant 1. \tag{96}$$

Из равенства (95) и неравенства (96) получаем, что при достаточно ольшом значении $n$ должно выполняться неравенство

$$(3+\varepsilon)rh - 2(m-1) > 0,$$

в силу произвольности числа $\varepsilon$, — неравенство

$$r \geqslant \frac{2m-2}{3h}. \tag{97}$$

Из неравенства (97) утверждение леммы следует для $m \geqslant 4$, так как этом случае

$$2m - 2 \geqslant \frac{3}{2} m.$$

ли $m = 3$, то неравенство (97) дает, что $r \geqslant \frac{4}{3h}$, а это для целых $r$ $h$ означает, что $r \geqslant \frac{3}{2h}$. В оставшихся случаях $m = 1,2$ утверждение ммы тривиально, ввиду неравенства $r \geqslant 1$. Этим доказательство леммы вершено.

Доказанная лемма утверждает, что в случае линейной независимости нкций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ над полем рациональных функций числа $f_1(\alpha), \ldots$ $\ldots, f_m(\alpha)$ не могут быть связаны слишком большим числом линейно

независимых линейных однородных уравнений. Это утверждение является центральным в рассматриваемом методе. Его непосредственным следствием будут общие теоремы об алгебраической независимости значений $E$-функций.

## § 9. Некоторые свойства алгебраических уравнений между целыми функциями

ЛЕММА 10. *Пусть совокупность целых функций* $f_1(z)\ldots, f_l(z)$, $l \geqslant 1$, *коэффициенты степенных рядов которых по степеням* $z$ *принадлежат алгебраическому полю* $K$, *связана алгебраическим уравнением*

$$P[f_1(z), \ldots, f_l(z), z] = 0, \tag{98}$$

*где* $P[y_1, \ldots, y_l, z]$ — *многочлен от* $l+1$ *независимых переменных* $y_1, \ldots, y_l$ *и* $z$, *не равный тождественно нулю по этим переменным, с коэффициентами — комплексными числами. Тогда числовые коэффициенты левой части уравнения* (98) *могут быть выбраны целыми числами из поля* $K$.

Доказательство. Рассмотрим числовые коэффициенты в левой части уравнения (98) как неизвестные величины и подставим в нее вместо функций $f_1(z), \ldots, f_l(z)$ их степенные ряды по степеням $z$, после чего приравняем нулю коэффициенты при различных степенях $z$. В результате мы получим систему счетного числа линейных однородных уравнений относительно конечного числа неизвестных величин — числовых коэффициентов левой части уравнения (98). Коэффициенты каждого из этих линейных однородных уравнений будут числами поля $K$ и после умножения обеих частей этих уравнений на соответственно подобранные целые рациональные числа могут быть выбраны целыми числами из поля $K$. Поэтому и числовые коэффициенты левой части уравнения (98) могут быть выбраны целыми числами из поля $K$.

ЛЕММА 11. *Пусть совокупность целых функций* $f_1(z), \ldots, f_l(z)$, $l \geqslant 1$, *коэффициенты степенных рядов которых по степеням* $z$ *принадлежат алгебраическому полю* $K$, *алгебраически зависима в поле рациональных функций, а* $\alpha$ — *любое алгебраическое число. Тогда* $l$ *чисел* $f_1(\alpha), \ldots, f_l(z)$ *алгебраически зависимы.*

Доказательство. Если функции $f_1(z), \ldots, f_l(z)$ алгебраически зависимы в поле рациональных функций от $z$, то они связаны алгебраическим уравнением

$$P[f_1(z), \ldots, f_l(z), z] = \sum_{0 \leqslant k_1 + \cdots + k_l \leqslant k} P_{k_1, \ldots, k_l}(z)\, f_1^{k_1}(z) \cdots f_l^{k_l}(z) = 0, \tag{99}$$

где можно считать, что $P[y_1, \ldots, y_l, z]$ — неприводимый многочлен от $l+1$ независимых переменных $y_1, \ldots, y_l$ и $z$ с коэффициентами — комплексными числами степени $k$ по совокупности переменных $y_1, \ldots, y_l$, $k \geqslant 1$; $P_{k_1, \ldots, k_l}(z)$ — многочлены от $z$, в совокупности отличные от нуля и взаимно простые, а суммирование в правой части распространяется на всевозможные неотрицательные значения индексов $k_1, \ldots, k_l$, удовлетворяющие указанным неравенствам.

Применяя лемму 10, можно считать, что числовые коэффициенты многочлена $P[y_1, \ldots, y_l, z]$, а следовательно, и всех многочленов $P_{k_1,\ldots,k_l}(z)$ — алгебраические числа.

Пусть $\alpha$ — любое алгебраическое число. Положим в уравнении (99) $z=\alpha$. Тогда это уравнение перейдет в нетривиальное алгебраическое уравнение между числами $f_1(\alpha), \ldots, f_l(\alpha)$ с алгебраическими коэффициентами, так как хотя бы одно из чисел $P_{k_1,\ldots,k_l}(\alpha)$ отлично от нуля, ввиду того что, по предположению, многочлены $P_{k_1,\ldots,k_l}(z)$ взаимно просты в совокупности. Лемма доказана.

Замечание. Из доказательства леммы 11 ясно, что если функции $f_1(z), \ldots, f_l(z)$ связаны однородным относительно этих функций уравнением вида (99), то и числа $f_1(\alpha), \ldots, f_l(\alpha)$ связаны однородным алгебраическим уравнением.

## § 10. Совокупность произведений степеней рассматриваемых функций

ЛЕММА 12. *Пусть совокупность целых функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ с коэффициентами степенных рядов из алгебраического поля $K$ составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка (2), коэффициенты которых $Q_{k,i}(z)$ — рациональные функции от $z$ с целыми алгебраическими коэффициентами из поля $K$. Тогда совокупность*

$$\mu_{N,m} = C_{N+m}^{m} = \frac{(N+m)!}{N!\,m!}$$

*произведений степеней этих функций*

$$v_{k_1,\ldots,k_m} = f_1^{k_1}(z)\cdots f_m^{k_m}(z), \quad 0 \leqslant k_1 + \cdots + k_m \leqslant N,$$
$$k_i > 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{100}$$

*где показатели $k_1, \ldots, k_m$ принимают всевозможные неотрицательные значения, удовлетворяющие выписанным неравенствам, а $N$ — любое натуральное число, является решением системы линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка вида (25), в которой число $m$ заменено числом $\mu_{N,m}$. Коэффициенты уравнений этой системы являются рациональными функциями с целыми алгебраическими коэффициентами из поля $K$ и не могут иметь полюсов, отличных от полюсов коэффициентов системы дифференциальных уравнений (2).*

Доказательство. Дифференцируя функции (100), мы получим соотношения:

$$v'_{k_1,\ldots,k_m} = \sum_{i=1}^{m} k_i f_1^{k_1}(z)\cdots f_m^{k_m}(z)\,\frac{f_i'(z)}{f_i(z)}, \quad 0 \leqslant k_1 + \cdots + k_m \leqslant N. \tag{101}$$

Если в этих соотношениях заменить производные $f_1'(z), \ldots, f_m'(z)$ на правые части соответствующих дифференциальных уравнений из системы (2), то мы получим, что производная каждой из функций совокупности (100) будет линейной комбинацией функций той же совокупности с коэффициентами — рациональными функциями, являющимися линейными однородными выражениями от коэффициентов $Q_{k,i}(z)$ системы дифференциаль-

ных уравнений (2) с целыми рациональными коэффициентами. Это утверждение в случае неоднородности системы (2) будет верно и для производных функций $v_{k_1,\ldots,k_m}$, у которых индексы удовлетворяют условию

$$k_1 + \cdots + k_m = 1,$$

если в правые части соответствующих уравнений (101) ввести функцию $v_{0,\ldots,0}$. Отсюда и следует утверждение леммы.

Замечание. Лемма 12 останется, очевидно, справедливой и для совокупности

$$\rho_{N,m} = C_{N+m-1}^{m-1} = \frac{(N+m-1)!}{N!\,(m-1)!}$$

однородных произведений степеней рассматриваемых функций

$$v_{k_1,\ldots,k_m} = f_1^{k_1}(z)\cdots f_m^{k_m}(z), \quad k_1 + \cdots + k_m = N, \tag{102}$$

если только совокупность функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка (25).

## § 11. Доказательство теорем

Необходимость условия основной теоремы следует из леммы 11. Докажем достаточность условия этой теоремы.

Пусть $\alpha$ — любое алгебраическое число, отличное от нуля и полюсов системы дифференциальных уравнений (2). Допустим, что при условиях основной теоремы числа $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ алгебраически зависимы. Тогда существует многочлен $P(y_1, \ldots, y_m)$ с алгебраическими коэффициентами от $m$ переменных $y_1, \ldots, y_m$, не равный тождественно нулю по тем же переменным, такой, что имеет место уравнение

$$P[f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)] = 0. \tag{103}$$

Обозначим степень этого многочлена по совокупности переменных $y_1, \ldots, y_m$ через $k$, где $k \geqslant 1$.

Мы можем считать, что алгебраическое поле, к которому принадлежат коэффициенты степенных рядов $E$-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ и все числовые коэффициенты рациональных функций $Q_{k,i}(z)$ в системе дифференциальных уравнений (2), таково, что к нему также принадлежат числовые коэффициенты многочлена $P(y_1, \ldots y_m)$ и число $\alpha$.

Считая натуральное число $N$ произвольным, напишем $\mu_{N-k,\,m}$ выражений

$$f_1^{k_1}(z)\ldots f_m^{k_m}(z)\,P[f_1(z), \ldots, f_m(z)]. \tag{104}$$

Каждое из этих выражений является линейной формой от переменных (100) — произведений степеней функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ с коэффициентами — числами из поля $K$, причем эти линейные формы, очевидно, линейно независимы. Положив в выражениях (104) $z = \alpha$, мы, ввиду уравнения (103), получим $\mu_{N-k,\,m}$ линейно независимых линейных однородных уравнений между $\mu_{N,\,m}$ числами

$$f_1^{k_1}(\alpha)\ldots f_m^{k_m}(\alpha), \quad 0 \leqslant k_1 + \ldots + k_m \leqslant N, \quad k_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{105}$$

с коэффициентами из поля $K$.

С другой стороны, по условиям основной теоремы, функции $f_1(z), \ldots$ , $f_m(z)$ алгебраически независимы над полем рациональных функций. ачит, при любом значении $N$ совокупность функций (100) линейно независима в поле рациональных функций и, ввиду леммы 12, удовлетворяет эм условиям леммы 9, если в последней заменить число $m$ числом $\mu_{N,m}$. ак как число $\alpha$ не является особой точкой системы дифференциальных уравнений (2), то, по лемме 12, $\alpha$ не является особой точкой сиемы дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет совокупность нкций (100). Поэтому, по лемме 9, ранг совокупности чисел (105) отсительно поля $K$ не меньше, чем $\frac{\mu_{N,m}}{2h}$, где $h$ — степень поля $K$. Отэда следует, что выполняется неравенство:

$$\mu_{N,m} - \mu_{N-k,m} \geqslant \frac{\mu_{N,m}}{2h}. \tag{106}$$

о оценки

$$\mu_{N,m} = C_{N,m}^{m} = \frac{(N+m)!}{N!\,m!} = \frac{1}{m!}N^m + O(N^{m-1}),$$

$$\mu_{N,m} - \mu_{N-k,m} = \frac{(N+m)!}{N!\,m!} - \frac{(N-k+m)!}{(N-k)!\,m!} = O(N^{m-1})$$

оказывают, что неравенство (106) при достаточно большом значении $N$ оотиворечиво.

Полученное противоречие полностью завершает доказательство основой теоремы.

Докажем теперь теорему 3. При $m=1$, как мы заметили в § 2, орема тривиально справедлива. Пусть $m>1$. Необходимость условия ой теоремы следует из леммы 11 и замечания к ней. Доказательство статочности условия теоремы 3 аналогично доказательству основной оремы с той лишь разницей, что вместо совокупности функций (100) ассматривается совокупность

$$\rho_{N,m} = \mu_{N,m-1} = C_{N+m-1}^{m-1} = \frac{(N+m-1)!}{N!\,(m-1)!}$$

нородных произведений функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ вида (102).

Пусть $\alpha$ — любое алгебраическое число, отличное от нуля и полюсов стемы дифференциальных уравнений (25). Допустим, что имеет место равнение (103), левая часть которого — однородный многочлен степени $k$, $\geqslant 1$, от $m$ переменных с алгебраическими коэффициентами. Коэффициты этого многочлена и число $\alpha$ мы будем считать принадлежащими алгебраическому полю $K$, к которому принадлежат коэффициенты епенных рядов рассматриваемых $E$-функций и коэффициенты всех рациольных функций $Q_{k,i}(z)$ в системе дифференциальных уравнений (25).

В силу уравнения (103), при любом натуральном $N$ мы имеем $\rho_{N-k,m}$ нейно независимых линейных однородных уравнений

$$f_1^{k_1}(\alpha)\ldots f_m^{k_m}(\alpha)\,P\,[f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)] = 0, \quad k_1 + \ldots + k_m = N-k,$$

носительно $\rho_{N,m}$ величин (102) с коэффициентами из поля $K$. Но, по ловиям теоремы 3, между функциями $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ невозможно нородное алгебраическое уравнение с коэффициентами — многочленами $z$. Поэтому при любом значении $N$ совокупность функций (102) линейно зависима в поле рациональных функций и, ввиду леммы 12 и замечания

к ней, удовлетворяет всем условиям леммы 9 с заменой в ней числа $m$ числом $\rho_{N,m}$. По этой лемме, ранг совокупности чисел (102) не меньше, чем $\frac{\rho_{N,m}}{2h}$, где $h$ — степень поля $K$. Следовательно, мы приходим к неравенству

$$\rho_{N,m} - \rho_{N-k,m} \geqslant \frac{\rho_{N,m}}{2h},$$

которое вместе с оценками

$$\rho_{N,m} = \frac{(N+m-1)!}{N!\,(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} N^{m-1} + O(N^{m-1}),$$

$$\rho_{N,m} - \rho_{N-m,m} = O(N^{m-2})$$

при достаточно большом значении $N$ противоречиво. Теорема доказана.

Поступило
20. III. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Siegel C., Über einige Anwendungen Diophantische Approximationen, Abh. Preuss, Acad. Wiss., №1 (1929—30), 1—70.
[2] Siegel C., Transcendental numbers, Princeton, 1949.
[3] Гельфонд А. О., Алгебраические и трансцендентные числа, Москва, 1952.
[4] Hermite C., Sur la fonction exponentiele, C. R., Acad. Sci., Paris, 77 (1873), 18—24, 74—97, 226—233, 285—293.
[5] Lindemann F., Über die Zahl $\pi$, Math. Ann., 20 (1882), 213—225.
[6] Thue A., Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, J. reine u. angew. Math., 135 (1909), 284—305.
[7] Шидловский А. Б., О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов, Доклады Ак. наук СССР, 96, № 4 (1954), 697—699.
[8] Шидловский А. Б., О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций, Доклады Ак. наук СССР, 100, №2 (1955), 221—224.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 67—92

СУНЬ ЮН-ШЕН

# О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе устанавливается точная верхняя грань наилучших приближений тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ периодических функций классов $W^{(r)}$ и $\widetilde{W}^{(r)}$ при $r \geqslant 6$.

## § 1. Введение

Пусть $W^{(r)}$ $(r > 0)$ есть класс непрерывных функций $f(x)$ с периодом $2\pi$, имеющих $r$-ю производную $f^{(r)}(x)$ в смысле Вейля, удовлетворяющую условию

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |f^{(r)}(x)| \leqslant 1,$$

$\widetilde{W}^{(r)}$ $(r > 0)$ — класс непрерывных функций $f(x)$ с периодом $2\pi$, для которых

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} |\widetilde{f}^{(r)}(x)| \leqslant 1,$$

где $\widetilde{f}(x)$ — функция, сопряженная с $f(x)$.

Известно, что функция $f(x)$ принадлежит классу $W^{(r)}$ в том и только том случае, если она представляется в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_r(t-x)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1.1}$$

где

$$K_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(kt - \frac{\pi r}{2}\right),$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |\varphi(t)| \leqslant 1, \qquad \int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt = 0, \tag{1.2}$$

и $f(x)$ принадлежит классу $\widetilde{W}^{(r)}$, если она представляется в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{K}_r(t-x)\,\varphi(t)\,dt, \tag{1.3}$$

где

$$\widetilde{K}_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \sin\left(kt - \frac{\pi r}{2}\right),$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} |\varphi(t)| \leqslant 1, \quad \int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt = 0. \tag{1.4}$$

Задача о нахождении точного значения величин

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)})_c = \sup_{f \in W^{(r)}} E_n(f)_c, \tag{1.5}$$

где

$$E_n(f)_c = \min_{T_{n-1}} \max_x |f(x) - T_{n-1}(x)|,$$

а $T_{n-1}(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше $n-1$, впервые рассматривалась Ж. Фаваром в 1936 г. при целом $r$. Именно, Ж. Фавар ([11]), ([12]) доказал, что

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)})_c = \sup_{\substack{f \in W^{(r)} \\ f \perp T_{n-1}}} \|f\|_c = \frac{4}{\pi} \frac{K_r}{n^r} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots, \quad r = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.6}$$

где $f \perp T_{n-1}$ означает, что

$$\int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin kt}{\cos kt}\,dt = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

а

$$K_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r-1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Ж. Фаваром ([12]) и, независимо от него, Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном ([1]) было также найдено точное значение величин

$$\mathscr{E}_n(\widetilde{W}^{(r)})_c = \sup_{f \in \widetilde{W}^{(r)}} E_n(f)_c \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.7}$$

снова при целом $r$. Эти исследования были продолжены Б. Надем ([4]), С. М. Никольским ([5]), В. К. Дзядыком ([2]) и С. Б. Стечкиным ([8]). Первый результат, относящийся к настоящей задаче при дробном $r$, принадлежит В. К. Дзядыку, который доказал, что если $f(x) \in W^{(r)}$, то при $0 < r < 1$

$$\mathscr{E}_n(W^{(r)})_c = \sup_{\substack{f \in W^{(r)} \\ f \perp T_{n-1}}} \|f\|_c = \frac{1}{\pi} E(K_r(t))_L = \frac{4}{\pi} \frac{K_r}{n^r} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.8}$$

где

$$E_n(K_r(t))_L = \min_{T_{n-1}} \int_0^{2\pi} |K_r(t) - T_{n-1}(t)|\,dt$$

и

$$K_r = \sin\frac{\pi r}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Объединяя оба случая (1.5) и (1.7), С. Б. Стечкин (8) ввел в рассмотрение класс $W^{(r)}(\alpha)$ всех непрерывных функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(t-x)\varphi(t)\,dt, \tag{1.9}$$

где

$$K(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kt-\frac{\pi\alpha}{2}\right), \tag{1.10}$$

$r>0$, $\alpha$ — любое вещественное число, а $\varphi(t)$ — существенно ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условиям:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|\varphi(t)|\leqslant 1, \quad \int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0.$$

Легко видеть, что $W^{(r)}(r)=W^{(r)}$, а $W^{(r)}(r+1)=\widetilde{W}^{(r)}$.

Рассматривая случай $0<r\leqslant\alpha\leqslant 2-r$, где $0<r<1$, С. Б. Стечкин доказал, что

$$\mathscr{E}_n[W^{(r)}(\alpha)]_c=\sup_{f\in W^{(r)}(\alpha)}E_n(f)_c=\sup_{\substack{f\in W^{(r)}(\alpha)\\ f\perp T_{n-1}}}\|f\|_c=$$

$$=\frac{1}{\pi}E_n(K(t))_L=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{K_{r,\alpha}}{n^r}\quad (n=1,2,3,\ldots), \tag{1.11}$$

где

$$K_{r,\alpha}=\sin\frac{\pi\alpha}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

В качестве следствия он нашел точное значение величин (1.7) при $0<r\leqslant\frac{1}{2}$.

В дальнейшем через $H_\infty$ будем обозначать класс всех существенно ограниченных измеримых функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|\varphi(t)|\leqslant 1.$$

В настоящей работе мы докажем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)\in W^{(r)}(\alpha)$, где $r\geqslant 6$, $\alpha$ — любое действительное число, т. е.*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(t-x)\varphi(t)\,dt,$$

*где*

$$K(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\left(kt-\frac{\pi\alpha}{2}\right),$$

*$\varphi(t)$ — существенно ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условиям:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|\varphi(t)|\leqslant 1, \quad \int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt=0.$$

*Тогда*

$$\mathscr{E}_n[W^{(r)}(\alpha)]_c = \sup_{f\in W^{(r)}(\alpha)} E_n(f)_c = \sup_{\substack{f\in W^{(r)}(\alpha)\\ f\perp T_{n-1}}} \|f\|_c =$$

$$= \frac{1}{\pi} E_n(K)_L = \frac{4}{\pi}\frac{K_{r,\alpha}}{n^r} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.12}$$

*где*

$$K_{r,\alpha} = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|, \tag{1.13}$$

$0 \leqslant \beta < 1$ *и* $\beta\pi$ *есть корень уравнения*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r}} = 0. \tag{1.14}$$

Для классов функций $W^{(r)}$, $\widetilde{W}^{(r)}$ имеют место следующие предложения.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $r \geqslant 6$, $f(x) \in W^{(r)}$; *тогда*

(I)
$$\mathscr{E}_n(W^{(r)})_c = \sup_{f\in W^{(r)}} E_n(f)_c = \sup_{\substack{f\in W^{(r)}\\ f\perp T_{n-1}}} \|f\|_c =$$

$$= \frac{1}{\pi} E_n(K_r(t))_L = \frac{4}{\pi}\frac{K_r}{n^r} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.15}$$

*где*

$$K_r = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|, \tag{1.16}$$

$0 \leqslant \beta < 1$ *и* $\beta\pi$ *есть корень уравнения*

$$H_r(\beta\pi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r}} = 0. \tag{1.17}$$

(II) *Если* $f(x)$ *имеет непрерывную* $r$*-ю производную* $f^{(r)}(x)$, *то*

$$E_n(f)_c \leqslant \frac{4}{\pi}\frac{K_r}{n^r} E_n(f^{(r)})_c \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.18}$$

*где*

$$K_r = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|.$$

*Константа в неравенстве точная.*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $r \geqslant 6$, $f(x) \in \widetilde{W}^{(r)}$; *тогда*

(I)
$$\mathscr{E}_n(\widetilde{W}^{(r)})_c = \sup_{f\in \widetilde{W}^{(r)}} E_n(f)_c = \sup_{\substack{f\in \widetilde{W}^{(r)}\\ f\perp T_{n-1}}} \|f\|_c =$$

$$= \frac{1}{\pi} E_n(\widetilde{K}_r(t))_L = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\widetilde{K}_r}{n^r} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.19}$$

где

$$\widetilde{K}_r = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\widetilde{\beta}\pi - \frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|, \tag{1.20}$$

$\leqslant \widetilde{\beta} < 1$ *и* $\widetilde{\beta}\pi$ *— корень уравнения*

$$\widetilde{H}_r(\widetilde{\beta}\pi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\widetilde{\beta}\pi - \frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r}} = 0. \tag{1.21}$$

(II) *Если* $\widetilde{f}(x)$ *имеет непрерывную* $r$*-ю производную* $\widetilde{f}^{(r)}(x)$, *то*

$$E_n(f)_c \leqslant \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\widetilde{K}_r}{n^r} E_n(\widetilde{f}^{(r)})_c \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1.22}$$

где

$$\widetilde{K}_r = \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\widetilde{\beta}\pi - \frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|.$$

*Константа в неравенстве точная.*

При доказательстве теоремы 1 мы используем методы, развитые . К. Дзядыком в его работе (2). Первые части теорем 2, 3 являются ледствиями теоремы 1. Что касается вторых частей, то они являются ростым следствием общей теоремы, сформулированной в работе (14).

План настоящей работы таков. Центральное место занимает доказательство теоремы 1 при условии $0 \leqslant \alpha < 2$, которое не ограничивает бщности результата. После этого дается доказательство неравенств .18), (1.22). В последнем параграфе, ссылаясь на известную теорему . М. Никольского (5), мы обобщаем полученные результаты на случай, огда рассматриваются приближения в метрике $L_{2\pi}$.

Выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечкину, под руководством оторого выполнена настоящая работа.

## § 2. Исследование функции $H(t)$ при $r > 1$, $0 \leqslant \alpha < 2$

Сначала приведем одну лемму, принадлежащую Фейеру (10).

ЛЕММА 1 (Фейер). *Если коэффициенты ряда косинусов*

$$g(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \cos(2\nu - 1)t$$

*оложительны и трижды монотонно стремятся к нулю, т. е. если*

$$\alpha_\nu \to 0, \quad \alpha_\nu > 0, \quad \Delta\alpha_\nu = \alpha_\nu - \alpha_{\nu+1} \geqslant 0, \quad \Delta^2\alpha_\nu \geqslant 0, \quad \Delta^3\alpha_\nu \geqslant 0,$$

*о*

$$g(t) > 0 \ \text{при} \ 0 < t < \frac{\pi}{2}, \qquad g(t) < 0 \ \text{при} \ \frac{\pi}{2} < t < \pi$$

$g(t)$ *монотонно убывает при* $0 < t < \pi$.

*Если же коэффициенты ряда синусов*

$$h(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \sin(2\nu - 1)t$$

*положительны и монотонно стремятся к нулю, т. е. если*

$$\beta_\nu \to 0, \quad \beta_\nu > 0, \quad \Delta\beta_\nu \geqslant 0,$$

*то* $h(t) \geqslant 0$ *при* $0 < t < \pi$.

ЛЕММА 2. *Пусть* $r > 1$, $0 \leqslant \alpha < 2$ *и*

$$H(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)t - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r}. \tag{2.1}$$

*Тогда:*

1°. *Если* $0 \leqslant \alpha < 1$, *то существует единственное число* $\beta = \beta(r, \alpha)$ *такое, что* $\frac{1}{2} \leqslant \beta < 1$ *и*

$$H(\beta\pi) = H(\overline{\beta+1}\,\pi) = 0.$$

*Функция* $H(t)$ *на периоде* $0 \leqslant t < 2\pi$ *меняет знак только в этих двух точках.*

2°. *Если* $1 \leqslant \alpha < 2$, *то существует единственное число* $\beta = \beta(r, \alpha)$ *такое, что* $0 \leqslant \beta < \frac{1}{2}$ *и*

$$H(\beta\pi) = H(\overline{\beta+1}\,\pi) = 0.$$

*Функция* $H(t)$ *на периоде* $0 \leqslant t < 2\pi$ *меняет знак только в этих двух точках.*

Доказательство*. Допустим, что $0 < \alpha < 1$. Поскольку $H(t+\pi) = -H(t)$, то достаточно рассмотреть функцию $H(t)$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Положив

$$\Phi_r(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos(2\nu+1)t}{(2\nu+1)^r}, \quad \Psi_r(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)t}{(2\nu+1)^r},$$

имеем:

$$H(t) = \cos\frac{\pi\alpha}{2}\,\Phi_r(t) + \sin\frac{\pi\alpha}{2}\,\Psi_r(t).$$

Но, согласно лемме 1, при $0 < t < \frac{\pi}{2}$

$$\Phi_r(t) > 0, \quad \Psi_r(t) > 0.$$

Так как

$$\Phi_r(0) > 0, \quad \Phi_r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \Psi_r(0) = 0, \quad \Psi_r\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0,$$

то $H(t) > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Если $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$, то, согласно лемме 1, $\Phi_r(t)\downarrow$. Но мы имеем также $\Psi_r(t)\downarrow$ при $\frac{\pi}{2} < t < \pi$, так как

$$\Psi'_r(t) = \Phi_{r-1}(t) < 0.$$

Принимая во внимание, что

$$\cos\frac{\pi\alpha}{2} > 0, \quad \sin\frac{\pi\alpha}{2} > 0,$$

* Случаи $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ тривиальны.

ы заключаем, что функция $H(t)$ монотонно убывает в интервале $\cdot < t < \pi$. А так как $H(\pi) = -H(0) < 0$, то отсюда следует, что в нтервале $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ существует единственное число $\beta\pi$, зависящее от и $\alpha$ и такое, что

$$H(\beta\pi) = 0, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1.$$

Функция $H(t)$ меняет знак в этой точке.

Итак, первый случай полностью доказан. Второй случай доказыается аналогично.

Следствие. *Пусть* $r > 1$, $0 \leqslant \alpha < 2$ *и*

$$H_n(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)nt - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r}. \tag{2.2}$$

*огда*

$$\operatorname{sign} H_n(t) = \varepsilon_0 \sin(nt - \beta\pi), \tag{2.3}$$

*де* $\varepsilon_0 = \pm 1$, $0 \leqslant \beta < 1$ *и* $\beta\pi$ *есть корень уравнения* $H(\beta\pi) = 0$.

## § 3. Интерполяционный полином для функции $K(t)$ при $r > 2$, $0 \leqslant \alpha < 2$

Приведем лемму Крейна ([3]), которая нам понадобится в этом параграфе.

ЛЕММА 3 (М. Г. Крейн). *Пусть* $G(t)$ — *суммируемая функция с пеиодом* $2\pi$, $\lambda$ — *любое число, а* $T_{n-1}(t)$ — *тригонометрический полином орядка не выше* $n-1$ *и такой, что* $G(t) - T_{n-1}(t)$ *обращается в нуль точках*

$$\lambda\pi, \left(\lambda + \frac{1}{n}\right)\pi, \ldots, \left(\lambda + \frac{2n-2}{n}\right)\pi.$$

*огда для того чтобы разность* $G(t) - T_{n-1}(t)$ *обращалась в нуль в точке* $\left(\lambda + \frac{2n-1}{n}\right)\pi$, *необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство*

$$\sum_{\nu=0}^{2n-1} (-1)^\nu G\left(\lambda\pi + \frac{\nu\pi}{n}\right) = 0.$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\nu=1}^{2n} (-1)^\nu K\left(t + \frac{\nu-1}{n}\pi\right), \tag{3.1}$$

де функция $K(t)$ определяется формулой (1.10). Легко проверить, что ыражение (3.1) с точностью до знака совпадает с функцией $\frac{2}{n^{r-1}} H_n(t)$ см. (2.2)]. Возьмем все корни функции $H_n(t)$ на периоде $0 \leqslant t < 2\pi$. Это будут точки

$$\frac{\beta\pi}{n}, \left(\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\right)\pi, \ldots, \left(\frac{\beta}{n} + \frac{2n-1}{n}\right)\pi, \tag{3.2}$$

де $0 \leqslant \beta < 1$ и $H(\beta\pi) = 0$. Согласно лемме 3, существует тригонометриеский полином $\overset{*}{U}_{n-1}(t)$ порядка не выше $n-1$ такой, что разность

$$K(t) - \overset{*}{U}_{n-1}(t) \tag{3.3}$$

бращается в нуль в точках (3.2). Построим этот полином.

Положим $nu = nt - \beta\pi$; тогда

$$K(t) = K\left(u + \frac{\beta\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ku + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin ku,$$

где

$$a_k = \frac{\cos\left(\frac{k\beta\pi}{n} - \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{k^r}, \quad b_k = -\frac{\sin\left(\frac{k\beta\pi}{n} - \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{k^r} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Построим интерполяционные полиномы порядка $n-1$ для функций $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ku$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin ku$ с узлами в нулях функции $\sin nu$. Пользуясь интерполяционной формулой Б. Надя [см. ([2]), ([4])], получим:

$$\sum_{j=n}^{\infty} b_j \sin ju - T''_{n-1}(u) = 2 \sin nu \sum_{j=0}^{\infty}{}' c_j \cos ju, \tag{3.4}$$

где

$$c_j = \sum_{i=1}^{\infty} b_{j+(2i-1)n} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

и

$$\sum_{j=n}^{\infty} a_j \cos ju - T'_{n-1}(u) = 2 \sin nu \sum_{j=1}^{\infty} c'_j \sin ju, \tag{3.5}$$

где

$$c'_j = \sum_{i=1}^{\infty} \{a_{(2i-1)n} - a_{j+(2i-1)n}\} = -\sum_{i=1}^{\infty} a_{j+(2i-1)n},$$

поскольку

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{(2i-1)n} = 0.$$

Итак, мы имеем:

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k \cos ku + \sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin ku - \{T'_{n-1}(u) + T''_{n-1}(u)\} =$$

$$= 2 \sin nu \left\{\frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cos ju + \sum_{j=1}^{\infty} c'_j \sin ju\right\} =$$

$$= -2 \sin nu \left\{\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r n^r} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2} + j\frac{\beta\pi}{n}\right]}{[(2\nu+1)n + j]^r} \cos ju +$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu-1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2} + j\frac{\beta\pi}{n}\right]}{[(2\nu-1)n + j]^r} \sin ju \right\} =$$

$$= -2\sin nu\left\{\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu-1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu-1)^r n^r}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+j\left(n+\frac{\beta\pi}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}\right\}=$$

$$= -2\sin nu\left\{\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r n^r}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}\cos jt+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}\sin jt\right\}=-2\sin nuW_n(t),$$

$$W_n(t)=\frac{d_0^{(n)}}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}(d_j^{(n)}\cos jt+d_j^{(n)'}\sin jt),$$

где

$$d_j^{(n)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu-1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu-1)n+j]^r},$$

$$d_j^{(n)'}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu-1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu-1)n+j]^r}\quad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

$$U_{n-1}^{\bullet}(t)=T_{n-1}'\left(t-\frac{\beta\pi}{n}\right)+T_{n-1}''\left(t-\frac{\beta\pi}{n}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}k^{-r}\cos\left(kt-\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

— тригонометрический полином порядка не выше $n-1$.

Для функции $W_n(t)$ имеет место следующая лемма, аналогичная одной лемме Дзядыка (2).

ЛЕММА 4. *Для любых натуральных чисел $m$ и $N$ справедлива формула:*

$$W_m(t)=(2N)^{r-1}\sum_{\nu=0}^{2N-1}W_{2Nm}\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi). \tag{3.6}$$

Доказательство. Имеем:

$$\sum_{\nu=0}^{2N-1}W_{2Nm}\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}{}'\sum_{\nu=0}^{2N-1}\left\{d_j^{(2Nm)}\cos j\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)+d_j^{(2Nm)'}\sin j\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)\right\}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}{}'d_j^{(2Nm)}\sum_{\nu=0}^{2N-1}\cos j\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)+\sum_{j=1}^{\infty}d_j^{(2Nm)'}\sum_{\nu=0}^{2N-1}\sin j\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right).$$

Но

$$\sum_{\nu=0}^{2N-1} \sin j\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)=\begin{cases}0 & \text{при } j \neq 0, 2N, 4N, \ldots, \\ 2N \sin \frac{jt}{2N} & \text{при } j=0, 2N, 4N, \ldots,\end{cases}$$

$$\sum_{\nu=0}^{2N-1} \cos j\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)=\begin{cases}0 & \text{при } j \neq 0, 2N, 4N, \ldots, \\ 2N \cos \frac{jt}{2N} & \text{при } j=0, 2N, 4N, \ldots.\end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_{\nu=0}^{2N-1} W_{2Nm}\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}{}' (2N)\, d_{2Nj}^{(2Nm)} \cos \frac{2Njt}{2N}+\sum_{j=1}^{\infty}(2N)\, d_{2Nj}^{(2Nm)'} \sin \frac{2Njt}{2N}=$$

$$=2N\left\{\sum_{j=0}^{\infty}{}' d_{2Nj}^{(2Nm)} \cos jt+\sum_{j=1}^{\infty} d_{2Nj}^{(2Nm)'} \sin jt\right\},$$

где

$$d_{2Nj}^{(2Nm)'}=\frac{1}{(2N)^r} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu-1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu-1)m+j]^r},$$

$$d_{2Nj}^{(2Nm)}=\frac{1}{(2N)^r} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu-1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu-1)m+j]^r} \quad (j=1, 2, 3, \ldots).$$

При $j=0$ первый коэффициент первого ряда есть

$$\frac{1}{2} d_0^{(2Nm)}=\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2N)^r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r m^r}.$$

Итак,

$$\sum_{\nu=0}^{2N-1} W_{2Nm}\left(\frac{t}{2N}+\frac{\nu\pi}{N}\right)=\frac{1}{(2N)^{r-1}} W_m(t).$$

Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем полагать, что

$$\varepsilon=\operatorname{sign} \sum_{\nu=}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}, \tag{3.7}$$

где по-прежнему $r>2$, $0 \leqslant \alpha<2$, $0 \leqslant \beta<1$, $H(\beta\pi)=0$. Наша цель — показать, что при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $n=1, 2, 3, \ldots$

$$\varepsilon W_n(t)>0.$$

Из-за сложности функции $W_n(t)$ нам придется оценивать ее разными методами в середине отрезка $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ и вблизи его концов.

## § 4. Оценка функции $W_n(t)$ в середине отрезка $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

ЛЕММА 5. *Для любых чисел* $r \geqslant 5$, $0 \leqslant \alpha<2$ *существует число* $n_0(r, \alpha)>0$ *такое, что при* $n>n_0(r, \alpha)$

$$\varepsilon W_n(t)>0 \quad \left(\frac{3r}{n} \leqslant t \leqslant 2\pi-\frac{3r}{n}\right). \tag{4.1}$$

Доказательство. Имеем:

$$W_n(t)=\frac{d_0^{(n)}}{2}+\sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(n)}\cos jt+\sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(n)'}\sin jt, \tag{4.2}$$

$$\frac{d_0^{(n)}}{2}+\sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(n)}\cos jt=\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^2 d_j^{(n)}\,\frac{1-\cos(j+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^2 d_j^{(n)}-\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^2 d_j^{(n)}\cos(j+1)t;$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(n)'}\sin jt=\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^2 d_j^{(n)'}\,\frac{(j+1)\sin t+\sin(j+1)t}{4\sin^2\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{\sin t}{4\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\Delta^2 d_j^{(n)'}-\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^2 d_j^{(n)'}\sin(j+1)t.$$

о

$$\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^2 d_j^{(n)}=\Delta d_0^{(n)}=d_0^{(n)}-d_1^{(n)}=r\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}n^{r+1}}+O\left(\frac{1}{n^{r+2}}\right),$$

де

$$O\left(\frac{1}{n^{r+2}}\right)\leqslant\frac{A_1 r(r+1)}{n^{r+2}},$$

$A_1$ — абсолютная константа. Кроме того,

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\Delta^2 d_j^{(n)'}=0.$$

оэтому

$$W_n(t)=\frac{1}{4n^{r+1}\sin^2\frac{t}{2}}\left\{r\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^2 d_j^{(n)}\cos(j+1)t+\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^2 d_j^{(n)'}\sin(j+1)t\right\}. \tag{4.3}$$

Положим

$$\lambda_j=\Delta^2 d_{j-1}^{(n)},\quad j=0,1,2,\ldots,$$

е

$$d_{-1}^{(n)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu+1)n-1]^r},\quad n\geqslant 2.$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Delta^2 d_j^{(n)} \cos(j+1)t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{j+1} \cos(j+1)t = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \lambda_\nu \cos \nu t - \frac{\lambda_0}{2} =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 \lambda_\nu [1 - \cos(\nu+1)t] - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (4.4)$$

Но

$$\lambda_0 = \Delta^2 d_{-1}^{(n)} = d_{-1}^{(n)} - 2d_0^{(n)} + d_1^{(n)} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(2\nu+1)n-1]^r} - \frac{2}{(2\nu+1)^r n^r} + \frac{1}{[(2\nu+1)n+1]^r} \right\} \sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right] =$$

$$= \frac{r(r+1)}{n^{r+2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+2}} + O\left(\frac{1}{n^{r+3}}\right),$$

где

$$O\left(\frac{1}{n^{r+3}}\right) \leqslant \frac{A_2 r(r+1)(r+2)}{n^{r+3}},$$

а $A_2$ — абсолютная константа.

Далее,

$$|\Delta^2 \lambda_\nu| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \Delta_\nu^4 \frac{1}{[(\nu-1)+(2i-1)n]^r} \right\}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta^2 \lambda_\nu| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \Delta_\nu^4 \frac{1}{[(\nu-1)+(2i-1)n]^r} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \Delta_\nu^4 \frac{1}{[(\nu-1)+(2i-1)n]^r} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[-1+(2i-1)n]^r} - \frac{3}{(2i-1)^r n^r} + \frac{3}{[1+(2i-1)n]^r} - \frac{1}{[2+(2i-1)n]^r} \right\} =$$

$$= \frac{r(r+1)(r+2)}{n^{r+3}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{r+3}} + O\left(\frac{1}{n^{r+4}}\right), \quad (4.5)$$

гд

$$O\left(\frac{1}{n^{r+4}}\right) \leqslant \frac{A_3 r(r+1)(r+2)(r+3)}{n^{r+4}},$$

а $A_3$ — абсолютная константа.

Положим

$$\lambda_j' = \Delta^2 d_{j-1}^{(n)\prime}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \quad \lambda_0' = \Delta^2 d_{-1}^{(n)\prime},$$

где

$$d_{-1}^{(n)\prime} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{[(2\nu+1)n-1]^r}, \quad n \geqslant 2.$$

Тогда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Delta^2 d_j^{(n)'} \sin (j+1) t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda'_{j+1} \sin (j+1) t =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda'_\nu \sin \nu t = \frac{\sin t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \Delta^2 \lambda'_\nu -$$

$$- \frac{1}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 \lambda'_\nu \sin (\nu+1) t.$$

Учитывая, что

$$|\Delta^2 \lambda'_\nu| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \Delta_\nu^4 \frac{1}{[(\nu-1)+(2i-1)n]^r} \right\},$$

получаем:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) |\Delta^2 \lambda'_\nu| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \Delta_\nu^4 \frac{1}{[(\nu-1)+(2i-1)n]^r} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) \left\{ \Delta_\nu^4 \frac{1}{[(\nu-1)+(2i-1)n]^r} \right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(2i-1)n-1]^r} - \frac{2}{(2i-1)^r n^r} + \frac{1}{[(2i-1)n+1]^r} \right\} =$$

$$= \frac{r(r+1)}{n^{r+2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{r+2}} + O\left(\frac{1}{n^{r+3}}\right),$$

где

$$O\left(\frac{1}{n^{r+3}}\right) \leqslant \frac{A_4 r (r+1)(r+2)}{n^{r+3}},$$

$A_4$ — абсолютная константа.

Аналогично,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta^2 \lambda'_\nu| \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \Delta_\nu^4 \frac{1}{[(\nu-1)+(2i-1)n]^r} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \Delta_\nu^4 \frac{1}{[(\nu-1)+(2i-1)n]^r} \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[(2i-1)n-1]^r} - \frac{3}{(2i-1)^r n^r} + \frac{3}{[(2i-1)n+1]^r} - \frac{1}{[(2i-1)n+2]^r} \right\} =$$

$$= \frac{r(r+1)(r+2)}{n^{r+3}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^3} + O\left(\frac{1}{n^{r+4}}\right),$$

где

$$O\left(\frac{1}{n^{r+4}}\right) \leqslant \frac{A_8 r (r+1)(r+2)(r+3)}{n^{r+4}}. \tag{4.6}$$

Итак,

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^2 d_j^{(n)}\cos(j+1)t\right| \leqslant \frac{r(r+1)}{2n^{r+2}}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+2}}\right| +$$

$$+\frac{A_2 r(r+1)(r+2)}{2n^{r+3}}+\frac{r(r+1)(r+2)}{4n^{r+3}\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^{r+3}}+\frac{A_3 r(r+1)(r+2)(r+3)}{4n^{r+4}\sin^2\frac{t}{2}},$$

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty}\Delta^2 d_j^{(n)'}\sin(j+1)t\right| \leqslant \frac{2\left|\cos\frac{t}{2}\right|}{4\sin\frac{t}{2}}\ \frac{r(r+1)}{n^{r+2}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^{r+2}}+$$

$$+\frac{A_4 r(r+1)(r+2)|\sin t|}{4n^{r+3}\sin^2\frac{t}{2}}+\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\left\{\frac{r(r+1)(r+2)}{n^{r+3}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^{r+3}}+\right.$$

$$\left.+\frac{A_3 r(r+1)(r+2)(r+3)}{n^{r+4}}\right\}.$$

Отсюда следует:

$$\varepsilon W_n(t) \geqslant \frac{r}{16n^{r+1}\sin^2\frac{t}{2}}\left\{4\varepsilon\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}-\right.$$

$$-\frac{2(r+1)(r+2)}{n^2\sin^2\frac{t}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^{r+3}}-\frac{2(r+1)}{n\sin\frac{t}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)^{r+2}}-$$

$$\left.-\frac{2A_3(r+1)(r+2)(r+3)}{n^3\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{2A_4(r+1)(r+2)}{n^2\sin\frac{t}{2}}-O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}. \qquad (4.7)$$

Отметим, что оценка (4.7) имеет место для любых $r>2$ и $0\leqslant\alpha<2$ и что всегда

$$\varepsilon\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}>0. \qquad (4.8)$$

Учитывая, что

$$\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r},$$

получаем:

$$\left|\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^r}<\frac{1}{3^r}+\frac{1}{r-1}\frac{1}{3^{r-1}}.$$

Пусть $t=\frac{k_1 r}{n}\left(\text{или}\ \ 2\pi-\frac{k_1 r}{n}\right)$, где $k_1=3$; тогда будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(r+1)(r+2)}{n^2\sin^2\frac{k_1 r}{2n}}=\frac{8(r+1)(r+2)}{k_1^2 r^2}=\frac{8}{9}\ \frac{(r+1)(r+2)}{r^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2(r+1)}{n\sin\frac{k_1 r}{2n}}=\frac{4(r+1)}{3r}.$$

**Если** $r \geqslant 5$, то

$$4\varepsilon \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} - \frac{8}{9}\,\frac{(r+1)(r+2)}{r^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{r+3}} -$$

$$-\frac{4}{3}\cdot\frac{r+1}{r} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{r+2}} \geqslant 4\left|\sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\pi\right| - 4\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^6} -$$

$$-\frac{8\cdot 7\cdot 6}{9\cdot 5^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^8} - \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^7} \geqslant$$

$$\geqslant 4\,\frac{\sqrt{3^{10}-9}}{3^5} - 4\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^6} + \frac{28}{75}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^8} + \frac{2}{5}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^7}\right\} > 0.$$

Отсюда, на основании (4.7), заключаем, что для любых $r \geqslant 5$ и $\leqslant \alpha < 2$ существует $n_0(r,\alpha) > 0$ такое, что при $n \geqslant n_0(r,\alpha)$

$$\varepsilon W_n(t) > 0 \quad \left(\frac{3r}{n} \leqslant t \leqslant 2\pi - \frac{3r}{n}\right).$$

Лемма доказана.

**5. Оценка функции $W_n(t)$ в окрестностях концов периода $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$**

ЛЕММА 6. *Пусть* $r > 2$, $0 \leqslant \alpha < 2$, $0 \leqslant \beta < 1$, $\beta\pi$ *есть корень уравнения* $H(\beta\pi) = 0$,

$$W(k) = \int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1+u)^r} \cos kudu +$$

$$+\int_0^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1+u)^r} \sin kudu \tag{5.1}$$

*$k_0$ — любое положительное число. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} n^{r-1} W_n\left(\frac{k}{n}\right) = W(k) \tag{5.2}$$

*равномерно относительно* $|k| \leqslant k_0$.

Доказательство. Заметим сперва, что функции

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin[(2\nu+1)\beta\pi]}{(2\nu+1+u)^r}\right|, \quad \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos[(2\nu+1)\beta\pi]}{(2\nu+1+u)^r}\right|$$

есть монотонно убывающие функции от $u$.

Допустим, что $|k| \leqslant k_0$, где $k_0$ — фиксированное число. Тогда

$$n^{r-1} W_n\left(\frac{k}{n}\right) - W(k) =$$

$$= n^{r-1} \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2} + k\left(\frac{j}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r} - W(k) +$$

$$+ n^{r-1} \sum_{j=Nn+1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2} + k\left(\frac{j}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r} + \frac{n^{r-1} d_0^{(n)}}{2},$$

где $N$ — любое натуральное число. Так как

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ N\to\infty}} n^{r-1}\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k\left(\frac{j}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^{r-1}d_0^{(n)}}{2}=0$$

равномерно относительно всех $k$, то для заданного малого $\delta>0$ всегда можно подобрать числа $N_0$, $n_0>0$ такие, что при $n\geqslant n_0$, $N\geqslant N_0$

$$\left| n^{r-1}\sum_{j=Nn+1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k\left(\frac{j}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}+n^{r-1}\frac{d_0^{(n)}}{2}\right|<\frac{\delta}{2}.$$

Имеем:

$$\left| n^{r-1}\sum_{j=1}^{Nn}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k\left(\frac{j}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}-W(k)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left| n^{r-1}\sum_{j=1}^{Nn}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k\left(\frac{j}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}-\right.$$

$$\left.-\int_0^N\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}\,du\right|+$$

$$+\left|\int_N^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}\,du\right|.$$

Возьмем $N\geqslant N_0$ такое, что

$$\left|\int_N^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}\,du\right|<\frac{\delta}{4}$$

равномерно относительно $k$. Зафиксируем это $N$. Поскольку $|k|\leqslant k_0$, то полная вариация функции

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}$$

на отрезке $0\leqslant u\leqslant N$ при $|k|\leqslant k_0$ будет равномерно ограничена, т. е существует $c(k_0,N)>0$ такое, что при $|k|\leqslant k_0$

$$\mathop{V}_0^N\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+ku\right]}{(2\nu+1+u)^r}\right\}\leqslant c(k_0,N)<\infty.$$

Тогда, согласно теореме Полиа и Сеге ([17]), имеем:

$$\left| n^{r-1}\sum_{j=1}^{Nn}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}+k\left(\frac{j}{n}\right)\right]}{[(2\nu+1)n+j]^r}-\right.$$

$$\left.-\int_0^N\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}]+ku\right]}{(2\nu+1+u)}\,du\right|\leqslant\frac{c(k_0,N)}{n}.$$

оэтому если мы выберем $n \geqslant n_0$ такое, что

$$\frac{c(k_0, N)}{n} < \frac{\delta}{4},$$

при $n \to \infty$ будем иметь:

$$\left| n^{r-1} W_n\left(\frac{k}{n}\right) - W(k) \right| < \delta$$

вномерно относительно $|k| \leqslant k_0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Если* $|k| \leqslant 3r, r \geqslant 5$, *то*

$$\int_0^\infty \frac{\cos ku du}{(1+u)^{r-1}} \leqslant \left\{ 1 + \left(18 + \frac{1}{19}\right) \frac{re^{\frac{1}{12r}}}{(r-1)(r-2)} \right\} \int_0^\infty \frac{\cos ku du}{(1+u)^r}. \qquad (5.3)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{1}{(1+u)^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^\infty e^{-z(1+u)} z^{r-1} dz, \quad u \geqslant 0.$$

сюда получаем:

$$\Gamma(r) \int_0^\infty \frac{\cos ku du}{(1+u)^r} = \int_0^\infty \cos ku \int_0^\infty z^{r-1} e^{-(1+u)z} dz du =$$

$$= \int_0^\infty z^{r-1} e^{-z} \int_0^\infty e^{-uz} \cos ku du dz = \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^r dz}{z^2 + k^2}.$$

едовательно, интеграл $\int_0^\infty \frac{\cos ku du}{(1+u)^r}$, как функция от $k$, монотонно ывает. Далее, при $|k| \leqslant 3r$

$$\frac{\int_0^\infty \frac{\cos ku du}{(1+u)^{r-1}}}{\int_0^\infty \frac{\cos ku du}{(1+u)^r}} = 1 + \frac{\int_0^\infty \frac{u \cos ku du}{(1+u)^r}}{\int_0^\infty \frac{\cos ku du}{(1+u)^r}} \leqslant 1 + \frac{\int_0^\infty \frac{u du}{(1+u)^r}}{\int_0^\infty \frac{\cos ku du}{(1+u)^r}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{(r-1)(r-2) \int_0^\infty \frac{\cos ku du}{(1+u)^r}} \leqslant 1 + \frac{1}{(r-1)(r-2) \int_0^\infty \frac{\cos 3ru du}{(1+u)^r}} =$$

$$= 1 + \frac{\Gamma(r-2)}{\int_0^\infty \frac{e^{-z} z^r dz}{z^2 + 9r^2}}.$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} z^r dz}{z^2 + 9r^2} = (3r)^{r-1} \int_0^\infty \frac{e^{-3ru} u^r du}{1 + u^2} >$$

$$> \frac{1}{2}(3r)^{r-1}\left\{\int_1^\infty e^{-3ru}u^{r-2}\,du + \int_0^1 e^{-3ru}u^r du\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(3r)^{r-1}\left\{\frac{r-1}{9r}\int_0^1 e^{-3ru}u^{r-2}\,du + \int_1^\infty e^{-3ru}u^{r-2}\,du - \frac{4}{9}\frac{1}{re^{3r}}\right\} =$$

$$= \frac{(3r)^{r-1}}{2}\left\{\frac{r-1}{9r}\int_0^\infty e^{-3ru}u^{r-2}\,du + \left(1-\frac{r-1}{9r}\right)\int_1^\infty e^{-3ru}u^{r-2}\,du - \frac{4}{9}\frac{1}{re^{3r}}\right\}.$$

Учитывая, что

$$\int_0^\infty e^{-3ru}u^{r-2}\,du = \frac{\Gamma(r-1)}{(3r)^{r-1}}$$

и

$$\int_1^\infty e^{-3ru}u^{r-2}\,du > \int_1^\infty e^{-3ru}\,du = \frac{1}{3re^{3r}},$$

находим:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}z^r dz}{z^2+9r^2} > \frac{(3r)^{r-1}}{2}\left\{\frac{\Gamma(r)}{9\cdot 3^{r-1}\cdot r^r} - \frac{1}{9}\left(1+\frac{r-1}{3r}\right)\frac{1}{re^{3r}}\right\} =$$

$$= \frac{(3r)^{r-1}}{18}\left\{\frac{\Gamma(r)}{3^{r-1}r^r} - \left(1+\frac{r-1}{3r}\right)\frac{1}{re^{3r}}\right\}.$$

Пользуясь формулой Стирлинга:

$$\Gamma(r) = e^{-r}r^{r-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{\theta}{12r}},$$

где $0<\theta<1$, получаем:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}z^r dz}{z^2+9r^2} > \frac{r^{r-1}}{18re^r}\left\{\sqrt{2\pi r}\cdot e^{\frac{\theta}{12r}} - \left(1+\frac{r-1}{3r}\right)\frac{1}{3}\left(\frac{3}{e^2}\right)^r\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{r^{r-1}}{18re^r}\left\{\sqrt{2\pi r} - \frac{1}{3}\left(1+\frac{r-1}{3r}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^r\right\}.$$

Допустим, что $r \geqslant 5$; тогда

$$\sqrt{2\pi r} - \frac{1}{3}\left(1+\frac{r-1}{3r}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^r > \sqrt{2\pi r} - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^5 > \frac{349}{350}\sqrt{2\pi r}.$$

Итак, мы получаем:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}z^r dz}{z^2+9r^2} > \frac{349}{350}\cdot\frac{r^{r-1}}{18re^r}\sqrt{2\pi r}$$

и

$$\frac{1}{\Gamma(r-2)}\int_0^\infty \frac{e^{-z}z^r dz}{z^2+9r^2} > \frac{349}{18\cdot 350}\,\frac{r^{r-1}}{re^r}\cdot\frac{\sqrt{2\pi r}}{\Gamma(r-2)} =$$

$$= \frac{349}{18\cdot 350}\,\frac{(r-1)(r-2)}{r}\,\frac{1}{e^{\frac{\theta}{12r}}},$$

де $\theta$, как и раньше, заключено между 0 и 1. Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty \frac{\cos kudu}{(1+u)^{r-1}} \leqslant \left\{1+\frac{18\cdot 350}{349}\cdot\frac{re^{\frac{\theta}{12r}}}{(r-1)(r-2)}\right\}\int_0^\infty \frac{\cos kudu}{(1+u)^r} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{1+\left(18+\frac{1}{19}\right)\frac{re^{\frac{1}{12r}}}{(r-1)(r-2)}\right\}\int_0^\infty \frac{\cos kudu}{(1+u)^r},$$

де $|k| \leqslant 3r$, а $r \geqslant 5$. Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 8. *Если* $r \geqslant 6$, *то при* $|k| \leqslant 3r$, $0 \leqslant \alpha < 2$

$$\varepsilon W(k) > 0.$$

Доказательство. Сперва напомним, что

$$\varepsilon = \operatorname{sign} \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

$$W(k) = \int_0^\infty \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1+u)^r}\cos kudu +$$

$$+\int_0^\infty \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1+u)^r}\sin kudu.$$

еем:

$$\int_0^\infty \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1+u)^r}\cos kudu = \sin\left[\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right]\int_0^\infty \frac{\cos kudu}{(1+u)^r} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r-1}}\int_0^\infty \frac{\cos(2\nu+1)kudu}{(1+u)^r}.$$

усть $|k| \leqslant 3r$ и $r \geqslant 6$; тогда

$$\left|\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r-1}}\int_0^\infty \frac{\cos(2\nu+1)kudu}{(1+u)^r}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{(2\nu+1)^{r-1}}\int_0^\infty \frac{\cos(2\nu+1)kudu}{(1+u)^r} \leqslant \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{(2\nu+1)^{r-1}}\int_0^\infty \frac{\cos kudu}{(1+u)^r}$$

$$\left|\int_0^\infty \sum_{\nu=1}^\infty \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1+u)^r}\sin kudu\right| =$$

$$= \frac{|k|}{r-1}\left|\sum_{\nu=0}^\infty \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r-2}}\int_0^\infty \frac{\cos(2\nu+1)kudu}{(1+u)^{r-1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3r}{r-1}\left\{\sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{(2\nu+1)^r}+\sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{(2\nu+1)^{r-2}}\right\}\int_0^\infty \frac{\cos kudu}{(1+u)^{r-1}},$$

в силу оценки

$$\left|\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^r}.$$

Пользуясь леммой 7, получаем:

$$\left|\int_0^\infty \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi-\frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1+u)^r}\sin kudu\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3r}{r-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2\nu+1)^r}+\frac{1}{(2\nu+1)^{r-2}}\right\}\left\{1+\frac{\left(18+\frac{1}{19}\right)re^{\frac{1}{12r}}}{(r-1)(r-2)}\right\}\int_0^\infty\frac{\cos kudu}{(1+u)^r}.$$

Так как при $r \geqslant 2$

$$\varepsilon = \operatorname{sign}\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi,$$

то при $r \geqslant 6$, $|k| \leqslant 3r$ будем иметь:

$$\varepsilon W(k) \geqslant \left|\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right|\int_0^\infty\frac{\cos kudu}{(1+u)^r}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r-1}}\int_0^\infty\frac{\cos kudu}{(1+u)^r}-$$

$$-\frac{3r}{r-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2\nu+1)^r}+\frac{1}{(2\nu+1)^{r-2}}\right\}\left\{1+\frac{\left(18+\frac{1}{19}\right)re^{\frac{1}{12r}}}{(r-1)(r-2)}\right\}\int_0^\infty\frac{\cos kudu}{(1+u)^r}=$$

$$=\left\{\left|\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right|-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{3r}{r-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2\nu+1)^r}+\frac{1}{(2\nu+1)^{r-2}}\right\}\left\{1+\frac{\left(18+\frac{1}{19}\right)re^{\frac{1}{12r}}}{(r-1)(r-2)}\right\}\right\}\int_0^\infty\frac{\cos kudu}{(1+u)^r}.$$

Но

$$\left|\cos\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right| \leqslant \frac{1}{3^r}+\frac{1}{r-1}\,\frac{1}{3^{r-1}}<\frac{2}{3^r};$$

следовательно,

$$\left|\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right| \geqslant \frac{\sqrt{3^{2r}-4}}{3^r} \geqslant \frac{\sqrt{3^{12}-4}}{3^6}.$$

Далее,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r-1}} \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^5}<\frac{1}{3^4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\right),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^r} \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^6}<\frac{1}{3^5}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r-2}} \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^4}<\frac{1}{3^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{3r}{r-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2\nu+1)^r}+\frac{1}{(2\nu+1)^{r-2}}\right\}\left\{1+\frac{\left(18+\frac{1}{19}\right)re^{\frac{1}{12r}}}{(r-1)(r-2)}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{18}{5}\left\{\frac{1}{3^5}\cdot\frac{13}{30}+\frac{1}{3^8}\cdot\frac{1}{2}\right\}\left\{1+\left(18+\frac{1}{19}\right)\frac{3}{10}\cdot e^{\frac{1}{72}}\right\}<\frac{1}{2},$$

$$\left|\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\pi\right|-\sum_{=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r-1}}-$$

$$-\frac{3r}{r-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2\nu+1)^r}+\frac{1}{(2\nu+1)^{r-2}}\right\}\left\{1+\frac{\left(18+\frac{1}{19}\right)re^{\frac{1}{12r}}}{(r-1)(r-2)}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\sqrt{3^{12}-4}}{3^6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3^4}\cdot\frac{11}{24}>0.$$

Итак, при $r\geqslant 6$, $|k|\leqslant 3r$ получаем:

$$\varepsilon W(k)\geqslant\left\{\frac{\sqrt{3^{12}-4}}{3^6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3^4}\cdot\frac{11}{24}\right\}\int_0^{\infty}\frac{\cos ku\,du}{(1+u)^r}>0. \tag{5.4}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *При* $r\geqslant 6$, $0\leqslant\alpha<2$ *для всех* $n=1,2,3,\ldots$

$$\varepsilon W_n(t)>0,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \tag{5.5}$$

Доказательство. Пусть $r\geqslant 6$; тогда, согласно лемме 5, суще-вует $n_0(r,\alpha)>0$ такое, что при $n>n_0(r,\alpha)$ имеет место неравенство $V_n(t)>0$, где $\frac{3r}{n}\leqslant t\leqslant 2\pi-\frac{3r}{n}$.

Согласно леммам 6 и 8, существует положительное число $n_0'(r,\alpha)$ кое, что при $n>n_0'(r,\alpha)$

$$\varepsilon W_n\left(\frac{k}{n}\right)>0,\quad |k|\leqslant 3r.$$

едовательно, при $n\geqslant\max\{n_0, n_0'\}$ мы будем иметь:

$$\varepsilon W_n(t)>0,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

сюда, в силу леммы 4,

$$\varepsilon W_n(t)>0,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

и всех $n$. Лемма доказана.

## § 6. Доказательство теоремы 1

Допустим, что

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}K(t-x)\varphi(t)\,dt,$$

где $\varphi(t) \in H_\infty$. Тогда [см. ([13]), ([14])] имеем:

$$\sup_{\varphi \in H_\infty} E_n(f)_c = \frac{1}{\pi} \max_{0 \leqslant x_1 < \ldots < x_{2n} < 2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{2n} a_i K(t - x_i) \right| dt,$$

где

$$a_i = (-1)^i M_i / M, \quad M_i = \prod_{\substack{1 \leqslant q < p \leqslant 2n \\ p,\, q \neq i}} \sin \frac{x_p - x_q}{2}, \quad M = \sum_{i=1}^{2n} M_i.$$

Возьмем $x_i^{(0)} = \frac{i-1}{n}\pi$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$; тогда при $r > 1$, $0 \leqslant \alpha < 2$

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i K(t - x_i)\,|_{x_i = x_i^{(0)}} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i K(t - x_i^{(0)}) =$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[k\left(t - \frac{i-1}{n}\right)\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{k^r} = \frac{1}{n^r} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)nt - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r}.$$

Поэтому

$$\sup_{f \in W^{(r)}(\alpha)} E_n(f)_c \geqslant \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^r} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)nt - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r} \right| dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{n^r} \left| \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^r} \operatorname{sign} \sin(nt - \beta\pi)\, dt \right| =$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{1}{n^r} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r-1}} \right|, \qquad (6.1)$$

где $0 \leqslant \beta < 1$, а $\beta\pi$ есть корень уравнения $H(\beta\pi) = 0$.

Отметим, что оценка (6.1) имеет место при всех $r > 1$ и $0 \leqslant \alpha < 2$

С другой стороны,

$$\sup_{f \in W^{(r)}(\alpha)} E_n(f)_c \leqslant \frac{1}{\pi} \min_{T_{n-1}} \int_0^{2\pi} |K(t) - T_{n-1}(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K(t) - U^*_{n-1}(t)|\, dt$$

Но если $r \geqslant 6$, то

$$\operatorname{sign} \{K(t) - U^*_{n-1}(t)\} = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \sin(nt - \beta\pi),$$

где $\varepsilon_0 = \pm 1$.

Отсюда следует:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K(t) - U^*_{n-1}(t)|\, dt = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \{K(t) - U^*_{n-1}(t)\} \operatorname{sign} \sin(nt - \beta\pi)\, dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} K(t) \operatorname{sign} \sin(nt - \beta\pi)\, dt \right| =$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{1}{n^r} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (6.2)$$

Итак, нами доказано, что функция $K(t)$ удовлетворяет условию $A_n^*$ . ([5])] для всех $n$ при $r \geqslant 6$. Поэтому, согласно известной теореме М. Никольского [см. ([5]), стр. 288], имеем:

$$\mathcal{E}_n[W^{(r)}(\alpha)]_c = \sup_{f \in W^{(r)}(\alpha)} E_n(f)_c = \sup_{\varphi \in H_\infty} E_n(f)_c =$$

$$= \sup_{\substack{f \in W^{(r)}(\alpha) \\ f \perp T_{n-1}}} \|f\|_c = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L = \frac{4}{\pi} \frac{K_{r,\alpha}}{n^r} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$K_{r,\alpha}$ определяется формулой (1.13). Теорема 1 доказана.

## § 7. Доказательство теорем 2 и 3

Мы не будем останавливаться на первых частях этих теорем, потому эти предложения непосредственно вытекают из теоремы 1. ажем неравенства (1.18), (1.22). Поскольку их доказательства соленно аналогичны, приведем доказательство только неравенства 8). Допустим, что

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_r(t - x) f^{(r)}(t)\, dt,$$

$$K_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\pi r}{2}\right), \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$(t)$ — непрерывная функция с периодом $2\pi$, являющаяся $r$-й произной функции $f(t)$ в смысле Вейля.

Пусть $T_{n-1}^*(t)$ — тригонометрический полином наилучшего приближе- порядка $n-1$ функции $f^{(r)}(t)$ в метрике $C_{2\pi}$, а $U_{n-1}^*(t)$ — тригонометский полином наилучшего приближения порядка $n-1$ функции $t)$ в метрике $L_{2\pi}$. Тогда

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{K_r(t - x) - U_{n-1}^*(t - x)\}\, T_{n-1}^*(t)\, dt$$

. тригонометрический полином порядка не выше $n-1$ и поэтому

$$\int_0^{2\pi} \{K_r(t - x) - U_{n-1}^*(t - x)\}\{f^{(r)}(t) - T_{n-1}^*(t)\}\, dt = f(x) - Q_{n-1}^*(x),$$

$Q_{n-1}^*(x)$ есть некоторый тригонометрический полином порядка не е $n-1$.

Итак,

$$E_n(f)_c \leqslant \max_x |f(x) - Q_{n-1}^*(x)| \leqslant$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_r(t) - U_{n-1}^*(t)|\, dt \cdot \|f^{(r)}(t) - T_{n-1}^*(t)\|_c = \frac{1}{\pi} E_n(K_r(t))_L \cdot E_n(f^{(r)})_c. \tag{7.1}$$

Если $r \geqslant 6$, то

$$E_n(K_r(t))_L = \frac{4}{n^r} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}} \right|,$$

где $0 \leqslant \beta < 1$, $\beta\pi$ есть корень уравнения

$$H_r(\beta\pi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi r}{2}\right]}{(2\nu+1)^r} = 0,$$

и мы получаем неравенство (1.18).

Докажем, что неравенство (1.18) точное. В предыдущем параграф[е] было доказано, что при $r \geqslant 6$

$$\max_{0 \leqslant x_1 < \ldots < x_{2n} < 2\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{2n} a_i K_r(t - x_i) \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{2n} a_i^{(0)} K_r(t - x_i^{(0)}) \right| dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} E_n(K_r(t))_L \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где

$$a_i^{(0)} = \frac{(-1)^i}{2n}, \quad x_i^{(0)} = \frac{i-1}{n}\pi \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Положим

$$\varphi_0(t) = \operatorname{sign}\left\{\sum_{i=1}^{2n} a_i^{(0)} K_r(t - x_i^{(0)})\right\} = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \sin(nt - \beta\pi),$$

где $\varepsilon_0 = \pm 1$ [см. (2.3)].

Для заданного $\eta > 0$ существует положительное число $\delta > 0$ такое[,] что для любого измеримого подмножества $e \subset [0, 2\pi]$ будем иметь:

$$\int_e \left| \sum_{i=1}^{2n} a_i^{(0)} K_r(t - x_i^{(0)}) \right| dt < \eta,$$

если только $\operatorname{mes} e < \delta$.

Легко видеть, что существует непрерывная функция $\varphi_*(t)$ с периодо[м] $2\pi$ такая, что:

1) $|\varphi_*(t)| \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,
2) $E_n(\varphi_*)_c = 1$,
3) $\int_0^{2\pi} \varphi_*(t)\, dt = 0$,
4) $\operatorname{mes} \mathscr{E}\{t: \varphi_*(t) \neq \varphi_0(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\} < \delta$.

Положим

$$f_*(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_r(t - x)\, \varphi_*(t)\, dt$$

и оценим снизу наилучшее приближение порядка $n - 1$ функции $f_*(x)$

льзуясь формулой Валле Пуссена ([13]), получаем:

$$E_n(f_*)_c = \max_{0 \leqslant x_1 < \ldots < x_{2n} < 2\pi} \left| \sum_{i=1}^{2n} a_i f_*(x_i) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \sum_{i=1}^{2n} a_i^{(0)} f_*(x_i^{(0)}) \right| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{2n} a_i^{(0)} K_r(t - x_i^{(0)}) \right\} \varphi_*(t)\, dt \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{2n} a_i^{(0)} K_r(t - x_i^{(0)}) \right| dt -$$

$$-\frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{i=1}^{2n} a_i^{(0)} K_r(t - x_i^{(0)}) \right] \{\varphi_*(t) - \varphi_0(t)\}\, dt \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi} E_n(K_r(t))_L - \frac{2}{\pi} \int_{e_0} \left| \sum_{i=1}^{2n} a_i^{(0)} K_r(t - x_i^{(0)}) \right| dt,$$

$$e_0 = \mathscr{E}\{t: \varphi_0(t) \neq \varphi_*(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}, \quad \operatorname{mes} e_0 < \delta.$$

Итак,

$$E_n(f_*)_c \geqslant \frac{1}{\pi} E_n(K_r(t))_L - \frac{2}{\pi}\eta.$$

скольку $\eta$ произвольно мало, а

$$E_n(\varphi_*)_c = E_n(f_*^{(r)})_c = 1,$$

точность неравенства (1.18) доказана.

## § 8. Некоторые обобщения полученных результатов

Обозначим через $H_\infty^{(s)}$ $(s = 0, 1, \ldots, n)$ подкласс класса $H_\infty$, в котором ержатся все функции $\varphi(t) \in H_\infty$ такие, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \begin{matrix} \sin kt \\ \cos kt \end{matrix}\, dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, s-1,$$

$_\infty^{(0)} = H_\infty$), а через $H_1^{(s)}$ * — класс всех суммируемых функций $\varphi(t)$ их, что

$$\varphi(t)\,|\,dt \leqslant 1, \quad \int_0^{2\pi} \varphi(t) \begin{matrix} \sin kt \\ \cos kt \end{matrix}\, dt = 0,\ k = 0, 1, \ldots, s-1,\ s = 0, 1, \ldots, n.$$

В силу известной теоремы С. М. Никольского [см. ([5]), стр. 288], ют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $r \geqslant 6$, $\alpha$ — *любое вещественное число, а*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t - x)\varphi(t)\, dt,$$

$\varphi(t) \in H_\infty^{(s)}$, $s = 0, 1, \ldots, n$.

* $H_1^{(0)}$ обозначает совокупность всех суммируемых функций, удовлетворяющих овию $\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|\, dt \leqslant 1$.

*Тогда*

$$\sup_{\varphi\in H_\infty^{(s)}} E_n(f)_c = \sup_{\varphi\in H_\infty^{(n)}} \|f\|_c = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L =$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^r}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right| \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

*где* $0\leqslant\beta<1$, *а* $\beta\pi$ — *корень уравнения* $H(\beta\pi)=0$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $r\geqslant 6$, $\alpha$ — *любое вещественное число, а*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(t-x)\,\varphi(t)\,dt,$$

*где* $\varphi(t)\in H_1^{(s)}$, $s=0,1,\ldots,n$. *Тогда*

$$\sup_{\varphi\in H_1^{(s)}} E_n(f)_L = \sup_{\varphi\in H_1^{(n)}} \|f\|_L = \frac{1}{\pi} E_n(K)_L =$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^r}\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2\nu+1)\beta\pi - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{(2\nu+1)^{r+1}}\right| \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

*где* $0\leqslant\beta<1$, *а* $\beta\pi$ *есть корень уравнения* $H(\beta\pi)=0$.

Поступило
8.II.1958

ЛИТЕРАТУРА

1 Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 15, № 3 (1937), 107—112.

2 Дзядык В. К., О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную $s$-ю производную $(0<s<1)$, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 135—162.

3 Крейн М. Г., К теории наилучшего приближения периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 18, № 4—5 (1938), 245—249.

4 Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Acad. der Wiss. zu Leipzig, 90 (1938), 103—134.

5 Никольский С. М., Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 207—256.

6 Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Москва, 1949.

7 Полиа Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, т. 1, Москва, 1956.

8 Стечкин С. Б., О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 643—648.

9 Стечкин С. Б., О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 197—206.

10 Fejér L., Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, Trans. Am. Math. Soc., 39 (1936), 18—59.

11 Favard J., Sur l'approximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques, C. R. Acad. Sci., 203 (1936), 1122—1124.

12 Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximations de certains classes de fonctions par des polynomes trigonometriques, Bull. de Sci. Math., 61. p. 1 (1937), 209—224, 243—256.

13 Vallée Poussin Ch., Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919.

14 Сунь Юн-шен, О наилучшем приближении функций, представимых в форме свертки, Доклады Ак. наук СССР, 118, № 2 (1958), 247—250.

**ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР**

**Серия математическая**

**23 (1959), 93—114**

**А. Л. ГАРКАВИ**

# О РАЗМЕРНОСТИ МНОГОГРАННИКОВ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе исследуется задача о наилучшем равномерном приближении $s$ раз дифференцируемых функций посредством конечномерного подпространства, принадлежащего многообразию этих функций. Выводятся условия, необходимые и достаточные для того, чтобы размерность многогранника наилучшего приближения для любой $s$ раз дифференцируемой функции не превышала числа $r$. Кроме того, устанавливаются неравенства между максимумами размерностей указанных многогранников по классу $s$ раз дифференцируемых функций и по классу всех непрерывных функций.

## § 1. Введение

Пусть $C = C[a, b]$ есть пространство функций, непрерывных на от-[a, b], и $G$ — некоторое его подмножество. Будем говорить, что $G$ множество единственности для функции $f(x) \in C$, если наилучшее лижение

$$E(G, f) = \inf_{g \in G} \| f - g \|_C$$

игается не более чем для одного элемента наилучшего приближения $\tilde{g}(f) \in G$.

Пусть $S_n = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ есть система $n$ линейно независимых ерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, и $L(S_n)$ $n$-мерное ространство полиномов по этой системе, т. е. функций вида

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x).$$

Исследованиям по вопросу о единственности элемента наилучшего лижения в подпространстве $L(S_n)$ для функции $f(x) \in C$ положили ло работы П. Л. Чебышева, из результатов которых, в частности, кало, что подпространство алгебраических полиномов $n$-й степени ется множеством единственности для любой непрерывной функции ([14]).

Значительно позже А. Хаар доказал общую теорему, согласно ко-й подпространство $L(S_n)$ является множеством единственности для й $f(x) \in C$ тогда и только тогда, когда любой полином по системе

$S_n$, не равный тождественно нулю, обращается в нуль не более чем в $n-1$ точке [см. (10)]. Системы $S_n$, удовлетворяющие этому условию, называют системами Чебышева.

Если $L(S_n)$ не является множеством единственности для функции $f(x)$, то элементы наилучшего приближения этой функции составляют некоторое выпуклое множество, называемое многогранником наилучшего приближения функции $f(x)$. В этом случае естественно говорить о размерности этого многогранника,

Размерностью выпуклого множества $V \subset L(S_n)$ мы, как обычно, называем максимальное число $k$, при котором существуют такие $k+1$ полиномов $P_1(x), \ldots, P_k(x)$, $P_{k+1}(x)$, принадлежащих $V$, что полиномы $P_1(x) - P_{k+1}(x), \ldots, P_k(x) - P_{k+1}(x)$ линейно независимы.

Максимальная размерность многогранников наилучшего приближения для непрерывных функций в подпространстве $L(S_n)$ называется (по Г. Ш. Рубинштейну (9)) чебышевским рангом этого подпространства.

Если система $S_n$ есть система Чебышева, то чебышевский ранг $L(S_n)$, очевидно, равен нулю.

Следующая теорема (принадлежащая Г. Ш. Рубинштейну (9)*), обобщая классическую теорему Хаара, определяет характеристическое свойство подпространств $L(S_n)$, чебышевский ранг которых не превышает некоторого числа $r$.

ТЕОРЕМА РУБИНШТЕЙНА. *Для того чтобы размерность многогранника наилучшего приближения для любой непрерывной функции не превышала числа $r$, необходимо и достаточно, чтобы каждые $r+1$ линейно независимых полиномов из $L(S_n)$ имели не более $n-r-1$ общих нулей.*

Чебышевским рангом подпространства $L(S_n)$ относительно некоторого класса непрерывных функций $W$ будем называть число, равное максимальной размерности многогранников наилучшего приближения для функций, принадлежащих этому классу.

Пусть $W$ есть некоторое линейное многообразие в пространстве $C[a, b]$, и пусть рассматривается вопрос о приближении функций из $W$ полиномами по системам $S_n$, состоящим из функций того же многообразия. В этом случае естественно возникает вопрос о критерии, позволяющем указать совокупность подпространств $L(S_n)$ $(S_n \subset W)$, чебышевский ранг которых относительно многообразия $W$ не превышает некоторого числа $r$.

Наибольший интерес, очевидно, представляют подпространства $L(S_n)$, являющиеся множеством единственности для всех функций из $W$. При этом совокупность таких подпространств может оказаться шире, чем класс подпространств, порождаемых всеми системами Чебышева, принадлежащими многообразию $W$.

Задача о ранге ** подпространства $L(S_n)$ относительно некоторого многообразия $W$ банахова пространства $B$ (в предположении, что $S_n \subset W$), вообще говоря, не является новой. Случай, когда $W$ есть

---

* Полное доказательство теоремы приведено, например, в работе (4).

** В случае приближений в метрике произвольного банахова пространства термином «ранг» обозначают понятие, аналогичное понятию «чебышевского ранга» в пространстве $C$ [ср. (13)].

гообразие непрерывных функций, а $B$ — пространство $L_1$, впервые сматривался в работе Д. Джексона (2), который показал, что подтранство алгебраических полиномов степени $n$ является множеством нственности (в смысле метрики $L_1$) для любой непрерывной функции. ле этого М. Г. Крейн (6) указал, что этот результат обобщается на чай любой системы Чебышева, а С. Я. Хавинсон [(11), (12), (13)] ел условия, необходимые и достаточные для того, чтобы ранг подтранства $L(S_n)$ $(S_n \subset C)$ относительно многообразия $C$ был не больше айденный им критерий имеет место также и для случая бесконечноных подпространств).

В настоящей работе рассматривается случай, когда $B$ есть простран- $C[a, b]$, а в качестве многообразия $W$ берутся классы $C_s$, состоя- из функций, имеющих непрерывную производную $s$-го порядка - 1). Предполагая, что $S_n \subset C_s$, мы доказываем, что для того чтобы шевский ранг подпространства $L(S_n)$ относительно класса $C_s$ не вышал числа $r$, необходимо и достаточно выполнение следующего овия:

Среди общих нулей каждых $k$ линейно независимых полиномов из $_n)$ $(k = r+1, r+2, \ldots, n)$ содержится не более $n-k$ точек таких, все они, за исключением, быть может, точек, совпадающих с кони отрезка $[a, b]$, являются общими нулями первых производных - 1)-го из указанных полиномов (теорема I).

Исходя из этого критерия, мы устанавливаем затем некоторые соотения между собственно чебышевским рангом подпространства $L(S_n)$ го чебышевским рангом относительно класса $C_s$.

Далее эти же вопросы рассматриваются для случая, когда подпровнство $L$ является $(n-1)$-мерной гиперплоскостью $n$-мерного подпронства, порожденного системой Чебышева. Точная постановка задачи этого случая содержится в § 4.

В работе рассматриваются также периодические системы $S_n$, т. е. темы, состоящие из периодических функций с общим периодом, рав- длине отрезка $[a, b]$. В этом случае под классом $C_s$ мы будем поать класс периодических $s$ раз непрерывно дифференцируемых на оси функций (с тем же периодом, что и функции системы $S_n$). Примые далее рассуждения и формулировки там, где это специально оговорено, имеют место как для случая периодических, так и непериических систем, если условиться считать в периодическом случае цы отрезка $[a, b]$ его внутренними точками и принимать число краx точек равным нулю.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечу за постановку изложенной выше задачи и за ценные советы, исьзованные автором в работе.

## § 2. Предварительные замечания

Нам понадобится в дальнейшем следующая элементарная

ЛЕММА I. *Следующие три условия эквивалентны:*

А) *Существует не более* $n-m$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ *линейно независимых поомов из* $L(S_n)$*, обращающихся в нуль в точках* $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Б) *Интерполяционная задача Лагранжа для системы $S_n$ с узлами в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ всегда имеет решение, т. е., каковы бы ни были числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$, существует по крайней мере один полином $P(x) \subset \subset L(S_n)$, удовлетворяющий условиям:*

$$P(x_i) = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

В) *Существует полином из $L(S_n)$, принимающий в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ значения любых наперед заданных знаков.*

Проверим эквивалентность первых двух условий. Из условия (А) следует, что система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

относительно коэффициентов $\{a_k\}$ имеет не более $n - m$ линейно независимых решений, так как в противном случае им соответствовало бы по крайней мере, $n - m + 1$ линейно независимых полиномов, имеющих общие нули в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Следовательно, ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_m) & \varphi_2(x_m) & \ldots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix} \quad (1)$$

равен $m$. Поэтому система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x_i) = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad (2)$$

имеет решение при любых числах $\{b_i\}$.

Если же условие (А) не выполнено, то аналогичным образом убеждаемся, что ранг матрицы (1) будет не больше $m - 1$ и система (2) будет иметь решение не при всяких $\{b_i\}$.

Нетрудно убедиться также в эквивалентности условий (Б) и (В). Очевидно, что (Б) влечет (В). Если же условие (Б) не имеет места, то не выполняется также и условие (В). Действительно, если для точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ интерполяционная задача Лагранжа не всегда разрешима, то ранг матрицы (1) не больше $m - 1$. Пусть $D_s$ есть ранговый минор матрицы (1) порядка $s$ ($s \leqslant m - 1$), а $D_{s+1}$ — обрамляющий его минор расширенной матрицы уравнения (2). Пусть для элементов $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ их алгебраические дополнения в определителе $D_{s+1}$ отличны от нуля ($1 \leqslant k \leqslant s + 1 \leqslant m$). Тогда для любых чисел $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$, имеющих тот же знак, что и их алгебраические дополнения, минор $D_{s+1}$ будет отличен от нуля и, следовательно, система (2) при указанном выборе знаков чисел $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_k}$ и произвольном выборе остальных $b_i$ будет несовместна. А это и означает, что не существует полинома $P(x) \in L(S_n)$, удовлетворяющего условиям:

$$\operatorname{sign} P(x_1) = \operatorname{sign} b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Сделаем еще одно замечание. Цитированная выше теорема Рубинштейна устанавливает эквивалентность следующих двух свойств подпространства $L(S_n)$:

I. Каждые $r+1$ линейно независимых полиномов из $L(S_n)$ имеют более $n-r-1$ общих нулей.

II. Чебышевский ранг подпространства $L(S_n)$ не превышает числа $r$.

Можно указать еще ряд свойств подпространства $L(S_n)$, эквивалент-х условиям I и II. Приведем из их числа следующие три свойства:

III. Интерполяционная задача Лагранжа для системы $S_n$ с узлами в бых $n-r$ точках отрезка $[a, b]$ всегда разрешима.

IV. Для любых $n-r$ точек отрезка $[a, b]$ существует полином из $S_n$), принимающий в этих точках значения любых наперед заданных ков.

V. Для любой непрерывной функции и любого полинома из $L(S_n)$, тавляющего этой функции наилучшее приближение, число точек мак-ального уклонения * не меньше чем $n-r+1$.

Эквивалентность свойств II, III и IV следует из леммы I. Утвержде- об эквивалентности свойств III и V является частным случаем од- теоремы С. И. Зуховицкого и С. Б. Стечкина [см. ([5])].

## § 3. Основная теорема

Условимся в следующей терминологии. Пусть $f(x) \in C_1[a, b]$. Если $x_0 < b$ и $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, то точку $x_0$ назовем *двойным* нулем $f(x)$. остальные нули $f(x)$ считаем простыми. Нули, совпадающие с кон-и отрезка $[a, b]$, будем называть *краевыми* нулями.

Двойному нулю мы приписываем кратность, равную 2 (независимо того, обращаются ли в нуль в данной точке производные выше пер- порядка). Кратность простых (в том числе краевых) нулей полагаем, обычно, равной единице.

Основной результат работы составляет следующая

ТЕОРЕМА I. *Пусть $S_n = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ есть система $n$ ейно независимых функций, принадлежащих классу $C_s$ $(s \geqslant 1)$, и $L(S_n)$ — пространство полиномов по этой системе.*

*Для того чтобы чебышевский ранг подпространства $L(S_n)$ относи-ьно класса $C_s$ не превосходил числа $r < n$, необходимо и достаточно, обы среди общих нулей каждых $k$ линейно независимых полиномов $= r+1, r+2, \ldots, n$) содержалось не более $n-k$ точек, являющихся ими двойными или краевыми нулями $r+1$-го из указанных полиномов.*

*В частности, для того чтобы подпространство $L(S_n)$ было множест- единственности для любой функции из $C_s$, необходимо и достаточно, обы среди общих нулей каждых $k$ линейно независимых полиномов $= 1, 2, \ldots, n$) содержалось не более $n-k$ точек, являющихся двойными краевыми нулями одного из этих полиномов.*

Доказательство. Достаточность. Допустим, что условие ремы выполняется, и пусть, вопреки утверждению, для некоторой

* Точку $x_0$ мы называем точкой максимального уклонения полинома $P(x)$ от функ- $f(x)$, если

$$|f(x_0) - P(x_0)| = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P(x)|.$$

функции $f(x) \in C_s (s \geqslant 1)$ многогранник наилучшего приближения имеет размерность, превышающую число $r$. Тогда из числа полиномов наилучшего приближения функции $f(x)$ можно выбрать $r+2$ полинома $T_1(x), \ldots$ $\ldots, T_{r+1}(x)$, $P(x)$ таким образом, чтобы полиномы

$$\widetilde{T}_l(x) = T_l(x) - P(x) \quad (l = 1, 2, \ldots, r+1)$$

были линейно независимы. Рассмотрим полином

$$R(x) = \frac{1}{r+2} \left\{ \sum_{l=1}^{r+1} T_l(x) + P(x) \right\},$$

который также, очевидно, принадлежит многограннику наилучшего приближения. Обозначим через $V$ множество точек максимального уклонения полинома $R(x)$ от $f(x)$.

Очевидно множество $V$ не пусто и на нем совпадают все полиномы $T_1(x), \ldots, T_{r+1}(x)$, $P(x)$. Построим множество $\widetilde{V}$ по следующему правилу:

1) $\widetilde{V}$ совпадает с $V$, если последнее содержит менее $n+1$ точки.

2) $\widetilde{V}$ состоит из каких-либо $n$ точек множества $V$, если в последнем не менее $n+1$ точки.

Пусть $\widetilde{V}$ состоит из точек $x_1, x_2, \ldots, x_p$ $(p \leqslant n)$. Эти точки являются нулями полиномов $\{\widetilde{T}_l(x)\}$ $(l = 1, 2, \ldots, r+1)$. Поэтому система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{3}$$

имеет не менее $r+1$ линейно независимых решений, а ранг $R$ матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) \ldots \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_2) \\ \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \varphi_1(x_p) & \varphi_2(x_p) \ldots \varphi_n(x_p) \end{pmatrix} \tag{4}$$

не превышает $n-r-1$. Покажем, что, кроме того, $R \leqslant p-1$. В самом деле, при $p = n$ $R \leqslant n - r - 1 \leqslant n - 1 = p - 1$. Если же $p < n$ (т. е. $\widetilde{V} = V$), то ранг матрицы (4) также меньше $p$, так как в противном случае система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(x_i) = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

имела бы решение при любых правых частях $\{b_i\}$ и существовал бы полином $S(x)$, имеющий на множестве $V$ тот же знак, что и уклонение полинома $R(x)$ от $f(x)$. А тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ полином $R(x) + \varepsilon S(x)$ давал бы функции $f(x)$ на множестве $V$ и, следовательно, на $[a, b]$, приближение, лучшее, чем полином $R(x)$, что невозможно.

Пусть $R = n - k$ $(r + 1 \leqslant k \leqslant n)$. Тогда система (3) имеет, кроме тривиального, еще $k$ линейно независимых решений, которым соответствует $k$ линейно независимых полиномов, имеющих в точках $x_1, x_2, \ldots, x_p$ общие нули. Эти полиномы можно выбрать так, что среди них будут содержаться все полиномы

$$\{\widetilde{T}_l(x)\} \quad (l = 1, 2, \ldots, r+1).$$

Но точки $x_1, x_2, \ldots, x_p$ служат для всех полиномов $\{\widetilde{T}_l(x)\}$ двойными или краевыми нулями, поскольку, если точка $x_i$ находится внутри от-

ка $[a, b]$, то в ней имеет место равенство

$$T_l'(x_i) = P'(x_i) = f'(x_i) \quad (l = 1, 2, \ldots, r+1).$$

Таким образом, среди общих нулей $k$ линейно независимых полинош нашлось $p$ точек, являющихся двойными или краевыми нулями -1-го из этих полиномов. Учитывая, что $p \geqslant R+1 \geqslant n-k+1$, мы ходим к противоречию с условием теоремы.

Необходимость. Пусть при некотором $k$ $(r < k \leqslant n)$ существуют -1 линейно независимых полиномов $T_1(x), \ldots, T_{r+1}(x)$, каждый из торых имеет двойные или краевые нули в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}$, яющихся нулями $k$ линейно независимых полиномов $T_1(x), \ldots$ $T_{r+1}(x), \ldots, T_k(x)$. В силу последнего предположения и леммы I, можно азать такое распределение знаков $\{\delta_i\}$ $(\delta_i = \pm 1,\ i = 1, 2, \ldots, n-k+1)$ очках $\{x_i\}$, что не существует полинома $P(x) \in L(S_n)$, удовлетворяющего овиям:

$$\operatorname{sign} P(x_i) = \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k+1).$$

Заметив это, перейдем к построению функции $\Phi(x) \in C_s$, для которой мерность многогранника наилучшего приближения будет превышать $r$.

Рассмотрим сначала случай $s = 1$. Выделим для каждой из точек $\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k+1)$ достаточно малый отрезок $[\alpha_i, \beta_i]$, содержай точку $x_i$ и удовлетворяющий условиям:

1) отрезок $[\alpha_i, \beta_i]$ содержит точку $x_i$ внутри себя, если $x_i$ — внутрен- точка отрезка $[a, b]$;

2) отрезок $[\alpha_i, \beta_i]$ не содержит простых нулей полиномов $T_1(x), \ldots$ $T_{r+1}(x)$, кроме, быть может, краевых нулей.

Положим

$$E = \bigcup_{i=1}^{n-k+1} [\alpha_i, \beta_i]$$

выберем $\lambda_1 > 0$ настолько малым, чтобы на $E$ имело место неравенство

$$\lambda_1 \sum_{l=1}^{r+1} |T_l(x)| \leqslant 1.$$

Построим функцию $g(x) \in C_1$, удовлетворяющую условиям:

1) $g(x_i) = \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k+1)$,

2) $|g(x)| < 1$, если $x \neq x_i$.

Определим на множестве $E$ функцию $\Phi(x)$ следующим образом:

$$\Phi(x) = g(x)\left\{1 - \lambda_1 \sum_{l=1}^{r+1} |T_l(x)|\right\}.$$

силу выбора отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$ (условие (2)), функция $\Phi(x)$, очевидно, рерывно дифференцируема на $E$. А в силу выбора функции $g(x)$, $x)$ во всех точках $\alpha_i, \beta_i$, расположенных внутри отрезка $[a, b]$, строго ьше единицы. Поэтому функцию $\Phi(x)$ можно продолжить на весь езок $[a, b]$, не нарушая непрерывности ее производной и так, чтобы дополнении к множеству $E$ выполнялось неравенство

$$|\Phi(x)| < 1 - \varepsilon,$$

$\varepsilon > 0$ достаточно мало. Поскольку $|\Phi(x)| \leqslant 1$ и $\Phi(x_i) = g(x_i) = \delta_i$, согласно сделанному выше замечанию относительно выбора $\{\delta_i\}$, ждественный нуль доставляет функции $\Phi(x)$ наилучшее приближение

равное единице. Выберем число $\lambda_2 \leqslant \lambda_1$ настолько малым, чтобы для каждого из полиномов $T_1(x), \ldots, T_{r+1}(x)$ на отрезке $[a, b]$ имело место неравенство

$$|\lambda_2 T_l(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (l = 1, 2, \ldots, r+1).$$

Нетрудно видеть, что $r+1$ линейно независимых полиномов $\lambda_2 T_1(x), \ldots$ $\ldots, \lambda_2 T_{r+1}(x)$ доставляют функции $\Phi(x)$ также наилучшее приближение. В самом деле, на множестве $E$ имеем:

$$|\Phi(x) - \lambda_2 T_l(x)| = |g(x)\{1 - \lambda_1 \sum_{i=1}^{r+1} |T_i(x)|\} - \lambda_2 T_l(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |g(x)\{1 - \lambda_1 \sum_{i=1}^{r+1} |T_i(x)|\}| + \lambda_2 |T_l(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 1 - \lambda_1 \sum_{i=1}^{r+1} |T_i(x)| + \lambda_2 |T_l(x)| \leqslant 1.$$

А на дополнении к множеству $E$

$$|\Phi(x) - \lambda_2 T_l(x)| \leqslant |\Phi(x)| + \lambda_2 |T_l(x)| \leqslant 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для случая $s = 1$ необходимость условия теоремы доказана.

Пусть теперь $s \geqslant 2$. Будем полагать точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}$ занумерованными так, что первые $j$ номеров соответствуют точкам, совпадающим с концами отрезка $[a, b]$ $(0 \leqslant j \leqslant 2)$. Построим функцию $\Phi(x) \in C_s$ $(s \geqslant 2)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\Phi(x_i) = \delta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k+1)$;
2) $|\Phi(x)| < 1$, если $x \neq x_i$;
3) $\Phi'(x_i) \neq 0$ $(i \leqslant j)$;
4) $\Phi''(x_i) \neq 0$ $(i = j+1, j+2, \ldots, n-k+1)$.

Очевидно, тождественный нуль доставляет функции $\Phi(x)$ наилучшее приближение, равное единице. Покажем, что при достаточно малом $\lambda > 0$ полиномы $\lambda T_1(x), \ldots, \lambda T_{r+1}(x)$ также будут доставлять $\Phi(x)$ наилучшее приближение.

Заключим точки $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-k+1)$ в достаточно малые интервалы (полуинтервалы при $i \leqslant j$) $\omega_i$ так, чтобы

$$\Phi'(x) \neq 0, \quad x \in \overline{\omega}_i \quad (i \leqslant j),$$

$$\Phi''(x) \neq 0, \quad x \in \overline{\omega}_i \quad (i = j+1, j+2, \ldots, n-k+1),$$

где $\overline{\omega}_i$ — замыкание $\omega_i$.

Положим

$$E_1 = \bigcup_{i \leqslant j} \omega_i, \quad E_2 = \bigcup_{i=j+1}^{n-k+1} \omega_i$$

и выберем $\lambda$ настолько малым, чтобы для всех полиномов $T_1(x), \ldots$ $\ldots, T_{r+1}(x)$ выполнялись неравенства:

$$\sup_{\lambda \in E_1} |\lambda T_l'(x)| < \inf_{x \in E_1} |\Phi'(x)|$$

и

$$\sup_{x \in E_2} |\lambda'' T_l(x)| < \inf_{x \in E_2} |\Phi''(x)|.$$

Пользуясь формулой Тейлора, можем записать:

$$\Phi(x) - \lambda T_l(x) = \Phi(x_i) + \{\Phi'(\tilde{x}) - \lambda T_l'(\tilde{x})\}(x - x_i),$$
$$x, \tilde{x} \in \omega_i \quad (i \leqslant j),$$
$$\Phi(x) - \lambda T_l(x) = \Phi(x_i) + \frac{1}{2}\{\Phi''(\tilde{x}) - \lambda T_l''(x)\}(x - x_i)^2,$$
$$x, \tilde{x} \in \omega_i \quad (i = j+1, j+2, \ldots, n-k+1).$$

Поскольку

$$|\Phi(x_i)| = 1, \quad \Phi'(x_i)\Phi(x_i)(x - x_i) < 0 \quad (i \leqslant j)$$

и

$$\Phi''(x_i)\Phi(x_i) < 0 \quad (i = j+1, \ldots, n-k+1),$$

то, учитывая значение $\lambda$, получаем:

$$|\Phi(x) - \lambda T_l(x)| \leqslant 1, \quad x \in E_1 \cup E_2 \quad (l = 1, 2, \ldots, r+1).$$

А так как на дополнении к $E_1 \cup E_2$ $|\Phi(x)| \leqslant \theta < 1$, то, полагая $|\lambda T_l(x)| < 1 - \theta$, на всем отрезке $[a, b]$ будем иметь:

$$|\Phi(x) - \lambda T_l(x)| \leqslant 1 \quad (l = 1, 2, \ldots, r+1).$$

Необходимость условия теоремы доказана полностью.

Замечание I. Теорему I, аналогично теореме Рубинштейна, можно сформулировать в терминах интерполяционных задач.

Пусть среди точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \leqslant n)$ первые $j$ точек $(0 \leqslant j \leqslant 2)$ совпадают с концами отрезка $[a, b]$.

Назовем интерполяционной задачей Эрмита 2-го порядка для системы $S_n$ с узлами в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ задачу построения полинома $P(x) \in L(S_n)$, удовлетворяющего условиям:

$$P(x_i) = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad P'(x_i) = b_i' \quad (i = j+1, j+2, \ldots, m),$$

где $\{b_i\}$, $\{b_i'\}$ — любые наперед заданные числа.

Пользуясь этим определением, теорему I можно сформулировать следующим образом:

*Для того чтобы чебышевский ранг подпространства $L(S_n)$ относительно класса $C_s$ $(s \geqslant 1)$ не превосходил $r$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $m$ точек отрезка $[a, b]$ $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n-r)$ выполнялось хотя бы одно из следующих условий:*

1) *интерполяционная задача Лагранжа для системы $S_n$ с узлами в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ всегда разрешима.*

2) *Интерполяционная задача Эрмита 2-го порядка для системы $S_n$ с узлами в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ имеет, в случае ее разрешимости *, множество решений, размерность которого не превышает $r$.*

Нетрудно доказать эквивалентность обеих формулировок. В самом деле, пусть условие, данное в первой формулировке, не выполнено, тогда:

а) существуют точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$, в которых $n - m + 1$ линейно независимых полиномов из $L(S_n)$ обращаются в нуль;

---

* Т. е. при надлежащем выборе $\{b_i\}$ и $\{b_i'\}$.

б) точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются двойными или краевыми нулями $r+1$ линейно независимых полиномов $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_{r+1}(x)$.

В силу условия а) и леммы I, интерполяционная задача Лагранжа с узлами в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ не всегда разрешима. А в силу условия б), полиномы $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_{r+1}(x)$, наряду с тождественным нулем, решают интерполяционную задачу Эрмита 2-го порядка с узлами в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ при нулевых значениях $\{b_i\}$ и $\{b'_i\}$. Следовательно, в этом случае размерность множества решений указанной задачи превышает $r$. Таким образом, ни одно из условий второй формулировки для точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ не выполняется.

Аналогичным рассуждением нетрудно также проверить, что условие первой формулировки теоремы не может выполняться, если нарушены условия, данные во второй формулировке.

Замечание II. Поскольку всякая система $S_n$ из $C_s$ $(s \geqslant 1)$ принадлежит также классу $C_1$, то из теоремы следует, что чебышевский ранг подпространства $L(S_n)$ относительно класса $C_s$ будет таким же, как и относительно класса $C_1$. Поэтому в дальнейшем мы будем говорить лишь о чебышевском ранге относительно класса $C_1$, состоящего из непрерывно дифференцируемых функций.

Введем обозначения:

$R(S_n)$ — чебышевский ранг подпространства $L(S_n)$,

$R_1(S_n)$ — чебышевский ранг подпространства $L(S_n)$ относительно класса $C_1$

Следствие I. *Имеет место неравенство*

$$R_1(S_n) \geqslant 2R(S_n) - n - 1; \tag{5}$$

*в частности, если* $R(S_n) \geqslant \left[\frac{n+2}{2}\right]$, *то подпространство* $L(S_n)$ *не является множеством единственности для класса* $C_1$.

В самом деле, если $R(S_n) = r$, то, согласно теореме Рубинштейна, существует $n-r+1$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-r+1}$, являющихся общими нулями $r$ линейно независимых полиномов $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_r(x)$. Поэтому ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_{n-r+1}) & \varphi_2(x_{n-r+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n-r+1}) \end{pmatrix} \tag{6}$$

не больше $n-r$.

Если $2(n-r+1) \geqslant n+1$, то $2R(S_n) - n - 1 \leqslant 0$ и неравенство (5) тривиально. Если же $2(n-r+1) \leqslant n$, то, учитывая ранг матрицы (6), заключаем, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots \varphi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_{n-r+1}) & \varphi_2(x_{n-r+1}) & \ldots \varphi_n(x_{n-r+1}) \\ \varphi'_1(x_1) & \varphi'_2(x_1) & \ldots \varphi'_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi'_1(x_{n-r+1}) & \varphi'_2(x_{n-r+1}) & \ldots \varphi'_n(x_{n-r+1}) \end{pmatrix}$$

не больше $2(n-r+1)-1$ и, следовательно, система

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(x_i)=0, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_i'(x_i)=0 \end{aligned} \qquad (i=1,\,2,\ldots,\,n-r+1)$$

имеет не менее $n-2(n-r+1)+1=2r-n-1$ линейно независимых решений. Следовательно, полиномы $T_1(x), T_2(x),\ldots, T_r(x)$ можно выбрать так, что среди них будут находиться $2r-n-1$ полиномов, имеющих в точках $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{n-r+1}$ двойные нули, и, согласно доказанной теореме,

$$R_1(S_n)\geqslant 2r-n-1=2R(S_n)-n-1.$$

Из неравенства (5) имеем:

$$R(S_n)\leqslant\left[\frac{R_1(S_n)+n+1}{2}\right]. \tag{5a}$$

Неравенство (5a) обращается в строгое равенство для одного частного вида пространств $L(S_n)$, рассмотренных в § 4 (периодический случай).

Следствие II. *Пусть $m$ — наибольшее число нулей (с учетом их кратности), которое может иметь не равный тождественно нулю полином из $L(S_n)$. Тогда*

$$\begin{aligned} &R_1(S_n)=0 \ \textit{при}\ R(S_n)\leqslant\left[\frac{2n-m-1}{2}\right], \\ &R_1(S_n)\leqslant m+1-2(n-R(S_n))\ \textit{при}\ R(S_n)>\left[\frac{2n-m-1}{2}\right]^{*}. \end{aligned} \tag{7}$$

Действительно, если $R_1(S_n)=r_1>0$, то, согласно теореме I, существует $r_1$ линейно независимых полиномов $T_1(x),\ T_2(x),\ldots,\ T_{r_1}(x)$, которые имеют двойные или краевые нули в точках $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{n-k+1}$, являющихся общими нулями $k$ линейно независимых полиномов. Но если $R(S_n)=r$, то, по теореме Рубинштейна, число $k$ не может быть больше $r$ (иначе было бы $R(S_n)\geqslant r+1$). Следовательно, полиномы $T_1(x)$, $T_2(x),\ldots,\ T_{r_1}(x)$ имеют двойные или краевые нули в общих точках, число которых

$$n-k+1\geqslant n-r+1,$$

и с учетом кратности число этих общих нулей, очевидно, не меньше чем

$$2(n-r-1)+2=2(n-r).$$

Но тогда можно подобрать такие точки $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_{r_1-1}$ (не совпадающие с точками $\{x_i\}$), что полином

$$P(x)\equiv\begin{vmatrix} T_1(y_1) & T_2(y_1) & \ldots T_{r_1}(y_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ T_1(y_{r_1-1}) & T_2(y_{r_1-1}) & \ldots T_{r_1}(y_{r_1-1}) \\ T_1(x) & T_2(x) & \ldots T_{r_1}(x) \end{vmatrix},$$

* Неравенство (7) тем более имеет место, если при определении числа $m$ исходить из обычного определения кратности нулей (т. е. с учетом нулей производных выше первого порядка).

имеющий с учетом кратности не менее $2(n-r)+r_1-1$ нулей, не будет тождественным нулем. По условию, $2(n-r)+r_1-1 \leqslant m$, т. е.

$$R_1(S_n) \leqslant m+1-2(n-R(S_n)).$$

А так как при $R(S_n) \leqslant \left[\frac{2n-m-1}{2}\right]$ правая часть этого неравенства неположительна, то в этом случае следует положить $R_1(S_n)=0$.

## § 4. Случай гиперплоскости в подпространстве полиномов по системе Чебышева

Пусть система $T_n = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ есть система Чебышева на отрезке $[a, b]$, а $M$ — гиперплоскость в пространстве $L(T_n)$, определяемая соотношением

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j = d, \tag{8}$$

где $d$, $\{\alpha_j\}$ — любые действительные числа, подчиненные лишь условию $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j^2 > 0$, а $\{a_j\}$ — коэффициенты полиномов, принадлежащих $M$.

Чебышевский ранг $R(M)$ гиперплоскости $M$* будет определяться, очевидно, выбором параметров $\{\alpha_j\}$ (и, разумеется, системой $T_n$). Если, в частности, положить

$$\alpha_j = \varphi_j(x_0) \quad (x_0 \in [a, b]),$$

то $R(M)$ будет равен $n-1$, т. е. размерности самой гиперплоскости. Из замечания, сделанного в § 2, следует, что неравенство $R(M) \leqslant r$ имеет место тогда и только тогда, когда для любых $n-r-1$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-r-1}$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_{n-r+1}) & \varphi_2(n-r+1) & \ldots & \varphi_n(x_{n-r+1}) \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим вопрос об условиях, необходимых и достаточных для того, чтобы чебышевский ранг гиперплоскости $M$ относительно класса $C_1$ не превосходил числа $r < n-1$. При этом мы будем полагать, что система $T_n$ также принадлежит классу $C_1$ и удовлетворяет одному естественному условию, о котором будет сказано далее.

Указанная задача охватывает, в частности, вопрос об условиях, достаточных для единственности полинома $P(x) \in M$ (при $d \neq 0$), наименее уклоняющегося от нуля в данном промежутке. Отметим, что последний вопрос для случая, когда $L(T_n)$ есть подпространство алгебраических полиномов, рассматривался, наряду с другими проблемами, В. А. Марковым в работе [7], где им, в частности, доказана единствен-

* Понятие чебышевского ранга имеет, очевидно, смысл также и для гиперплоскости.

ность такого полинома при некотором специальном выборе значений $\{\alpha_j\}$.

На рассматриваемые дифференцируемые системы $T_n$ мы накладываем следующее ограничение: если полином по системе $T_n$ имеет, с учетом кратности, более $n-1$ нулей, то этот полином должен тождественно равняться нулю.

Дифференцируемую систему Чебышева, удовлетворяющую этому условию, будем обозначать через $\widetilde{T}_n$.

Следующая лемма устанавливает характеристическое свойство систем $\widetilde{T}_n$.

ЛЕММА II. *Для того чтобы дифференцируемая система Чебышева являлась системой $\widetilde{T}_n$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой внутренней точки отрезка $[a, b]$ существовал полином, имеющий в этой точке простой нуль* *.

Это условие, очевидно, эквивалентно тому, что для любой точки $x_0$, лежащей внутри $[a, b]$, ранг матрицы

$$D(x_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \ldots \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \ldots \varphi_n'(x_0) \end{pmatrix}$$

равен двум.

Доказательство. Необходимость условия устанавливается сразу. В самом деле, пусть существует такая точка $x_0$, лежащая внутри $[a, b]$, что всякий полином из $L(T_n)$, обращающийся в ней в нуль, имеет в этой точке двойной нуль. Поскольку $T_n$ есть система Чебышева, то можно построить полином $R(x) \in L(T_n)$ ($R(x) \not\equiv 0$), имеющий $n-1$ различных нулей, один из которых находится в точке $x_0$. Но тогда, в силу сделанного допущения, $R(x)$ будет иметь, с учетом кратности, не менее $n$ нулей, и, значит, рассматриваемая система не является системой $\widetilde{T}_n$.

Достаточность. Сделаем прежде всего следующее очевидное замечание. Пусть полиномы $P(x)$ и $R(x)$ имеют общий нуль в точке $x_0$. Если $P'(x_0) = 0$, $R'(x_0) \neq 0$ и знаки обоих полиномов совпадают в правой (или левой) полуокрестности точки $x_0$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ полином $P(x) - \varepsilon R(x)$ обращается в нуль, кроме точки $x_0$, еще в некоторой точке $\widetilde{x}_0$, принадлежащей указанной окрестности. Если же $P(x)$ и $R(x)$ имеют одинаковые знаки в обеих полуокрестностях точки $x_0$, то каждая из них будет содержать точку с указанным свойством.

Покажем, что если полином $Q(x)$ имеет ровно $n-1$ различных нулей, то при выполнении условия леммы все они будут простыми.

Пусть точки $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ суть нули $Q(x)$, и допустим, что

$$Q'(x_k) = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1, \ a < x_k < b).$$

Заметим, что во всех точках $\{x_i\}$, расположенных внутри $[a, b]$, полином $Q(x)$ должен менять знак [см (1)]. Построим полином $S(x)$ такой, что $S(x_k) = 0$, $S'(x_k) \neq 0$, и выберем его знак таким, чтобы он совпадал

---

* Эта лемма может быть получена в качестве следствия из теоремы III работы Д. Дикинсона (8). Поскольку работа не содержит полного доказательства этой теоремы, мы приводим непосредственное доказательство леммы.

со знаком $Q(x)$ в левой и правой полуокрестностях точки $x_k$. Пусть

$$|Q(y_i)| = \max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i-1}} |Q(x)| \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

$$A = \min_{1 \leqslant i \leqslant n-2} |Q(y_i)|, \quad B = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |S(x)|.$$

Положим $\varepsilon < \frac{A}{B}$; тогда

$$\operatorname{sign}\{Q(y_i) - \varepsilon S(y_i)\} = -\operatorname{sign}\{Q(y_{i+1}) - \varepsilon S(y_{i+1})\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Поэтому на каждом из отрезков $[y_i, y_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$ полином $Q(x) - \varepsilon S(x)$ имеет хотя бы один нуль. Но, согласно сделанному замечанию, число $\varepsilon > 0$ можно выбрать настолько малым, что на отрезке $[y_{k-1}, y_k]$ полином $Q(x) - \varepsilon S(x)$ будет иметь не менее трех нулей — в точке $x_k$ и по одному нулю в ее левой и правой полуокрестностях. Таким образом, полином $Q(x) - \varepsilon S(x)$ будет иметь $n - 3 + 3 = n$ различных нулей и, следовательно, $Q(x) \equiv \varepsilon S(x)$, что невозможно.

Пусть не равный тождественно нулю полином $T(x)$ имеет в $p$ точках $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_p^{(1)}$ простые нули, в $q$ точках $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_q^{(2)}$ — двойные нули и не меняет знака в этих точках, а в $r$ точках $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \ldots, x_r^{(3)}$ он имеет двойные нули и меняет знак в этих точках. Допустим, что $p + 2(q + r) \geqslant n$; случай $r = 0$ при этом невозможен [см. ([1])].

Поскольку $T(x)$ — полином по системе Чебышева, то $p + q + r \leqslant n - 1$, и легко видеть, что существуют целые числа $\bar{p} \leqslant p$, $\bar{q} \leqslant q$ и $\bar{r} \leqslant r$ такие, для которых

$$\bar{p} + 2\bar{q} + 3\bar{r} \geqslant n,$$

$$\bar{p} + \bar{q} + 2\bar{r} \leqslant n.$$

Выберем из точек $\{x_i^{(1)}\}$, $\{x_i^{(2)}\}$ и $\{x_i^{(3)}\}$ соответственно по $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $\bar{r}$ точек $\{\bar{x}_i^{(1)}\}$, $\{\bar{x}_i^{(2)}\}$ и $\{\bar{x}_i^{(3)}\}$ и будем считать, что в каждой группе точки занумерованы в порядке их роста. Если между точками $\bar{x}_i^{(3)}$ и $\bar{x}_{i+1}^{(3)}$ находится нечетное (соответственно четное) число точек $\{\bar{x}_i^{(1)}\}$ и $\{\bar{x}_i^{(2)}\}$ и в правых полуокрестностях точек $\bar{x}_i^{(3)}$ и $\bar{x}_{i+1}^{(3)}$ полином имеет одинаковые (соответственно, разные) знаки, то выберем еще некоторую точку $y_i$, лежащую внутри $[\bar{x}_i^{(3)}, \bar{x}_{i+1}^{(3)}]$ и отличную от нулей полинома. Пусть число выбранных таким образом точек $\{y_i\}$ будет $s$ $(s \leqslant \bar{r} - 1)$. При этом

$$\bar{p} + \bar{q} + \bar{r} + s \leqslant \bar{p} + \bar{q} + 2\bar{r} - 1 \leqslant n - 1.$$

Если окажется, что

$$\bar{p} + \bar{q} + \bar{r} + s < n - 1,$$

то из некоторой окрестности точки $b$, не содержащей нулей полинома $T(x)$ (кроме, возможно, самой точки $b$), выберем еще $t = n - 1 - (\bar{p} + \bar{q} + \bar{r} + s)$ точек $\{t_i\}$. Построим полином $R(x)$, имеющий точно $n - 1$ нуль в точках

$$\{\bar{x}_i^{(1)}\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \bar{p}), \quad \{\bar{x}_i^{(2)}\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \bar{q}),$$

$$\{\bar{x}_i^{(3)}\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \bar{r}), \quad \{y_i\} \quad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

$$\{t_i\} \quad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

В силу условия леммы, производная полинома $R(x)$, по доказанному, не обращается в нуль ни в одной из этих точек, лежащих внутри

$[a, b]$. Изменив, если нужно, знак полинома $R(x)$, мы получим, что для каждой из точек $\bar{x}_i^{(3)}$ можно будет указать такие правую и левую полуокрестности $\delta_i^{(3)}$ и $\tilde{\delta}_i^{(3)}$, что полином $R(x)$ будет иметь в них такой же знак, что и $T(x)$. Кроме того, для каждой из точек $\bar{x}_i^{(2)}$ существует правая или левая полуокрестность $\delta_i^{(2)}$, обладающая, очевидно, таким же свойством. Таким образом, в силу сделанного выше замечания, мы заключаем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ полином $T(x) - \varepsilon R(x)$, кроме нулей в точках

$$\{\bar{x}_i^{(1)}\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \bar{p}), \quad \{\bar{x}_i^{(2)}\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \bar{q}),$$
$$\{\bar{x}_i^{(3)}\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \bar{r}),$$

будет иметь еще, по крайней мере, по одному нулю в каждой из полуокрестностей $\{\delta_i^{(3)}\}$, $\{\tilde{\delta}_i^{(3)}\}$, $\{\delta_i^{(2)}\}$, так что общее число различных нулей этого полинома будет не меньше, чем

$$\bar{p} + \bar{q} + \bar{r} + 2\bar{r} + \bar{q} = \bar{p} + 2\bar{q} + 3\bar{r} \geqslant n,$$

откуда $\varepsilon R(x) \equiv T(x)$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

Условию леммы удовлетворяют обычно встречающиеся в приложениях системы Чебышева. В частности, ему удовлетворяют все системы, получаемые путем интегрирования произвольной системы Чебышева и добавления к полученным функциям постоянной. Однако, как показывает следующий пример, выполнение этого условия не является необходимым для дифференцируемых систем Чебышева.

Рассмотрим систему Чебышева второго порядка [см. ([8])]: $T_2 = \{1, x^3\}$ на отрезке $[-1, 1]$. Для нее

$$D(x_0) \equiv \begin{pmatrix} 1 & x_0^3 \\ 0 & 3x_0^2 \end{pmatrix},$$

и если $x_0 = 0$, то ранг матрицы $D(0)$ равен единице. Полином этой системы $ax^3$ не является тождественным нулем, хотя и имеет в точке 0 двойной нуль.

ТЕОРЕМА II. а). *Пусть* $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ *есть (непериодическая) система* $\tilde{T}_n$ *и* $M$ — *гиперплоскость в пространстве* $L(\tilde{T}_n)$, *определяемая соотношением* (8). *Для того чтобы имело место неравенство*

$$R_1(M) \leqslant r, \tag{9}$$

*необходимо и достаточно, чтобы для каждых* $j$ *краевых* $(j = 0, 1, 2)$ *и* $p_{r,j} = \left[\frac{n-r-j-1}{2}\right]$ *внутренних точек отрезка* $[a, b]$ *существовало не более* $n - p_{r,j} - j - 1$ *линейно независимых полиномов из* $M$, *имеющих общие нули в этих точках.*

б) *Если система* $\tilde{T}_n$ *периодическая* *, *то неравенство* (9) *выполняется тогда и только тогда, когда каждые* $\left[\frac{n+r}{2}\right] + 1$ *линейно независимых полиномов из* $M$ *имеют не более* $\left[\frac{n-r-1}{2}\right] - 1$ *общих нулей.*

Докажем утверждение а). Без ограничения общности можно полагать $c = 0$, так что гиперплоскость $M$ есть $n-1$-мерное подпространство

* В этом случае $n$ всегда нечетно [см. ([1])].

пространства $L(\widetilde{T}_n)$. Случай, когда $d \neq 0$, сводится к предыдущему, поскольку все полиномы, принадлежащие $M$ $(d \neq 0)$, могут быть представлены в виде суммы $T^0(x) + P(x)$, где $T^0(x)$ — некоторый фиксированный полином из $M$, а $P(x)$ пробегает множество полиномов из гиперплоскости, отвечающей значению $d = 0$.

Достаточность. Допустим, что $R_1(M) \geqslant r + 1$; тогда, согласно теореме I, для некоторого $k \geqslant r + 1$ существуют $r + 1$ линейно независимых полиномов $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_{r+1}(x)$, имеющих двойные или краевые нули в $n - k$ точках *, являющихся общими нулями $k$ линейно независимых полиномов. Пусть среди этих точек $j$ краевых $(0 \leqslant j \leqslant 2)$ и $n - k - j$ внутренних. Из условия теоремы следует, что

$$k \leqslant n - p_{r,j} - j - 1.$$

Действительно, если бы оказалось, что при $k \geqslant n - p_{r,j} - j$ существует $k$ линейно независимых полиномов, имеющих общие нули в $j$ краевых и $n - k - j$ внутренних точках, то отсюда следовало бы также существование $n - p_{r,j} - j$ линейно независимых полиномов с общими нулями в $j$ краевых и

$$n - k - j + (k - n + p_{r,j} + j) = p_{r,j}$$

внутренних точках [см. (4), стр. 150], что невозможно. Но если

$$k \geqslant n - p_{r,j} - j - 1,$$

то

$$n - k - j \geqslant n - n + p_{r,j} + j + 1 - j = p_{r,j} + 1$$

и, следовательно, полиномы $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_{r+1}(x)$ имеют (с учетом кратности) не менее $2(p_{r,j} + 1) + j$ общих нулей. А тогда существует не равный тождественно нулю полином $P(x) \in M$, имеющий, с учетом кратности, $2(p_{r,j} + 1) + j + r$ нулей. Но

$$\begin{aligned} 2(p_{r,j} + 1) + j + r = 2\left\{\left[\frac{n - r - j - 1}{2}\right] + 1\right\} + j + r \geqslant \\ \geqslant n - r - j - 2 + 2 + j + r = n, \end{aligned}$$

что противоречит тому, что $P(x) \in M \subset L(\widetilde{T}_n)$.

Необходимость. Обозначим через $\bar{\varphi}_1(x), \bar{\varphi}_2(x), \ldots, \bar{\varphi}_{n-1}(x)$ базисные функции гиперплоскости $M$. Пусть при некотором $j$ $(0 \leqslant j \leqslant 2)$ существует $j$ краевых точек $\{x_i\}$ $(i \leqslant j)$ и $p_{r,j}$ $(r \leqslant n - 2)$ внутренних точек из $[a, b]$ $\{x_i\}$ $(i = j + 1, \ldots, p_{r,j} + j)$ таких, что можно построить $n - p_{r,j} - j$ линейно независимых полиномов из $M$, обращающихся в нуль в этих точках. Тогда ранг матрицы

$$A \equiv \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1(x_1) & \bar{\varphi}_2(x_1) & \ldots & \bar{\varphi}_{n-1}(x_1) \\ \bar{\varphi}_1(x_2) & \bar{\varphi}_2(x_2) & \ldots & \bar{\varphi}_{n-1}(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{\varphi}_1(x_{p_{r,j}+j}) & \bar{\varphi}_2(x_{p_{r,j}+j}) & \ldots & \bar{\varphi}_{n-1}(x_{p_{r,j}+j}) \end{pmatrix}$$

не превышает $p_{r,j} + j - 1$.

* Следует учесть, что $M$ есть $n - 1$-мерное подпространство.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} a_k \bar{\varphi}_k(x_i) = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots, p_{r,j} + j), \\ &\sum_{k=1}^{n-1} a_k \bar{\varphi}'_k(x_i) = 0 \quad (i = j+1,\ j+2, \ldots, p_{r,j}+j) \end{aligned} \qquad (10)$$

соответствующую ей матрицу

$$B \equiv \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1(x_1) & \bar{\varphi}_2(x_1) & \ldots & \bar{\varphi}_{n-1}(x_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{\varphi}_1(x_{p_{r,j}+j}) & \bar{\varphi}_2(x_{p_{r,j}+j}) & \ldots & \bar{\varphi}_{n-1}(x_{p_{r,j}+j}) \\ \bar{\varphi}'_1(x_{j+1}) & \bar{\varphi}'_2(x_{j+1}) & \ldots & \bar{\varphi}'_{n-1}(x_{j+1}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{\varphi}'_1(x_{p_{r,j}+j}) & \bar{\varphi}'_2(x_{p_{r,j}+j}) & \ldots & \bar{\varphi}'_{n-1}(x_{p_{r,j}+j}) \end{pmatrix}$$

Число строк матрицы $B$ равно

$$j + 2p_{r,j} = j + 2\left[\frac{n-j-r-1}{2}\right] \leqslant j + n - j - r - 1 = n - r - 1.$$

Поэтому, учитывая ранг матрицы $A$, можно утверждать, что ранг матрицы $B$ не превышает $n-r-2$. Но тогда система (10) имеет $r+1$ линейно независимых решений, т. е. существует $r+1$ линейно независимых полиномов, имеющих в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{p_{r,j}+j}$ двойные или краевые нули. Используя теорему I (положив $k = n - p_{r,j} - j$), заключаем, что $R_1(M) \geqslant r+1$.

Для доказательства утверждения б) достаточно положить во всех рассуждениях предыдущего пункта $j = 0$.

Замечание. Для случая периодической системы $\widetilde{T}_n$ условие утверждения б) можно заменить одним из эквивалентных ему условий II—V, приведенных в § 2 (определив надлежащим образом число $r$, входящее в эти условия). Используя, в частности, условие II, приходим к равенству:

$$R(M) = \left[\frac{n + R_1(M)}{2}\right].$$

В случае непериодической системы $\widetilde{T}_n$, вместо условий II—V, можно указать аналогичные им предложения, эквивалентные условию а) теоремы II.

Из леммы I непосредственно вытекает эквивалентность условия а) теоремы II каждому из следующих свойств гиперплоскости $M$:

1) для любых $j$ краевых точек $\{x_i\}$ $(i \leqslant j)$ и $p_{r,j}$ внутренних точек $\{x_i\}$ $(i = j+1, \ldots, p_{r,j}+j)$ ранг матрицы

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_{p_{r,j}+j}) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_1(x_{p_{r,j}+j}) & \varphi_2(x_{p_{r,j}+j}) & \ldots & \varphi_n(x_{p_{r,j}+j}) \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad (11)$$

равен $p_{r,j} + j + 1$ (т. е. всегда разрешима задача Лагранжа с узлами в любых $j$ краевых и $p_{r,j}$ внутренних точках отрезка $[a, b]$.

2) Для любых $j$ краевых и $p_{r,j}$ внутренних точек отрезка $[a, b]$ существует полином из $M$, принимающий в этих точках значения любых наперед заданных знаков.

Для того чтобы сформулировать условия теоремы II а) в терминах «рангов» и в терминах числа точек максимального уклонения, введем класс функций $F_j$, состоящий из непрерывных функций, у которых все полиномы наилучшего приближения имеют максимальное уклонение в $j$ краевых точках ($0 \leqslant j \leqslant 2$). Используя это определение, можно указать следующие формулировки условия теоремы II а):

3) чебышевский ранг гиперплоскости $M$ относительно класса $F_j$ не превосходит $r_j = \left[\frac{n+r-j}{2}\right]$ $(j = 0, 1, 2)$;

4) для любой $f(x) \in F_j$ и любого полинома из $M$, доставляющего наилучшее приближение $f(x)$, число точек максимального уклонения не меньше $\left[\frac{n-r+j+1}{2}\right]$ $(j = 0, 1, 2)$.

Эквивалентность этих условий и условия теоремы II а) доказывается, по существу, так же как и эквивалентность аналогичных условий приведенных в § 2.

## § 5. Примеры

Приведем некоторые примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

1) Рассмотрим вопрос о единственности элемента наилучшего приближения для дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в случае ее приближения алгебраическими полиномами степени $n$ с фиксированным (в частности, нулевым) коэффициентом при $p$-й степени $x$, т. е. полиномами из гиперплоскости $M_n^p \subset L(\widetilde{T}_{n+1})$, для которой $\alpha_p \neq 0$, $\alpha_k = 0$ $(k \neq p)$ (случай $f(x) \equiv 0$ рассмотрен В. А. Марковым в работе (⁷)).

Если $p = 0$, $a < 0$, $b > 0$, то, очевидно, существует дифференцируемая функция, для которой $M_n^0$ не является множеством единственности (при этом $R_1(M_n^0) = n - 1$).

Рассмотрим еще случай $p = 1$, $n = 2$, $a = -b$.

Применим теорему II а), положив $j = 2$; тогда $p_{0,2} = \left[\frac{3-2-1}{2}\right] = 0$ и матрица (11) для этого случая имеет вид:

$$A(-b, b) \equiv \begin{pmatrix} 1 & -b & b^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 0 & \alpha_1^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг, очевидно, равен $2 < p_{0,2} + 2 + 1 = 3$ и для $r = 0$ условие теоремы не выполняется. Нетрудно видеть, что для любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям

$$f(b) = -f(-b), \quad f'(b) \neq \frac{d}{\alpha_1}, \quad f'(-b) \neq \frac{d}{\alpha_1}$$

и

$$\left| f(x) - \frac{d}{\alpha_1} x \right| < \left| f(b) - \frac{d}{\alpha_1} b \right| \quad (|x| < b),$$

ногогранник наилучшего приближения в гиперплоскости $M_2^1$ будет дномерным. В частности, как указал В. А. Марков (7), среди полино-ов 2-й степени с фиксированным коэффициентом при первой степени $x$ уществует бесконечное множество полиномов, наименее уклоняющихся т нуля на отрезке $[-b, b]$ (в этом случае $f(x) \equiv 0$, $d \neq 0$).

Покажем, что при $p > 0$, за исключением рассмотренного случая, иперплоскость $M_n^p$ будет множеством единственности для любой диффе-енцируемой функции, каков бы ни был отрезок $[a, b]$.

Согласно замечанию к теореме II, достаточно показать, что для лю-ых $j$ краевых и $p_{0,j} = \left[\frac{n-j}{2}\right]$ * внутренних точек отрезка $[a, b]$ су-дествует полином $R(x) \in M_n^p$ (при $d = 0$), принимающий в этих точках начения наперед заданных знаков.

Рассмотрим случаи $2p > n$, $2p < n$ и $2p = n > 2$.

I. Пусть $2p > n$, т. е. $p \geqslant \left[\frac{n+2}{2}\right]$. Положим

$$R(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1}. \tag{12}$$

Полином такого вида принадлежит $M_n^p$ $(d = 0)$ и может иметь задан-ые знаки в любых $p$ точках отрезка $[a, b]$. Но

$$j + p_{0,j} = j + \left[\frac{n-j}{2}\right] \leqslant \left[\frac{n+2}{2}\right] \leqslant p,$$

, значит, условие теоремы выполнено.

II. Пусть $2p < n$. Аналогично предыдущему проверяем, что полином

$$\overline{R}(x) = a_0 + x^{p+1}(a_{p+1} + a_{p+2}x + \ldots + a_n x^{n-p-1})$$

акже удовлетворяет условию теоремы.

III. Пусть $2p = n > 2$. Рассмотрим четыре возможных варианта:

а) $j = 0,1$; тогда $j + p_{0,j} = j + \left[\frac{n-j}{2}\right] = \frac{n}{2} = p$ и полином $R(x)$ сно-а можно взять в форме (12).

б) $j = 2$, $p + 1$ нечетно. Так как $j + p_{0,j} = 2 + \left[\frac{n-2}{2}\right] = p + 1$, то скомый полином можно взять в виде

$$P(x) = (Ax^{p+1} + B)(a_0 + \ldots + a_{p-1}x^{p-1}),$$

оскольку полином такого вида может иметь точно $p$ нулей в любых аданных точках.

в) $j = 2$, $p + 1$ четно, $a \neq -b$. Предположим, что $|a| < |b|$ и постро-им $R(x)$ вида (12), имеющий нужные знаки в $p_{0,2}$ внутренних точках и точке $a$ (всего в $p$ точках). Если окажется, что $R(x)$ имеет в точке знак, обратный заданному, то в качестве требуемого полинома можно взять

$$S(x) = ((b - \varepsilon)^{p+1} - x^{p+1})R(x),$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

г) $j = 2$, $p + 1$ четно, а $a = -b$. Пусть даны точки

$$-b < x_1 < x_2 < \ldots < x_{p_{0,2}} < b$$

* Гиперплоскость $M_n^p$ здесь $n$-мерна.

и $\{\delta(x_k)\}$ — знаки, заданные в этих точках. Если $\delta(-b)=\delta(x_1)$ или $\delta(b)=\delta(x_{p_{0,2}})$, то искомый полином снова имеет вид (12). Если же $\delta(-b)\neq\delta(x_1)$ и $\delta(b)\neq\delta(x_{p_{0,2}})$, то при $p>1$ можно построить полином (12), имеющий требуемые знаки в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{p_{0,2}}$ и знаки, обратные заданным, в точках $-b$ и $b$. А тогда полином

$$S(x)=((b-\varepsilon)^{p+1}-x^{p+1})\,R(x),$$

принимая значения заданных знаков в точках $-b,\ x_1, x_2, \ldots, x_{p_{0,2}}, b$, будет удовлетворять условию теоремы.

Рассмотрим дальнейшие примеры.

2) Пусть $\widetilde{T}_n=\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ есть система функций А. А. Маркова, т. е. при любом $m\leqslant n$ функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ составляют систему Чебышева порядка $m$. Тогда если в соотношении (8)

$$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_p=0, \qquad p\geqslant\left[\frac{n+1-r}{2}\right],$$

то $R_1(M)\leqslant r$.

Действительно в этом случае

$$R(M)\leqslant n-1-\left[\frac{n+1-r}{2}\right]\leqslant\left[\frac{n+r-2}{2}\right]\leqslant\left[\frac{n+r-j}{2}\right] \quad (j=0, 1, 2),$$

и можно воспользоваться третьей формулировкой условия теоремы IIa), данной в замечании § 4.

3) Если из системы Маркова $\widetilde{T}_n=\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ исключить любые функции $\{\varphi_{k_i}(x)\}$, $k_i>\left[\frac{n+1}{2}\right]$, то для всякой функции $f(x)\in C_1$ среди полиномов полученной системы будет существовать единственный полином наилучшего приближения. Это вытекает из следствия II теоремы I.

Если, в частности,

$$\varphi_k(x)=x^k \quad (k=0, 1, \ldots, n),$$

то справедливо также следующее утверждение.

*Пусть среди целых чисел $k_1, k_2, \ldots, k_p$ $(1\leqslant k_i\leqslant n)$ содержится без пропуска $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ членов натурального ряда; тогда подпространство полиномов по системе $1, x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots, x^{k_p}$ будет множеством единственности для любой функции $f(x)\in C_1$.*

4) Пусть $L(\widetilde{T}_{n+1})$ — подпространство алгебраических полиномов степени $n$, рассматриваемых на отрезке $[-1, 1]$, а $M_\rho$ — гиперплоскость, для которой $\alpha_k=\rho^k$ $(k=0, 1, \ldots, n)$. Тогда

$$R(M_\rho)=R_1(M_\rho)=0 \qquad \text{при } |\rho|>1,$$

$$R(M_\rho)=R_1(M_\rho)=n \qquad \text{при } |\rho|=1,$$

$$R(M_\rho)=n,\ R_1(M_\rho)=n-1 \quad \text{при } |\rho|<1.$$

При этом функция, для которой многогранник наилучшего приближения имеет размерность, равную $R_1(M_\rho)$, может иметь как угодно много производных. Указанные соотношения легко проверить, используя одну из формулировок условия теоремы IIа), приведенных в замечании § 4.

5) Пусть $M^0$ — множество тригонометрических полиномов $n$-го порядка с равным нулю свободным членом (т. е. $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$; $d = 0$). $M^0$ есть множество единственности для любой дифференцируемой функции с периодом $2\pi$.

Действительно, для любых $n$ точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ранг матрицы

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cos x_1 & \sin x_1 \ldots \cos nx_1 & \sin nx_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ 1 & \cos x_n & \sin x_n \ldots \cos nx_n & \sin nx_n \\ \alpha_0 & 0 & 0 \qquad 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не меньше $n+1$, что нетрудно проверить, перейдя к показательным функциям. Отсюда следует, что $R(M^0) \leqslant n$ и остается применить теорему IIб).

6) Рассмотрим систему $S_{n+2} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, f(x)\}$.

Если $f^{(n+1)}(x)$ не обращается в нуль на отрезке $[a, b]$, то $S_{n+2}$ есть система Чебышева относительно этого отрезка [см. ([1])]. Для того же, чтобы $L(S_{n+2})$ было множеством единственности для любой дифференцируемой функции, достаточно лишь, чтобы функция $f^{(n+1)}(x)$ имела на отрезке $[a, b]$ не более $n$ нулей с учетом их кратности*. В самом деле, при указанном условии полином системы $S_{n+2}$ не может иметь более $2n+1$ нулей с учетом их кратности, а чебышевский ранг $L(S_{n+2})$, очевидно, не более единицы. Применив следствие II теоремы I, получим:

$$R_1(S_{n+2}) = 0.$$

Поступило
8. IV. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.—Л., 1937.

[2] Jackson D., A general class of problems in approximation, Amer. J. of Math., XLVI (1924), 215—234.

[3] Dickinson D., On Tchebycheff polinomials, Quart. J. of math., 12 (1924), 184—192.

[4] Зуховицкий С. И., О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева, Успехи матем. наук, XI, вып. 2 (68) (1956), 125—159.

[5] Зуховицкий С. И., Стечкин С. Б., О приближении абстрактных функций со значениями в банаховом пространстве, Доклады Ак. наук СССР, 106, № 5 (1956), 773—776.

[6] Крейн М. Г., $L$-проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве (в книге Н. Ахиезера и М. Крейна «О некоторых вопросах теории моментов», Харьков, 1938).

[7] Марков В. А., О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПб, 1892.

* Здесь имеется в виду обычное определение кратности нулей, т. е. с учетом производных выше первого порядка.

[8] Ремез Е. Я., Общие вычислительные методы чебышевского приближения, Киев, 1957.

[9] Рубинштейн Г. Ш., Об одном методе исследования выпуклых множеств, Доклады Ак. наук СССР, 102, № 3 (1955), 451—454.

[10] Haar A., Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, Math. Ann., 78 (1918), 294.

[11] Хавинсон С. Я., К вопросу о единственности многочлена наилучшего приближения в метрике пространства $L_1$, Доклады Ак. наук СССР, 105, № 6 (1955), 1159—1161.

[12] Хавинсон С. Я., Системы П. Л. Чебышева и единственность многочлена наилучшего приближения в метрике пространства $L_1$, Труды 3-го Всесоюзного математического съезда, т. 1 (1956), 110.

[13] Хавинсон С. Я., О размерности многогранника наилучших приближений в метрике пространства $L$, Сборник трудов Моск. строит. ин-та им. Куйбышева, № 19 (1957), 18—29.

[14] Чебышев П. Л., Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций, Собр. соч., т. П (1947), 152—236.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 115—134

А. В. ЕФИМОВ

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ СУММАМИ ФУРЬЕ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе дается оценка сверху уклонений функции от ее сумм Фурье для функций с заданным модулем гладкости и асимптотически точная оценка таких уклонений для классов функций с заданной мажорантой модуля непрерывности.

## § 1. Введение

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода $2\pi$ и

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

— частичные суммы ее ряда Фурье. Обозначим через $r_n(f, x)$ уклонение функции $f(x)$ от ее суммы Фурье, т. е.

$$r_n(f, x) = f(x) - S_n(f, x).$$

В работах ряда авторов были даны асимптотически точные оценки верхних граней таких уклонений по некоторым классам непрерывных функций. Первый асимптотически точный результат принадлежит А. Н. Колмогорову (4), рассмотревшему классы $r$ раз дифференцируемых функций. С. М. Никольский (6), (7) рассмотрел классы функций, $r$-я производная которых в смысле Вейля удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, а также сопряженные им классы функций. Автором (1), (2) найдены асимптотически точные оценки $r_n(f, x)$ для классов функций, $k$-я разность $r$-й производной в смысле Вейля которых удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha$ $(k \geqslant 2,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$.

С. М. Никольский (8) рассмотрел также класс функций, модуль непрерывности которых не превосходит данной мажоранты $\omega(t)$, т. е. класс $H^1_\omega$. Им было показано, что

$$\mathcal{E}_{S_n}(H^1_\omega) = \sup_{f \in H^1_\omega} \| r_n(f, x) \|_C = \sup_{f \in H^1_\omega} \max_x | f(x) - S_n(f, x) | =$$

$$= \theta_n \frac{2 \ln n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4z}{2n+1}\right) \sin z dz + O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где $\frac{1}{2} \leqslant \theta_n \leqslant 1$, причем в случае, когда $\omega(t)$ есть монотонно возрастающая выпуклая функция, т. е. когда

$$\omega(0) = 0, \quad \frac{1}{2}[\omega(t_1) + \omega(t_2)] \leqslant \omega\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right), \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2,$$

$\theta_n$ равно 1; таким образом, в этом случае константа

$$\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4z}{2n+1}\right)\sin z dz$$

точная.

Определим классы функций, которые мы будем рассматривать.

Будем говорить, что $f(x) \in MH^1_\omega$, если $f(x)$ имеет период $2\pi$ и ее модуль непрерывности

$$\omega_1(\delta, f) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \max_x |f(x+h) - f(x)|$$

удовлетворяет условию

$$\omega_1(\delta, f) \leqslant M\omega_1(\delta),$$

где $\omega_1(\delta)$ — заданная положительная функция, являющаяся истинной мажорантой модулей непрерывности [см. ([10]), ([11])], т. е. удовлетворяющая условиям:

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(t) \quad \text{непрерывна при } t = 0,$$

$$0 \leqslant \omega(t_2) - \omega(t_1) \leqslant \omega(t_2 - t_1) \qquad \text{при } 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2.$$

Пусть $\omega_2(\delta, f)$ — модуль гладкости функции $f(x)$, т. е.

$$\omega_2(\delta, f) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \max_x |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|,$$

и пусть $\omega_2(\delta)$ — положительная функция, являющаяся модулем гладкости для некоторой непрерывной функции периода $2\pi$.

Будем говорить, что $f(x) \in MH^2_\omega$, если

$$\omega_2(\delta, f) \leqslant M\omega_2(\delta).$$

Если же функция $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\omega_2(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)\,\omega_2(\delta) \quad (\lambda > 0),$$

то будем говорить, что $f(x) \in MH^2_{\overline{\omega}}$.

Рассмотрим также непериодические функции, получающиеся из функции периода $2\pi$ путем прибавления к ним линейной функции. Именно, будем говорить, что $\varphi(x) \in M\widetilde{H}^2_\omega$ (соответственно $\varphi(x) \in M\widetilde{H}^2_{\overline{\omega}}$), если $\varphi(x)$ может быть представлена в форме

$$\varphi(x) = f(x) + ax + b,$$

где $a$ и $b$ — постоянные, а $f(x) \in MH^2_\omega$ (соответственно $f(x) \in MH^2_{\overline{\omega}}$). Условимся вместо $1 \cdot H^1_\omega$, $1 \cdot H^2_\omega, \ldots$ писать, соответственно, $H^1_\omega$, $H^2_\omega, \ldots$

В работе изучаются свойства функций указанных классов и даются оценки верхних граней, распространенных на эти классы уклонений $r_n(f, x)$. В § 2, в частности, доказывается, что если $f(x) \in \widetilde{H}^2_{\overline{\omega}}$ и $f(0) = f(d) = 0$, то для $x \in [0, d]$

$$f(x) = O\left(\ln\frac{2d}{x}\,\omega_2(x)\right)$$

(теорема 1). Этот результат содержит известный результат Зигмунда ([3]) для $\omega_2(h) = h$ и представляет интерес, например, для $\omega_2(h) = h\ln\frac{1}{h}$.

Положим

$$C_i^{(n)}(\omega)=\sup_{f\in H_\omega^i}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right| \quad (i=1,2;\ n=1,2,\ldots),$$

т. е. $C_i^{(n)}(\omega)$ — верхняя грань $n$-го коэффициента Фурье.

В § 3 дается оценка сверху для верхних граней, распространенных на класс $H_\omega^2$ уклонений $r_n(f,x)$, т. е. доказывается, что

$$\mathscr{E}_{S_n}(H_\omega^2)=\sup_{f\in H_\omega^2}\|r_n(f,x)\|\leqslant\frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

(теорема 3). Наконец, в § 4 дается асимптотически точное равенство для $\mathscr{E}_{S_n}(H_\omega^1)$, а именно показывается, что

$$\mathscr{E}_{S_n}(H_\omega^1)=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Здесь уже константа $\dfrac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}$ — точная.

Выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечкину за постановку задачи и за ценные советы и указания, которые были использованы при выполнении настоящей работы.

## § 2. Вспомогательные предложения

Докажем прежде всего одно свойство функций классов $\widetilde{H}_\omega^2$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)\in\widetilde{H}_\omega^2$, $\omega_2(h,f)$ — ее модуль гладкости и $f(0)=f(d)=0$. Тогда для любого $x\in[0,d]$*

$$f(x)=O\left(\ln\frac{2d}{x}\,\omega_2(x)\right).$$

Доказательство. Так как $f(x)\in\widetilde{H}_\omega^2$, то для $\lambda>0$

$$\omega_2(\lambda h,f)\leqslant\omega_2(\lambda h)\leqslant(\lambda+1)\,\omega_2(h). \tag{2.1}$$

По условию, мы имеем:

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant\omega_2(h).$$

Отсюда, полагая $h=x$ и учитывая, что $f(0)=0$, получаем:

$$2f(x)-f(2x)\leqslant\omega_2(x). \tag{2.2}$$

Положим в (2.2) $x=\dfrac{d}{2^n}$ $(n=1,2,\ldots)$. Тогда

$$2f\left(\frac{d}{2^n}\right)-f\left(\frac{d}{2^{n-1}}\right)\leqslant\omega_2\left(\frac{d}{2^n}\right)\quad(n=1,2,\ldots).$$

Умножая эти неравенства на $C_n=2^{n-1}$ и суммируя полученные неравенства по $n$ от 1 до $m$, получим, учитывая, что $f(d)=0$:

$$2^mf\left(\frac{d}{2^m}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{m}2^{n-1}\omega_2\left(\frac{d}{2^n}\right).$$

Отсюда находим:

$$f\left(\frac{d}{2^m}\right)\leqslant\frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{m}2^{n-1}\omega_2\left(\frac{d}{2^n}\right)=\frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{m}2^{n-1}\omega_2\left(\frac{d\cdot2^{m-n}}{2^m}\right),$$

и, применяя (2.1), получаем:

$$f\left(\frac{d}{2^m}\right) \leqslant \frac{1}{2^m} \sum_{n=1}^{m} 2^{n-1}(2^{m-n}+1)\,\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right) =$$

$$= \frac{\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right)}{2^m} \sum_{n=1}^{m} (2^{m-1}+2^{n-1}) = \frac{m}{2}\,\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right)\right),$$

т. е.

$$f\left(\frac{d}{2^m}\right) \leqslant \frac{m}{2}\,\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right)\right). \tag{2.3}$$

Рассмотрим функцию $\psi(x)$, линейную для всех $x \in I_m = \left[\frac{d}{2^{m+1}}, \frac{d}{2^m}\right]$ и совпадающую с $f(x)$ в точках $x = \frac{d}{2^m}$ $(m = 0, 1, \ldots)$:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \frac{2^{m+1}}{d}\left[f\left(\frac{d}{2^m}\right) - f\left(\frac{d}{2^{m+1}}\right)\right]\left(x - \frac{d}{2^{m+1}}\right) + f\left(\frac{d}{2^{m+1}}\right), & \text{если } x \in I_m. \end{cases} \tag{2.4}$$

Так как функция $\nu(x) = f(x) - \psi(x)$ обращается в нуль при $x = \frac{d}{2^m}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, то при $x \pm h \in I_m$ $\left(0 < h \leqslant \frac{d}{2^{m+1}}\right)$

$$|\Delta_h^2 \nu(x)| = |\Delta_h^2 f(x)| \leqslant \omega_2(h) = O\left(\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right)\right),$$

и, в силу теоремы Фрея ([12]), для всех $x \in I_m$

$$\nu(x) = O\left(\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right)\right) = O(\omega_2(x)).$$

Следовательно,

$$f(x) = \psi(x) + \nu(x) = \psi(x) + O(\omega_2(x)). \tag{2.5}$$

Но из (2.4), используя (2.3), имеем для всех $x \in I_m$:

$$|\psi(x)| \leqslant \frac{2^{m+1}}{d}\left[\left|f\left(\frac{d}{2^m}\right)\right| + \left|f\left(\frac{d}{2^{m+1}}\right)\right|\right]\frac{d}{2^{m+1}} + \left|f\left(\frac{d}{2^{m+1}}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{cm}{2}\,\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right)\right).$$

Так как $\frac{d}{2^{m+1}} < x \leqslant \frac{d}{2^m}$, то

$$\ln \frac{d}{2^{m+1}} < \ln x \leqslant \ln \frac{d}{2^m},$$

т. е.

$$m \ln 2 \leqslant \ln d - \ln x = \ln \frac{d}{x},$$

откуда следует:

$$m \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{d}{x}.$$

Таким образом,

$$|\psi(x)| \leqslant \frac{c}{2\ln 2} \ln \frac{d}{x} \omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{d}{2^m}\right)\right) = O\left(\ln \frac{2d}{x} \omega_2(x)\right)$$

и из (2.5) получаем, что

$$f(x) = O\left(\ln \frac{2d}{x} \omega_2(x)\right),$$

т. е. утверждение теоремы.

Замечание. При $\omega_2(h) = h$ для периодических функций получаем отсюда результат Зигмунда ([3]), доказавшего, что если $\omega_2(\delta) = \delta$, то

$$\omega_1(\delta) = O\left(\delta \ln \frac{1}{\delta}\right).$$

Докажем две леммы о верхних гранях коэффициентов Фурье и неполных коэффициентов Фурье.

ЛЕММА 1. *Существует функция* $\varphi(x) \in H_\omega^i$, *удовлетворяющая условию* $\varphi\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) = \varphi(x)$ *и такая, что*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx = \frac{n}{\pi} \int_{0}^{\frac{2\pi}{n}} \varphi(x) \cos nx dx = C_i^{(n)}(\omega).$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in H_\omega^i$ $(i = 1, 2)$ — та функция, для которой

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = C_i^{(n)}(\omega) \text{ *}.$$

Функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

удовлетворяет всем утверждениям леммы. В самом деле,

$$\Delta_h^i \varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_h^i f\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right),$$

т. е.

$$\| \Delta_h^i \varphi(x) \| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \| \Delta_h^i f(x) \| \leqslant \omega_i(h, f) \leqslant \omega_i(h),$$

и, следовательно, $\varphi(x) \in H_\omega^i$. Утверждение $\varphi\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) = \varphi(x)$ очевидно. Далее, в силу периодичности $f(x)$, имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{2k\pi}{n}\right) \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = C_i^{(n)}(\omega),$$

---

* Существование такой функции в классах $H_\omega^i$ $(i = 1,2)$ вытекает из того факта, что классы $H_\omega^i$ при нормировке в одной точке по теореме Арцела [см. ([5]), стр. 66—68] компактны в себе, а следовательно, $\sup\limits_{f \in H_\omega^i} |a_n(f)|$ достигается для некоторой функции из соответствующего класса.

т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx=\frac{n}{\pi}\int_{0}^{\frac{2\pi}{n}}\varphi(x)\cos nx\,dx=C_i^{(n)}(\omega),$$

и лемма установлена.

Следствие 1.

$$C_i^{(n)}(\omega)=O\left(\omega_i\left(\frac{1}{n}\right)\right)\quad(i=1,2).\tag{2.6}$$

В самом деле,

$$C_2^{(n)}(\omega)=\frac{n}{\pi}\int_{0}^{\frac{2\pi}{n}}\varphi(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi\left(\frac{x}{n}\right)-\varphi(0)\right]\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{0}^{\pi}\left[\varphi\left(\frac{x}{n}\right)-\varphi(0)\right]\cos x\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\pi}\left[\varphi\left(-\frac{x}{n}\right)-\varphi(0)\right]\cos x\,dx\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\Delta^2_{\frac{x}{n}}\varphi(0)\cos x\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left|\Delta^2_{\frac{x}{n}}\varphi(0)\right|dx\leqslant\omega_2\left(\frac{\pi}{n},\varphi\right)\leqslant\omega_2\left(\frac{\pi}{n}\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Аналогично,

$$C_1^{(n)}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\varphi\left(\frac{x}{n}\right)-\varphi(0)\right]\cos x\,dx\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Delta^1_{\frac{x}{n}}\varphi(0)\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\omega_1\left(\frac{\pi}{n},\varphi\right)=O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следствие 2. *Если* $f(x)\in H^i_\omega$ $(i=1,2)$, *то*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=O\left(\omega_i\left(\frac{1}{n}\right)\right).\tag{2.7}$$

Действительно, так как

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right|\leqslant C_i^{(n)}(\omega),$$

то, в силу (2.6),

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=O\left(\omega_i\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

ЛЕММА 2. *Пусть* $1\leqslant m\leqslant n$. *Тогда равномерно относительно* $n$

$$\sup_{f\in\widetilde{H}^2_\omega}\left|\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{2m\pi}{n}}f(x)\cos nx\,dx\right|=\frac{m}{n}C_2^{(n)}(\omega)+O\left(\frac{\ln(m+1)}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Так как прибавление линейной функции не выводит функцию из класса $H^2_\omega$ и так как

$$\int_0^{\frac{2m\pi}{n}} (ax+b)\cos nx\,dx = 0,$$

то для $m \geqslant 2$ мы можем считать, что

$$f\left(\frac{\pi}{2n}\right) = f\left(\frac{2m\pi}{n} - \frac{3\pi}{2n}\right) = 0.$$

Поэтому из условий

$$\left| f\left(\frac{\pi}{2n}+h\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2n}\right) + f\left(\frac{\pi}{2n}-h\right)\right| \leqslant \omega_2(h)$$

$$\left| f\left(\frac{2m\pi}{n} - \frac{3\pi}{2n}+h\right) - 2f\left(\frac{2m\pi}{n} - \frac{3\pi}{2n}\right) + f\left(\frac{2m\pi}{n} - \frac{3\pi}{2n}-h\right)\right| \leqslant \omega_2(h),$$

учитывая, что, в силу теоремы 1 $\left(d = \frac{2(m-1)\pi}{n}\right)$,

$$f\left(\frac{\pi}{2n}+h\right) = O\left(\ln\frac{m}{nh}\,\omega_2(h)\right)$$

$$f\left(\frac{2m\pi}{n} - \frac{3\pi}{2n}-h\right) = O\left(\ln\frac{m}{nh}\,\omega_2(h)\right),$$

мы получаем:

$$f\left(\frac{\pi}{2n}-h\right) = O\left(\ln\frac{m}{nh}\,\omega_2(h)\right), \qquad f\left(\frac{2m\pi}{n} - \frac{3\pi}{2n}+h\right) = O\left(\ln\frac{m}{nh}\,\omega_2(h)\right).$$

Следовательно,

$$\int_0^{\frac{2m\pi}{n}} f(x)\cos nx\,dx = \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{2m\pi}{n}-\frac{3\pi}{2n}} f(x)\cos nx\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2n}} f(x)\cos nx\,dx +$$

$$+\int_{\frac{2m\pi}{n}-\frac{3\pi}{2n}}^{\frac{2m\pi}{n}} f(x)\cos nx\,dx = \int_0^{\frac{2(m-1)\pi}{n}} f\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)\sin nt\,dt + O\left(\frac{\ln m}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \int_0^{\frac{2(m-1)\pi}{n}} \varphi(t)\sin nt\,dt + O\left(\frac{\ln m}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$\varphi(t) = f\left(t+\frac{\pi}{2n}\right), \quad \varphi(t)\in \widetilde{H}^2_\omega, \quad \varphi(0) = \varphi\left(\frac{2(m-1)\pi}{n}\right) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \frac{1}{2(m-1)}\left\{\sum_{k=-j}^{m-j-2}\varphi\left(\frac{2k\pi}{n}+t\right) - \sum_{k=j+1}^{m+j-1}\varphi\left(\frac{2k\pi}{n}-t\right)\right\}$$

при $\frac{2j\pi}{n} \leqslant t \leqslant \frac{2(j+1)\pi}{n}$ $\quad (j = 0, 1, \ldots, m-2)$.

Для этой функции при $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}$ имеем:

$$\psi\left(\frac{2j\pi}{n}+t\right)=\psi(t)=-\psi\left(\frac{2j\pi}{n}-t\right) \quad (j=1,2,\ldots,m-3). \tag{2.8}$$

$$\psi\left(\frac{2j\pi}{n}\right)=0 \quad (j=0,1,\ldots,m-1) \tag{2.9}$$

и

$$\int\limits_0^{\frac{2(m-1)\pi}{n}} \psi(t)\sin ntdt = \int\limits_0^{\frac{2(m-1)\pi}{n}} \varphi(t)\sin ntdt$$

(доказательство этих соотношений см. в работе ([1]) или ([2])).

Оценим $\Delta_h^2\psi(t)$. Так как функция $\psi(t)$ имеет период $\frac{2\pi}{n}$, то для оценки достаточно рассмотреть только $t \in \left[\frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}\right]$ и $0 \leqslant h \leqslant \frac{2\pi}{n}$. Функции

$$\varphi_1(t)=\begin{cases} -\varphi\left(\frac{2\pi}{n}-t\right) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}, \\ \varphi\left(t-\frac{2\pi}{n}\right) & \text{при} \quad \frac{2\pi}{n} \leqslant t \leqslant \frac{4\pi}{n} \end{cases}$$

и

$$\varphi_2(t)=\begin{cases} \varphi\left(\frac{2(m-2)\pi}{n}+t\right) & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{n}, \\ -\varphi\left(\frac{2m\pi}{n}-t\right) & \text{при} \quad \frac{2\pi}{n} \leqslant t \leqslant \frac{4\pi}{n} \end{cases}$$

получены нечетным продолжением функций с модулем гладкости $\omega_2(h,\varphi) \leqslant \leqslant \omega_2(h)$; используя результат Фрея ([12]), заключающийся в том, что если $f(0)=f(b)=0$ и

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant b, \\ -f(-x) & \text{при} \quad -b \leqslant x \leqslant 0, \end{cases}$$

то

$$\omega_2(h, f_1) \leqslant 5\,\omega_2(h, f),$$

мы получаем, что

$$|\Delta_h^2\varphi_1(t)| \leqslant 5\,\omega_2(h,f) \leqslant 5\,\omega_2(h)$$

и

$$|\Delta_h^2\varphi_2(t)| \leqslant 5\,\omega_2(h,f) \leqslant 5\,\omega_2(h).$$

Так как $h \leqslant \frac{2\pi}{h}$, то в выражение $\Delta_h^2\psi(t)$ будет входить только конечное число $p$ разностей $\Delta_h^2\varphi_i(t)$ от функций, получаемых нечетным продолжением, а остальные слагаемые будут вида $\Delta_h^2\varphi\left(t \pm \frac{2\nu\pi}{n}\right)$ и $\Delta_h^2\varphi\left(\frac{2\nu\pi}{n} \pm t\right)$, причем для них будут справедливы оценки:

$$\left|\Delta_h^2\varphi\left(t \pm \frac{2\nu\pi}{n}\right)\right| \leqslant \omega_2(h), \quad \left|\Delta_h^2\varphi\left(\frac{2\nu\pi}{n} \pm t\right)\right| \leqslant \omega_2(h).$$

Следовательно,

$$|\Delta_h^2\psi(t)| \leqslant \frac{2(m-1-p)}{2(m-1)}\omega_2(h)+\frac{2p\cdot 5}{2(m-1)}\omega_2(h)=\left[1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right]\omega_2(h),$$

т. е.

$$\psi(t) \in \left[1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right]\tilde{H}_{\omega}^2,$$

поэтому функция

$$\psi_1(t) = \frac{1}{1+O\left(\frac{1}{m}\right)}\psi(t) \in \widetilde{H}^2_\omega$$

для $0 \leqslant t \leqslant \frac{2(m-1)}{n}\pi$ имеет период $\frac{2\pi}{n}$. Продолжим ее периодически для всех $t$. Мы получим:

$$\sup_{f\in\widetilde{H}^2_\omega}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2m\pi}{n}} f(x)\cos nx\,dx\right| =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi\in\widetilde{H}^2_\omega \\ \varphi(0)=\varphi\left(\frac{2(m-1)\pi}{n}\right)=0}} \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2(m-1)\pi}{n}} \varphi(t)\sin nt\,dt\right| + O\left(\frac{\ln m}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \sup_{\substack{\psi\in\left(1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right)H^2_\omega \\ \psi\left(\frac{2\pi}{n}+t\right)=\psi(t)}} \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2(m-1)\pi}{n}} \psi(t)\sin nt\,dt\right| + O\left(\frac{\ln m}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$=\left[1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right] \sup_{\substack{\psi_1\in H^2_\omega \\ \psi_1\left(\frac{2\pi}{n}+t\right)=\psi_1(t)}} \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2(m-1)\pi}{n}} \psi_1(t)\sin nt\,dt\right| + O\left(\frac{\ln m}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$=\left[1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right]\frac{m-1}{n} \sup_{\substack{\psi_1\in H^2_\omega \\ \psi_1\left(\frac{2\pi}{n}+t\right)=\psi_1(t)}} \left|\frac{n}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \psi_1(t)\sin nt\,dt\right| + O\left(\frac{\ln m}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$=\frac{m-1}{n}\left[1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right]C_2^{(n)}(\omega) + O\left(\frac{\ln m}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

так как

$$C_2^{(n)}(\omega) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то отсюда выводим утверждение леммы для $m \geqslant 2$, т. е.

$$\sup_{f\in\widetilde{H}^2_\omega}\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2m\pi}{n}} f(x)\cos nx\,dx\right| = \frac{m}{n}C_2^{(n)}(\omega) + O\left(\frac{\ln m}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Если же $m = 1$, то

$$\int_0^{\frac{2\pi}{n}} f(x)\cos nx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \Delta^2_{\frac{\pi}{n}-x} f\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos nx\,dx = O\left(\int_0^{\frac{\pi}{n}}\omega_2\left(\frac{\pi}{n}\right)dx\right) = O\left(\frac{1}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно, для любого $m \geqslant 1$

$$\sup_{f \in \widetilde{H}^2_\omega} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2m\pi}{n}} f(x) \cos nx \, dx \right| = \frac{m}{n} C_2^{(n)}(\omega) + O\left( \frac{\ln(m+1)}{n} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и лемма установлена.

Следствие 1. *Пусть $m$ и $n$ — целые числа. Тогда*

$$\sup_{f \in H^1_\omega} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2m\pi}{n}} f(x) \cos nx \, dx \right| = \frac{m}{n} C_1^{(n)}(\omega) + O\left( \frac{\ln m}{n} \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2.10}$$

В самом деле, из условия $f(x) \in H^1_\omega$ следует, что

$$\omega_2(h, f) = \sup_{|\delta| \leqslant h} \| f(x+\delta) - 2f(x) + f(x-\delta) \| \leqslant 2\omega_1(h, f) \leqslant 2\,\omega_1(h)$$

и

$$\omega_2(\lambda h, f) \leqslant 2\omega_1(\lambda h, f) \leqslant 2(\lambda+1)\,\omega_1(h),$$

т. е. $f(x) \in 2H^2_\omega$, а поэтому лемма 2 справедлива и для функций класса $H^1_\omega$.

Следствие 2. *Пусть $f(x) \in H^2_\omega$, $m$ и $n$ — целые числа. Тогда*

$$\int_0^{\frac{2m\pi}{n}} f(x) \cos nx \, dx = O\left( \frac{m}{n} C_2^{(n)}(\omega)\right). \tag{2.11}$$

## § 3. Уклонение функций классов $H^2_\omega$ от их сумм Фурье

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f(x) \in H^2_\omega$. Тогда для уклонения функции $f(x)$ от ее суммы Фурье справедливо равенство*

$$r_n(f, x) = \frac{\pi}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} \left[ f\left(x + z + \frac{\pi}{2n}\right) + f\left(x - z - \frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos nz \, dz + {} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. В силу (2.7) имеем:

$$r_n(f, x) = f(x) - S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Delta_t^2 f(x) \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \Delta_t^2 f(x) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt \, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \Delta_t^2 f(x) \cos nt \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \Delta_t^2 f(x) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt \, dt + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n} + \frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)}{n}\pi} \Delta_t^2 f(x) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt \, dt + \right.$$

$$+ \int\limits_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)}{n}\pi}^{\pi} \Delta_t^2 f(x) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt\, dt\Big\} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\{I_1 + I_2 + I_3\} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Но

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \Delta_t^2 f(x) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt\, dt = O\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} |\Delta_t^2 f(x)| \frac{2}{t} nt\, dt\right) =$$

$$= O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

алее,

$$I_3 = \int\limits_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)}{n}\pi}^{\pi} \Delta_t^2 f(x) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \sin nt\, dt =$$

$$= (-1)^{n+1} \int\limits_0^{\pi-\frac{\pi}{2n}-\frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)}{n}\pi} \Delta_{\pi-t}^2 f(x) \operatorname{tg} \frac{t}{2} \sin nt\, dt.$$

ункцию $f(x)$ заменим ее полиномом наилучшего приближения $P_n(x)$ воспользуемся следующими соотношениями, доказанными С. Б. Стечным ([9]):

1. Пусть $P_{n-1}(x)$ — тригонометрический полином порядка $n-1$ и

$$E_n(f) = \inf_{P_{n-1}} \| f(x) - P_{n-1}(x) \| = \| f(x) - P^*_{n-1}(x) \|.$$

гда

$$E_n(f) = \| f(x) - P^*_{n-1}(x) \| \leqslant C\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{3.1}$$

2. Пусть $\| f(x) - P_n(x) \| \leqslant C\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)$. Тогда

$$\| P''_n(x) \| \leqslant C_1 n^2 \omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right) \tag{3.2}$$

$$\omega_2\left(\frac{1}{n}, P_n\right) \leqslant C_2 \omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right). \tag{3.3}$$

В силу (3.1), имеем:

$$\Delta_{\pi-t}^2 f(x) = \Delta_{\pi-t}^2 P_n(x) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right).$$

тсюда, полагая

$$\frac{C\pi}{2n} = \pi - \frac{\pi}{2n} - \frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\pi}{n} = \begin{cases} \frac{3\pi}{2n}, & \text{если } n = 2k, \\ \frac{5\pi}{2n}, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

находим:

$$I_3 = (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{C\pi}{2n}} \Delta^2_{\pi-t} P_n(x) \operatorname{tg} \frac{t}{2} \sin nt\, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) =$$

$$= (-1)^{n+1} \left\{ -\frac{1}{n} \Big|_0^{\frac{C\pi}{2n}} \Delta^2_{\pi-t} P_n(x) \operatorname{tg} \frac{t}{2} \cos nt + \right.$$

$$+ \frac{1}{n} \int_0^{\frac{C\pi}{2n}} \left( [-P_n'(x+\pi-t) + P_n'(x-\pi+t)] \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \Delta^2_{\pi-t} P_n(x) \frac{1}{2\cos^2 \frac{t}{2}} \right) \times$$

$$\left. \times \cos nt\, dt \right\} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \Big|_0^{\frac{C\pi}{2n}} \left\{ [-P_n'(x+\pi-t) + \right.$$

$$\left. + P_n'(x-\pi+t)] \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \Delta^2_{\pi-t} P_n(x) \frac{1}{2\cos^2 \frac{t}{2}} \right\} \frac{\sin nt}{n} -$$

$$- \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \int_0^{\frac{C\pi}{2n}} \left\{ [P_n''(x+\pi-t) + P_n''(x-\pi+t)] \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \right.$$

$$+ [-P_n'(x+\pi-t) + P_n'(x-\pi+t)] \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} +$$

$$\left. + \Delta^2_{\pi-t} P_n(x) \frac{1}{2\cos^3 \frac{t}{2}} \right\} \sin nt\, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right).$$

Так как

$$P_n'(x+h) - P_n'(x-h) = 2hP_n''(x+\theta h) \quad (|\theta| < 1) \tag{3.4}$$

и

$$\Delta_h^2 P_n(x) = h^2 P_n''(x+\theta_1 h) \quad (|\theta_1| < 1), \tag{3.5}$$

то, в силу (3.2), получаем:

$$I_3 = O\left(\frac{1}{n^2}\left[2\left(\pi - \frac{C\pi}{2n}\right) P_n''\left(x + \theta\left(\pi - \frac{C\pi}{2n}\right)\right) \operatorname{tg} \frac{C\pi}{4n} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\pi - \frac{C\pi}{2n}\right)^2 P_n''\left(x + \theta_1\left(\pi - \frac{C\pi}{2n}\right)\right)\right]\right) + O\left(\frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{C\pi}{2n}} \left\{ [\,|P_n''(x+\pi-t)| + \right.\right.$$

$$+ |P_n''(x-\pi+t)|\,] \operatorname{tg} \frac{t}{2} + 2(\pi - t)\,|P_n''(x + \theta(\pi - t))|\, \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} +$$

$$\left.\left. + (\pi - t)^2\, |P_n''(x + \theta_1(\pi - t))|\, \frac{1}{2\cos^3 \frac{t}{2}} \right\} |\sin nt|\, dt \right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\left[n^2 \omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right) \cdot \frac{1}{n} + n^2 \omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right]\right) +$$

$$+O\left(\frac{1}{n^2}\int_0^{\frac{C\pi}{2n}}\left\{n^2\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\cdot\frac{1}{n}+n^2\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)+n^2\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right\}dt\right)+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом, обозначив $\gamma\pi=\frac{\pi}{2n}+\frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\pi}{n}$, имеем:

$$r_n(f, x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\Delta_t^2 f(x)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sin nt\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{2\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\Delta_t^2 f(x)\frac{\sin nt}{t}dt+\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\Delta_t^2 f(x)\left\{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right\}\sin nt\,dt\right\}+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\Delta_t^2 f(x)\frac{\sin nt}{t}dt+\frac{1}{2\pi}I_4+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

ля оценки $I_4$ заменим функцию $f(x)$ ее полиномом наилучшего приблиения; тогда, используя (3.1), получаем:

$$I_4=\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\Delta_t^2 f(x)\left\{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right\}\sin nt\,dt=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\Delta_t^2 P_n(x)\left\{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right\}\sin nt\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Далее, применяя (3.4) и (3.5), находим:

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\Delta_t^2 P_n(x)\left\{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right\}\sin nt\,dt=-\frac{1}{n}\Big|_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\Delta_t^2 P_n(x)\left\{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right\}\cos nt+$$

$$+\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\left\{[P_n'(x+t)-P_n'(x-t)]\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right)-\right.$$

$$\left.-\Delta_t^2 P_n(x)\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{2}{t^2}\right)\right\}\cos nt\,dt=\frac{1}{n^2}\Big|_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\left\{[P_n'(x+t)-\right.$$

$$\left.-P_n'(x-t)]\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right)-\Delta_t^2 P_n(x)\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{2}{t^2}\right)\right\}\sin nt-$$

$$-\frac{1}{n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\left\{[P_n''(x+t)+P_n''(x-t)]\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right)-2[P_n'(x+t)-\right.$$

$$- P'_n(x-t)]\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{2}{t^2}\right)+\Delta_t^2 P_n(x)\left(\frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin^3\frac{t}{2}}-\frac{4}{t^3}\right)\Bigg\}\sin nt\,dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}(|P''_n(x+\theta t)|+t^2|P''_n(x+\theta_1 t)|)\right)+$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^2}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\gamma\pi}\Big\{|P''_n(x+t)|+|P''_n(x-t)|+2t\,|P''_n(x+\theta t)|+\right.$$

$$\left.+t^2|P''_n(x+\theta_1 t)|\,\frac{1}{t}\Big\}\,dt.\right.$$

Здесь мы использовали оценки:

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2}-\frac{2}{t}=O(1),\quad \frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{2}{t^2}=O(1),\quad \frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin^3\frac{t}{2}}-\frac{4}{t^3}=O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Таким образом, в силу (3.2),

$$I_4=O\left(\frac{1}{n^2}n^2\omega_2\left(\frac{1}{n},f\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}n^2\omega_2\left(\frac{1}{n},f\right)\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$I_4=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и, следовательно,

$$r_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)}{n}\pi}\Delta_t^2 f(x)\frac{\sin nt}{t}\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\int_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\Delta_t^2 f(x)\,\frac{\sin nt}{t}\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\frac{1}{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\int_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\Delta_t^2 f(x)\sin nt\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\int_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\Delta_t^2 f(x)\left\{\frac{1}{t}-\frac{1}{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\right\}\sin nt\,dt+$$

$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\sum\nolimits_1+\frac{1}{\pi}\sum\nolimits_2+\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Оценим слагаемые $\sum_2$ и $\sum_1$. Мы имеем:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}} \Delta_t^2 f(x) \left\{\frac{1}{t} - \frac{1}{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\right\} \sin ntdt =$$

$$= \frac{n}{2\pi\left(k+\frac{5}{4}\right)} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}} \Delta_t^2 f(x) \frac{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)}{n}\pi - t}{t} \sin ntdt =$$

$$= \frac{n}{2\pi\left(k+\frac{5}{4}\right)} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \Delta^2_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}-z} f(x) \frac{z\cos nz}{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}-z} dz =$$

$$= \frac{n}{2\pi\left(k+\frac{5}{4}\right)} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \left\{\Delta^2_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}-z} f(x) - \left[\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}-z\right] \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}} \Delta^2_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(x)\right\} \frac{z\cos nz}{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}-z} dz.$$

Но функция

$$\psi_k(z) = \Delta^2_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}-z} f(x) - \frac{\left[\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)}{n}\pi - z\right]}{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}} \Delta^2_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}} f(x)$$

удовлетворяет условиям:

$$\psi_k(z) \in 2\widetilde{H}^2_\omega, \quad \psi_k(0) = \psi_k\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) = 0;$$

поэтому, в силу теоремы 1, для $0 \leqslant z \leqslant \frac{2\pi}{n}$ $\left(d = \frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}\right)$

$$\psi_k(z) = O\left(\ln \frac{4\pi\left(k+\frac{5}{4}\right)}{nz} \omega_2(z)\right) = O\left(\ln\frac{k+2}{nz}\omega_2(z)\right).$$

Таким образом,

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \int\limits_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}} \Delta_t^2 f(x) \left\{\frac{1}{t} - \frac{1}{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\right\} \sin ntdt =$$

$$= O\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{n}{k+1} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \ln\frac{k+2}{nz} \omega_2(z) \frac{z}{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}} dz\right) =$$

$$= O\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{n^2}{(k+1)^2} \frac{1}{n} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \int\limits_0^{\frac{2\pi}{n}} \ln\frac{k+2}{nz} dz\right) =$$

$$= O\left(n\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\frac{1}{(k+1)^2}\Big|_0^{\frac{2\pi}{n}} z\ln\frac{k+2}{nz}\right) =$$

$$= O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\sum\nolimits_2 = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Далее,

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\frac{n}{2\pi\left(k+\frac{5}{4}\right)}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}}\Delta_t^2 f(x)\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{n}{2\pi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\frac{1}{k+\frac{5}{4}}\int\limits_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{2(k+1)\pi}{n}}\Delta^2_{z+\frac{\pi}{2n}} f(x)\cos nz\,dz =$$

$$= \frac{n}{2\pi}\left\{\frac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]-\frac{3}{4}}\int\limits_0^{\frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\pi}{n}}\Delta^2_{z+\frac{\pi}{2n}} f(x)\cos nz\,dz +\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\left(\frac{1}{k+\frac{5}{4}}-\frac{1}{k+\frac{9}{4}}\right)\int\limits_0^{\frac{2(k+1)\pi}{n}}\Delta^2_{z+\frac{\pi}{2n}} f(x)\cos nz\,dz\right\}.$$

Но, в силу (2.11),

$$\int\limits_0^{\frac{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\pi}{n}}\Delta^2_{z+\frac{\pi}{2n}} f(x)\cos nz\,dz = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

поэтому

$$\sum\nolimits_1 = \frac{n}{2\pi}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{(k+1)^2}\int\limits_0^{\frac{2(k+1)\pi}{n}}\Delta^2_{z+\frac{\pi}{2n}} f(x)\cos nz\,dz + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Итак,

$$r_n(f,\ x) = \frac{n}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-3}\frac{1}{(k+1)^2}\int\limits_0^{\frac{2(k+1)\pi}{n}}\Delta^2_{z+\frac{\pi}{2n}} f(x)\cos nz\,dz + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{n}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{\frac{2k\pi}{n}}\left[f\left(x+z+\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(x-z-\frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos nz\,dz + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

что и завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо асимптотическое неравенство*

$$\mathcal{E}_{S_n}(H^2_\omega) = \sup_{f\in H^2_\omega} \| f(x) - S_n(f, x) \| \leqslant \frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Согласно теореме 2, имеем:

$$\sup_{f\in H^2_\omega} \| r_n(f, x) \| \leqslant \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k^2} \left\{ \sup_{f\in H^2_\omega} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f\left(x+z+\frac{\pi}{2n}\right) \cos nz\, dz \right| + \right.$$

$$\left. + \sup_{f\in H^2_\omega} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f\left(x-z-\frac{\pi}{2n}\right) \cos nz\, dz \right| \right\} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Отсюда, применяя лемму 2, получаем:

$$\mathcal{E}_{S_n}(H^2_\omega) \leqslant \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k^2} \left\{ \frac{k}{n} C_2^{(n)}(\omega) + O\left(\frac{\ln(k+1)}{n} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{k}{n} C_2^{(n)}(\omega) + O\left(\frac{\ln(k+1)}{n} \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{\ln(k+1)}{k^2}\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

е.

$$\mathcal{E}_{S_n}(H^2_\omega) \leqslant \frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

теорема доказана.

## § 4. Уточнение теоремы С. М. Никольского

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}_{S_n}(H^1_\omega) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Так как из условия $f(x) \in H^1_\omega$ следует, что

$$\omega_2(h, f) = \sup_{|\delta|\leqslant h} \| \Delta^2_\delta f(x) \| \leqslant 2\omega_1(h)$$

$$\omega_2(\lambda h, f) \leqslant 2(\lambda+1)\,\omega_1(h),$$

о $f(x) \in 2H^2_\omega$ и, следовательно, для уклонения функции $f(x)$ от ее сумм урье справедлива теорема 2. Таким образом,

$$r_n(f, x) = \frac{n}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} \left[ f\left(x+z+\frac{\pi}{2n}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(x-z-\frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos nz dz + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и, в силу (2.10), мы имеем:

$$\sup_{f\in H^1_\omega}\|r_n(f,\ x)\|\leqslant \frac{n}{2\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\frac{1}{k^2}\sup_{f\in H^1_\omega}\left\{\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f\left(x+z+\frac{\pi}{2n}\right)\cos nz\,dz\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2k\pi}{n}} f\left(x-z-\frac{\pi}{2n}\right)\cos nz\,dz\right|\right\}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{n}{2\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\frac{1}{k^2}\left\{\frac{2kC_1^{(n)}(\omega)+O\left(\ln(k+1)\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n}\right\}+$$

$$+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\mathscr{E}_{S_n}(H^1_\omega)\leqslant\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln n+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{4.1}$$

Для оценки $\mathscr{E}_{S_n}(H^1_\omega)$ снизу построим экстремальную функцию. Пусть функция $f(x)$ такова, что

$$f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)=f(x),\quad f\left(\frac{3\pi}{2n}\right)=0$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{z}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)\cos z\,dz=C_1^{(n)}(\omega).$$

Существование такой функции вытекает из леммы 1. Разобьем отрезок $[-\pi,\ \pi]$ на отрезки

$$I_1=\left[-\pi,\ -\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{5\pi}{2n}\right],\quad I_2=\left[-\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{5\pi}{2n},\ -\frac{\pi}{2n}\right],$$

$$I_3=\left[-\frac{\pi}{2n},\ \frac{3\pi}{2n}\right],$$

$$I_4=\left[\frac{3\pi}{2n},\ \frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right]-\frac{5\pi}{2n}\right],\qquad I_5=\left[\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right]-\frac{5\pi}{2n},\ \pi\right]$$

и рассмотрим функцию

$$\psi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in I_1,\ x\in I_3,\ x\in I_5,\\ f(x) & \text{при } x\in I_4,\\ f\left(-x-\frac{\pi}{n}\right) & \text{при } x\in I_2,\end{cases}$$

$$\psi(x+2\pi)=\psi(x).$$

Оценим разность $\psi(x+h)-\psi(x)$. Если обе точки $x$ и $x+h$ лежат на одном из отрезков $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$, то

$$|\psi(x+h)-\psi(x)|\leqslant\omega_1(h,\ f)\leqslant\omega_1(h).$$

Если же, например, $x\in I_3$, а $x+h\in I_4$, то $x+h=\frac{3\pi}{2n}-\alpha+h$ $(0<\alpha<h)$ и мы имеем:

$$\psi(x+h)-\psi(x)=\psi\left(\frac{3\pi}{2n}+h-\alpha\right)-\psi\left(\frac{3\pi}{2n}\right),$$

. е., в силу неубывания $\omega_1(h, f)$,

$$|\psi(x+h)-\psi(x)| \leqslant \omega_1(h-\alpha, f) \leqslant \omega_1(h, f) \leqslant \omega_1(h).$$

налогичный результат мы получим для других случаев расположения очек $x$ и $x+h$.

Таким образом,

$$|\psi(x+h)-\psi(x)| \leqslant \omega_1(h),$$

. е. $\psi(x) \in H^1_\omega$. Но для этой функции мы имеем·

$$r_n(\psi, 0) = \frac{n}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k^2} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} \left[\psi\left(z+\frac{\pi}{2n}\right)+\psi\left(-z-\frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos nz\, dz +$$

$$+ O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \psi\left(\frac{z}{n}+\frac{\pi}{2n}\right) \cos z\, dz + \right.$$

$$+ \int_{2\pi}^{2k\pi} f\left(\frac{z}{n}+\frac{\pi}{2n}\right) \cos z\, dz + \int_0^{2\pi} \psi\left(-\frac{z}{n}-\frac{\pi}{2n}\right) \cos z\, dz +$$

$$\left. + \int_{2\pi}^{2k\pi} f\left[-\left(-\frac{z}{n}-\frac{\pi}{n}\right)-\frac{\pi}{2n}\right] \cos z\, dz \right\} + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-2} \frac{1}{k^2} \left\{ O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + (k-1)\, C_1^{(n)}(\omega) + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) + (k-1)\, C_1^{(n)}(\omega) \right\} +$$

$$+ O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

. е.

$$r_n(\psi, 0) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_{S_n}(H^1_\omega) \geqslant r_n(\psi, 0) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (4.2)$$

Из (4.1) и (4.2) заключаем, что

$$\mathscr{E}_{S_n}(H^1_\omega) = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln n + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

. е. получаем утверждение теоремы.

Замечание. Лебегом [см. ([13])] доказано, что если $\omega_1(t)$ удовлетворяет дополнительному условию выпуклости

$$\frac{1}{2}\left[\omega_1(t_1)+\omega_1(t_2)\right] \leqslant \omega_1\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right),$$

о

$$C_1^{(n)}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2z}{n}\right) \sin z\, dz. \qquad (4.3)$$

В случае же, когда $\omega_1(t)$ — произвольная истинная мажоранта модулей непрерывности, имеем:

$$C_1^{(n)}(\omega) = \theta_n \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2z}{n}\right) \sin z\, dz, \qquad (4.4)$$

где $\frac{1}{2} \leqslant \theta_n \leqslant 1$. Равенство (4.4) получаем в силу того, что функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega_1(2t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2n}, \\ -\frac{1}{2}\omega_1(2|t|) & \text{при } -\frac{\pi}{2n} \leqslant t \leqslant 0 \end{cases}$$

удовлетворяет условию

$$|\varphi(t-z) - \varphi(t)| \leqslant 2\omega_1(z).$$

Подставляя в теореме 4 вместо $C_1^{(n)}(\omega)$ его выражение из (4.3) или (4.4), получаем результат С. М. Никольского, сформулированный во введении.

Поступило
3. I. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ефимов А. В., О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера, Кандидатская диссертация, Москва, 1957.

[2] Ефимов А. В., О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 81—116.

[3] Zygmund A., Smooth functions, Duke mathem. J., 12 (1945), 47—76.

[4] Kolmogoroff A., Zur Grösserordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen, Ann. of Mat., 36 (1935), 521—526.

[5] Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, ГИТЛ, 1951.

[6] Никольский С. М., Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье, Доклады Ак. наук СССР, 32 (1941), 386—389.

[7] Никольский С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XV, 1945.

[8] Никольский С. М., Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности, Доклады Ак. наук СССР, 52 (1946), 191—193.

[9] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15 (1951), 219—242.

[10] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 87—98.

[11] Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение), Известия Ак. наук СССР, серия матем., 19 (1955), 221—246.

[12] Frey T., A legjobb polinomapproximáció lokalizálásáról. II, MTA, III, Oszt. Közl., VIII/1 (1958), 89—112.

[13] Lebesgue H., Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, Bull. soc. Math. de France, 38 (1910), 184—210.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 135—155

А. А. КОНЮШКОВ

# О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ. II

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе рассматриваются классы функций, удовлетворяющих обобщенному условию Гёльдера или обобщенному условию Дини, и определяется категория некоторых подмножеств функций. В частности, результаты Тарнавского [(1) — (4)] о категории множеств $H_\omega \cap H^\infty_{\omega_1}$, $D^\infty_{w_1}$, $D_w \cap D^\infty_{w_1}$ распространяются на классы $H_{\omega, k}$ и $D_{w, k, \beta}$, где $k$ — любое натуральное число, а $\beta$ — любое положительное [в работах (1) — (4) $k = \beta = 1$].

## § 1. Введение и определения некоторых классов функций

1.1. В работах (1) — (4) Тарнавский, продолживший некоторые исслеования Орлича, Качмажа, Банаха и др., рассматривает классы $H_\omega$, $H^\infty_{\omega_1}$, $D_w$, $D^\infty_{w_1}$ и определяет категорию некоторых множеств функций см. (5), введение].

Введем классы $H_{\varphi, k}$ и $D_{w, k, \beta}$, где $k$ — любое натуральное число, — любое положительное, и распространим на них теоремы работ (1) — (4) категории некоторых множеств (в этих работах $k = \beta = 1$).

1.2. Пусть $\varphi(t)$ — положительная функция на $(0, 2\pi]$, $k$ — натуральое число. По определению,

1) $H_{\varphi, k}$ — класс всех функций $f \in C_{2\pi}$ *, для которых при любых $x$ $t \in (0, 2\pi]$

$$|\Delta_t^k f(x)| \leqslant \varphi(t). \tag{1.1}$$

Соотношение (1.1) будет иметь место и для $-2\pi \leqslant t < 0$, если в правой асти взять $\varphi(|t|)$.)

Здесь

$$\Delta_t^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jt)$$

— конечная несимметрическая разность функции $f$ $k$-го порядка с шаом $t$ в точке $x$. Примем в классе $H_{\varphi, k}$ метрику пространства $C_{2\pi}$. Тогда $H_{\varphi, k}$ окажется полным метрическим пространством.

2) $H^\infty_{\varphi, k}$ — класс всех функций $f \in C_{2\pi}$, для которых при каждом $x$

$$\overline{\lim_{t \to +0}} \frac{|\Delta_t^k f(x)|}{\varphi(t)} = \infty^{**}. \tag{1.2}$$

---

* $C_{2\pi}$ — класс всех непрерывных функций периода $2\pi$.

** В работах (1), (2) предел берется при $t \to 0$, а вместо $\varphi(t)$ берется $\varphi(|t|)$.

1.3. Пусть $w(t)$ — положительная функция на $(0, 2\pi]$, и пусть фиксированы числа $k$ и $\beta$, где $k$ — натуральное и $\beta > 0$. По определению,

1) $D_{w,k,\beta}$ — класс всех функций $f \in C_{2\pi}$, для которых при каждом (фиксированном) $x$

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f(x)|^\beta}{w(t)}\, dt \leqslant 1. \tag{1.3}$$

Класс $D_{w,k,\beta}$ окажется полным метрическим пространством, если ввести в нем метрику пространства $C_{2\pi}$.

2) $D^\infty_{w,k,\beta}$ — класс всех функций $f \in C_{2\pi}$, для которых при каждом $x$

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f(x)|^\beta}{w(t)}\, dt = \infty. \tag{1.4}$$

## § 2. Теоремы о классах $H$

2.1. ТЕОРЕМА 1.* *Пусть* $\varphi(t)$ — *положительная функция на* $(0, 2\pi]$ *и* $k$ — *натуральное число.*

1) *Для того чтобы* $H^\infty_{\varphi,k} \neq 0$, *достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\to+0} \varphi(t) = 0. \tag{2.1}$$

*При выполнении условия* (2.1) *множество* $H^\infty_{\varphi,k}$ *будет резидуальным в пространстве* $C_{2\pi}$.

2) *Для того чтобы в* $H_{\varphi,k}$ *входили не только константы, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{t^k}{\varphi(t)} < \infty. \tag{2.2}$$

Доказательство. 1) Пусть условие (2.1) выполняется. Докажем, что тогда множество $H^\infty_{\varphi,k}$ будет резидуальным в пространстве $C_{2\pi}$. Покажем сначала, что $H^\infty_{\varphi,k} \neq 0$. При этом мы можем считать, что $\varphi(t)$ не убывает и

$$\Lambda_{\varphi,k}(t) \equiv \sup_{0<\tau\leqslant t} \frac{\tau^k}{\varphi(\tau)} < \infty \quad (0 < t \leqslant 2\pi). \tag{2.3}$$

Действительно, в противном случае вместо $\varphi(t)$ возьмем

$$\varphi^*(t) = \max\left(t^k, \sup_{0<\tau\leqslant t} \varphi(\tau)\right) \quad (0 < t \leqslant t_0).$$
$$\varphi^*(t) = \max\left(t^k, \varphi^*(t_0)\right), \qquad (t_0 < t \leqslant 2\pi),$$

где $t_0$ таково, что $\sup\limits_{0<\tau\leqslant t_0} \varphi(\tau) < \infty$. Тогда

$$\varphi^*(t)\uparrow, \quad \Lambda_{\varphi^*,k}(t) \leqslant 1, \quad \varphi^*(t) \to 0 \quad (t \to +0), \quad H^\infty_{\varphi^*,k} \subseteq H^\infty_{\varphi,k}$$

и из резидуальности множества $H^\infty_{\varphi^*,k}$ в пространстве $C_{2\pi}$ будет следовать резидуальность множества $H^\infty_{\varphi,k}$.

Подберем числа $a_n > 0$ и натуральные $b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ следующим образом**. Положим

$$a_n = \varphi\left(\frac{2\pi}{b_n}\right) c_n.$$

* Утверждение 1) этой теоремы при $k = 1$ было доказано Ауэрбахом и Банахом [см. (5), введение]. Пример функции из $H^\infty_{\varphi,1}$ был дан, например, Рузевичем (6).

** Такой выбор в случае $k = 1$ проводился в работе (1).

Построим $b_n$ и $c_n$ по индукции. Пусть $c_1=1$, $b_1=2$. Предположим, что для $i<n$ $(n\geqslant 2)$ уже определены $b_i$ и $c_i$. Выберем $c_n$ так, чтобы

$$c_n\geqslant n,\quad \frac{1}{c_n}\sum_{i=1}^{n-1}a_i b_i^k<\frac{1}{n}. \tag{2.4}$$

Используя условие (2.1), выберем число $b_n$ так, чтобы

$$b_n>b_{n-1},\qquad c_n\varphi\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)<\frac{1}{2^{n-1}}\,c_{n-1}\,\varphi\left(\frac{r}{b_{n-1}}\right), \tag{2.5}$$

где $r$, $0<r\leqslant 2\pi$, — некоторое фиксированное число, указываемое ниже.

Из (2.5) выводим, что

$$a_n<\frac{1}{2^{n-1}}\,a_{n-1}\quad (n\geqslant 2)$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty.$$

Положим

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cos b_i x; \tag{2.6}$$

тогда $f\in C_{2\pi}$. Покажем, что $f\in H^{\infty}_{\varphi,\,k}$. Мы имеем:

$$\Delta_t^k\cos b_n x=\begin{cases}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\,2^k\sin b_n\left(x+\dfrac{kt}{2}\right)\sin^k\dfrac{b_n t}{2} & (k\ \text{нечетное}),\\[2mm] (-1)^{\frac{k}{2}}\,2^k\cos b_n\left(x+\dfrac{kt}{2}\right)\sin^k\dfrac{b_n t}{2} & (k\ \text{четное}).\end{cases}$$

Из этого, как нетрудно убедиться (геометрически), следует, что для каждого $x$ существует число $t_{x,\,n}$, $\dfrac{r}{b_n}\leqslant t_{x,\,n}\leqslant\dfrac{s}{b_n}$ такое, что

$$|\Delta^k_{t_{x,\,n}}\cos b_n x|\geqslant d>0\quad (x\in[0,\,2\pi],\ n\geqslant 1), \tag{2.7}$$

где $r$, $s$, $d$ — константы (при фиксированном $k$), причем $r>0$, $s\leqslant 2\pi$ (можно взять $r=\dfrac{\pi}{8k}$, $s=\dfrac{\pi}{2k}$). При $n\geqslant 2$ и любом $x$ имеем:

$$\begin{aligned}|\Delta^k_{t_{x,\,n}}f(x)|&=\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i\,\Delta^k_{t_{x,\,n}}\cos b_i x\right|\geqslant|a_n\,\Delta^k_{t_{x,\,n}}\cos b_n x|-\\&-\left|\sum_{i=1}^{n-1}a_i\,\Delta^k_{t_{x,\,n}}\cos b_i x+\sum_{i=n+1}^{\infty}a_i\,\Delta^k_{t_{x,\,n}}\cos b_i x\right|\geqslant a_n d-\\&-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\,|\Delta^k_{t_{x,\,n}}\cos b_i x|-\sum_{i=n+1}^{\infty}a_i\,|\Delta^k_{t_{x,\,n}}\cos b_i x|.\end{aligned}$$

Далее, учитывая, что при любом $x$

$$|\Delta^k_{t_{x,\,n}}\cos b_i x|\leqslant t^k_{x,\,n}\max_x\,(\cos b_i x)^{(k)},$$

получим:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{|\Delta^k_{t_{x,n}} \cos b_i x|}{\varphi(t_{x,n})} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)^k b_i^k}{\varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)} = (2\pi)^k \frac{1}{b_n^k \varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i^k,$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \frac{|\Delta^k_{t_{x,n}} \cos b_i x|}{\varphi(t_{x,n})} \leqslant \frac{2^k}{\varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i.$$

Поэтому при каждом $x$ и $n \geqslant 2$

$$\frac{|\Delta^k_{t_{x,n}} f(x)|}{\varphi(t_{x,n})} \geqslant \frac{a_n}{\varphi\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)} \left[ d - (2\pi)^k \frac{\varphi\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)}{a_n b_n^k \varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i^k - \frac{2^k \varphi\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)}{\varphi\left(\frac{r}{b_n}\right) a_n} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \right].$$

Покажем, что при $n \to \infty$ выражение в квадратных скобках стремится к $d$. Учитывая неравенство (2.4), имеем:

$$\frac{\varphi\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)}{a_n b_n^k \varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i^k = \frac{\frac{1}{r^k}\left(\frac{r}{b_n}\right)^k}{c_n \varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i^k \leqslant \frac{1}{r^k n} \Lambda_{\varphi, k}\left(\frac{r}{b_n}\right) \leqslant \frac{1}{r^k n} \Lambda_{\varphi, k}\left(\frac{r}{b_1}\right).$$

Далее, принимая во внимание (2.5), получим, что

$$\frac{\varphi\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)}{\varphi\left(\frac{r}{b_n}\right) a_n} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \leqslant \frac{1}{c_n \varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} c_{i-1} \varphi\left(\frac{r}{b_{i-1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_n \varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)}{c_n \varphi\left(\frac{r}{b_n}\right)} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Итак, при всех достаточно больших $n$

$$\frac{|\Delta^k_{t_{x,n}} f(x)|}{\varphi(t_{x,n})} \geqslant \frac{d}{2} c_n \geqslant \frac{d}{2} n$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\Delta^k_{t_{x,n}} f(x)|}{\varphi(t_{x,n})} = \infty$$

и, значит, $f \in H^{\infty}_{\varphi, k}$.

Отметим, что $f \in H^{\infty}_{\varphi, k, 1}$ (по терминологии работы ([5])), если последовательность $\{b_n\}$ выбирать лакунарной *. Действительно, по формуле (1.6)

* Напомним, что $H^{\infty}_{\varphi, k, 1}$ — класс всех функций $f \in L(0, 2\pi)$, для которых

$$\lim_{t\to+0} \frac{\|\Delta_t^{(k)} f(x)\|_L}{\varphi(t)} = \infty.$$

работы ([5]), при $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{\frac{\| \Delta^{(k)}_{\frac{\pi}{2b_n}} f(x)\|_L}{}}{\varphi\left(\frac{\pi}{2b_n}\right)} \geqslant B_{\lambda, k} a_n \frac{\sin^k\left(b_n \frac{\pi}{2b_n}\right)}{\varphi\left(\frac{\pi}{2b_n}\right)} \geqslant B_{\lambda, k} c_n \geqslant B_{\lambda, k} n$$

и, следовательно, $f \in H^{\infty}_{\varphi, k, 1}$.

Докажем резидуальность множества $H^{\infty}_{\varphi, k}$ в пространстве $C_{2\pi}$. Обозначим через $\mathfrak{H}^{(n)}_{\varphi, k}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ множество всех функций $f \in C_{2\pi}$, для каждой из которых существует такое $x$, что при любом $t \in (0, 2\pi]$

$$\frac{|\Delta_t^k f(x)|}{\varphi(t)} \leqslant n.$$

Множества $\mathfrak{H}^{(n)}_{\varphi, k}$ замкнуты в пространстве $C_{2\pi}$. Действительно, пусть $\{f_i\} \subset \mathfrak{H}^{(n)}_{\varphi, k}$ и $f_i \to f_0$ равномерно на $[0, 2\pi]$. Именно, пусть

$$\frac{|\Delta_t^k f_i(x_i)|}{\varphi(t)} \leqslant n, \quad x_i \in [0, 2\pi], \quad t \in (0, 2\pi] \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Из последовательности $\{x_i\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{i_m}\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и предположим, что $x_{i_m} \to x_0$. Легко убедиться, что при $m \to \infty$ и любом фиксированном $\delta$

$$f_{i_m}(x_{i_m} + \delta) \to f_0(x_0 + \delta).$$

А тогда из неравенств

$$\frac{|\Delta_t^k f_{i_m}(x_{i_m})|}{\varphi(t)} \leqslant n$$

при $m \to \infty$ будет следовать, что

$$\frac{|\Delta_t^k f_0(x_0)|}{\varphi(t)} \leqslant n,$$

т. е. $f_0 \in \mathfrak{H}^{(n)}_{\varphi, k}$.

Учитывая неубывание функции $\varphi(t)$, получаем:

$$C_{2\pi} \setminus H^{\infty}_{\varphi, k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{H}^{(n)}_{\varphi, k}.$$

Поэтому для доказательства резидуальности множества $H^{\infty}_{\varphi, k}$ достаточно показать, что каждое из множеств $\mathfrak{H}^{(n)}_{\varphi, k}$ нигде не плотно в $C_{2\pi}$. Предположим обратное, т. е. что некоторое множество $\mathfrak{H}^{(n_0)}_{\varphi, k}$ не будет нигде не плотным в $C_{2\pi}$. Тогда, в силу замкнутости множества $\mathfrak{H}^{(n_0)}_{\varphi, k}$ в пространстве $C_{2\pi}$, существует шар $O_{r_0}(f_0)$ с центром $f_0$ и радиусом $r_0$, целиком принадлежащий $\mathfrak{H}^{(n_0)}_{\varphi, k}$.

Возьмем тригонометрический полином $f_1$ такой, что

$$O_{\frac{r_0}{2}}(f_1) \subseteq O_{r_0}(f_0) \subseteq \mathfrak{H}^{(n_0)}_{\varphi, k}$$

(в качестве $f_1$ можно взять сумму Фейера функции $f$ достаточно большого порядка), и функцию $f_2 \in H^{\infty}_{\varphi, k}$ с $\|f_2\|_{C_{2\pi}} < \frac{r_0}{2}$. С этой целью строим, как указано выше, функцию $f \in H^{\infty}_{\varphi, k}$ и в качестве $f_2$ берем $cf$ при достаточно малом числе $|c|$. Рассмотрим функцию $f^* = f_1 + f_2$. Так как

$$\|f^* - f_1\|_{C_{2\pi}} = \|f_2\|_{C_{2\pi}} < \frac{r_0}{2},$$

то $f^* \in O_{\frac{r_*}{2}}(f_1)$ и, значит, $f^* \in \mathfrak{H}_{\varphi,k}^{(n_0)}$. Далее, в силу условия (2.3), при любом $x$

$$\frac{|\Delta_t^k f_1(x)|}{\varphi(t)} \leqslant \frac{t^k M}{\varphi(t)} \leqslant M_1, \quad t \in (0, 2\pi].$$

Поэтому функция $f_2 = f^* - f_1$ будет принадлежать к $\mathfrak{H}_{\varphi,k}^{(n_0+M_1)}$, что противоречит условию $f_2 \in H_{\varphi,k}^{\infty}$. Полученное противоречие доказывает резидуальность множества $H_{\varphi,k}^{\infty}$.

2) Пусть const $\neq f \in H_{\varphi,k}$, где $\varphi(t)$ — положительная функция. Из (1.1) следует, что

$$\|\Delta_t^k f(x)\|_{C_{2\pi}} \leqslant \varphi(t),$$

а отсюда, по теореме 1 работы ([5]), вытекает условие (2.2).

Если же условие (2.2) выполняется, то к $H_{\varphi,k}$ принадлежат, например, тригонометрические полиномы с достаточно малой нормой.

Теорема доказана.

2.2. ТЕОРЕМА 2 *. *Пусть $\varphi(t)$ и $\varphi_1(t)$ — положительные неубывающие функции на* $(0, 2\pi]$ *и* $k$ — *натуральное число. Тогда для того чтобы* $H_{\varphi,k} \cap H_{\varphi_1,k}^{\infty} \neq 0$, *необходимо, чтобы выполнялись условия:*

$$\overline{\lim_{t\to+0}} \frac{t^k}{\varphi(t)} < \infty, \tag{2.2}$$

$$\underline{\lim_{t\to+0}} \frac{\varphi_1(t)}{t^k \inf\limits_{0<\tau\leqslant t} [\tau^{-k} \varphi(\tau)]} = 0 \ ^{**}. \tag{2.8}$$

*При выполнении этих условий и условия*

$$\lim_{t\to+0} \frac{t^k}{\varphi(t)} = 0 \tag{2.9}$$

*множество* $H_{\varphi,k} \cap H_{\varphi_1,k}^{\infty}$ *будет резидуальным в пространстве* $H_{\varphi,k}$ *с метрикой пространства* $C_{2\pi}$.

Доказательство. а) Необходимость условия (2.2) следует из теоремы 1, ибо в $H_{\varphi,k} \cap H_{\varphi_1,k}^{\infty}$ не могут входить константы. Докажем необходимость условия (2.8). Если это условие не выполняется, то при некоторых числах $a > 0$ и $t_0$ будет

$$\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_k^{**}(t)} \geqslant a, \quad 0 < t \leqslant t_0.$$

Пусть $f \in H_{\varphi,k}$. Тогда

$$\omega_k(t, f)_{C_{2\pi}} \leqslant \varphi(t).$$

По свойству исправленной функции [см. ([7])],

$$\omega_k(t, f)_{C_{2\pi}} \leqslant 2^k \varphi_k^{**}(t).$$

---

* Необходимость условия (2.8) при $k = 1$ была доказана Орличем [см. ([5]), введение]. Резидуальность множества $H_{\varphi,1} \cap H_{\varphi_1,1}^{\infty}$ доказана в работе ([2]).

** В знаменателе формулы (2.8) стоит не функция $\varphi(t)$, а ее исправленная функция $\varphi_k^{**}(t)$ в смысле работы С. Б. Стечкина ([7]). Заметим, что формулу (2.8) можно написать так:

$$\underline{\lim_{t\to+0}} \frac{\varphi_1(t)}{t^k} \Lambda_{\varphi,k}(t) = 0, \tag{2.8'}$$

где $\Lambda_{\varphi,k}(t)$ определяется формулой (2.3).

Следовательно, при $0 < t \leqslant t_0$ получим:

$$\omega_k(t, f)_{C_{2\pi}} \leqslant \frac{2^k}{a}\varphi_1(t)$$

и, значит, $f \notin H^{\infty}_{\varphi_1, k}$. Поэтому при невыполнении условия (2.8)

$$H_{\varphi, k} \cap H^{\infty}_{\varphi_1, k} = 0.$$

б) Докажем достаточность условий.

1-й случай. Пусть

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\frac{t^k}{\varphi_1(t)} < \infty \tag{2.2'}$$

Построим функцию $f \in H_{\varphi, k} \cap H^{\infty}_{\varphi_1, k}$, положив

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos b_i x, \tag{2.6'}$$

где числа $a_i$ и $b_i$ определим так, как при доказательстве теоремы 1, взяв при этом вместо функции $\varphi$ функцию $\varphi_1$. При выборе чисел $a_n$ и $b_n$ будут выбираться также и числа $c_n$. При этом числа $b_n$ выбираются так, что выполняются неравенства (2.5). По доказанному в теореме 1, $f \in H^{\infty}_{\varphi_1, k}$. Подчиним выбор $b_n$ еще одному условию. В силу (2.8'), существует столь малое $t_n$, $0 < t_n < \pi$, что

$$\frac{\varphi_1(t_n)}{t_n^k}\Lambda_{\varphi, k}(t_n) < \frac{1}{(3\pi)^k 2^n c_n}, \tag{2.10}$$

и, кроме того, если положить

$$b_n = \left[\frac{2\pi}{t_n}\right] + 1,$$

то будут выполняться неравенства (2.5).

Покажем, что функция $f(x)$, определяемая равенством (2.6'), будет принадлежать классу $H_{\varphi, k}$. При $t \in (0, 2\pi]$ и любом $x$ имеем:

$$\frac{|\Delta_t^k f(x)|}{\varphi(t)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{|\Delta_t^k \cos b_i x|}{\varphi(t)}. \tag{2.11}$$

Пусть $0 < t < \frac{2\pi}{b_i}$. Тогда

$$\frac{|\Delta_t^k \cos b_i x|}{\varphi(t)} \leqslant b_i^k \frac{t^k}{\varphi(t)} \leqslant b_i^k \Lambda_{\varphi, k}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right).$$

Пусть $t \geqslant \frac{2\pi}{b_i}$. В этом случае

$$\frac{|\Delta_t^k \cos b_i x|}{\varphi(t)} \leqslant \frac{2^k}{\varphi(t)} < \frac{(2\pi)^k}{\varphi\left(\frac{2\pi}{b_i}\right)} = b_i^k \frac{\left(\frac{2\pi}{b_i}\right)^k}{\varphi\left(\frac{2\pi}{b_i}\right)} \leqslant b_i^k \Lambda_{\varphi, k}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right).$$

Итак, при любых $t \in (0, 2\pi]$ и $x$ выполняется неравенство

$$\frac{|\Delta_t^k \cos b_i x|}{\varphi(t)} \leqslant b_i^k \Lambda_{\varphi, k}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right). \tag{2.12}$$

Оценим $a_i b_i^k \Lambda_{\varphi, k}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right)$. Имеем:

$$a_i b_i^k \Lambda_{\varphi, k}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right) = \varphi_1\left(\frac{2\pi}{b_i}\right) c_i b_i^k \Lambda_{\varphi, k}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right). \tag{2.13}$$

Но

$$b_i = \left[\frac{2\pi}{t_i}\right] + 1, \quad t_i < \pi.$$

Поэтому $\frac{2\pi}{t_i} < b_i \leqslant \frac{2\pi}{t_i} + 1$, откуда следует:

$$\frac{2\pi}{b_i} < t_i, \quad b_i < \frac{3\pi}{t_i},$$

что, с учетом неравенства (2.10), дает:

$$\varphi_1\left(\frac{2\pi}{b_i}\right) c_i b_i^k \Lambda_{\varphi, k}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right) \leqslant \varphi_1(t_i) c_i \left(\frac{3\pi}{t_i}\right)^k \Lambda_{\varphi, k}(t_i) < \frac{1}{2^i}.$$

Из равенства (2.13) выводим:

$$a_i b_i^k \Lambda_{\varphi, k}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right) < \frac{1}{2^i}, \tag{2.14}$$

а из неравенств (2.11), (2.12) и (2.14) следует, что при любых $t \in (0, 2\pi]$ и $x$

$$\frac{|\Delta_t^k f(x)|}{\varphi(t)} < 1.$$

Таким образом,

$$f \in H_{\varphi, k} \cap H_{\varphi_1, k}^{\infty}.$$

Докажем резидуальность множества $H_{\varphi, k} \cap H_{\varphi_1, k}^{\infty}$ в пространстве $H_{\varphi, k}$ с метрикой пространства $C_{2\pi}$.

Мы имеем:

$$H_{\varphi, k} \setminus (H_{\varphi, k} \cap H_{\varphi_1, k}^{\infty}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (H_{\varphi, k} \cap \mathfrak{H}_{\varphi_1, k}^{(n)}) \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

где множества $\mathfrak{H}_{\varphi_1, k}^{(n)}$ определяются аналогично множествам $\mathfrak{H}_{\varphi, k}^{(n)}$ (доказательство теоремы 1). Для доказательства резидуальности множества $H_{\varphi, k} \cap H_{\varphi_1, k}^{\infty}$ достаточно показать, что каждое из множеств $M_n$ нигде не плотно в $H_{\varphi, k}$. Предположим обратное, т. е. что некоторое множество $M_{n_0}$ не будет нигде не плотным в пространстве $H_{\varphi, k}$. Тогда, в силу замкнутости множества $M_{n_0}$, в пространстве $H_{\varphi, k}$ существует шар $O_{r_0}(f_0)$ $(r_0 < 1)$, целиком принадлежащий $M_{n_0}$.

Возьмем тригонометрический полином $f_1$, для которого

$$O_{\frac{r_0}{2}}(f_1) \subseteq O_{r_0}(f_0) \subseteq M_{n_0}, \quad \frac{|\Delta_t^k f_1(x)|}{\varphi(t)} \leqslant \theta < 1 \quad (0 < x, \ t \leqslant 2\pi),$$

где $\theta$ — некоторое число. Такой полином можно выбрать следующим образом. Обозначим через $\sigma_n(x, f_0)$ суммы Фейера функции $f_0$. Известно [см., например, ([5]), неравенство (2.3)], что

$$\| \Delta_t^k \sigma_n(x, f_0) \|_{C_{2\pi}} \leqslant \| \Delta_t^k f_0(x) \|_{C_{2\pi}}.$$

У нас $f_0 \in H_{\varphi,k}$, так что

$$\| \Delta_t^k f_0(x) \|_{C_{2\pi}} \leqslant \varphi(t),$$

и, значит, $\sigma_n(x, f_0) \in H_{\varphi,k}$.

Подберем сумму Фейера $\sigma_{n_0}(x, f_0)$ и число $0 < \theta < 1$ такие, чтобы

$$\| f_0 - \sigma_{n_0} \|_{C_{2\pi}} < \frac{r_0}{4} \text{ и } (1 - \theta) \| f_0 \|_{C_{2\pi}} < \frac{r_0}{4}.$$

В качестве $f_1$ возьмем $\theta\sigma_{n_0}$. Так как

$$\|\sigma_{n_0}-\theta\sigma_{n_0}\|_{C_{2\pi}}=(1-\theta)\|\sigma_{n_0}\|_{C_{2\pi}}\leqslant(1-\theta)\|f_0\|_{C_{2\pi}}<\frac{r_0}{4},$$

то

$$\|f_0-f_1\|_{C_{2\pi}}<\frac{r_0}{2} \text{ и } \frac{\|\Delta_t^k f_1(x)\|_{C_{2\pi}}}{\varphi(t)}\leqslant\theta.$$

Полином $f_1$ построен. В силу условия (2.2′), при любых $x$ и $t\in(0,2\pi]$

$$\frac{|\Delta_t^k f_1(x)|}{\varphi_1(t)}\leqslant A\frac{t^k}{\varphi_1(t)}\leqslant A_1.$$

Возьмем функцию $f_2\in H_{\varphi,k}\cap H^{\infty}_{\varphi_1,k}$, для которой

$$\|f_2\|_{C_{2\pi}}<\frac{r_0}{2} \text{ и } \frac{|\Delta_t^k f_2(x)|}{\varphi(t)}\leqslant 1-\theta$$

($x$ — любое, $t\in(0,2\pi]$). С этой целью построим, как указано выше, функцию $f\in H_{\varphi,k}\cap H^{\infty}_{\varphi_1,k}$ и в качестве $f_2$ возьмем $cf$ при достаточно малом числе $|c_0|$, $|c|<1-\theta$.

Рассмотрим функцию $f^*=f_1+f_2$. Очевидно, $f^*\in H_{\varphi,k}$. Так как

$$\|f^*-f_1\|_{C_{2\pi}}=\|f_2\|_{C_{2\pi}}<\frac{r_0}{2},$$

то $f^*\in O_{\frac{r_0}{2}}(f_1)$ и, значит, $f^*\in M_{n_0}$. Но тогда из равенства $f_2=f^*-f_1$ будет следовать, что $f_2\in M_{n_0+A_1}$, а это противоречит выбору $f_2$ из $H^{\infty}_{\varphi_1,k}$. Полученное противоречие доказывает резидуальность множества $H_{\varphi,k}\cap H^{\infty}_{\varphi_1,k}$.

2-й случай. Пусть

$$\varlimsup_{t\to+0}\frac{t^k}{\varphi_1(t)}=\infty.$$

Покажем, что в этом случае доказательство можно свести к доказательству в первом случае. Возьмем функцию

$$\varphi_1^*(t)=\max(t^k,\varphi_1(t)) \quad (0<t\leqslant 2\pi).$$

Тогда

$$\varlimsup_{t\to+0}\frac{t^k}{\varphi_1^*(t)}\leqslant 1.$$

Из условия (2.8) следует, что существует последовательность $\{t_n\}$, $t_n\to+0$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_1(t_n)}{\overset{**}{\varphi}_k(t_n)}=0. \tag{2.15}$$

Мы имеем:

$$\frac{t^k}{\overset{**}{\varphi}_k(t)}=\frac{t^k}{t^k\inf\limits_{0<\tau\leqslant t}[\tau^{-k}\varphi(\tau)]}=\sup_{0<\tau\leqslant t}\frac{\tau^k}{\varphi(\tau)}.$$

Но из условия (2.9) следует, что при $t\to+0$

$$\frac{t^k}{\overset{**}{\varphi}_k(t)}\to 0;$$

значит,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_n^k}{\overset{**}{\varphi}_k(t_n)}=0. \tag{2.16}$$

Из равенств (2.15) и (2.16) выводим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{*}{\varphi}_1(t_n)}{\overset{**}{\varphi}_k(t_n)} = 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{t\to+0} \frac{\overset{*}{\varphi}_1(t)}{\overset{**}{\varphi}_k(t)} = 0.$$

Оказалось, что для функции $\varphi_k^*(t)$ имеет место первый случай. Кроме того,

$$H_{\varphi,k} \cap H^{\infty}_{\overset{*}{\varphi}_1,k} \subseteq H_{\varphi,k} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k},$$

откуда, в силу доказанного в первом случае, следует, что множество $H_{\varphi,k} \cap H^{\infty}_{\varphi_1,k}$ будет резидуальным и во втором случае. Теорема доказана.

## § 3. Теоремы о классах $D$

Предварительно заметим, что при изучении класса $D^{\infty}_{w,k,\beta}$ с положительной неубывающей функцией $w(t)$ на $(0,2\pi]$ можно, без ограничения общности, считать $w(t)$ непрерывной. Действительно, пусть $w(t)$ разрывна и $\{t_n\}$ — ее точки разрыва в $(0,2\pi)$.

Пусть

$$\tilde{w}(t_n) = \lim_{t\to t_n-} w(t), \quad \tilde{w}(2\pi) = \lim_{t\to 2\pi-} w(t)$$

и непрерывная функция $\tilde{w}(t)$ получается из $w(t)$ изменением значений на множестве $\mathfrak{M}$ (из интервалов) таком, что

$$\int_{\mathfrak{M}} \frac{dt}{w(t)} < \infty, \quad \int_{\mathfrak{M}} \frac{dt}{\tilde{w}(t)} < \infty.$$

Тогда $D^{\infty}_{w,k,\beta} = D^{\infty}_{\tilde{w},k,\beta}$.

ТЕОРЕМА 3 *. *Пусть $w(t)$ — положительная неубывающая непрерывная функция на $(0,2\pi]$, $k$ — натуральное число и $\beta > 0$. Тогда если $w(t)$ удовлетворяет условиям:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{w(t)} = \infty, \tag{3.1}$$

$$w(2t) = O[w(t)] \quad (t \to +0), \tag{3.2}$$

*то множество $D^{\infty}_{w,k,\beta}$ будет резидуальным в пространстве $C_{2\pi}$.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что выполняется условие

$$\int_0^{2\pi} \frac{t^{k\beta}}{w(t)} dt < \infty. \tag{3.3}$$

Действительно, если оно не выполняется, т. е. если

$$\int_0^{2\pi} \frac{t^{k\beta}}{w(t)} dt = \infty, \tag{3.4}$$

* При $k = \beta = 1$ эта теорема доказана в работе ([4]).

то возьмем функцию

$$w^*(t)=\max(t, w(t)) \quad (0<t\leqslant 2\pi).$$

Покажем, что тогда

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{w^*(t)}=\infty, \tag{3.1'}$$

$$w^*(2t)=O[w^*(t)] \quad (t\to+0), \tag{3.2'}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{t^{k\beta}}{w^*(t)}dt<\infty. \tag{3.3'}$$

Кроме того, ясно, что $D^{\infty}_{w^*,k,\beta}\subset D^{\infty}_{w,k,\beta}$.

Условие (3.3′) выполняется, ибо

$$\int_0^{2\pi}\frac{t^{k\beta}}{w^*(t)}dt\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{t^{k\beta}}{t}dt<\infty.$$

Из условия (3.2) следует, что для $t\in(0, t_0]$ $(t_0\leqslant\pi)$

$$\frac{w(2t)}{w(t)}\leqslant M.$$

Пусть при некотором $t\in(0, t_0]$

$$w^*(2t)=w(2t), \quad w^*(t)=t.$$

Тогда

$$\frac{w^*(2t)}{w^*(t)}=\frac{w(2t)}{t}\leqslant\frac{w(2t)}{w(t)}\leqslant M.$$

А если при некотором $t\in(0, t_0]$

$$w^*(2t)=2t, \quad w^*(t)=w(t),$$

то

$$\frac{w^*(2t)}{w^*(t)}=\frac{2t}{w(t)}\leqslant\frac{2t}{t}\leqslant 2.$$

Отсюда следует условие (3.2′).

Докажем теперь условие (3.1′).

1-й случай. Пусть существует $t_0>0$ такое, что при $0<t\leqslant t_0$ $w^*(t)=t$. В этом случае выполнение условия (3.1′) очевидно.

Случай, когда при $t\in(0, t_0]$ $w^*(t)=w(t)$, невозможен, ибо тогда из условия (3.4) следовало бы, что

$$\int_0^{2\pi}\frac{t^{k\beta}}{w^*(t)}dt=\infty,$$

а это противоречит доказанному выше условию (3.3′).

2-й случай. Пусть не существует $t_0>0$ такого, что при $0<t\leqslant t_0$ $w^*(t)=t$. Выделим на $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ все максимальные интервалы $I_m$, на которых $w^*(t)=w(t)$, и все максимальные интервалы $J_n$, на которых $w^*(t)=t$. Как тех, так и других интервалов будет счетное множество.

Если

$$\sum_m\int_{I_m}\frac{dt}{w(t)}=\infty,$$

то и

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{w^*(t)} = \infty.$$

Если

$$\sum_m \int_{I_m} \frac{dt}{w(t)} < \infty,$$

то тогда тем более

$$\sum_m \int_{I_m} \frac{t^{k\beta}}{w(t)} dt < \infty,$$

а значит,

$$\sum_n \int_{J_n} \frac{t^{k\beta}}{w(t)} dt = \infty.$$

Покажем, что

$$\sum_n \int_{J_n} \frac{dt}{t} = \infty.$$

Пусть существует такой интервал $(0, t_0) \subset \left(0, \frac{1}{2}\right)$, что во всех интервалах $J_{n_\nu} \subset (0, t_0)$ будет

$$\frac{1}{t} \geqslant \frac{t^{k\beta}}{w(t)}.$$

Тогда

$$\sum_\nu \int_{J_{n_\nu}} \frac{t^{k\beta}}{w(t)} dt = \infty$$

и, значит,

$$\sum_\nu \int_{J_{n_\nu}} \frac{dt}{t} = \infty.$$

Если такого интервала $(0, t_0)$ не существует, то тогда среди интервалов $J_n$ существует бесконечно много интервалов $(t_i, t_i')$ $(i = 1, 2, \ldots)$ таких, что $t_i' \to 0$, и в каждом из них можно найти точку $\tau_i$, для которой

$$\frac{\tau_i^{k\beta}}{w(\tau_i)} > \frac{1}{\tau_i},$$

т. е.

$$\tau_i^{1+k\beta} > w(\tau_i).$$

Учитывая, что $\tau_i < \frac{1}{2}$, находим:

$$t_i' > \tau_i > \tau_i^{1+k\beta} > w(\tau_i) \geqslant w(t_i) = t_i.$$

Поэтому

$$\int_{t_i}^{t_i'} \frac{dt}{t} \geqslant \int_{\tau_i^{1+k\beta}}^{\tau_i} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{\tau_i}\left(\tau_i - \tau_i^{1+k\beta}\right) = 1 - \tau_i^{k\beta}.$$

Так как при $i \to \infty$ $1 - \tau_i^{k\beta} \to 1$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{t_i}^{t_i'} \frac{dt}{t} = \infty.$$

Условие (3.1′) выполняется.

Построим функцию $f \in D^{\infty}_{w,k,\beta}$ вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos b_i x, \qquad (3.5)$$

где $a_i > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$ и $b_i$—натуральные, $b_{i+1} > b_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *. При этом можно считать, что $\beta > 1$, ибо из выполнения условия (3.3) при $\beta \leqslant 1$ следует его выполнение при $\beta > 1$ и, кроме того, $D^{\infty}_{w,k,\beta_1} \supset D^{\infty}_{w,k,\beta_2}$, если $\beta_1 < \beta_2$.

Положим

$$W(\tau) = \int_{\tau}^{2\pi} \frac{dt}{w(t)}, \quad \tau \in (0, 2\pi).$$

Из условия (3.1) следует, что при $\tau \to +0$ $W(\tau) \to +\infty$, а из условий (3.1) и (3.2) вытекает (см. [3], лемма 2), что

$$W(\tau) = O[W(2\tau)] \quad (\tau \to +0). \qquad (3.6)$$

Положим

$$c_i = a_i W^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

и будем определять $c_i$ и $b_i$ по индукции. Положим $c_1 = 1$, $b_1 = 2$. Пусть при $i < n$ $(n \geqslant 2)$ $c_i$ и $b_i$ уже определены. Определим $c_n$ так, чтобы

$$c_n \geqslant n, \quad \frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i^k < \frac{1}{n}, \qquad (3.7)$$

и выберем натуральное число $b_n$, $b_n > b_{n-1}$, таким образом, чтобы

$$\frac{c_n}{W^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)} < \frac{1}{2^{n-1}} \frac{c_{n-1}}{W^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_{n-1}}\right)}, \qquad (3.8)$$

т. е.

$$a_n < \frac{1}{2^{n-1}} a_{n-1} \quad (n \geqslant 2).$$

Тогда

$$a_{n+1} < \frac{1}{2^n} a_n, \quad a_{n+2} < \frac{1}{2^{n+1}} a_{n+1} < \frac{1}{2^{n+(n+1)}} a_n, \ldots,$$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i < \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Докажем, что функция $f(x)$ вида (3.5) принадлежит классу $D^{\infty}_{w,k,\beta}$.

* Построение такой функции в случае $k = \beta = 1$ проводилось в работе [3].

На основании неравенства Минковского, при $n \geqslant 2$ и любом $x$ имеем:

$$\left(\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f(x)|^\beta}{w(t)} dt\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i \Delta_t^k \cos b_i x\right|^\beta}{w(t)} dt\right)^{\frac{1}{\beta}} \geqslant$$

$$\geqslant a_n \left(\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k \cos b_n x|^\beta}{w(t)} dt\right)^{\frac{1}{\beta}} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k \cos b_i x|^\beta}{w(t)} dt\right)^{\frac{1}{\beta}} -$$

$$- \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \left(\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k \cos b_i x|^\beta}{w(t)} dt\right)^{\frac{1}{\beta}} \equiv R_n - R_n' - R_n''.$$

Далее,

$$R_n'' \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \left(\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{2^{k\beta}}{w(t)} dt\right)^{\frac{1}{\beta}} = 2^k W^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_n}\right) \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i,$$

$$R_n' \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i \left(\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{t^{k\beta} b_i^{k\beta}}{w(t)} dt\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i^k \left(\int_0^{2\pi} \frac{t^{k\beta}}{w(t)} dt\right)^{\frac{1}{\beta}} = C_1 \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_i^k.$$

Полагая $t = \frac{u}{b_n}$, получим:

$$R_n = \frac{a_n}{b_n^{\frac{1}{\beta}}} \left(\int_{2\pi}^{2\pi b_n} \frac{\left|\Delta_{\frac{u}{b_n}}^k \cos b_n x\right|^\beta}{w\left(\frac{u}{b_n}\right)} du\right)^{\frac{1}{\beta}} = \frac{a_n}{b_n^{\frac{1}{\beta}}} \left(\sum_{m=1}^{b_n-1} \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)}\right)^{\frac{1}{\beta}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{a_n}{b_n^{\frac{1}{\beta}}} \left(\sum_{m=1}^{b_n-1} \frac{1}{w\left[\frac{2\pi(m+1)}{b_n}\right]} \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \left|\Delta_{\frac{u}{b_n}}^k \cos b_n x\right|^\beta du\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Пусть $u = 2\pi m + v$. Тогда

$$\int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} \left|\Delta_{\frac{u}{b_n}}^k \cos b_n x\right|^\beta du = \int_0^{2\pi} \left|\Delta_{\frac{2\pi m + v}{b_n}}^k \cos b_n x\right|^\beta dv.$$

Имеем:

$$\left|\Delta_{\frac{2\pi m+v}{b_n}}^k \cos b_n x\right| = \begin{cases} 2^k \left|\sin\left(b_n x + \frac{kv}{2}\right)\right| \sin^k \frac{v}{2} & (k \text{ нечетное}), \\ 2^k \left|\cos\left(b_n x + \frac{kv}{2}\right)\right| \sin^k \frac{v}{2} & (k \text{ четное}). \end{cases}$$

Отсюда ясно, что интеграл

$$\int_0^{2\pi} \left|\Delta_{\frac{2\pi m+v}{b_n}}^k \cos b_n x\right|^\beta dv$$

не зависящий от $m$) является положительной непрерывной функцией от $x$ и поэтому при каждом $n=1, 2, \ldots$

$$\min_{x\in[0,2\pi]}\int_0^{2\pi}\left|\Delta^k_{\frac{2\pi m+v}{b_n}}\cos b_n x\right|^\beta dv=d>0.$$

Следовательно,

$$R_n\geqslant\frac{d^{\frac{1}{\beta}}a_n}{b_n^{\frac{1}{\beta}}}\left(\sum_{m=1}^{b_n-1}\frac{1}{w\left[\frac{2\pi(m+1)}{b_n}\right]}\right)^{\frac{1}{\beta}}=\frac{d^{\frac{1}{\beta}}a_n}{(2\pi)^{\frac{1}{\beta}}}\left(\sum_{m=1}^{b_n-1}\frac{2\pi}{b_n}\frac{1}{w\left[\frac{2\pi(m+1)}{b_n}\right]}\right)^{\frac{1}{\beta}}\geqslant$$

$$\geqslant d_1a_n\left(\int_{\frac{4\pi}{b_n}}^{2\pi}\frac{dt}{w(t)}\right)^{\frac{1}{\beta}}=d_1a_nW^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{4\pi}{b_n}\right).$$

Из соотношения (3.6) выводим:

$$W\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)\leqslant C_2W\left(\frac{4\pi}{b_n}\right)\quad(n=2,3,\ldots),$$

где $C_2$ — константа. Поэтому

$$W\left(\frac{4\pi}{b_n}\right)\geqslant\frac{1}{C_2}W\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)\text{ и }R_n\geqslant C_3\,a_nW^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_n}\right).$$

Итак, при $n\geqslant 2$ и любом $x$ для функции $f$ вида (3.5) имеем:

$$\left(\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi}\frac{|\Delta^k_t f(x)|^\beta}{w(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{\beta}}\geqslant$$

$$\geqslant a_n\,W^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)\left(C_3-\frac{C_1}{a_nW^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)}\sum_{i=1}^{n-1}a_ib_i^k-\frac{2^k}{a_n}\sum_{i=n+1}^{\infty}a_i\right)\quad(\beta>1).\quad(3.9)$$

Из неравенств (3.7) и (3.8) следует, что при любом $x$ и достаточно больших $n$

$$\left(\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi}\frac{|\Delta^k_t f(x)|^\beta}{w(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{\beta}}\geqslant c_n\,\frac{C_3}{2}\geqslant\frac{C_3}{2}\,n.$$

Следовательно, $f\in D^\infty_{w,k,\beta}$.

Отметим, что $f\in D^\infty_{w,k,1,\beta}$ (по терминологии работы ([5])), если последовательность $\{b_n\}$ выбирать лакунарной *. Действительно, по формуле (1.10) работы ([5]), имеем (при $\beta>2$):

$$\int_0^{2\pi}\frac{\|\Delta^{(k)}_t f(x)\|^\beta_L}{w(t)}\,dt\geqslant B^\beta_{\lambda,k}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^\beta\int_0^{2\pi}\frac{|\sin b_it|^{k\beta}}{w(t)}\,dt.$$

* Напомним, что $D^\infty_{w,k,1,\beta}$ — класс всех функций $f\in L(0,2\pi)$, для которых

$$\int_0^{2\pi}\frac{\|\Delta^{(k)}_t f(x)\|^\beta_L}{w(t)}\,dt=\infty.$$

Кроме того, при неубывающей функции $w(t)$ [см. (8) и (5)]

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\sin b_i t|^{k\beta}}{w(t)}\, dt \geqslant C(k\beta) \int_{\frac{1}{b_i}}^{2\pi} \frac{dt}{w(t)} = CW\left(\frac{1}{b_i}\right) \geqslant CW\left(\frac{2\pi}{b_i}\right).$$

Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^{(k)} f(x) \|_L^\beta}{w(t)}\, dt \geqslant B_{\lambda,k}^\beta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^\beta}{W\left(\frac{2\pi}{b_i}\right)}\, CW\left(\frac{2\pi}{b_i}\right) \geqslant CB_{\lambda,k}^\beta \sum_{i=1}^{\infty} i^\beta = \infty.$$

Докажем резидуальность множества $D_{w,k,\beta}^\infty$ в пространстве $C_{2\pi}$. Обозначим через $\mathfrak{D}_{w,k,\beta}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ множество всех функций $f \in C_{2\pi}$, для каждой из которых существует такое $x$, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f(x)|^\beta}{w(t)}\, dt \leqslant n.$$

Нетрудно убедиться, что множества $\mathfrak{D}_{w,k,\beta}^{(n)}$ замкнуты в пространстве $C_{2\pi}$. Имеем:

$$C_{2\pi} \setminus D_{w,k,\beta}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}_{w,k,\beta}^{(n)}.$$

Пусть некоторое множество $\mathfrak{D}_{w,k,\beta}^{(n_0)}$ не будет нигде не плотным в $C_{2\pi}$. Тогда в $C_{2\pi}$ существует шар $O_{r_0}(f_0) \subseteq \mathfrak{D}_{w,k,\beta}^{(n_0)}$. Возьмем тригонометрический полином $f_1$ такой, что

$$O_{\frac{r_0}{2}}(f_1) \subseteq O_{r_0}(f_0).$$

Как следует из (3.3), $f_1 \in \mathfrak{D}_{w,k,\beta}^{(N)}$ при каждом $x$, где $N$ — некоторое натуральное число.

Возьмем функцию $f_2 \in D_{w,k,\beta}^\infty$ с $\|f_2\|_{C_{2\pi}} < \frac{r_0}{2}$. Рассмотрим функцию $f^* = f_1 + f_2$. Очевидно, $f^* \in O_{\frac{r_0}{2}}(f_1)$ и, значит, $f^* \in \mathfrak{D}_{w,k,\beta}^{(n_0)}$. Так как $f_2 = f^* - f_1$ и $f_1 \in \mathfrak{D}_{w,k,\beta}^{(N)}$ при каждом $x$, то $f_2 \in \mathfrak{D}_{w,k,\beta}^{(N_1)}$, что противоречит условию $f_2 \in D_{w,k,\beta}^\infty$. Значит, каждое $\mathfrak{D}_{w,k,\beta}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ нигде не плотно в $C_{2\pi}$ и, следовательно, $D_{w,k,\beta}^\infty$ резидуально в $C_{2\pi}$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4*. *Пусть* $w(t)$ *и* $w_1(t)$ — *положительные функции на* $(0, 2\pi]$, *причем функция* $w_1(t)$ *не убывает, и пусть при некотором натуральном* $k$ *и* $\beta \geqslant 1$ *выполняются следующие условия:*

$$\int_0^{\tau} \frac{t^{k\beta}}{w(t)}\, dt = O[\tau^{k\beta} W(\tau)] \quad (\tau \to +0)\,^{**}, \tag{3.10}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{w_1(t)} = \infty, \tag{3.11}$$

---

* В случае $k = \beta = 1$ эта теорема доказана в работе (4).

** При $k\beta = 1$ это условие приведено в работах (3), (4), а при $k\beta = 2$ оно совпадает с условием (A) работы (8).

$$\int_0^{2\pi} \frac{t^{k\beta}}{w_1(t)}\, dt < \infty, \tag{3.12}$$

$$W_1(\tau) = O\,[W_1(2\tau)] \quad (\tau \to +0)\ ^{*}, \tag{3.13}$$

$$W(\tau) = o\,[W_1(\tau)] \quad (\tau \to +0)\ ^{**}, \tag{3.14}$$

де

$$W(\tau) = \int_\tau^{2\pi} \frac{dt}{w(t)}, \qquad W_1(\tau) = \int_\tau^{2\pi} \frac{dt}{w_1(t)}, \quad \tau \in (0, 2\pi).$$

*огда множество $D_{w,k,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,\beta}$ будет резидуальным в пространстве $D_{w,k,\beta}$ с метрикой пространства $C_{2\pi}$.*

Доказательство. Построим функцию $f \in D_{w,k,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,\beta}$. Положим

$$f(x) = l \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos b_i x\,, \tag{3.5$'$}$$

ыбрав пока числа $a_i$ и $b_i$ так, как при доказательстве теоремы 3, и зяв при этом вместо $w$ и $W$ функции $w_1$ и $W_1$. Здесь $l > 0$ — константа, ыбираемая ниже. При выборе чисел $a_n$ и $b_n$ выбираются также и числа $c_n$. При этом число $b_n$ выбирается так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{c_n}{W_1^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)} < \frac{1}{2^{n-1}}\, \frac{c_{n-1}}{W_1^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_{n-1}}\right)}\,. \tag{3.8$'$}$$

о доказанному в теореме 3, $f \in D^{\infty}_{w_1,k,\beta}$. Подчиним выбор числа $b_n$ еще дному условию. В силу (3.14), $b_n$ можно выбрать настолько большим, тобы

$$\frac{c_n}{W_1^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)}\, W^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_n}\right) < \frac{1}{n^2} \quad (n \geqslant 2), \tag{3.15}$$

е. чтобы

$$a_n W^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_n}\right) < \frac{1}{n^2}\,.$$

окажем, что тогда функция $f \in D_{w,k,\beta}$.

Учитывая условие (3.10), для каждого $x$ имеем:

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f(x)|^\beta}{w(t)}\, dt\right)^{\frac{1}{\beta}} = l\left(\int_0^{2\pi} \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \Delta_t^k \cos b_i x\right|^\beta}{w(t)}\, dt\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant l \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k \cos b_i x|^\beta}{w(t)}\, dt\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

* Это условие вытекает из (3.11) и условия $w_1(2t) = O\,[w_1(t)]$ $(t \to 0)$ [см. лем- 2 работы ([3])].

** Это условие вытекает из (3.11) и условия $w_1(t) = o\,[w(t)]$ $(t \to +0)$ [см. лемму аботы ([3])].

$$\left(\int_0^{2\pi}\frac{|\Delta_t^k\cos b_ix|^\beta}{w(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(\int_0^{\frac{2\pi}{b_i}}\frac{|\Delta_t^k\cos b_ix|^\beta}{w(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{\beta}}+$$

$$+\left(\int_{\frac{2\pi}{b_i}}^{2\pi}\frac{|\Delta_t^k\cos b_ix|^\beta}{w(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(\int_0^{\frac{2\pi}{b_i}}\frac{t^{k\beta}b_i^{k\beta}}{w(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{\beta}}+$$

$$+\left(\int_{\frac{2\pi}{b_i}}^{2\pi}\frac{2^{k\beta}}{w(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left[b_i^{k\beta}C_4\left(\frac{2\pi}{b_i}\right)^{k\beta}W\left(\frac{2\pi}{b_i}\right)\right]^{\frac{1}{\beta}}+$$

$$+2^kW^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right)=C_5W^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right).$$

Учитывая условие (3.15), получаем:

$$\left(\int_0^{2\pi}\frac{|\Delta_t^kf(x)|^\beta}{w(t)}\,dt\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant C_5l\sum_{i=1}^{\infty}a_iW^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right)<\infty,$$

где $l$ выбираем так, чтобы

$$C_5l\sum_{i=1}^{\infty}a_iW^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{2\pi}{b_i}\right)\leqslant 1.$$

Мы доказали, что $f\in D_{w,k,\beta}\cap D^{\infty}_{w_1,k,\beta}$.

Докажем резидуальность множества $D_{w,k,\beta}\cap D^{\infty}_{w_1,k,\beta}$ в пространстве $D_{w,k,\beta}$ с метрикой пространства $C_{2\pi}$. Имеем:

$$D_{w,k,\beta}\setminus(D_{w,k,\beta}\cap D^{\infty}_{w_1,k,\beta})=\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_{w_1,k,\beta}\cap\mathfrak{D}^{(n)}_{w_1,k,\beta})\equiv\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n,$$

где множества $\mathfrak{D}^{(n)}_{w_1,k,\beta}$ определяются аналогично множествам $\mathfrak{D}^{(n)}_{w,k,\beta}$ при доказательстве теоремы 3. Пусть некоторое множество $M_{n_0}$ не будет нигде не плотным в $D_{w,k,\beta}$. Тогда, в силу замкнутости множества $M_{n_0}$, в $D_{w,k,\beta}$ существует шар $O_{r_0}(f_0)\subseteq M_{n_0}$.

Возьмем тригонометрический полином $f_1$, для которого

$$O_{\frac{r_0}{2}}(f_1)\subseteq O_{r_0}(f_0),\quad\int_0^{2\pi}\frac{|\Delta_t^kf_1(x)|^\beta}{w(t)}\,dt\leqslant\theta^\beta<1,$$

где $\theta$ — некоторое число. Такой полином можно выбрать следующим образом. Обозначим через $\sigma_n(x,f_0)$ суммы Фейера функции $f_0$. Покажем, что $\sigma_n(x,f_0)\in D_{w,k,\beta}$.

При любом $x$ имеем:

$$\Delta_t^k\sigma_n(x,f_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_t^kf_0(x+u)K_n(u)\,du,$$

где $K_n(u)$ — ядро Фейера. Поэтому, применяя обобщенное неравенство

инковского, при любом $x$ и $n = 1, 2, \ldots$ получаем:

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k \sigma_n(x, f_0)|^\beta}{w(t)}\, dt\right)^{\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Delta_t^k f_0(x+u) K_n(u)}{w^{\frac{1}{\beta}}(t)}\, du\right|^\beta dt\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f_0(x+u)|^\beta K_n^\beta(u)}{w(t)}\, dt\right)^{\frac{1}{\beta}} du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\left(\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f_0(x+u)|^\beta}{w(t)}\, dt\right)^{\frac{1}{\beta}} du \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\, du = 1.$$

качестве $f_1$ возьмем $\theta\sigma_{n_0}(x, f_0)$, где $\theta$ и $\sigma_{n_0}(x, f_0)$ выбраны так, что

$$\|f_0 - \sigma_{n_0}\|_{C_{2\pi}} < \frac{r_0}{4}, \quad (1-\theta)\|f_0\|_{C_{2\pi}} < \frac{r_0}{4}.$$

силу условия (3.12), при любом $x$ имеем:

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f_1(x)|^\beta}{w_1(t)}\, dt \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{At^{k\beta}}{w_1(t)}\, dt = A_1.$$

Возьмем, далее, функцию $f_2 \in D_{w,k,\beta} \cap D^\infty_{w_1,k,\beta}$, для которой

$$\|f_2\|_{C_{2\pi}} < \frac{r_0}{2}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f_2(x)|^\beta}{w(t)}\, dt \leqslant (1-\theta)^\beta.$$

ассмотрим функцию $f^* = f_1 + f_2$. Очевидно, $f^* \in D_{w,k,\beta}$, ибо

$$\left(\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f^*(x)|^\beta}{w(t)}\, dt\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant \left(\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f_1(x)|^\beta}{w(t)}\, dt\right)^{\frac{1}{\beta}} +$$

$$+ \left(\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f_2(x)|^\beta}{w(t)}\, dt\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant \theta + 1 - \theta = 1.$$

Следовательно, $f^* \in O_{\frac{r_0}{2}}(f_1)$ и, значит, $f^* \in \mathfrak{D}^{(n_0)}_{w_1,k,\beta}$. Но тогда из ра-
нства $f_2 = f^* - f_1$ будет следовать, что существует $x$, при котором

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f_2(x)|^\beta}{w_1(t)}\, dt < \infty,$$

то противоречит выбору $f_2$ из $D^\infty_{w_1,k,\beta}$. Значит, каждое $M_n$ нигде не
лотно в $D_{w,k,\beta}$ и множество $D_{w,k,\beta} \cap D^\infty_{w_1,k,\beta}$ резидуально в $D_{w,k,\beta}$.

Теорема доказана.

В заключение приведем следующее утверждение, аналогичное теореме 4.

*При выполнении условий* (3.10) — (3.14) *при некотором натуральном* $k$
$\beta > 0$ *множество* $\bar{D}_{w,k,\beta} \cap D^\infty_{w_1,k,\beta}$ *будет резидуальным в пространстве*
$_{w,k,\beta}$ *с метрикой* $C_{2\pi}$, *где* $\bar{D}_{w,k,\beta}$ — *класс всех функций* $f \in C_{2\pi}$, *для ко-*
*орых*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\|\Delta_t^k f(x)\|^\beta_{C_{2\pi}}}{w(t)}\, dt \leqslant 1.$$

При $\beta \geqslant 1$ это ясно из доказательства теоремы 4. Поэтому пусть $0 < \beta < 1$. Построим функцию $f \in \bar{D}_{w,k,\beta} \cap D^{\infty}_{w_1,k,\beta}$, положив

$$f(x) = l \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos b_i x,$$

где числа $a_i$ и $b_i$ выбираются следующим образом. Пусть

$$c_i = a_i W_1^{\frac{1}{\beta}} \left(\frac{2\pi}{b_i}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

причем $c_1 = 1$, $b_1 = 2$. Если при $i < n$ $(n \geqslant 2)$ $c_i$ и $b_i$ уже определены, то определим $c_n$ так, чтобы

$$c_n \geqslant n, \quad \frac{1}{c_n^{\beta}} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\beta} b_i^{k\beta} < \frac{1}{n}. \tag{3.7'}$$

Выберем натуральное число $b_n > b_{n-1}$ так, чтобы

$$\frac{c_n^{\beta}}{W_1\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)} < \frac{1}{2^{n-1}} \frac{c_{n-1}^{\beta}}{W_1\left(\frac{2\pi}{b_{n-1}}\right)} \tag{3.8''}$$

и

$$\frac{c_n^{\beta}}{W_1\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)} W\left(\frac{2\pi}{b_n}\right) < \frac{1}{n^2}. \tag{3.15'}$$

При $n \geqslant 2$ и любом $x$ имеем:

$$\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f(x)|^{\beta}}{w_1(t)} dt = l^{\beta} \int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \Delta_t^k \cos b_i x\right|^{\beta}}{w_1(t)} dt \geqslant$$

$$\geqslant l^{\beta} \int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{a_n^{\beta} |\Delta_t^k \cos b_n x|^{\beta}}{w_1(t)} dt - l^{\beta} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\beta} \int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k \cos b_i x|^{\beta}}{w_1(t)} dt -$$

$$- l^{\beta} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^{\beta} \int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k \cos b_i x|^{\beta}}{w_1(t)} dt.$$

Далее рассуждаем аналогично случаю $\beta \geqslant 1$ (см. доказательство теоремы 3). Мы получим, что при $n \geqslant 2$ и любом $x$

$$\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f(x)|^{\beta}}{w_1(t)} dt \geqslant l^{\beta} a_n^{\beta} W_1\left(\frac{2\pi}{b_n}\right) \times$$

$$\times \left(C_6 - \frac{C_7}{a_n^{\beta} W_1\left(\frac{2\pi}{b_n}\right)} \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{\beta} b_i^{k\beta} - \frac{2^{k\beta}}{a_n^{\beta}} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i^{\beta}\right) \quad (0 < \beta \leqslant 1). \tag{3.9'}$$

Из неравенств (3.7′) и (3.8″) следует, что при любом $x$ и достаточно

ольших $n$

$$\int_{\frac{2\pi}{b_n}}^{2\pi} \frac{|\Delta_t^k f(x)|^\beta}{w_1(t)}\, dt \geqslant l^\beta c_n^\beta \frac{C_6}{2} \geqslant l^\beta \frac{C_6}{2} n^\beta.$$

ледовательно, $f \in D^\infty_{w_1, k, \beta}$.

Покажем, что $f \in \bar{D}_{w, k, \beta}$. Имеем:

$$\int^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^k f(x) \|^\beta_{C_{2\pi}}}{w(t)}\, dt = l^\beta \int_0^{2\pi} \frac{\left\| \sum\limits_{i=1}^\infty a_i \Delta_t^k \cos b_i x \right\|^\beta_{C_{2\pi}}}{w(t)}\, dt \leqslant l^\beta \sum_{i=1}^\infty a_i^\beta \int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^k \cos b_i x \|^\beta_{C_{2\pi}}}{w(t)}\, dt.$$

ак же как в случае $\beta > 1$, находим:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^k \cos b_i x \|^\beta_{C_{2\pi}}}{w(t)}\, dt \leqslant C_8 W\left(\frac{2\pi}{b_i}\right).$$

оэтому с учетом условия (3.15′) получим, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\| \Delta_t^k f(x) \|^\beta_{C_{2\pi}}}{w(t)}\, dt \leqslant C_8 l^\beta \sum_{i=1}^\infty a_i^\beta W\left(\frac{2\pi}{b_i}\right) < \infty.$$

ледовательно, при достаточно малом $l$ функции $f \in \bar{D}_{w, k, \beta}$.

Доказательство резидуальности множества $\bar{D}_{w, k, \beta} \cap D^\infty_{w_1, k, \beta}$ аналогич- доказательству в теореме 4. Отметим только, что из условия $f_0 \in \bar{D}_{w, k, \beta}$ едует, что $\sigma_n(x, f_0) \in \bar{D}_{w, k, \beta}$, где $\sigma_n(x, f_0)$ — суммы Фейера функции $f_0$, ;о

$$\| \Delta_t^k \sigma_n(x, f_0) \|_{C_{2\pi}} \leqslant \| \Delta_t^k f_0(x) \|_{C_{2\pi}}$$

м. доказательство теоремы 2).

Поступило
7. X. 1957

## ЛИТЕРАТУРА

Tarnawski E., Continuous functions in the logarithmic-power classification according to Hölder's conditions, Fundam. math. 42, № 1 (1955), 11—37.

Tarnawski E., On the spaces of functions satisfying Hölder's condition, Fundam. math., 42, № 2 (1955), 207—214.

Tarnawski E., Continuous functions considered from the standpoint of Dini's conditions, Fundam. math., 43, № 1 (1956), 3—22.

Tarnawski E., On the spaces of functions satisfying Dini's condition, Fundam. math., 43, № 2 (1956), 141—147.

Конюшков А. А., О некоторых классах функций. I, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 22 (1958), 841—870.

Ruziewicz S., Ein Beispiel zur Hölderschen Bedingung, Studia math., 3 (1931), 185—188.

Стечкин С. Б., Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение), Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 19 (1955), 221—246.

Ульянов П. Л., О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, Успехи матем. наук, 8, № 6 (1953), 133—141.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 157—164

И. М. ВИНОГРАДОВ

# ОЦЕНКА ОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ ПО ПРОСТЫМ ЧИСЛАМ

Показано, что видоизменение метода автора оценки тригонометрических сумм, данное в работе (1), может быть полезным и при рассмотрении тригонометрических сумм по простым числам.

В этой работе я показываю, что видоизменение моего метода оценки ригонометрических сумм, данное в работе (1) и, в упрощенной форме, зложенное на Международном конгрессе математиков в Эдинбурге 1958 г., может быть полезным и при рассмотрении сумм по простым ислам.

Ради краткости я ограничиваюсь суммою сравнительно частного вида, ичем в доказательстве леммы 2 точно следую упомянутой выше упроенной форме видоизменения.

Обозначения. При положительном $B$ обозначение $A \ll B$ показыает, что $|A| \leqslant CB$, где $C$ — постоянное число; $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ — достаточно алые положительные постоянные числа, меньшие 1; $c, c', \ldots$ — положиельные постоянные.

$(z)$ обозначает расстояние вещественного числа $z$ до ближайшего целого сла.

ЛЕММА 1. *Пусть $k$, $l$, $X$ — целые, $k > 10$, $l > 2$,*

$$X > (2k)^{2ke^{1,1l}}, \quad r = 2b, \quad b = \left[k^2 l + \frac{1}{4}(k^2 + k) + 1\right],$$

*усть каждое $z_j$ пробегает значения $1, \ldots, X$ и*

$$Z_s = z_1^s + \cdots + z_b^s - z_{b+1}^s - \cdots - z_r^s.$$

*огда число решений системы вида $Z_1 = \xi_1, \ldots, Z_k = \xi_k$ не превосходит $U$, е*

$$U = 2^{rlk} k^{lk^3} X^{r - \frac{1}{2}(k^2+k)(1-e^{-l})}.$$

Доказательство. Эта лемма есть следствие теоремы статьи (2).

ЛЕММА 2. *Пусть $a$ — целое положительное, $a_1$ — целое, $a < a_1 \leqslant 2a$, $u) = Ru^\alpha$, $\alpha \geqslant 6$, $(\alpha) \geqslant 3^{-\alpha}$, $1 \leqslant R \leqslant a^\alpha$, $Ra^\alpha = a^{n-\theta}$, $n$ — целое, $\leqslant \theta \leqslant 1$,*

$$S = \sum_{a < u \leqslant a_1} e^{2\pi i f(u)}.$$

*Тогда имеем:*

$$|S| < 1{,}03a^{1-\rho}; \quad \rho = \frac{1}{475000\, n^2}.$$

Доказательство. Ограничимся случаем $a > e^{7000n^2}$, так как в противном случае лемма тривиальна. В обозначениях леммы 1 положим

$$k = 8n, \quad l = 5, \quad X = [a^{\frac{7}{16}}].$$

Символами $x$, $x_j$, $y$, $y_j$ будем обозначать переменные, пробегающие значения $1, \ldots, X$, и будем полагать

$$X_s = x_1^s + \cdots + x_b^s - x_{b+1}^s - \cdots - x_r^s,$$
$$Y_s = y_1^s + \cdots + y_b^s - y_{b+1}^s - \cdots - y_r^s.$$

Находим:

$$|S| \leqslant X^{-2} \left| \sum_{a<u\leqslant a_1} \sum_x \sum_y e^{2\pi i f(u+xy)} \right| + 2a^{\frac{7}{8}} < X^{-2} \sum_{a<u\leqslant a_1} |S_u| + 3a^{\frac{7}{8}},$$

$$S_u = \sum_x \sum_y e^{2\pi i\, (A_1 xy + \cdots + A_k x^k y^k)},$$

$$A_s = R\, \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-s+1)}{1\ldots s}\, u^{\alpha-s},$$

$$|S_u|^r \leqslant X^{r-1} \sum_x \sum_{y_1,\ldots,y_r} e^{2\pi i (A_1 x Y_1 + \cdots + A_k x^k Y_k)},$$

$$|S_u|^{r^2} \leqslant X^{2r^2-2r} \sum_{x_1,\ldots,x_r} \sum_{y_1,\ldots,y_r} e^{2\pi i (A_1 X_1 Y_1 + \cdots + A_k X_k Y_k)}.$$

Здесь каждое $X_s$ принимает лишь значения, равные целым числам $\xi_s$ интервала $-bX^s < \xi_s \leqslant bX^s$, причем, согласно лемме 1, число решений системы вида $X_1 = \xi_1, \ldots, X_k = \xi_k$ не превосходит $U$. А так как сумма по $y_1, \ldots, y_r$ остается неотрицательной при замене чисел $X_1, \ldots, X_k$ любыми вещественными числами, то имеем:

$$|S_u|^{r^2} \leqslant X^{2r^2-2r} U \sum_{\xi_1,\ldots,\xi_k} \sum_{y_1,\ldots,y_r} e^{2\pi i (A_1 \xi_1 Y_1 + \cdots + A_k \xi_k Y_k)} \leqslant X^{2r^2-2r} U^2 \prod_{s=1}^{k} H_s,$$

$$H_s = \sum_{\eta_s} \left| \sum_{\xi_s} e^{2\pi i A_s \eta_s \xi_s} \right|,$$

где $\xi_s$ пробегает все вышеуказанные значения и $\eta_s$ пробегает те же значения, что и $\xi_s$. Но всегда

$$|H_s| \leqslant r^2 X^{2s}.$$

А в случаях $s = 2n+1, \ldots, 6n$ имеем также:

$$|A_s \eta_s| < 0{,}1, \quad |H_s| < \sum_{\eta_s} \min\left(rX^s, \frac{1}{2|A_s \eta_s|}\right) <$$

$$< rX^s + \frac{\ln(rX^s)}{|A_s|} < r^2 X^{2s} a^{\frac{s}{8} - n + 1{,}0005}.$$

Поэтому

$$|S_u|^{r^2} < r^{2k} 2^{10rk} k^{10k^3} X^{2r^2+(k^2+k)e^{-5}} a^{-1,392n^2}.$$

Отсюда легко найдем:

$$|S_u| < 1{,}02 X^2 a^{1-\rho}, \quad |S| < 1{,}03 a^{1-\rho}.$$

ЛЕММА 3. *Пусть* $P \geqslant 8$, $0 < c \leqslant \frac{1}{6}$, $0 < \sigma \leqslant \frac{1}{3}$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1-\sigma$, $F$ — *произведение простых чисел, не превосходящих* $P^\sigma$. *Тогда, полагая*

$$D = (\ln P)^{\frac{\ln \ln P}{\ln (1+c)}},$$

*делители $d$ числа $F$, не превосходящие $P$, можно распределить среди $< D$ совокупностей со свойствами:*

*1) числам $d$, принадлежащим одной и той же совокупности, отвечает одно и то же значение $\mu(d)$;*

*2) одна из совокупностей состоит из единственного числа $d = 1$, для каждой из других существует свое число $\varphi$ с условием, что принадлежащие этой совокупности значения $d$ удовлетворяют неравенствам*

$$\varphi < d \leqslant \varphi^{1+c};$$

*при этом при $\varphi > P^\gamma$ можно указать целое положительное $B$ и две возрастающие последовательности целых положительных чисел $x$ и $y$ такие, что значения $x$ лежат в некотором интервале вида $\varphi_0 < x \leqslant \varphi_0^{1+c}$, полностью лежащем в интервале*

$$P^\gamma < x \leqslant P^{\gamma+\sigma+c},$$

*причем указанные значения $d$, взятые каждое $B$ раз, и только эти значения получим, если из всех произведений $xy$ выберем лишь удовлетворяющие условиям*

$$xy \leqslant d, \quad (x, y) = 1.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы получается путем внесения незначительных видоизменений в доказательство почти такой же леммы 5 гл. IX книги ([3]).

ЛЕММА 4. *Пусть* $P \geqslant 8$, $\alpha$ — *постоянное*, $\alpha \geqslant 6$, $(\alpha) \geqslant 3^{-\alpha}$, $f(x) = Ax^\alpha$, $1 \leqslant A \leqslant P^\alpha$, $t$ — *целое положительное*, $c = 0{,}001$,

$$S = \sum_x \psi(x) \sum_y e^{2\pi i f(t^2 xy)},$$

*где $x$ и $y$ независимо друг от друга пробегают некоторые возрастающие последовательности целых положительных чисел, $\psi(x)$ удовлетворяет условию $\psi(x) \ll P^\varepsilon$ и суммирование распространяется на область*

$$c' P^{0,5-c} t^{-1} < x \leqslant c'' P^{0,75} t^{-1}, \qquad (1)$$
$$0 < t^2 xy \leqslant P.$$

*Тогда*

$$S \ll P^{1+2\varepsilon-\rho_0} t^{-1,5}, \quad \rho_0 = \frac{1}{33\,700\,000\alpha^2}.$$

Доказательство. Очевидно можно предполагать, что $P \geqslant P_0$, где $P_0$ — достаточно большое постоянное, превосходящее 8. При $t > P^{2,5\rho_0}$ имеем:

$$S \ll P^{1+\varepsilon} t^{-2} \ln P \ll P^{1+2\varepsilon-\rho_0} t^{-1,5}.$$

Поэтому будем рассматривать лишь случай $t \leqslant P^{2,5\rho_0}$. Интервал (1) можно подразделить на $\ll \ln P$ интервалов вида

$$X < x \leqslant X', \quad X < X' \leqslant 2X. \tag{2}$$

Пусть $S'$ — часть суммы $S$, отвечающая интервалу (2). Находим:

$$|S'|^2 \leqslant \sum_{X<x\leqslant X'} |\psi(x)|^2 \sum_{X<x\leqslant X'} \left| \sum_{0>y\leqslant Px^{-1}t^{-2}} e^{2\pi i f(t^2xy)} \right|^2 \ll$$

$$\ll XP^{2\varepsilon} \sum_{\xi} \sum_{y_1} \sum_{y} e^{2\pi i A t^{2\alpha} \xi^{\alpha} (y_1^{\alpha} - y^{\alpha})},$$

где $\xi$ пробегает числа натурального ряда, $y_1$ независимо от $y$ пробегает те же значения, что и $y$, и суммирование распространяется на область

$$X < \xi \leqslant X', \quad t^2\xi y_1 \leqslant P, \quad t^2\xi y \leqslant P.$$

Но $y_1$ и $y$ могут пробегать лишь значения с условиями

$$y_1 \leqslant Y_0, \quad y \leqslant Y_0, \quad Y_0 = PX^{-1}t^{-2},$$

а $\xi$, при заданных $y_1$ и $y$, пробегает все значения с условием

$$X < \xi \leqslant X_0, \quad X_0 = \min(X', Pt^{-2}y_1^{-1}, Pt^{-2}y^{-1}).$$

Поэтому, меняя порядок суммирования, получим:

$$|S'|^2 \ll XP^{2\varepsilon} \sum_{y_1 \leqslant Y_0} \sum_{y \leqslant Y_0} |S_0|, \quad S_0 = \sum_{X<\xi\leqslant X_0} e^{2\pi i A t^{2\alpha} (y_1^{\alpha} - y^{\alpha}) \xi^{\alpha}}.$$

Часть правой части этого неравенства, отвечающая парам значений $y_1$ и $y$ с условиями

$$y_1 \leqslant 2Y_0 P^{-\rho_0}, \quad y \leqslant 2Y_0 P^{-\rho_0},$$

или, также, с условиями

$$\max(y_1, y) > 2Y_0 P^{-\rho_0}, \quad |y_1 - y| \leqslant Y_0 P^{-2\rho_0},$$

очевидно будет

$$\ll X^2 P^{2\varepsilon} Y_0^2 P^{-2\rho_0}.$$

Рассмотрим какую-либо сумму $S_0$, принадлежащую оставшейся части. Предполагая, для определенности, что $y_1 > y$, будем иметь:

$$y_1^{\alpha} - y^{\alpha} \geqslant Y_0^{\alpha} P^{-(\alpha_0+1)\rho_0}.$$

Применим лемму 2. Полагая

$$At^{2\alpha}(y_1^\alpha - y^\alpha)X^\alpha = X^{n-\theta}, \quad 0<\theta\leqslant 1,$$

будем иметь:

$$\frac{(\alpha-(\alpha+1)\rho_0)\ln P}{\ln X} < n \leqslant \frac{2\alpha\ln P}{\ln X}+1.$$

Но при некоторых $\varepsilon'$ и $\varepsilon''$ ($P_0$ достаточно велико) имеем

$$(0{,}5-\varepsilon'-c-2{,}5\rho_0)\ln P < \ln X \leqslant (0{,}75+\varepsilon'')\ln P,$$

$$6<\frac{\alpha-(\alpha+1)\rho_0}{0{,}75+\varepsilon''}<n\leqslant\frac{2\alpha}{0{,}5-\varepsilon'-c-2{,}5\rho_0}+1<4{,}2\alpha.$$

Поэтому

$$|S_0| \ll X^{1-\frac{1}{475000n^2}} \ll X^{1-\frac{1}{8380000\alpha^2}} \ll XP^{-2\rho_0},$$

$$|S'|^2 \ll X^2P^{2\varepsilon}Y_0^2P^{-2\rho_0}, \quad S' \ll P^{1+\varepsilon-\rho_0}t^{-2}, \quad S \ll P^{1+2\varepsilon-\rho_0}t^{-2}.$$

ЛЕММА 5. *Пусть* $P\geqslant 8$, $\alpha$ — *постоянное*, $\alpha\geqslant 6$, $(\alpha)\geqslant 3^{-\alpha}$, $f(x)=Ax^\alpha$, $1\leqslant A\leqslant P^\alpha$, $M$ — *целое*, $P^{0,5-c}<M<P$, $M<M'\leqslant 2M$,

$$U=\sum_{\substack{M<m\leqslant M' \\ dm\leqslant P}}\sum e^{2\pi i f(dm)},$$

*где* $d$ *пробегает возрастающую последовательность целых положительных чисел, а* $m$ *пробегает числа натурального ряда. Тогда имеем:*

$$U\ll P^{1-\rho_1}, \quad \rho_1=\frac{1}{16\,800\,000\alpha^2}.$$

Доказательство. Очевидно достаточно предполагать, что $P\geqslant P_0$, где $P_0$ — достаточно большое постоянное, превосходящее 8. Имеем

$$U=\sum_{d<PM^{-1}}S_d, \quad S_d=\sum_{M<m\leqslant M_d}e^{2\pi iAd^\alpha m^\alpha}, \quad M_d=\min(M', Pd^{-1}).$$

Применим лемму 2. Полагая

$$Ad^\alpha M^\alpha = M^{n-\theta}, \quad 0<\theta\leqslant 1,$$

будем иметь

$$6\leqslant\alpha<n<\frac{2\alpha\ln P}{\ln M}+1<4{,}2,$$

$$S_d\ll M^{1-\frac{1}{475000n^2}}\ll M^{1-\frac{1}{8380000\alpha^2}}\ll MP^{-\rho_1}, \quad U\ll P^{1-\rho_1}.$$

ТЕОРЕМА. *Пусть* $P\geqslant 8$, $\alpha$—*постоянное*, $\alpha\geqslant 6$, $(\alpha)=3^{-\alpha}$, $f(x)=Ax^\alpha$, $1\leqslant A\leqslant P^\alpha$,

$$S=\sum_{p\leqslant P}e^{2\pi i f(p)},$$

*где* $p$ *пробегает простые числа. Тогда имеем:*

$$S\ll P^{1-\rho}, \quad \rho=\frac{1}{34\,000\,000\alpha^2}.$$

Доказательство. Очевидно достаточно предполагать, что $P \geqslant P_0$, где $P_0$ — достаточно большое постоянное, превосходящее 8. Пусть $F$ — произведение простых чисел, не превосходящих $P^{0,25}$, $d$ пробегает делители числа $F$, $r$ пробегает положительные числа, взаимно простые с $F$, $m$ пробегает числа натурального ряда. Находим:

$$\sum_{r \leqslant P} e^{2\pi i f(r)} = \sum_{dm \leqslant P}\sum \mu(d)\, e^{2\pi i f(dm)}. \qquad (3)$$

Пусть $r_j$ пробегает значения $r$, имеющие ровно $j$ простых сомножителей. Тогда левая часть равенства (3) представится в виде

$$S + S_2 + S_3 + O(P^{0,25}),$$

$$S_2 = \sum_{r_2 \leqslant P} e^{2\pi i f(r_2)}, \quad S_3 = \sum_{r_3 \leqslant P} e^{2\pi i f(r_3)}.$$

Заставляя $r_1'$ независимо от $r_1$ пробегать те же значения, что и $r_1$, получим:

$$S_2 = \frac{1}{2}\sum_{r_1 r_1' \leqslant P}\sum e^{2\pi i f(r_1 r_1')} + O(P^{0,5}) =$$

$$= \sum_{\substack{r_1 > P^{0,5-c} \\ r_1 r_1' \leqslant P}}\sum e^{2\pi i f(r_1 r_1')} - \frac{1}{2}\sum_{r_1 > P^{0,5-c}}\ \sum_{\substack{r_1' > P^{0,5-c} \\ r_1 r_1' \leqslant P}} e^{2\pi i f(r_1 r_1')} + O(P^{1-c}).$$

К последней сумме можно применить лемму 4 (полагая $r_1 = x$, $\psi(x) = 1$, $r_1' = y$, $t = c' = c'' = 1$). Получим

$$S_2 \ll P^{1+2\varepsilon-\rho_0}.$$

Далее находим:

$$S_3 = \frac{1}{3}\sum_{r_2 r_1 \leqslant P}\sum e^{2\pi i f(r_2 r_1)} + O(P^{0,75}),$$

откуда, применяя лемму 4 (полагая $r_2 = x$, $\psi(x) = 1$, $r_1 = y$, $t = c' = c'' = 1$), получим

$$S_3 \ll P^{1+2\varepsilon-\rho_0}.$$

Оценим правую часть равенства (3). Интервал $0 < m \leqslant P$ можно подразделить на $\ll \ln P$ интервалов вида

$$M < m \leqslant M', \quad M < M' \leqslant 2M. \qquad (4)$$

Часть правой части равенства (3), отвечающую интервалу (4), обозначим символом $U_M$. Имеем:

$$U_M = U_M' - U_M'',$$

где $U_M'$ содержит слагаемые с $\mu(d) = 1$, а $-U_M''$ содержит слагаемые с $\mu(d) = -1$.

Пусть сначала

$$P^{0,5-c} < M < P.$$

Применяя лемму 5 отдельно к $U'_M$ и к $U''_M$, получим

$$U_M \ll P^{1-2\rho_0}.$$

Пусть теперь $M \leqslant P^{0,5-c}$. Полагая

$$c = 0{,}001, \quad \sigma = 0{,}25, \quad P^{\gamma} = P^{0,5-c}M^{-1},$$

мы можем распределить все значения $d$, не превосходящие $P$, среди $< D$ совокупностей согласно лемме 3.

Часть суммы $U_M$, отвечающая случаю $d = 1$, а также всем совокупностям с условием $\varphi \leqslant P^{\gamma}$, содержит лишь значения $d$ с условием

$$d \leqslant P^{\gamma+c}$$

и, следовательно,

$$\ll MP^{\gamma+c} \ll P^{0,5}.$$

Оценим часть $U^{(\varphi)}$ суммы $U_M$, отвечающую какой-либо совокупности с условием $\varphi > P^{\gamma}$. Пусть, для определенности, $U^{(\varphi)}$ входит в $U'_M$. Имеем:

$$U^{(\varphi)} = \frac{1}{B}\sum\sum\sum e^{2\pi i f(xym)},$$

где суммирование распространяется на область

$$M < m \leqslant M', \quad P^{\gamma} < x \leqslant P^{\gamma+0,25+c}, \quad mxy \leqslant P, \quad (x, y) = 1.$$

Отсюда

$$U^{(\varphi)} = \frac{1}{B}\sum_t \mu(t)\, S^{(t)}, \quad S^{(t)} = \sum\sum\sum e^{2\pi i f(t^2 m\xi\eta)},$$

где $t$ пробегает числа натурального ряда и суммирование в тройной сумме распространяется на область

$$M < m \leqslant M', \quad P^{\gamma} < t\xi \leqslant P^{\gamma+0,25+c}, \quad 0 < mt^2\xi\eta \leqslant P,$$

причем $\xi$ и $\eta$ пробегают частные от деления на $t$ чисел $x$ и $y$, кратных $t$. Пусть $\psi(u)$ обозначает число решений $m\xi = u$. Тогда $S^{(t)}$ может быть представлено в виде

$$S^{(t)} = \sum_u \psi(u) \sum_\eta e^{2\pi i f(t^2 u\eta)},$$

где $|\psi(u)| \ll P^{\varepsilon}$ и суммирование распространяется на область

$$t^{-1}P^{0,5-c} < u \leqslant 2t^{-1}P^{0,75}, \quad 0 < t^2 u\eta \leqslant P.$$

Поэтому, согласно лемме 4, имеем:

$$S^{(t)} \ll P^{1+2\varepsilon-\rho_0}t^{-1,5}.$$

Следовательно,

$$U^{(\varphi)} \ll P^{1+2\varepsilon-\rho_0}, \quad U_M \ll DP^{1+2\varepsilon-\rho_0}.$$

На основании всего доказанного мы и убеждаемся в справедливости теоремы.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило
2.II.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Новая оценка функции $\zeta(1+it)$, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 161—164.

[2] Виноградов И. М., Об одном кратном интеграле, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 577—584.

[3] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXIII, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 165—184

ЛЮДМИЛА КЕЛДЫШ

# НУЛЬМЕРНЫЕ ОТКРЫТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

(*Представлено академиком* Л. С. Понтрягиным)

В главе I доказано, что нульмерное открытое отображение, повышающее размерность, представимо в виде: 1) суперпозиции неприводимого отображения и отображения, не повышающего размерность, 2) конечного числа двукратных отображений и отображений, не повышающих размерность, если размерность образа конечна.

В главе II подробно описан пример нульмерного открытого отображения одномерного континуума на квадрат.

## Введение

Мы изучаем здесь структуру *нульмерных открытых* отображений компактов, при которых происходит повышение размерности. В работе ([5]) было казано достаточное условие (свойство $\gamma$) для того, чтобы нульмерное епрерывное отображение $f$ компакта конечной размерности $n$ на компакт азмерности $n+k$, $0<k<\infty$, было представимо формулой:

$$f=\psi_{k+1}\varphi_k\psi_k\ldots\varphi_1\psi_1, \qquad (1)$$

де все $\psi_i$ нульмерны и не повышают размерности равномерно* для $i>1$, каждое $\varphi_i$ двукратно** и повышает размерность на единицу.

Из этого условия можно извлечь ряд случаев, когда отображение $f$ редставимо формулой (1). В частности, из следствия 3 работы ([5]) стр. 565) непосредственно следует, что нульмерное открытое отображение -мерного компакта на куб размерности $>n$ представимо формулой (1). главе I мы покажем (теорема 2), что *всякое нульмерное открытое тображение конечномерного компакта на компакт большей конечной азмерности представимо формулой* (1). [Краткое сообщение см. в раоте ([6])].

Входящее в представление (1) непрерывное отображение

$$f_1=\varphi_k\psi_k\ldots\varphi_1\psi_1$$

*ля открытого $f$ неприводимо.* Таким образом, *нульмерное открытое тображение $f$ $n$-мерного компакта на $(n+k)$-мерный,* $n<\infty$, $0<k<\infty$, *редставимо в виде:*

$$f=\psi f_1, \qquad (2)$$

---

* Отображение $\psi$ называется *равномерно не повышающим размерность*, если для сякого открытого множества $U$

$$\dim\psi(U)\leqslant\dim U.$$

** Т. е. полный прообраз $\varphi^{-1}(y)$ каждой точки содержит не более двух точек.

*где $f_1$ неприводимо, а $\varphi$ — равномерно не повышает размерности.* Мы показываем (гл. I), что такое представление имеет место для более широкого класса нульмерных непрерывных отображений, именно для таких, при которых *замыкание* открытого множества переходит в замыкание открытого множества; при этом отображение $\varphi$ оказывается *открытым* (теорема 1).

Очень многие известные примеры открытых отображений, повышающих размерность, легко представить в виде (2). Таковы, например, построенное Андерсоном (3) монотонно-открытое отображение кривой Серпинского на квадрат, построенное Кажданом (2) открытое отображение одномерного континуума на квадрат, построенное автором монотонно-открытое отображение трехмерного куба на четырехмерный куб [см. (8), (9)] и т. д. Неизвестно, однако, *всякое ли открытое отображение компакта, повышающее размерность, представимо в виде суперпозиции неприводимого отображения и открытого отображения, равномерно не повышающего размерности*? (Заметим, что здесь существенно условие *равномерности*, так как иначе задача тривиально решается положительно.)

В главе II мы используем процесс доказательства формулы (2) для построения примера одномерного континуума, нульмерно и открыто отображающегося на квадрат [краткое описание см. в работе (7)]. Заметим, что до этого в литературе существовал только один пример нульмерного открытого отображения, повышающего размерность, именно пример А. Н. Колмогорова (1). Неизвестно, возможно ли нульмерное открытое отображение куба на компакт большей размерности. Процесс, при помощи которого производится представление нульмерных отображений в виде суперпозиций, по-видимому, можно использовать для изучения компактов, которые нульмерно и открыто отображаются на куб данной размерности.

## ГЛАВА I

## Структура нульмерных открытых отображений

### § 1. Представление кусочных отображений

1. Мы покажем, во-первых, что при нульмерном открытом отображении повышение размерности происходит за счет неприводимого отображения и, во-вторых, что всякое нульмерное открытое отображение компакта на компакт большей конечной размерности представимо формулой (1). Первое утверждение мы докажем непосредственно и для более широкого класса нульмерных непрерывных отображений, включающего открытые отображения. Доказательство представления (1) опирается на результаты работы (5).

Назовем *куском* компакта $X$ *замыкание открытого в* $X$ множества. Непрерывное отображение $f$ компакта $X$ на компакт $Y$ назовем *кусочным*, если образ каждого куска в $X$ есть кусок в $Y$. Легко видеть, что кусочными являются, например, открытые отображения и неприводимые отображения.

ТЕОРЕМА 1. *Всякое нульмерное кусочное отображение $f$ компакта $X$ ла компакт $Y$ представимо в виде суперпозиции двух нульмерных отоб-ражений:*

$$f = \psi f_1, \tag{2}$$

*где $f_1$ неприводимо, а $\psi$ равномерно сохраняет * размерность и открыто.*

Пусть $D$ — счетное, всюду плотное в $X$ множество, $f(D)$ всюду плот-но в $Y$, а $\overline{D} = f^{-1}f(D)$ — нульмерное множество типа $F_\sigma$.

Компакт $X$ можно представить в виде:

$$X = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup \delta_{i_1 \ldots i_k}, \quad i_r = 0, 1, \tag{3}$$

где $\delta_{i_1 \ldots i_k}$ — кусок $X$, диаметры $\delta_{i_1 \ldots i_k}$ стремятся к нулю вместе с $\frac{1}{k}$ и

$$\begin{gathered} \delta_{i_1 \ldots i_k} = \delta_{i_1 \ldots i_k 0} \cup \delta_{i_1 \ldots i_k 1}, \\ \overline{D} \cap \delta_{i_1 \ldots i_k 0} \cap \delta_{i_1 \ldots i_k 1} = \Lambda. \end{gathered} \tag{4}$$

Обозначая через $B\mathscr{E}$ границу множества $\overline{\mathscr{E}}$ в $X$ или в $Y$, положим:

$$\begin{gathered} \Gamma_{i_1 \ldots i_k} = f(B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}}) \cup B_{f(\delta_{i_1 \ldots i_k})}, \\ \Gamma_k = \bigcup_{i_1 \ldots i_k} \Gamma_{i_1 \ldots i_k}; \quad \Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k. \end{gathered} \tag{5}$$

В силу (4), $\Gamma_{k+1} \supset \Gamma_k$; $\Gamma_k$ замкнуто и нигде не плотно на $Y$, так как $B_{f(\delta_{i_1 \ldots i_k})}$, а в силу (4) и $f(B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}})$, нигде не плотно на $Y$. Так как $f$ кусочно, то

$$\Gamma_k^{-1} = f^{-1}(\Gamma_k)$$

нигде не плотно на $X$, следовательно, $\Gamma^{-1}$ — *первой категории на $X$.*

2. Зададим на компакте $Y$ последовательность непрерывных функций $\theta_k(y)$ такую, что

$$\left.\begin{aligned} &0 \leqslant \theta_k(y) \leqslant \frac{1}{2^k}, \\ &\theta_k(y) = 0 && \text{при } y \in \Gamma_k, \\ &0 < \theta_k(y) < \frac{1}{2}\theta_{k-1}(y) && \text{при } y \in Y \setminus \Gamma_k. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Определим на $X$ функцию $F(x)$, положив для $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \delta_{i_1 \ldots i_k}$, $\delta_{i_1 \ldots i_{k+1}} \subset \subset \delta_{i_1 \ldots i_k}$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} i_k \theta_k [f(x)]. \tag{7}$$

Точке $x \in \delta_{i_1 \ldots i_k 0} \cap \delta_{i_1 \ldots i_k 1}$ соответствуют различные ряды (7). Но так как $f(x) \in \Gamma_{k+1}$, то, в силу (6),

$$\theta_{k+r}[f(x)] = 0,$$

* Т. е. для открытого в $f_1(X)$ множества $V$ $\dim \psi(V) = \dim V$.

поэтому значения всевозможных сумм (7) для точки $x$ совпадают и, следовательно, $F(x)$ — *однозначная функция от* $x$.

Каждая конечная сумма

$$\sum_{k=1}^{r} i_k \theta_k [f(x)],$$

*коэффициенты которой зависят от точки* $x$, непрерывна на $X$, так как $\theta_k[f(x)]$ непрерывна на каждом $\delta_{i_1 \ldots i_k}$, коэффициенты $i_k$ меняются только при переходе через $B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}} \subset \Gamma_k^{-1}$ и $\theta_k(y) = 0$ для $y \in \Gamma_k$. Так как, в силу (6), ряд (7) сходится равномерно, то $F(x)$ — *непрерывная функция от* $x$.

Рассмотрим компакт $Z$, точки которого $M(y, z)$ задаются соотношениями:

$$y = f(x), \quad z = F(x), \quad x \in X. \tag{8}$$

Соотношения (8) определяют непрерывное отображение $f_1$ компакта $X$ на $Z$. Обозначим через $\psi$ *проектирование* $Z$ *на* $Y$. Тогда $f = \psi f_1$.

Покажем, что эта суперпозиция удовлетворяет условиям теоремы. Очевидно, что $f_1$ *нульмерно*, так как $f$ нульмерно.

3. *Отображение* $\psi$ *нульмерно*. Достаточно показать, что для любой точки $y_0 \in Y$ содержащая ее прямая $d_{y_0}$, параллельная оси $Oz$, пересекает компакт $Z$ по нигде не плотному на ней множеству. Пусть $z_1$ и $z_2$ — координаты двух точек, принадлежащих $\psi^{-1}(y_0)$, и $z_1 < z_2$, а $x_1$, $x_2$ — две точки компакта $X$ такие, что

$$z_1 = F(x_1), \quad z_2 = F(x_2), \quad f(x_1) = f(x_2) = y_0.$$

Для каждой точки $x_1$, $x_2$ найдется хотя бы по одной цепочке кусков $\delta_{i_1 \ldots i_k}$, ее содержащих:

$$\delta_{i_1} \supset \delta_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset \delta_{i_1 \ldots i_r} \supset \delta_{i_1 \ldots i_r 0} \supset \cdots \ni x_1,$$
$$\delta_{i_1} \supset \delta_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset \delta_{i_1 \ldots i_r} \supset \delta_{i_1 \ldots i_r 1} \supset \cdots \ni x_2,$$

откуда:

$$z_1 = i_1\theta_1(y_0) + \cdots + i_r\theta_r(y_0) + 0 + i_{r+2}\theta_{r+2}(y_0) + \cdots,$$
$$z_2 = i_1\theta_1(y_0) + \cdots + i_r\theta_r(y_0) + \theta_{r+1}(y_0) + j_{r+2}\theta_{r+2}(y_0) + \cdots.$$

Очевидно, что

$$z_1 \leqslant i_1\theta_1(y_0) + \cdots + i_r\theta_r(y_0) + \sum_{p=2}^{\infty} \theta_{r+p}(y_0) = Z_1,$$

$$z_2 \geqslant i_1\theta_1(y_0) + \cdots + i_r\theta_r(y_0) + \theta_{r+1}(y_0) = Z_2.$$

В силу (6),

$$\sum_{p=2}^{\infty} \theta_{r+p}(y_0) < \theta_{r+1}(y_0),$$

значит, $Z_1 < Z_2$. На $d_{y_0}$ между точками с координатами $Z_1$ и $Z_2$ нет точек $\psi^{-1}(y_0)$: если $f(x) = y_0$ и $x \in \delta_{i_1 \ldots i_r}$, то очевидно, что

$$F(x) \overline{\in} (Z_1, Z_2).$$

Если $x \overline{\in} \delta_{i_1 \ldots i_r}$, то $x \in \delta_{i_1 \ldots i_p j}$, $0 \leqslant p < r$ и $j \neq i_{p+1}$. Если $j = 0$, а $i_{p+1} = 1$,

$$F(x) < i_1\theta_1(y_0) + \cdots + i_p\theta_p(y_0) + \theta_{p+1}(y_0) < Z_1.$$

Если $j = 1$, а $i_{p+1} = 0$, то

$$F(x) \geqslant i_1\theta_1(y_0) + \cdots + i_p\theta_p(y_0) + \theta_{p+1}(y_0) > Z_2.$$

ак как $z_1$ и $z_2$ — произвольные точки в $\varphi^{-1}(y_0)$, то $\varphi^{-1}(y_0)$ нигде не лотно на $d_{y_0}$, следовательно, отображение $\varphi$ нульмерно.

4. *Для любой точки $M \in Z$ найдется содержащая точку $M$ поверхность $L \subset Z$, определенная однозначной непрерывной функцией, заданной $Y$.*

Пусть $y_0$ и $z_0$ — координаты точки $M_0 \in Z$ и

$$z_0 = \sum_{k=1}^{\infty} i_k\theta_k(y_0). \tag{9}$$

усть $y \neq y_0$. Для некоторого $r \geqslant 0$ имеем:

$$y \in f(\delta_{i_1 \ldots i_r j_{r+1}}) \setminus f(\delta_{i_1 \ldots i_r i_{r+1}}), \quad j_{r+1} \neq i_{r+1}.$$

ля точки $y$ выберем последовательно числа $j_k$, $k > r+1$, так, что если фиксировано и $y \in f(\delta_{i_1 \ldots j_k 0}) \cap f(\delta_{i_1 \ldots j_k 1})$, то $j_{k+1} = 0$ и

$$y \in \bigcap_{k=r+1}^{\infty} f(\delta_{i_1 \ldots i_r j_{r+1} \ldots j_k}).$$

Положим

$$\Phi(y) = \sum_{p=1}^{r} i_p\theta_p(y) + \sum_{p=r+1}^{\infty} j_p\theta_p(y). \tag{10}$$

Для $y = y_0$ имеем: $j_p = i_p$, $p < \infty$.

Формула (10) определяет однозначную поверхность $L$. Из (7) следует, то $L \subset Z$, а из (9) — что $M \in L$. Функция $\Phi$ *непрерывна*; действительно, умма первых $k$ членов ряда (10) с коэффициентами $i_p$ и $j_p$, *зависящими т точки* $y$, непрерывна в силу того, что $\theta_p(y) = 0$ для $y \in \Gamma_p$, а коэффициент $i_p$ или $j_p$ может менять значение только при переходе через $\Gamma_p$, ряд (10) сходится равномерно. Так как $L$ *гомеоморфно* $Y$, то из утверждений 3 и 4 следует, что $\varphi$ *равномерно сохраняет размерность.*

*Отображение $\varphi$ открыто.* Пусть $M \in V$, где $V$ — открытое подмножество $Z$. Тогда $M \in L$ и $L \cap V$ открыто в $L$. Так как

$$\varphi(M) \in \varphi(L \cap V) \subset \varphi(V),$$

$\varphi(M)$ — внутренняя точка в $\varphi(V)$, следовательно, $\varphi(V)$ открыто в $Y$.

5. *Отображение $f_1$ неприводимо.* Достаточно показать, что множество $E_{f_1}^{-1}$ точек единственности для отображения $f_1 : x = f_1^{-1}f_1(x)$ всюду плотно $X$. Покажем, что

$$X \setminus \Gamma^{-1} \subset E_{f_1}^{-1}.$$

Пусть $x \in X \setminus \Gamma^{-1}$, а $x'$ — произвольная точка $X$ такая, что $x' \neq x$ и $f(x') = f(x) = y$. Найдется $\delta_{i_1 \ldots i_k}$ такое, что

$$x \in \delta_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}}, \quad x' \in \delta_{i_1 \ldots i_k j_{k+1}}, \quad j_{k+1} \neq i_{k+1}.$$

Так как $y \overline{\in} \Gamma$, то, в силу (6) и (7), $F(x) \neq F(x')$. Следовательно, $f_1(x') \neq f_1(x)$, каково бы ни было $x'$, значит $x \in E_{f_1}^{-1}$. Так как $\Gamma^{-1}$ первой категории на $X$, то $E_{f_1}^{-1}$ всюду плотно на $X$, следовательно, $f_1$ неприводимо.

Следствие. *Открытое нульмерное отображение $f$ компакта представимо в виде $f = \psi f_1$, где $f_1$ неприводимо, а $\psi$ равномерно сохраняет размерность и нульмерно.*

Замечание 1. *Условие кусочности отображения $f$ необходимо для того, чтобы существовало представление* (2), так как неприводимое и открытое отображения — кусочны и суперпозиция кусочных отображений есть кусочное отображение.

Замечание 2. *Для любого открытого в $X$ множества $U$*

$$\dim f_1(U) = \dim f(U). \tag{11}$$

Действительно, найдется $\delta_{i_1 \ldots i_k} \subset U$ такое, что

$$\dim f(U) = \dim f(\delta_{i_1 \ldots i_k}),$$

а в $f_1(\delta_{i_1 \ldots i_k})$ лежит поверхность $L_{i_1 \ldots i_k}$, гомеоморфная $f(\delta_{i_1 \ldots i_k})$.

## § 2. Представление открытых отображений

1. Чтобы показать, что всякое нульмерное открытое отображение компакта размерности $n$ на компакт конечной размерности $m > n$ представимо в виде (1), достаточно доказать, что

$$f_1 = \varphi_{m-n}\psi_{m-n} \ldots \varphi_1\psi_1, \tag{12}$$

где $\varphi_i$ и $\psi_i$ — такие же, как в формуле (1).

В работе ([5]) формула (12) была доказана для случая, когда $f_1$ *обладает свойством* ($\gamma$) *и* $\dim M_{f_1} = m - 1$, где $M_{f_1} \subset Y$ — множество *кратных* точек отображения $f_1$. Мы покажем, что для нульмерного открытого отображения эти условия могут быть выполнены. Напомним [см. ([5]), стр. 549)] свойство ($\gamma$): непрерывное отображение $f$ компакта $X$ на компакт $Y$ большей размерности обладает свойством ($\gamma$), если для каждого открытого в $X$ множества $V$ такого, что

$$\dim X < \dim f(V) = k,$$

и для каждого целого числа $i$, для которого $\dim X < i \leqslant k$, в $V$ найдется совершенное множество $Q_V^i$ такое, что

$$\dim f(Q_V^i) = i, \quad \dim M_{f|Q_V^i} = i - 1. \tag{13}$$

2. Доказательство представления (1) опирается на лемму 2 работы ([5]). Напомним ее формулировку:

*Пусть $f$ — нульмерное отображение компакта $X$ размерности $n$ на компакт $Y$ конечной размерности $m > n$ и $\dim M_f = k$. Для любого компакта $F \subset X$ и его окрестности $W$ существует окрестность $U$ такая, что*

$$F \subset U \subset \overline{U} \subset W,$$

$$\dim B_U \leqslant n - 1, \quad \dim f(B_U) \leqslant k - 1,$$

*на* $B_U$ *отображение* $f$ *не более, чем* $k$*-кратно* (т. е. для любого $y \in Y$ $f^{-1}(y)$ содержит не более $k$ точек в $B_U$).

В силу известной теоремы Гуревича [4],

$$k = \dim M_f \geqslant m - 1,$$

так как $f$ повышает размерность. Кроме того, нам понадобятся еще две леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть* $f$ — *непрерывное* $N$*-кратное,* $N < \infty$, *отображение компакта* $P$ *на компакт* $Q$ *большей размерности и* $\dim M_f = \dim Q$. *Найдется компакт* $P_0 \subset P$ *такой, что*

$$\dim f(P_0) = \dim Q, \quad \dim M_{f|P_0} = \dim Q - 1.$$

Пусть $\dim P = s$ и $\dim Q = r > s$. Так как $\dim M_f = r$, то найдутся два непересекающихся куска $P$ $\Delta_1$ и $\Delta_2$ таких, что

$$\dim f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) = r, \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \Lambda.$$

Положим

$$P_1 = \Delta_1 \cap f^{-1}[f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2)].$$

Очевидно, что

$$\dim f(P_1) = r.$$

Так как каждой точке $x \in P_1$ соответствует хотя бы одна точка $x' \in \Delta_2$ такая, что $f(x') = f(x)$, то на $P_1$ кратность $f$ не превосходит $N - 1$.

Если $\dim M_{f|P_1} < r$, то полагаем $P_0 \equiv P_1$. В противном случае, так же как и для $P$, находим в $P_1$ компакт $P_2$ такой, что $\dim f(P_2) = r$ и кратность $f$ на $P_2$ не превосходит $N - 2$.

Продолжая таким образом, построим компакты $P \supset P_1 \supset \ldots \supset P_k$ такие, что

$$\dim f(P_\rho) = r, \quad \dim M_{f|P_\rho} = r,$$

и кратность $f$ на $P_\rho$ не превосходит $N - \rho$. Но так как $\dim P_\rho \leqslant s$, то, по теореме Гуревича [4], кратность $f$ на $P_\rho$ не меньше, чем $r - s + 1$, поэтому

$$\rho \leqslant N - (r - s + 1);$$

следовательно, найдется $k$ такое, что

$$\dim f(P_k) = r, \quad \dim M_{f|P_k} = r - 1,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *Если* $f$ — *открытое нульмерное отображение компакта* $X$ *размерности* $n$ *на компакт* $Y$ *конечной размерности* $m > n$, *то отображение* $f_1$ *в представлении* (2) *можно построить так, чтобы оно обладало свойством* ($\gamma$) *и* $\dim M_{f_1} = m - 1$.

Представление $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup \delta_{i_1 \ldots i_k}$, в силу леммы 2 работы [5], можно выбрать так, что если $\dim f(\delta_{i_1 \ldots i_k}) > n$, то

$$\dim f(\delta_{i_1 \ldots i_k 0} \cap \delta_{i_1 \ldots i_k 1}) \leqslant \dim f(\delta_{i_1 \ldots i_k}) - 1, \tag{14}$$

$$D^{-1} \cap \delta_{i_1 \ldots i_k 0} \cap \delta_{i_1 \ldots i_k 1} = \Lambda, \tag{15}$$

где $D \subset Y$ — нульмерное $F_\sigma$, выбранное так, что если $V$ — какое-либо от-

крытое в $Y$ множество, то

$$\dim (V \setminus D) = \dim V - 1. \tag{16}$$

Условие (15) легко удовлетворяется (заменой в доказательстве леммы 2 в работе ([5]) $M_1$ на $D \cup M_1$, так как $D \cup M_1$ — нульмерное $F_\sigma$). При этом *на* $\delta_{i_1 \ldots i_k 0} \cap \delta_{i_1 \ldots i_k 1}$ *отображение* $f$ *конечно-кратно.*

Так как отображение $f$ открыто, то для каждого открытого в $X$ множества $U$ имеем:

$$B_{f(U)} \subset f(B_U),$$

и формула (5) принимает вид:

$$\Gamma_{i_1 \ldots i_k} = f(B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}}).$$

В силу (14),

$$\dim \Gamma = m - 1.$$

Так как $M_{f_1} \subset \psi^{-1}(\Gamma)$ и отображение $\psi$ нульмерно, то

$$\dim M_{f_1} \leqslant \dim \psi^{-1}(\Gamma) \leqslant \dim \Gamma = m - 1.$$

В силу теоремы Гуревича ([4]), $\dim M_{f_1} \geqslant m - 1$, следовательно,

$$\dim M_{f_1} = m - 1.$$

Покажем, что *построенное так отображение* $f_1$ *обладает свойством* $(\gamma)$.

Пусть $U$ — открытое в $X$ множество и

$$n < \dim f_1(U) = r \leqslant m.$$

Из (11) следует, что $\dim f(U) = r$. Тогда найдется $\delta_{i_1 \ldots i_k} \subset U$ такое, что $\dim f_1(\delta_{i_1 \ldots i_k}) = r$. Так как

$$B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}} \subset f^{-1}(\Gamma_k),$$

то, в силу (6), на $f_1(B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}})$ отображение $\psi$ есть гомеоморфизм, следовательно,

$$\dim f_1(B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}}) = \dim f(B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}}).$$

А так как

$$B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}} = \bigcup_{j_1 \ldots j_k} \delta_{i_1 \ldots i_k} \cap \delta_{j_1 \ldots j_k}$$

и на $\delta_{i_1 \ldots i_k} \cap \delta_{j_1 \ldots j_k}$ отображение $f$, а значит и $f_1$, конечно-кратно, то на $B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}}$ отображение $f_1$ конечно-кратно и его кратность $\leqslant N < \infty$.

Случай 1. $\dim f_1(B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}}) = r$. Так как кратность каждой точки отображения $f_1$ на $B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}}$ не больше некоторого числа $N$, то, применяя лемму 1, найдем: $Q_r \subset B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}}$ и, далее, $Q_r \supset Q_{r-1} \supset \ldots \supset Q_{n+1}$, так что

$$Q_i \subset M_{f_1/Q_{i+1}}, \quad \dim f_1(Q_i) = i, \quad \dim M_{f_1/Q_i} = i - 1.$$

Случай 2. $\dim f_1(B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}}) \leqslant r - 1$. Тогда

$$\dim f_1(\delta_{i_1 \ldots i_k} \setminus B_{\delta_{i_1 \ldots i_k}}) = r.$$

В силу (16) и того, что $D \cap \Gamma = \Lambda$, имеем:

$$\dim f(\delta_{i_1 \ldots i_k} \cap \Gamma^{-1}) = r - 1;$$

ледовательно,

$$\dim f_1(\delta_{i_1\ldots i_k} \cap \Gamma^{-1}) = r - 1.$$

так как $M_{f_1} \subset f_1(\Gamma^{-1})$, то можно положить

$$Q_r = \delta_{i_1 \ldots i_k}.$$

силу того, что $\dim f_1(\delta_{i_1\ldots i_k}) = r$, найдется $\delta_{i_1\ldots i_k\ldots i_s}$, $s \geqslant k$, такое, что

$$\dim f_1(\delta_{i_1\ldots i_s}) = r, \quad \dim f_1(\delta_{i_1\ldots i_s 0} \cap \delta_{i_1\ldots i_s 1}) = r - 1;$$

а $\delta_{i_1\ldots i_r 0} \cap \delta_{i_1\ldots i_s 1}$ отображение $f_1$ конечно-кратно, и так же, как в слуае 1, мы найдем:

$$Q_i \subset \delta_{i_1\ldots i_s 0} \cap \delta_{i_1\ldots i_s 1}, \quad n < i \leqslant r - 1.$$

ТЕОРЕМА 2. *Нульмерное открытое отображение $f$ компакта $X$ конечной размерности $n$ на компакт $Y$ размерности $n+k$, $0 < k < \infty$, редставимо в виде суперпозиции $2k+1$ нульмерных отображений:*

$$f = \psi_{k+1}\varphi_k\psi_k\ldots\varphi_1\psi_1, \tag{17}$$

*де каждое $\varphi_i$ двукратно и повышает размерность на единицу, а все $\psi$ е повышают размерности (равномерно для $i > 1$).*

Теорема следует непосредственно из доказанной леммы 2 и следствия работы ([5]) (стр. 564).

Для открытого отображения $f$ одномерного континуума на понтрянский двумерный континуум, построенного А. Н. Колмогоровым, форула (17) принимает вид:

$$f = \psi\varphi,$$

де $\varphi$ двукратно, а $\psi$ равномерно не повышает размерности.

## ГЛАВА II

## Одномерный континуум, нульмерно и открыто отображающийся на квадрат

Мы построим сначала двумерный континуум $Z$ в пространстве $xyz$ так, то $Z$ проектируется на квадрат $C$, лежащий в плоскости $xy$, и это проктирование является *нульмерным и открытым* отображением. Затем, отравляясь от $Z$, мы построим в четырехмерном пространстве $xyzt$ равноерно сходящуюся последовательность двумерных континуумов $X_k$ так, о $X_k$ проектируется на $Z$ в пространство $xyz$. Топологический предел $X$ онтинуумов $X_k$ есть искомый континуум, а его ортогональное проективание в плоскость $xy$ — нульмерное и открытое отображение на квадрат $C$.

### § 1. Построение континуума $Z$

1. Пусть $C$ — единичный квадрат, две стороны которого лежат на осях и $Oy$, а

$$z = \varphi_n(x, y), \quad 0 < n < \infty,$$

уравнение поверхности, являющейся суммой боковых граней всех равбоких пирамид с высотой $h = \frac{1}{4^{n-1}}$, основаниями которых являются

квадраты, полученные от деления $C$ на $4^n$ равных частей. Континуум $Z_n$ есть сумма $2^n$ следующих поверхностей $K_i^n$, $i = 1, \ldots, 2^n$: числа $i$ ставятся во взаимно однозначное соответствие со всевозможными $n$-значными двоичными дробями:

$$i \sim 0, a_{i1} \ldots a_{in}, \quad a_{ir} = \begin{cases} 0, \\ 1. \end{cases}$$

Поверхность $K_i^n$ определяется уравнением:

$$z = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \varphi_r (x, y).$$

Всякая поверхность $K_j^{n+k}$, определенная уравнением

$$z = \sum_{\rho=1}^{n+k} a_{j\rho} \varphi_\rho, \quad a_{jn} = 0,$$

лежит под поверхностью $K_i^n$, определенной уравнением

$$z = \sum_{\rho=1}^{n-1} a_{j\rho} \varphi_\rho + \varphi_n,$$

так как

$$\sum_{s=1}^{k} a_{jn+s} \varphi_{n+s} \leqslant \varphi_n.$$

Равенство имеет место только на прямых $x = \frac{p}{2^n}$ и $y = \frac{q}{2^n}$. Действительно, часть поверхности $z = \varphi_n (x, y)$, определенная на квадрате $\tilde{c}$ со сторонами, равными $\frac{1}{2^n}$, лежащими на прямых $x = \frac{p}{2^n}$, $y = \frac{q}{2^n}$, есть боковая поверхность равнобокой пирамиды с основанием $\tilde{c}$ и высотой $\frac{1}{4^{n+1}}$. Если $z = \psi_{n+k} (x, y)$ — уравнение боковой поверхности равнобокой пирамиды с основанием $\tilde{c}$ и высотой $\frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^k}$, $k \geqslant 1$, то

$$\varphi_{n+k} (x, y) \leqslant \psi_{n+k} (x, y)$$

и для точек, удаленных от границы $\tilde{c}$ больше, чем на $\frac{1}{2^{n+k}}$, имеет место строгое неравенство. Из равенства

$$\varphi_n (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{n+k} (x, y), \quad (x, y) \in \tilde{c},$$

следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{n+k} (x, y) < \varphi_n (x, y), \quad (x, y) \in \operatorname{int} \tilde{c}. \tag{1}$$

Возрастающая последовательность континуумов $Z_n$ равномерно сходится к континууму:

$$Z = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n}.$$

$Z$ — двумерный континуум, который проектируется в плоскость $xy$ на квадрат $C$. Континуум $Z$ для каждого $n \geqslant 1$ есть сумма $2^n$ слоев $R_{a_1 \ldots a_n}$, где $R_{a_1 \ldots a_n}$ содержит все поверхности $K_i^{n+r}$, $r \geqslant 1$, для которых первые

коэффициентов равны $a_1, \ldots, a_n$. Эти слои могут пересекаться вдоль линий, которые проектируются в плоскость $xy$ на прямые $x = \frac{p}{2^n}$ или $y = \frac{q}{2^n}$.

2. *Проектирование $Z$ на $C$ есть нульмерное открытое отображение* $\varphi$.

Для точки $(x, y) \in C$ $\varphi^{-1}(x, y)$ есть множество всех точек с координатами:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x, y),$$

где $0, a_1 \ldots a_n \ldots$ — всевозможные двоичные числа. Если у точек $M_1$ и $M_2$ из $\varphi^{-1}(x, y)$ $z_1 < z_2$, то найдется *наименьшее* $n$ такое, что

$$a_n^1 = 0, \quad a_n^2 = 1, \quad \varphi_n(x, y) \neq 0.$$

Для любой точки $M \in \varphi^{-1}(x, y)$ либо

$$z \leqslant \sum_{r=1}^{n-1} a_r \varphi_r(x, y) + \sum_{r=n+1}^{\infty} \varphi_r(x, y),$$

либо

$$z \geqslant \sum_{r=1}^{n-1} a_r \varphi_r(x, y) + \varphi_n(x, y)$$

и, в силу (1), точки $M_1$ и $M_2$ содержатся во взаимно дополнительных открыто замкнутых частях $\varphi^{-1}(x, y)$, значит,

$$\dim \varphi^{-1}(x, y) = 0$$

и отображение $\varphi$ нульмерно.

Открытость $\varphi$ следует из того, что для $M \in Z$ и любого открытого шара $\delta$ с центром в $M$ найдется поверхность $K_i^n \in Z$ такая, что $\varphi(K_i^n \cap \delta) \ni \varphi(M)$, значит, $\varphi(M)$ — внутренняя точка в $\varphi(K_i^n \cap \delta)$, а следовательно, и в $\varphi(Z \cap \delta)$.

## § 2. Вспомогательный континуум σ

1. Пусть дан прямоугольник $\pi$, стороны которого лежат на прямых

$$x = \frac{2p+1}{2^k}, \quad [x = \frac{2p+1}{2^k} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2r}}, \qquad y = \frac{q_i}{2^l},$$
$$k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant l \leqslant k, \quad i = 1, 2,$$

и слой $R_{a_1 \ldots a_k} \subset Z$. Полосу $\pi$, содержащуюся между прямыми $x = \frac{2p+1}{2^k}$ и $x = \frac{2p+1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+2}}$, разобьем на прямоугольники $\Delta_q^1$ прямыми

$$y = \frac{2q+1}{2^{k+2}}, \quad q \geqslant 0.$$

Положим $\sigma_q^1$ равным части слоя $R_{a_1 \ldots a_k 00}$, которая проектируется на $\Delta_q^1$, если $q$ нечетно, и такой же части $R_{a_1 \ldots a_k 10}$, если $q$ четно. Часть $\sigma_q^1$, которая проектируется в границу $\Delta_q^1$, есть простой замкнутый контур, лежащий в пересечении слоев $Z$, ранга $k+2$. Назовем его *краем* $\sigma_q^1$. Пересечение $\sigma_q^1 \cap \sigma_{q'}^1$ пусто, если $|q - q'| > 1$, и состоит из одной точки, если

$q' = q + 1$. Положим

$$\sigma^1 = \bigcup_q \sigma_q^1.$$

Пусть построен континуум

$$\sigma^n = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\nu=1}^{n_i} \sigma_\nu^i,$$

где $\sigma_\nu^i$ — часть слоя $R_{a_1\ldots a_{k+2i-1}0}$, проектирующаяся на прямоугольник или шестиугольник $\Delta_\nu^i$, стороны которого лежат на прямых $x = \frac{t}{2^{k+2i}}$, $y = \frac{t'}{2^{k+2i}}$ и равны $\frac{1}{2^{k+2i-1}}$ или $\frac{1}{2^{k+2i}}$; $\sigma_\nu^i$ пересекается с некоторым $\sigma_\mu^{i-1}$, содержащимся в слое $R_{a_1\ldots a_{k+2i-3}0}$. Если $\sigma_\nu^i$ и $\sigma_{\nu'}^i$ пересекаются с одним $\sigma_\mu^{i-1}$, то $\sigma_\nu^i \cap \sigma_{\nu'}^i$ непусто, только если $\nu' = \nu \pm 1$, и состоит из одной точки.

Для $i < n$ каждая точка края $\sigma_\nu^i$, не лежащая на прямой $x = \frac{2p+1}{2^k}$, принадлежит некоторому $\sigma_\mu^j$, $j \neq i$. Край же каждого $\sigma_\nu^n$ есть сумма двух простых дуг $l_{\nu 1}^n$ и $l_{\nu 2}^n$, где $l_{\nu 1}^n$ содержится в $\sigma_\mu^{n-1}$ или может быть для некоторого $\lambda$ и $i < n-1$ в $\sigma_\mu^{n-1} \cup \sigma_\lambda^i$, а $l_{\nu 2}^n$ может пересекаться с $\sigma_\mu^i \neq \sigma_\nu^n$ только в концах. Проекция $l_{\nu 1}^n$ в квадрат $C$ содержится в границе $\Delta_\mu^{n-1}$ или $\Delta_\mu^{n-1} \cup \Delta_\lambda^i$.

Заключим каждый $\Delta_\nu^n$ в прямоугольник (шестиугольник) $\Delta_\nu^{*n}$, одна или две стороны которого лежат на стороне $\Delta_\mu^{n-1}$ или $\Delta_\mu^{n-1} \cup \Delta_\lambda^i$, а остальные — на прямых, параллельных осям координат и отстающих от сторон $\Delta_\nu^n$ на расстоянии $\frac{1}{2^{k+2(n+1)}}$.

Разобьем (так, как мы это делали с полосой $\pi$) каждую разность $\Delta_\nu^{*n} \setminus \Delta_\nu^n$ на два (три) шестиугольника и прямоугольники $\Delta_\gamma^{n+1}$ прямыми

$$x = \frac{2s+1}{2^{k+2(n+1)}}, \qquad y = \frac{2s+1}{2^{k+2(n+1)}};$$

для шестиугольников $\Delta_\gamma^{n+1}$ полагаем $\sigma_\gamma^{n+1}$ равным проектирующейся на $\Delta_\gamma^{n+1}$ части слоя $R_{a_1\ldots a_{k+2n-1}000}$, а для прямоугольников — такой же части того же слоя или слоя $R_{a_1\ldots a_{k+2n-1}010}$, так, чтобы $\sigma_\gamma^{n+1}$ и $\sigma_{\gamma+1}^{n+1}$ лежали в разных слоях; тогда $\sigma_\gamma^{n+1} \cap \sigma_{\gamma+1}^{n+1}$ есть точка, содержащаяся в $\sigma_\nu^n$. Каждая точка $l_{\nu 2}^n$ принадлежит некоторому $\sigma_\gamma^{n+1}$, а край каждого $\sigma_\gamma^{n+1}$ состоит из двух простых дуг $l_{\gamma i}^{n+1}$, $i = 1, 2$, где $l_{\gamma 1}^{n+1} \subset \sigma_\nu^n$ (или $\sigma_\nu^n \cup \sigma_\lambda^i$), а $l_{\gamma 2}^{n+1}$ может пересекаться с $\sigma_\mu^i$, $\mu \leqslant n$, только в концах. Будем говорить, что кусок $\sigma_\gamma^{n+1}$ *подчинен* куску $\sigma_\nu^n$. Таким образом, для континуума

$$\sigma^{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} \bigcup_{\nu=1}^{n_i} \sigma_\nu^i$$

выполнены индуктивные предположения.

Положим

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \operatorname{top} \sigma^n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{p_n} \sigma_\nu^n}. \tag{2}$$

2. Пересечение $\sigma \cap \overline{(Z \setminus \sigma)}$ есть замыкание суммы счетного множества

простых дуг, лежащих в

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (R_{a_1 \dots a_{k+2n-1}0} \cap R_{a_1 \dots a_{k+2n-1}1}).$$

Действительно, если

$$\sigma_\nu^n \subset R_{a_1 \dots a_{k+2n-1}0},$$

то часть слоя $R_{a_1 \dots a_{k+2n-1}1}$, которая проектируется на $\Delta_\nu^n$, принадлежит $\overline{Z \setminus \sigma}$, и

$$\sigma_\nu^n \cap (\overline{Z \setminus \sigma}) \subset R_{a_1 \dots a_{k+2n-1}0} \cap R_{a_1 \dots a_{k+2n-1}1}.$$

Каждый $\sigma_\nu^n$ содержится в континууме

$$\tilde{\sigma}_\nu^n = \sigma_\nu^n \cup \overline{\bigcup_{r=1}^{\infty} \sigma_\mu^{n+r}}, \tag{3}$$

где каждый $\sigma_\mu^{n+r}$ соединен с $\sigma_\nu^n$ последовательностью $\sigma_{\mu_1}^{n+1}, \dots, \sigma_\mu^{n+r}$ так, что кусок $\sigma_{\mu_{i+1}}^{n+i+1}$ подчинен $\sigma_{\mu_i}^{n+i}$. Если $\sigma_\nu^{n+1}$ подчинен $\sigma_\mu^n$, то, очевидно, $\tilde{\sigma}_\nu^{n+1} \subset \tilde{\sigma}_\mu^n$. Куски $\tilde{\sigma}_\nu^{n+1}$ и $\tilde{\sigma}_{\nu+1}^{n+1}$, содержащиеся в $\tilde{\sigma}_\mu^n$, лежат в *разных слоях* $Z$ и

$$\tilde{\sigma}_\nu^{n+1} \cap \tilde{\sigma}_{\nu+1}^{n+1} \subset \sigma_\mu^n.$$

Проекция $\tilde{\sigma}_\nu^n$ в $C$ есть многоугольник $\tilde{\Delta}_\nu^n$, граница которого содержит $\Delta_\nu^n \cap \Delta_\mu^{n-1}$, а остальные стороны лежат на прямых, параллельных сторонам $\Delta_\nu^n$ и отстоящих от них на расстояние

$$\sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2r}} = \frac{1}{3 \cdot 2^{k+2n}}.$$

Так как стороны $\Delta_\nu^n$ не меньше $\frac{1}{2^{k+2n}}$, то

$$\tilde{\Delta}_\nu^n \cap \tilde{\Delta}_\lambda^n = \Lambda \text{ и } \tilde{\sigma}_\nu^n \cap \sigma_\lambda^n = \Lambda,$$

если $|\nu - \lambda| > 1$.

Положим

$$\mathscr{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=1}^{N_n} \tilde{\sigma}_\nu^n. \tag{4}$$

Покажем, что

$$\dim \mathscr{E} = 0. \tag{5}$$

Проекция $\tilde{\sigma}_\nu^n \cap \tilde{\sigma}_{\nu+1}^n$ есть отрезок

$$AB \subset \Delta_\mu^{n-1} \cap \tilde{\Delta}_\nu^n \cap \tilde{\Delta}_{\nu+1}^n.$$

В окрестности каждой *внутренней* точки $M \in AB$ содержится конечное число многоугольников $\tilde{\Delta}_\lambda^i$, следовательно, $M$ не принадлежит проекции $\mathscr{E}$. Точка $A$ есть проекция точки $A' \in \mathscr{E}_\nu^n = \mathscr{E} \cap \tilde{\sigma}_\nu^n$, а точка $B$ — проекция точки $B' \in \mathscr{E}_{\nu+1}^n$. Поэтому

$$\mathscr{E}_\nu^n \cap \mathscr{E}_{\nu+1}^n = \Lambda;$$

так как диаметры $\tilde{\sigma}_\nu^n$, а значит и $\mathscr{E}_\nu^n$, стремятся к нулю вместе с $\frac{1}{n}$ и

$$\mathscr{E} = \bigcup_{\nu=1}^{N_\nu} \mathscr{E}_\nu^n,$$

то (5) доказано.

## § 3. Построение континуумов $X_n$

1. Пусть $\pi_1^0$ и $\pi_2^0$ — прямоугольники в $C$, ограниченные отрезками прямой $x=\frac{1}{2}$ и, соответственно, прямых $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{6}$. В $\pi_1^0$ и симметрично относительно прямой $x=\frac{1}{2}$ в $\pi_2^0$ построим по континууму $\sigma_1$ и $\sigma_2$ в слое $R_0\,(k=1)$. Континуум $Z$ есть сумма двух кусков $Z_1$ и $Z_2$, лежащих слева и справа от плоскости $x=\frac{1}{2}$. Положим

$$\widetilde{S}_1^0=\overline{Z_1\setminus\sigma_2}\cup\sigma_1,\quad \widetilde{S}_2^0=\overline{Z_2\setminus\sigma_1}\cup\sigma_2.$$

Пусть $\mathscr{E}$ — сумма соответствующих множеств (4); $\mathscr{E}_1^0\subset\sigma_1$ и $\mathscr{E}_2^0\subset\sigma_2$; тогда $\dim\mathscr{E}=0$.

Для построения континуума $X_0$ определим на каждом $\widetilde{S}_i^0$ непрерывную функцию $\varphi_i^0$ так, что

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_2^0(M)=0,\quad 0<\varphi_2^0(M)\leqslant\frac{1}{2},\\ M\in\mathscr{E},\quad M\in\widetilde{S}_2^0\setminus\mathscr{E},\\ \varphi_1^0\equiv 0.\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Пусть $S_1'^0\equiv\widetilde{S}_1^0$, а $S_2'^0$ — лежащий в пространстве $xyzt$ континуум, состоящий из точек $P=P(M,t)$, с координатами $M\in\widetilde{S}_2^0$ и $t=\varphi_2^0(M)$. Из (6) следует, что

$$S_1'^0\cap S_2'^0=\mathscr{E}.$$

Положим

$$X_0=S_1'^0\cup S_2'^0.$$

2. Континуумы $X_n$, $n>0$, строятся по индукции в пространстве $xyzt$ так, что

$$X_n=\bigcup S_{pqi}'^n. \qquad (7)$$

Каждый континуум $S_{pqi}'^n$ гомеоморфен своей проекции $\widetilde{S}_{pqi}^n$ в $Z$; проекция $S_{pqi}'^n$ в квадрат $C$ есть прямоугольник $\pi_{pq}^n$. Если $n=2k-1$, $k\geqslant 1$, то стороны $\pi_{pq}^{2k-1}$ лежат на прямых:

$$x=\frac{\phantom{p}}{2^{2k-2}}\pm\frac{1}{3\cdot 2^{2k-3}}, \qquad (8)$$

$$y=\frac{q}{2^{2k}}\pm\frac{1}{3\cdot 2^{2k-1}}. \qquad (9)$$

Если $n=2k$, $k\geqslant 1$, то стороны $\pi_{pq}^{2k}$ лежат на прямых (9) и

$$x=\frac{p}{2^{2k}}\pm\frac{1}{3\cdot 2^{2k-1}}. \qquad (10)$$

В случае $p=0$, $p=2^{2k}$, $q=0$ или $q=2^{2k}$ одна или две стороны $\pi_{pq}^n$ могут лежать на стороне $C$.

Каждый прямоугольник $\pi_{pq}^n$ есть сумма нескольких прямоугольников $\pi_{pq'}^{n+1}$ или $\pi_{p'q}^{n+1}$. Легко подсчитать, что

$$\pi_{p'q}^{2k}\cap\pi_{p'q}^{2k}=\Lambda,$$

если $|p-p'|>1$ и

$$\pi_{pq}^{2k-1} \cap \pi_{pq'}^{2k-1} = \Lambda,$$

если $|q-q'|>1$. $\pi_{pq}^n \cap \pi_{pq+1}^n (\pi_{p+1q}^n \cap \pi_{pq}^n)$ есть полоса прямоугольника $\pi_{pq_0}^{n-1} (\pi_{p_0q}^{n-1})$, содержащего $\pi_{pq}^n \cup \pi_{pq+1}^n$, отсеченная прямыми

$$y = \frac{2q+1}{2^{2k+1}} \pm \frac{1}{3 \cdot 2^{2k+1}},$$

если $n = 2k-1$, и прямыми

$$x = \frac{2p+1}{2^{2k+1}} \pm \frac{1}{3 \cdot 2^{2k+1}},$$

если $n = 2k$.

3. Построим куски $\widetilde{S}_{pqi}^n$ континуума $Z$, которые проектируются на прямоугольники $\pi_{pq}^n$. Для $n=0$ это $\widetilde{S}_1^0$ и $\widetilde{S}_2^0$. Предположим, что построены куски $\widetilde{S}_{pqi}^n$, и построим куски $\widetilde{S}_{p'q'j}^{n+1}$.

Случай $n=2k$, $k \geqslant 0$. Пусть на прямоугольник $\pi_{pq}^n$ проектируется конечное число непересекающихся кусков $\widetilde{S}_{pqi}^n$, $\widetilde{\pi}_{pq}^n \subset \pi_{pq}^n$ — прямоугольник, стороны которого лежат на прямых:

$$x = \frac{2p \pm 1}{2^{2k+1}}, \qquad y = \frac{2q \pm 1}{2^{2k+1}} \quad (y = 0{,}1, \text{ если } k=0). \tag{11}$$

Предположим, что каждый континуум $\widetilde{S}_{pqi}^n$ определяется формулой:

$$\widetilde{S}_{pqi}^n = \overline{R_{pqi} \setminus \cup\, \sigma_{p'q'j\nu}^n} \cup \bigcup_{\mu} \sigma_{pqi\mu}^n, \tag{12}$$

где $R_{pqi}^n$ — *связная* сумма частей $R_{pqi\mu}$ слоев ранга $\geqslant n$, проектирующихся на части $\widetilde{\pi}_{pq}^n$, отсеченные прямой $x = \frac{l}{2^s}$ с наименьшим $s$; $\sigma_{pqi\mu}^n$ — континуумы типа $\sigma$, проектирующиеся на полосу $\pi_{pq}^n \setminus \widetilde{\pi}_{pq}^n$, отсеченную от $\pi_{pq}^n$ какой-либо прямой (11), и пересекающиеся с $R_{pqi\mu}^n$ по отрезку его края, а $\sigma_{p'q'j}^n$ — аналогичные континуумы для $\widetilde{S}_{p'q'j}^n$ $(p'q') \neq (pq)$. Если $R_{pqi\mu}$ есть часть слоя $R_{a_1 \ldots a_r}$, то

$$\sigma_{p'q'j\nu}^n \subset R_{a_1 \ldots a_r \ldots a_s 0 a_{s+2}} \cup R_{a_1 \ldots a_r, \ldots a_s 1 a'_{s+2}}. \tag{13}$$

Легко видеть, что условия для $\widetilde{S}_{pqi}^n$ выполнены при $n=0$.

Часть $\widetilde{S}_{pqi}^n$, проектирующаяся на $\pi_{pq'}^{n+1} \subset \pi_{pq}^n$, состоит из нескольких компонент $\overset{*}{S}_{pq'j}$. Пусть

$$\delta^{q'} = \pi_{pq'}^{n+1} \cap \pi_{pq'+1}^{n+1} \cap \widetilde{\pi}_{pq}^n.$$

Очевидно

$$\delta^{q'} = \delta_1^{q'} \cup \delta_2^{q'}, \quad \delta_1^{q'} \subset \widetilde{\pi}_{pq'}^{n+1}, \quad \delta_2^{q'} \subset \widetilde{\pi}_{pq'+1}^{n+1};$$

граница $\widetilde{\pi}_{pq'}^{n+1}$ лежит на прямых:

$$x = \frac{p}{2^k} \pm \frac{5}{2^{2k+3}}, \qquad y = \frac{2q' \pm 1}{2^{2k+3}}.$$

Каждая компонента $S_{q'\nu}$ части $\overset{*}{S}_{pq'j}$, проектирующейся на $\delta^{q'}$, состоит из двух частей $S_\lambda^{q'\nu}$, проектирующихся соответственно на $\delta_\lambda^{q'}$, $\lambda = 1, 2$; $S_1^{q'\nu} \cap S_2^{q'\nu}$ проектируются на $\delta_1^{q'\nu} \cap \delta_2^{q'\nu}$. В каждом $S_{q'\nu}$ мы построим два континуума $\sigma_\lambda^{q'\nu} \subset S_\lambda^{q'\nu}$ так же, как в п. 1 построены континуумы $\sigma_1$ и $\sigma_2$. Если $r$ — наименьшее число, для которого $S_\lambda^{q'\nu}$ содержит часть слоя $R_{a_1 \ldots a_r}$,

проектирующуюся на $\delta_\lambda^{q'}$, то

$$\sigma_\lambda^{q'\nu} \subset R_{a_1\ldots a_s 00} \cup R_{a_1\ldots a_s 10}, \quad s \geqslant r, \quad s \geqslant n+1. \tag{14}$$

$R^*_{pq'j}$ — часть $S^*_{pq'j}$, которая проектируется на $\widetilde{\pi}^{n+1}_{pq'} \cap \widetilde{\pi}^n_{pq}$, — связна. Положим

$$\widetilde{S}^{n+1}_{pq'j} = R^*_{pq'j} \cup \bigcup_\nu (\sigma_1^{q'\nu} \cup \sigma_2^{q'-1\nu}) \cup \bigcup_\mu \widetilde{\sigma}^1_{\mu\rho} \setminus \bigcup_\nu (\sigma_1^{q'-1\nu} \cup \sigma_2^{q'\nu}), \tag{15}$$

где $\widetilde{\sigma}^1_{\mu\rho}$ [(см. (2) и (3)] — те слагаемые континуумов $\sigma^n_{pqi\mu} \subset \widetilde{S}^n_{pqi}$, проекции которых содержатся в $\pi^{n+1}_{pq'}$. Так как $\sigma^1_{\mu\rho} \subset \widetilde{\sigma}^1_{\mu\rho}$ есть часть некоторого слоя $Z$, которая проектируется на $\widetilde{\pi}^{n+1}_{pq'} \setminus \widetilde{\pi}^n_{pq}$, то легко проверить, что $\widetilde{S}^{n+1}_{pq'j}$ определяется формулой (12).

4. Различные $\widetilde{S}^{n+1}_{pq'j}$, проектирующиеся на $\pi^{n+1}_{pq'}$, между собой не пересекаются и так как содержащиеся в $\pi^n_{pq}$ прямоугольники $\pi^{n+1}_{pq'}$ пересекаются только, если $|q-q'|>1$, то содержащиеся в $\widetilde{S}^n_{pqi}$ куски $\widetilde{S}^{n+1}_{pq'j}$ пересекаются не более, чем по два.

В случае $n=2k+1$ построение $\widetilde{S}^{n+1}_{p'qj}$ производится аналогично, только каждое слагаемое $\widetilde{\sigma}^1_{\mu\rho}$, *пересекающее плоскость* $x=\frac{2p'+1}{2^{2k+3}}$ континуума $\sigma^n_{pqi\mu} \subset \widetilde{S}^n_{pqi\mu}$, мы делим на два слагаемых:

$$\widetilde{\sigma}^1_{\mu\rho} = \widetilde{\sigma}^1_{\mu\rho 1} \cup \widetilde{\sigma}^1_{\mu\rho 2},$$

так что если $\sigma^r_\rho \subset \sigma^n_{pqi\mu}$ ($\sigma^r_\rho$ есть часть слоя $R_{a_1\ldots a_l}$), то

$$\sigma^r_\rho = \sigma^1_{\rho 1} \cup \sigma^1_{\rho 2},$$

где $\sigma^1_{\rho 1} \subset R_{a_1\ldots a_l 0}$ и $\sigma^1_{\rho 2} \subset R_{a_1\ldots a_l 1}$. Мы полагаем

$$\widetilde{\sigma}^1_{\rho 1} \subset \widetilde{S}^{n+1}_{p'qj}, \quad \sigma^1_{\rho 2} \subset \widetilde{S}^{n+1}_{p'+1qj}.$$

Легко видеть, что диаметры кусков $\widetilde{S}^n_{pqi}$ стремятся к нулю вместе с $\frac{1}{n}$. Для каждых двух содержащихся в $\widetilde{S}^n_{pqi}$ пересекающихся кусков $\widetilde{S}^{n+1}_{pq'j}$, $\widetilde{S}^{n+1}_{pq'+1k}$ строится нульмерное множество $\mathscr{E}^{n+1jk}_{pq'q'+1}$ аналогично тому, как было построено множество $\mathscr{E}$ в § 3. Пусть

$$\mathscr{E}^{n+1}_{pq'j} = \mathscr{E}^n_{pqi} \cap \widetilde{S}^{n+1}_{pq'j} \cup \bigcup_{k \neq j} \mathscr{E}^{n+1jk}_{pq'q'\pm 1}. \tag{16}$$

Очевидно, что

$$\dim \mathscr{E}^{n+1}_{pq'j} = 0. \tag{17}$$

5. Пусть построен континуум $X_n$ так, что каждой точке $M \in \widetilde{S}^n_{pqi}$ соответствует точка $P\ (M,\ t) \in S'^n_{pqi}$ [см. (7)]; координата $t$ точки $P\ (M,\ t)$ определена равенством:

$$t = \varphi^0_p(M) + \varphi^1_{p_1q_1i_1}(M) + \cdots + \varphi^n_{p_nq_ni_n}(M), \quad \widetilde{S}^{r+1}_{p_{r+1}q_{r+1}i_{r+1}} \subset \widetilde{S}^r_{p_rq_ri_r}. \tag{18}$$

$\varphi^r_{p_rq_ri_r}$ — непрерывная функция, определенная на $\widetilde{S}^r_{p_rq_ri_r}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

a) $0 \leqslant \varphi^r_{p_rq_ri_r} \leqslant \frac{1}{2^r}$.

b) $\varphi^r_{p_rq_ri_r}(M) = 0$,

$$M \in \mathscr{E}^r_{p_rq_ri_r} \cup [\widetilde{S}^r_{p_rq_ri_r} \cap (\bigcup_j \widetilde{S}^{r}_{p'_rq'_rj})] = E_r,$$

где

$$\left.\begin{array}{lll} p'_r = p_r + 1, & q'_r = q_r, & \text{если } r \text{ четно,} \\ p'_r = p_r, & q'_r = q_r + 1, & \text{если } r \text{ нечетно,} \\ \widetilde{S}^{r,}_{p'_r q'_r j} \subset \widetilde{S}^{r-1}_{p_{r-1} q_{r-1} i_{r-1}}. & & \end{array}\right| \qquad (\alpha)$$

c) $0 < \varphi^{\rho+1}_{p_{\rho+1} q_{\rho+1} i_{\rho+1}}(M) + \cdots + \varphi^{r}_{p_r q_r i_r}(M) < \frac{1}{2} \varphi^{\rho}_{p'_\rho q'_\rho i_\rho}(M)$,

$$\rho < r, \quad M \in E_\rho \cap \widetilde{S}^{r}_{p_r q_r i_r} \setminus E_r .$$

Мы построим функцию $\varphi^{n+1}_{pqi}$ на $\widetilde{S}^{n+1}_{pqi} \subset \widetilde{S}^{n}_{p_n q_n i_n}$ так, чтобы удовлетворялись условия a), b), c). Эти условия, очевидно, удовлетворяются на множестве $E_{n+1}$, если

$$\varphi^{n+1}_{pqi}(M) = 0, \quad M \in E_{n+1}.$$

Пусть функция $\varphi^{n+1}_{pqi}$, удовлетворяющая условиям a), b), c), построена на множестве

$$F_{k+1} = \widetilde{S}^{n+1}_{pqi} \cap \Big( \bigcup_{k+1 \leqslant \rho \leqslant n+1} E_\rho \Big).$$

Тогда функцию $\varphi^{n+1}_{pqi}$ можно определить непрерывно на множестве $F_k = E_k \cup F_{k+1}$ так, чтобы удовлетворялись условия a), b) и для $\gamma = k$ условие c):

$$\sum_{\rho=k+1}^{n+1} \varphi^{\rho}_{p_\rho q_\rho i_\rho}(M) < \frac{1}{2} \varphi^{k,}_{p'_k q'_k j}(M),$$

$$M \in \widetilde{S}^{n+1}_{pqi} \cap \widetilde{S}^{k,}_{p'_k q'_k j} \subset E_k. \qquad (19)$$

Покажем, что на $F_k \cap E_\gamma$ удовлетворяется условие c) *для любого* $\gamma \leqslant n+1$. Для $M \in F_{k+1}$ это имеет место по предположению. Пусть $M \in E_\gamma \cap E_k \setminus F_{k+1}$, следовательно, $\gamma \leqslant k$. Тогда

$$\varphi^{k}_{p_k q_k i_k}(M) = 0,$$

и в силу индуктивного предположения c) и неравенства (19) имеем:

$$\sum_{\rho=\gamma+1}^{n+1} \varphi^{\rho}_{p_\rho q_\rho i_\rho}(M) \leqslant \sum_{\rho=\gamma+1}^{k-1} \varphi^{\rho}_{p_\rho q_\rho i_\rho}(M) + \sum_{\rho=k+1}^{n+1} \varphi^{\rho}_{p_\rho q_\rho i_\rho}(M) <$$

$$< \sum_{\rho=\gamma+1}^{k-1} \varphi^{\rho}_{p_\rho q_\rho i_\rho}(M) + \frac{1}{2} \varphi^{k,}_{p'_k q'_k j}(M) < \frac{1}{2} \varphi^{\gamma,}_{p'_\gamma q'_\gamma j'}(M),$$

$$M \in \widetilde{S}^{n+1}_{pqi} \cap \widetilde{S}^{k,}_{p'_k q'_k j} \cap \widetilde{S}^{\gamma,}_{p'_\gamma q'_\gamma j'} \subset E_\gamma \cap E_k.$$

Следовательно, условия a), b), c) выполнены для $\varphi^{(n+1)}_{pqi}$ на множестве $F_k$.

Таким образом, $\varphi^{n+1}_{pqi}$ последовательно определяется на

$$F_{n+1}, \quad F_n, \ldots, \quad F_1, \quad F_0 \equiv \widetilde{S}^{n+1}_{pqi}.$$

Континуум $S'^{n+1}_{pqi}$ есть множество точек $P(M, t)$ пространства $xyzt$, где $M \in \widetilde{S}^{n+1}_{pqi}$, а $t$ определяется формулой (18) с заменой $n$ на $n+1$. Полагаем:

$$X_{n+1} = \bigcup S'^{n+1}_{pqi}.$$

## § 4. Континуум $X$ и нульмерное открытое отображение $X$ на квадрат*

В силу условия а), имеем:

$$h(X_n, X_{n+1}) < \frac{1}{2^n}\ ^{**}$$

и последовательность континуумов $X_n$ топологически равномерно сходится к континууму

$$X = \bigcup S^n_{pqi}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $S^n_{pqi}$ состоит из всех точек $P(M, t)$, для которых

$$M \in \widetilde{S}^n_{pqi} \equiv \widetilde{S}^n_{p_n q_n i_n}, \quad t = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k_{p_k q_k i_k}(M). \tag{20}$$

В силу а), *диаметры кусков* $S^n_{pqi}$ (*как и* $\widetilde{S}^n_{pqi}$) *стремятся к нулю вместе с* $\frac{1}{n}$. Покажем, что

$$\dim S_{pqi} \cap S^n_{\bar{p}\bar{q}j} \leqslant 0, \quad \bar{p}\bar{q}j \neq pqi. \tag{21}$$

Пусть $P \in S_{pqi} \cap S^n_{\bar{p}\bar{q}j}$, тогда

$$M \in \widetilde{S}^n_{pqi} \cap \widetilde{S}^n_{\bar{p}\bar{q}j},$$

а координата $t_1 = t_2$ точки $P$ может быть определена двумя рядами:

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= \varphi^0_p(M) + \cdots + \varphi^{k-1}_{p_{k-1} q_{k-1} i_{k-1}}(M) + \varphi^k_{p_k q_k i_k}(M) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \varphi^n_{pqi}(M) + \cdots, \\ t_2 &= \varphi^0_p(M) + \cdots + \varphi^{k-1}_{p_{k-1} q_{k-1} i_{k-1}}(M) + \varphi^k_{p'_k q'_k i'_k}(M) + \cdots \\ &\qquad \cdots + \varphi^n_{\bar{p}\bar{q}j}(M) + \ldots, \quad k \leqslant n. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Так как $M \in \widetilde{S}^k_{p_k q_k i_k} \cap \widetilde{S}^k_{p'_k q'_k i'_k}$, то $p'_k$, $q'_k$ и $\widetilde{S}^k_{p'_k q'_k i'_k}$ удовлетворяют условиям ($\alpha$) и $\varphi^k_{p_k q_k i_k}(M) = 0$.

Если $M \bar{\in} \mathscr{E}^k_{p_k q_k i_k}$, то, в силу с),

$$\sum_{r=k+1}^{\infty} \varphi^r_{p_r q_r i_r}(M) \leqslant \frac{1}{2} \varphi^k_{p'_k q'_k i'_k}(M), \tag{23}$$

что противоречит равенству $t_1 = t_2$. Следовательно, $M \in \mathscr{E}^k_{p_k q_k i_k}$. В силу

* Легко показать, что $X$ не имеет локально-разбивающих точек и открытых подмножеств, вложимых в плоскость. Следовательно, в силу только что появившейся теоремы Р. Д. Андерсона [10], $X$ гомеоморфно менгеровской универсальной кривой.

** $h$ — хаусдорфово расстояние между множествами.

16) и b), множество точек $P(M, t) \in \widetilde{S}^n_{pqi}$, где $M \in \mathscr{E}^k_{p_k q_k i_k}$, гомеоморфно части $\mathscr{E}^k_{p_k q_k i_k}$, и из (17) следует (21). Таким образом,

$$\dim X = 1. \tag{24}$$

2. Проекция $X$ в плоскость $xy$ есть квадрат $C$. Покажем, что *проектирование $f$ есть нульмерное открытое отображение $X$ на $C$.*

Мы имеем:

$$f = \varphi\psi, \tag{25}$$

где $\psi$ — проектирование $X$ на $Z$, а $\varphi$ — проектирование $Z$ на $C$; мы видели (см. § 1), что $\varphi$ нульмерно и открыто. Покажем, что $\psi$ нульмерно. Пусть $P(M, t_1)$, $P(M, t_2)$ — две различные точки $\psi^{-1}(M)$. Координаты $t_1$, $t_2$ этих точек определяются формулами (22), где $k \geqslant 0$.

Пусть $t_1 < t_2$; тогда

$$M \,\overline{\in}\, \mathscr{E}^{k-1}_{p_{k-1} q_{k-1} i_{k-1}}, \quad \varphi^{k,}_{p'_k q'_k i'_k}(M) > 0$$

и имеет место (23). К $\psi^{-1}(M)$ не принадлежат точки $P(M, t)$, для которых

$$T_1 = \sum_{r=0}^{k-1} \varphi^r_{p_r q_r i_r}(M) + \frac{1}{2}\ \varphi^{k,}_{p'_k q'_k i'_k}(M) < t < \sum_{r=0}^{k-1} \varphi^r_{p_r q_r i_r}(M) + \varphi^{k,}_{p'_k q'_k i'_k}(M) = T_2.$$

Действительно, пусть

$$P(M, t_0) \in \psi^{-1}(M) \quad \text{и} \quad t_0 = \sum_{r=0}^{\infty} \varphi^r_{\bar p_r \bar q_r j_r}(M).$$

Если для некоторого $m < k$

$$\varphi^m_{\bar p_m \bar q_m j_m} \not\equiv \varphi^m_{p_m q_m i_m},$$

то, в силу условия c), $t_0 < T_1$, если $\varphi^m_{\bar p_m \bar q_m j_m}(M) = 0$, и $t_1 > T_2$, если $\varphi^m_{\bar p_m \bar q_m j_m}(M) > 0$.

Если же

$$\varphi^r_{\bar p_r \bar q_r j_r} \equiv \varphi^r_{p_r q_r i_r}$$

для всех $r < k$, то $t_0 \leqslant T_1$, если $\varphi^k_{\bar p_k \bar q_k j_k} \equiv \varphi^k_{p_k q_k i_k}$, и $t_0 \geqslant T_2$, если $\varphi^k_{\bar p_k \bar q_k j_k} \equiv \varphi^{k,}_{p'_k q'_k i_k}$.

Итак, на прямой, содержащей $\psi^{-1}(M)$, между любыми двумя точками есть интервал, не содержащий точек $\psi^{-1}(M)$. Следовательно, $\dim \psi^{-1}(M) = 0$ и отображение $\psi$ нульмерно. А тогда и $f = \varphi\psi$ *нульмерно.*

Обозначим через $f_n$ отображение проектирования континуума $X_n$ на квадрат $C$.

Покажем, что $f_n$ *открыто*, т. е. для любой точки $P \in X_n$ и ее окрестности $U$ в $X_n$ точка $f_n(P)$ — внутренняя в $f_n(U)$. Рассмотрим два случая.

1) $P(M, t)$ — внутренняя точка в $S'^n_{pqi}$. Тогда $M \bar{\in} \mathscr{E}^n_{pqi}$ и $M$ — либо внутренняя точка в $\widetilde{S}^n_{pqi}$, либо $M$ принадлежит к краям содержащих ее кусков $\sigma^r_s$ континуума $\sigma$ (см. § 2), содержащегося в $\widetilde{S}^n_{pqi}$. В обоих случаях малая окрестность $U$ точки $P$ в $X_n$ содержит *часть* $S'^n_{pqi}$, которая проектируется в $Z$ (гомеоморфно) на часть некоторого слоя $R_{a_1 \ldots a_r} \subset Z$, содержащуюся в некоторой окрестности точки $M$. Следовательно, $f_n(P)$ — внутреняя точка в $f_n(U)$.

2) $P(M, t) \in S'^n_{pqi} \cap S'^n_{pqj}$; тогда $M \in \mathscr{E}^n_{pqi}$. В силу условия b), $P \in X_{n-1}$; каждой точке $P'(M', t')$, лежащей в достаточно малой окрестности $V$ точки $P$, в $X_{n-1}$ соответствует точка $P''(M', t'') \in U$.

Пусть доказано, что $f_{n-1}$ открыто (это, очевидно, так, если $n = -1$, так как $X_{-1} \equiv Z$, $f_{-1} \equiv \varphi$). Тогда $f_{n-1}(P)$ — внутренняя точка $f_{n-1}(V)$; следовательно, $f_n(P)$ — внутренняя точка в $f_n(U)$, так как $f_{n-1}(V) \subset \subset f_n(U)$.

Таким образом, $f_n$ открыто для любого $n$. В силу (18), (20) и условия a), каждой точке $P \in f^{-1}(Q)$, $Q \in C$, соответствует точка $\bar{P}_n \in f_n^{-1}(Q)$, и наоборот, причем $\rho(P, P_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$. Поэтому

$$h[f^{-1}(Q), f_n^{-1}(Q)] \leqslant \frac{1}{2^n}, \tag{26}$$

где $h$ — хаусдорфово расстояние между множествами. Так как $f_n$ открыто для любого $n$, то разбиение $X_n$ на прообразы вполне непрерывно. Из (26) легко следует, что и *разбиение $X$ на прообразы $f^{-1}(Q)$ вполне непрерывно*, а значит, *отображение $f$ одномерного континуума $X$ на квадрат $C$ открыто*.

Поступило
28. V. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kolmogoroff A., Über offene Abbildungen, Ann. of Math., vol. 38 (1937), 36—38.
[2] Каждан Я. М., Пример открытого отображения одномерного локально-связного континуума на квадрат, Доклады Ак. наук СССР, 56 (1947), 339—342.
[3] Anderson R. D., On monotone-interior mappings in the plane, Trans. Amer. Math. Soc., 73 (1952), 211—222.
[4] Hurewicz W., Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen, Journ. für reine und angew. Math., 169 (1932), 71—78.
[5] Келдыш Л. В., Нульмерные отображения, повышающие размерность, Матем. сборн., 28 (70): 3 (1951), 537—566.
[6] Келдыш Л. В., О представлении нульмерных открытых отображений в виде суперпозиций, Доклады Ак. наук СССР, 98, № 5 (1954), 719—722.
[7] Келдыш Л. В., Пример одномерного континуума, нульмерно и открыто отображающегося на квадрат, Доклады Ак. наук СССР, 97, № 2 (1954), 201—204.
[8] Келдыш Л. В., Монотонное отображение куба на куб большей размерности, Матем. сборн., 41 (83): 2 (1957), 129—158.
[9] Келдыш Л. В., Преобразование монотонно-неприводимого отображения в монотонно-открытое и монотонно-открытые отображения куба, повышающие размерность, Матем. сборн., 43 (85): 2 (1957), 187—226.
[10] Anderson R. D., One-dimensional continuous curves and a homogeneity theorem, Ann. of Math., 68, № 1 (1958), 1—16.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23(1959), 185—196

Ю. М. СМИРНОВ

# ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(*Представлено академиком* П. С. Александровым)

В работе доказано существование универсального пространства для бесконечномерных в самом слабом смысле пространств со счетной базой (для пространств, распадающихся в сумму счетного числа замкнутых конечномерных множеств), построен пример компакта, распадающегося в сумму счетного числа нульмерных множеств, но не бесконечномерного в самом слабом смысле, а также введена большая трансфинитная размерность Ind.

До сих пор в теории размерности бесконечномерных пространств уделяли имание лишь классу $\mathfrak{i}$ пространств *, имеющих малую трансфинитную змерность ** ind. В классе $\mathfrak{i}$ нет универсального пространства ***, -первых, потому, что для всякого пространства $R$, имеющего размерсть ind, всегда $\operatorname{ind} R < \omega_1$ [см. ([1]), стр. 76], и, во-вторых, потому, что я любого числа $\alpha < \omega_1$ существует компакт размерности **** $\alpha$.

Для пространств, обладающих полной метрикой, наличие трансфинит- размерности эквивалентно возможности распадения в сумму счетного сла конечномерных (или, что то же самое, нульмерных) множеств [см. ([1])]. этому в классе $\mathfrak{S}$ всех пространств, распадающихся в сумму счетного сла нульмерных множеств, нет компактного универсального простран- даже для компактных пространств. Для некомпактных пространств асса $\mathfrak{S}$ универсального компактного пространства нет еще и по другой ичине: Е. Скляренко недавно показал, что у множества $\mathcal{H}$, состоящего всех тех точек $x$ гильбертова куба $Q^\infty$, которые имеют лишь конечное сло координат, отличных от нуля, всякое бикомпактное расширение сконечномерно в самом сильном смысле [см. ([2]), стр. 204], несмотря то, что $\mathcal{H}$ распадается в сумму счетного числа кубов $Q^n$ *****.

---

* Мы будем рассматривать лишь пространства со счетной базой.

** Малую трансфинитную размерность определяют точно так же, как малую дуктивную размерность Урысона [см. ([1]), стр. 75].

*** Пространство $R$ универсально для класса $\mathfrak{C}$, если в $R$ можно топологи-ки вложить любое пространство класса $\mathfrak{C}$.

**** По-видимому, последнее доказано Гуревичем. Впрочем это следует из аналичных теорем 5 и 4 этой работы, относящихся к *большой* трансфинитной размерти Ind.

***** Замечание при корректуре. После того как моя работа была на в печать, мне стала известна статья Нагата ([11]), в которой, в частности, доказано, множество всех точек гильбертова куба, имеющих лишь конечное число рациоьных координат, универсально в классе $\mathfrak{S}$.

В настоящей работе в связи с этим рассматриваются класс $\mathfrak{f}$ пространств, распадающихся в сумму счетного числа конечномерных *замкнутых* множеств, и класс $\mathfrak{J}$ пространств, имеющих *большую* трансфинитную размерность Ind *. В классе $\mathfrak{f}$ существует универсальное пространство: это — пространство $\mathscr{H}$ (теорема 1). Компактного универсального пространства в классе $\mathfrak{f}$ нет в силу теорем 4 и 5. В § 2 построен компакт $F$ класса $\mathfrak{S}$ и, следовательно, класса $\mathfrak{J}$ (теорема 4), не принадлежащего классу $\mathfrak{f}$ (теорема 3).

## § 1

ТЕОРЕМА 1. *Пространство $R$ топологически вкладывается в пространство $\mathscr{H}$ тогда и только тогда, когда оно является суммой счетного числа замкнутых конечномерных множеств.*

Предварительно назовем $K$-пространством всякое пространство, являющееся суммой счетного числа конечномерных компактов. Всякое $K$-пространство можно представить в виде суммы возрастающих компактов возрастающих размерностей, если только исключить тривиальный для нас случай конечномерных пространств. Нам нужна следующая вспомогательная

ТЕОРЕМА 2. *Всякое $K$-пространство можно топологически вложить в пространство $\mathscr{H}$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится одно определение и две следующие ниже леммы.

Скажем, что непрерывное отображение $f$ метрического пространства $R$ в гильбертово или эвклидово пространство $E$ *аппроксимирует* замкнутое множество $A$ из $R$, если для любой $\varepsilon$-окрестности $U_\varepsilon A$ можно найти такую окрестность $U_\delta o$ нулевой точки $o$ пространства $E$, что

$$f^{-1}(U_\delta o) \subseteq U_\varepsilon A.$$

ЛЕММА 1. *Всякое непрерывное отображение $f$ замкнутого множества $B$ метрического пространства $R$ в $n$-мерный куб $Q^n$, $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2^i}$, аппроксимирующее замкнутое множество $A$, можно продолжить в непрерывное отображение $F$ всего пространства $R$ в куб $Q^n$, также аппроксимирующее множество $A$.*

Доказательство леммы. Пусть в наших условиях

$$U_i A = \mathscr{E}\left\{x \in R : \rho(x, A) < \frac{1}{i}\right\}$$

и

$$|f(x)| = \rho(o, f(x)).$$

---

* Большую трансфинитную размерность Ind мы определяем индукцией по замкнутым множествам так, как это делает Э. Чех (3). Между классами $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{J}$ имеют место следующие соотношения: $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{S} \supset \mathfrak{i} \supset \mathfrak{J}$ в общем случае и $\mathfrak{f}_c \subset \mathfrak{S}_c = \mathfrak{i}_c = \mathfrak{J}$ — в компактном случае. Других включений и равенств нет, так как $\mathscr{H} \in \mathfrak{f} \setminus \mathfrak{i}$, $F \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{f}$ и $G \in \mathfrak{i} \setminus \mathfrak{J}$, где $F$ — наш пример, а $G$ — дискретная сумма кубов $Q^n$.

В силу этих условий, имеем:

$$\delta_i = \operatorname*{Inf}_{x \in B - U_i A} |f(x)| > 0$$

ля любого $i = 1, 2, 3, \ldots$ Можно считать, что $\delta_i < \frac{1}{2^i}$. Значит, $f$ отоб-жает дополнение $B \setminus U_i A$ во множество $Q^n \setminus U_{\delta_i} o$, гомеоморфное кубу . В силу известной теоремы Урысона о продолжении непрерывных ункций, это отображение $f$, рассматриваемое лишь на $B \setminus U_i A$, можно одолжить на множество $R \setminus U_i A$ так, чтобы дополнение $R \setminus U_i A$ снова ображалось в $Q^n \setminus U_{\delta_i} o$. Определенное таким образом на множестве $\setminus U_i A$ отображение также будет непрерывным отображением в куб $Q^n$ его еще раз можно продолжить в непрерывное отображение $F_i$ всего остранства $R$ в $Q^n$.

Рассмотрим отображение $F$, ставящее в соответствие каждой точке $\in R$ конец $M$ вектора

$$\overrightarrow{oM} = \sum_i \frac{\overrightarrow{oF_i}(x)}{2^i}.$$

то — непрерывное отображение пространства $R$ в параллелепипед $Q^n$. а множестве $B$ оно совпадает с отображением $f$, так как на $B$ каждое тображение $F_i$ совпадает с $f$. Так так углы между векторами $\overrightarrow{oF_i}(x)$ не льше чем $\frac{\pi}{2}$, то

$$|F(x)| \geqslant \frac{|F_i(x)|}{2^i}$$

ля любого $i$. Поэтому

$$|F(x)| \geqslant \frac{\delta_i}{2^i}$$

не множества $O_i A$. Значит отображение $F$ аппроксимирует множество что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *Пусть в метрическом пространстве $R$ даны замкнутые ножества $A$ и $B$, $A \subseteq B$, $\dim B \leqslant k$; тогда существует непрерывное ображение $F$ пространства $R$ в куб $Q^{n(k)}$, где $n(k) = 2k + 2$, аппро-имирующее множество $A$ и гомеоморфное на множестве $B \setminus A$.*

Доказательство леммы. В силу леммы 1, достаточно построить тересующее нас отображение лишь на множестве $B$. Для этого рас-отрим разбиение множества $B$, состоящее из множества $A$ и из все-зможных точек множества $B$, не принадлежащих $A$. Определим про-ранство $B(A)$ этого разбиения с помощью базы, составленной из эле-нтов какой-нибудь счетной базы открытого в $B$ множества $B \setminus A$ и из рестностей

$$U_i A = \mathscr{E}\left\{x \in B \setminus A,\ \rho(x, A) < \frac{1}{i}\right\} \cup \{A\}$$

чки $A$. Естественное отображение $g$ пространства $B$ в пространство $B(A)$ при ком определении топологии непрерывно и гомеоморфно на $B \setminus A$. Про-

странство $B(A)$ регулярно и имеет счетную базу. Множество $B(A)\setminus A$ гомеоморфно множеству $B\setminus A$. Значит,

$$\dim(B(A)\setminus A)\leqslant k,$$

а потому и

$$\dim B(A)\leqslant k.$$

По известной теореме Небелинга — Гуревича [см. ([1]), стр. 89], существует гомеоморфное отображение $\varphi$ пространства $R$ в куб $Q^{2k+2}$ такое, что $\varphi(A)=o$. Отображение $\varphi g$ — искомое. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть дано $K$-пространство $R$:

$$R=\bigcup\Phi_k;\quad k=0,1,2,\ldots,\quad \Phi_0=\Lambda,\quad \Phi_k\subseteq\Phi_{k+1},$$
$$\dim\Phi_k\leqslant\dim\Phi_{k+1}<\infty.$$

По лемме 2, для каждого $k$ существует непрерывное отображение $F_k$ пространства $R$ в куб $Q^{n(k)}$, гомеоморфное на $\Phi_k\setminus\Phi_{k-1}$ и аппроксимирующее множество $\Phi_{k-1}$ $(k=1, 2.\ldots)$. Пусть $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_N, \ldots$ — координатные функции отображений $F_k$, записанные так, что вначале стоят координатные функции отображения $F_1$, потом — отображения $F_2$ и т. д. Пусть

$$f_N'=\frac{f_N}{2^N}.$$

Осуществляемые функциями $f_N'$ отображения в кубы $Q^{n(k)}$, соответствующие отображениям $F_k$, обозначим через $F_k'$. Каждое отображение $F_k'$ также гомеоморфно на $\Phi_k\setminus\Phi_{k-1}$ и аппроксимирует $\Phi_{k-1}$. Функции $f_N'$ дают нам непрерывное отображение

$$\varphi(x)=\{f_N'(x)\}$$

пространства $R$ в гильбертов параллелепипед $Q^\infty$ и даже в $\mathcal{H}$, так как каждая точка $x\in R$ принадлежит некоторому $\Phi_k$, на котором все функции $f_N'$, начиная с некоторой, равны нулю. Отображение $\varphi$ взаимно однозначно. В самом деле, если (для некоторого $k$) $x\in R\setminus\Phi_k$, а $y\in\Phi_k$, то каждая из координатных функций отображения $F_{k+1}'$, аппроксимирующего множество $\Phi_k$, равна нулю в $y$ и положительна в $x$. Если же $x\in\Phi_k\setminus\Phi_{k-1}$ и $y\in\Phi_k\setminus\Phi_{k-1}$, то среди координатных функций отображения $F_k'$, гомеоморфного на $\Phi_k\setminus\Phi_{k-1}$, найдется одна, принимающая разные значения в точках $x$ и $y$. Остается доказать, что отображение $\varphi$ открыто. Для этого достаточно показать, что для любой точки $x\in\Phi_k\setminus\Phi_{k-1}$ и любой ее окрестности $Ox$ существует такое число $\varepsilon>0$, что если

$$|f_i'(x)-f_i'(y)|<\varepsilon$$

для всех координатных функций $f_i$ отображений $F_k'$ и $F_{k+1}'$, то $y\in Ox$.

Допустим, что это не так. Тогда найдется такая окрестность $Ox$ точки $x$, $x\in\Phi_k\setminus\Phi_{k-1}$, что для любого числа $\frac{1}{m}$, $m=1, 2, 3, \ldots$, можно

брать точку $x_m$, удовлетворяющую условиям

$$x_m \in R \setminus Ox$$

$$|f_i'(x) - f_i'(x_m)| < \frac{1}{m} \tag{1}$$

я всех координатных функций отображений $F_k'$ и $F_{k+1}'$.

Так как $F_{k+1}'(\Phi_k) = o$ и $x \in \Phi_k$, то для каждой координатной функ-и $f_i'$ отображений $F_{k+1}'$ имеем:

$$|f_i'(x_m)| < \frac{1}{m}.$$

ачит,

$$|F_{k+1}'(x_m)| < \frac{\sqrt{n(k)}}{m^2} \quad \text{и} \quad |F_{k+1}'(x_m)| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0.$$

лее того, так как $F_{k+1}'$ аппроксимирует множество $\Phi_k$, то в любой крестности $U_\varepsilon \Phi_k$ найдется по крайней мере одна точка $x_m$. Следова-ьно, в $\Phi_k$ имеются точки прикосновения последовательности $\{x_m\}$ *. сть теперь $y$ — одна из этих точек прикосновения; $y \in \Phi_k$. Так к $x_m \notin Ox$ ни для какого $m$, то $y \notin Ox$. Если $y \in \Phi_{k-1}$, то одна из коор-атных функций отображения $F_k$ равна нулю в $y$ и положительна в $x$, а и $y \in \Phi_k \setminus \Phi_{k-1}$, то снова одна из координатных функций отображе- $F_k$ принимает разные значения в точках $x$ и $y$, так как отображение гомеоморфно на $\Phi_k \setminus \Phi_{k-1}$. Но это противоречит неравенствам (1). Тео-а 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. По одной теореме Гуревича [см. § 5], всякое пространство $R$ со счетной базой с любой фиксированной ледовательностью замкнутых множеств $\Phi_n$ можно топологически вло-ть в компакт $\widetilde{R}$ так, что

$$\dim \widetilde{R}[\Phi_n] = \dim \Phi_n.$$

Значит, всякое пространство класса $\mathfrak{f}$ можно топологически вложить К-пространство, а вместе с ним, по теореме 2, и в $\mathscr{H}$.

Теорема 1 доказана.

## § 2

Построим компакт $F$ класса $\mathfrak{S}$, не принадлежащий классу $\mathfrak{f}$. Для это-строим сначала пространство $\mathscr{E}$, обладающее следующими свойствами:

а) $\mathscr{E} \in \mathfrak{f}$;

б) *каждое открытое множество из $\mathscr{E}$ бесконечномерно,*

в) *у каждой точки есть сколь угодно малые окрестности с компакт-конечномерной границей.*

Для построения пространства $\mathscr{E}$ потребуется следующее разбиение.

* Это единственное место в доказательстве, где требуется компактность множеств действительно, в противном случае у каждой точки $y$ компакта $\Phi_k$ нашлась окрестность $Oy$, не содержащая точек $x_m$. Тогда окрестность $U\Phi_k = \bigcup Oy$ также содержала бы точек $x_m$. Но $\rho(R \setminus U\Phi_k, \Phi_k) > 0$, что противоречит только что азанному утверждению.

Троичное разбиение $\gamma^n$ куба $Q^n$. Рассмотрим в эвклидовом пространстве $E^n$ единичный куб $Q^n$. Разобьем его $2^n$ гиперплоскостями, параллельными граням куба $Q^n$, на $3^n$ равных куба первого ранга с длиной ребра $\frac{1}{3}$. Отметим среди них центральный куб $C_1^n$. С каждым кубом первого ранга проделаем то же самое и получим $3^{2n}$ кубов второго ранга с длиной ребра $\frac{1}{3^2}$. Все кубы второго ранга, лежащие внутри центрального куба первого ранга, назовем ненужными. Среди остальных — нужных — кубов второго ранга назовем центральными все те кубы $C_\alpha^n$, которые являются центральными для (нецентральных) кубов первого ранга, а остальные кубы назовем нецентральными. Проделав ту же операцию с кубами второго ранга, получим ненужные, центральные и нецентральные кубы третьего ранга. Продолжая это построение до бесконечности, получим искомое разбиение куба $Q^n$ на счетное число центральных кубов $C_\alpha^n$ и на остаток $\Gamma$ типа $G_\delta$.

Разбиение $\gamma^1$ — это известное разбиение отрезка $[0; 1]$, которое получается при построении канторова множества: центральными отрезками являются замыкания выкидываемых интервалов, а множество $\Gamma$ состоит из всех троично-иррациональных точек, не содержащихся в центральных отрезках. Разбиение $\gamma^2$ — известное разбиение квадрата, которое получается при построении так называемого ковра Серпинского [см. (5), стр. 336].

Условимся в дальнейшем под гиперплоскостями в эвклидовом пространстве $E^n$ понимать лишь «троично-рациональные» гиперплоскости $P^{n-1}$, параллельные граням куба $Q^n$, т. е. гиперплоскости вида $x_i = \frac{p}{3^k}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, а $p = 0, 1, \ldots, 3^k$. Легко проверить, что верна

ЛЕММА 3. *Каждая гиперплоскость* $P^{n-1}\left\{x_1 = \frac{p}{3^k}\right\}$ *соприкасается по $(n-1)$-мерным граням с некоторыми центральными кубами ранга $k$, пересекается с некоторыми центральными кубами меньших рангов и, наоборот, не пересекается ни с одним центральным кубом ранга, большего чем $k$.*

Следствия. А) *Каждая гиперплоскость $P^{n-1}$ пересекает лишь конечное число центральных кубов*;

Б) *сумма центральных кубов $C_\alpha^n$ куба $Q^n$ плотна в $Q^n$.*

Построение пространства $\mathscr{E}$. Возьмем в гильбертовом кубе $Q^\infty$, $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{3^i}$, отрезок

$$Q^1 = \mathscr{E}\{x \in Q^\infty : x_i = 0 \text{ при } i > 1\}$$

и к каждому его центральному отрезку $C_\alpha^1$ приклеим (одним ребром) по квадрату $Q_\alpha^2$ так, чтобы все они лежали в квадрате

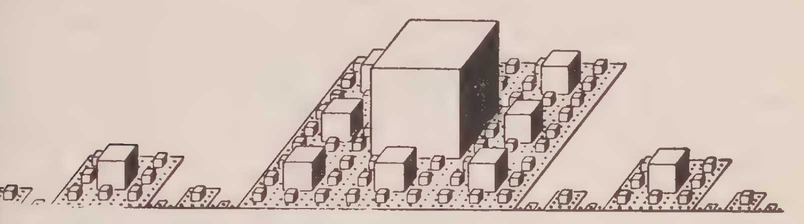
$$Q^2 = \mathscr{E}\{x \in Q^\infty : x_i = 0 \quad \text{при} \quad i > 2\}.$$

К каждому центральному квадрату $C_\beta^2$ одного из квадратов $Q_\alpha^2$ прикле-

(одной гранью) по кубу $Q^3_\beta$ так, чтобы кубы $Q^3_\beta$ лежали в кубе

$$Q^3 = \mathscr{E}\{x \in Q^\infty : x_i = 0 \quad \text{при} \quad i > 3\}$$

м. рис.). Продолжая это построение до бесконечности, получим искомое остранство $\mathscr{E}$.



Свойства пространства $\mathscr{E}$.

а) $\mathscr{E} \in \mathfrak{f}$ (так как $\mathscr{E}$ является суммой счетного числа кубов).

В) *Если открытое множество $G$ в пространстве $\mathscr{E}$ пересекается с мерным кубом $Q^n_\alpha$, то оно пересекается и с некоторым $(n+1)$-мерным бом $Q^{n+1}_\beta$.*

В самом деле, тогда, в силу Б), множество $G$ пересекается с некоторым нтральным кубом $C^n_\beta$ куба $Q^n_\alpha$, а поэтому и с приклеенным к нему $+ 1)$-мерным кубом $Q^{n+1}_\beta$. Отсюда имеем:

б) *каждое открытое множество пространства $\mathscr{E}$ бесконечномерно* (так к каждое такое множество, пересекаясь с некоторым кубом $Q^n_\alpha$, пересеется и с кубами сколь угодно больших размерностей по открытым множествам).

в) *У каждой точки $x \in \mathscr{E}$ есть сколь угодно малые окрестности с комктными конечномерными границами.*

Для доказательства назовем гиперпространством всякое множество гильбертова куба $Q^\infty$ вида

$$P^\infty = \mathscr{E}\left\{x \in Q^\infty : x_i = \frac{p}{3^k}\right\},$$

$i$, $k$ и $p$ фиксированы. Легко видеть, что имеют место следующие свойва:

г) *Если в $E^n$ гиперплоскость $P^{n-1}\left\{x_n = \frac{p}{3^k}\right\}$ пересекается в кубе $Q^n_\alpha$ с нтральным кубом $C^n_\beta$ ранга $l$, $l \leqslant k$, то гиперплоскость $P^n\left\{x_n = \frac{p}{3^k}\right\}$ остранства $E^{n+1}$ пересекается с кубом $Q^n_\beta$, приклеенным к кубу $C^n_\beta$ по нтральным кубам рангов $\leqslant l-1 \leqslant k-1$.*

д) *Гиперплоскость $P^{n+k-1}\left\{x_n = \frac{p}{3^k}\right\}$ пространства $E^{n+k}$ не пересекает одного центрального куба $C^{n+k}_\lambda$* (так как это должны быть самое болье кубы ранга 0).

е) *Гиперпространство $P^\infty\left\{x_n = \frac{p}{3^k}\right\}$ не пересекает ни одного куба $Q^r_\lambda$ мерности $r \geqslant n+k$.*

В самом деле, полагая свойство д) доказанным, мы видим, что соотествующая гиперплоскость $P^{n-1}\left\{x_n = \frac{p}{3^k}\right\}$ пространства $E^n$ пересекается

с кубами $Q^n_\alpha$, а в каждом из них пересекается самое большее с центральными кубами ранга $k$. Тогда в $E^{n+k}$ гиперплоскость $P^{n+k-1}\left\{x_n = \frac{p}{3^k}\right\}$ с центральными кубами $C^{n+k}_\lambda$ уже не пересекается. Значит, она может лишь касаться кубов $Q^{n+k}_\lambda$ по $(n+k-1)$-мерным граням, а с кубами $Q^N_\tau$ больших размерностей она не пересечется, так как все они приклеены к центральным кубам $C^{n+k}_\nu$. Этим свойство e) доказано, а вместе с ним и свойство в), потому что сколь угодно малую окрестность точки $x \in \mathscr{E}$ можно получить, проведя достаточно близко от нее конечное число гиперпространств

$$x_i = \frac{p_i}{3^{k_i}}, \qquad y = \frac{q_i}{3^{k_i}},$$

каждое из которых, по доказанному, пересекается с пространством $\mathscr{E}$ лишь по конечномерным множествам. Нетрудно показать, что каждое из них — просто *сумма конечного числа кубов.*

ТЕОРЕМА 3. *Существует компактное расширение $\mathscr{F}$ пространства $\mathscr{E}$, принадлежащее классу $\mathfrak{S}$, но не принадлежащее классу $\mathfrak{f}$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{ind}\mathscr{E} = \omega_0$, то, по одной теореме Гуревича [см. (6)], существует компактное расширение $\gamma\mathscr{E}$ класса $\mathfrak{S}$, или иначе: так как $\mathscr{E}$ семибикомпактно *, то существует компактное расширение $\alpha\mathscr{E}$ того же веса с нульмерным наростом $\alpha\mathscr{E}\setminus\mathscr{E}$; поэтому $\alpha\mathscr{E} \in \mathfrak{S}$. Однако никакое расширение $\eta\mathscr{E}$ не принадлежит классу $\mathfrak{f}$, потому что никакое конечномерное замкнутое подмножество $A$, $A \subseteq \eta\mathscr{E}$, нигде не плотно в $\eta\mathscr{E}$, иначе нашлась бы в $\eta\mathscr{E}$, а значит, и в $\mathscr{E}$, конечномерная окрестность. Поэтому дополнение ко всякой счетной сумме замкнутых конечномерных множеств плотно в $\eta\mathscr{E}$ **, что и требовалось доказать.

## § 3

Определение размерности Ind. *Если для любого замкнутого множества $A$ и любой его окрестности $OA$ пространства $R$ и для трансфинитного числа $\beta$ существует такая окрестность $UA$, что $UA \subseteq OA$ *** и $\operatorname{Ind}|UA| < \alpha$ **** для некоторого числа $\alpha$, меньшего чем $\beta$ (в предположении, что для всех чисел $\alpha$, меньших $\beta$, неравенство $\operatorname{Ind} R' < \alpha$ уже определено, начиная с $\alpha = 0$), то $\operatorname{Ind} R < \beta$; $\operatorname{Ind} R = \beta$, если $\operatorname{Ind} R \nless \beta$ и $\operatorname{Ind} R < \beta + 1$.*

*Число $\operatorname{Ind} R$, если для данного пространства $R$ его можно определить, назовем большой трансфинитной размерностью пространства $R$.*

Замечание. Множество окрестностей $U$ пространства $R$ называют *большой базой*, если для любого замкнутого множества $A$ и любой его окрестности $OA$ найдется такое $U$, что $A \subseteq U \subseteq OA$. Наименьшую из мощностей больших баз пространства $R$ назовем *большим весом* *****. Легко по-

* Это значит, что у каждой точки имеются сколь угодно малые окрестности с компактной границей [см. (7)].

** На это обстоятельство обратил мое внимание Б. Левшенко.

*** Это требование $UA \subseteq OA$ эквивалентно обычному требованию $[UA] \subseteq OA$ в силу нормальности.

**** Через $|U|$ мы обозначаем границу: $|U| = [U] \setminus U$.

***** Следуя Н. А. Шанину [см. (8)], я ранее большие базы и вес называл *правильными*.

[док]азать, что всегда

$$\pi(R) \leqslant 2^{\tau(R)} \leqslant 2^{\aleph_0} = \aleph_\varkappa,$$

[а] для компактов

$$\pi(R) = \tau(R) \leqslant \aleph_0,$$

[г]де $\pi(R)$ — большой вес, а $\tau(R)$ — вес пространства $R$ [см. ([8]), стр. 214]. [О]тсюда легко заключить, что *если размерность* $\operatorname{Ind} R$ *есть, то всегда* [In]d $R < \omega_{\varkappa+1}$, *а для компактов* $\operatorname{Ind} R < \omega_1$.

ТЕОРЕМА 4. *Если пространство $R$ имеет трансфинитную размер[н]ость* Ind, *то оно имеет и трансфинитную размерность* ind; *если компакт [R] является суммой счетного числа нульмерных множеств, то он имеет [т]рансфинитную размерность* Ind.

Замечание. *Никакое пространство $R$, являющееся суммой счетного [чи]сла попарно не пересекающихся открыто-замкнутых множеств $R_n$ раз[м]ерности* $\operatorname{Ind} R = n$, *не имеет размерности* Ind, *хотя* $\operatorname{ind} R = \omega_0$.

Действительно, допустив, что некоторые из таких пространств имеют [р]азмерность Ind, и взяв из них пространство наименьшей размерности Ind, [л]егко прийти к противоречию.

Доказательство теоремы. Первое утверждение легко доказы[в]ается по индукции. Для доказательства второго нужна

ЛЕММА 4. *Если $R = M \cup N$, где $\operatorname{Ind} N = 0$ и $M \cap N = \Lambda$*, то для лю[б]ого замкнутого множества $A$ и любой его окрестности $OA$ существует [о]крестность $UA$ такая, что $UA \subseteq OA$ и $|UA| \subseteq M$.*

Доказательство леммы. Возьмем окрестность $O_1A$ такую, что

$$A_1 = [O_1A] \subseteq OA,$$

[и] открыто-замкнутое в $N$ множество $H'$ такое, что

$$N \cap A_1 \subseteq H' \subseteq OA.$$

Тогда найдутся открытые в $R$ множества $H_1$ и $H_2$ такие, что

$$H_1 \cap H_2 = \Lambda, \quad N \cap H_1 = H', \quad \text{а } N \cap H_2 = N \setminus H' \quad **.$$

[М]ожно считать, что $H_2 \cap [O_1A] = \Lambda$ и $O_1A \subseteq H_1 \subseteq OA$ (в противном случае [м]ожно перейти к множествам $H_2' = H_2 \setminus [O_1A]$ и $H_1' = (H_1 \cup O_1A) \cap OA$). [$H$]$_1$ — искомая окрестность $UA$, так как $A \subseteq H_1$, $[H_1] \subseteq R \setminus H_2$ и, значит,

$$([H_1] \setminus H_1) \cap N \subseteq N \setminus H_2 \setminus H_1 = \Lambda.$$

[Л]емма доказана.

Доказательство второго утверждения теоремы 4. До[п]устив, что существует компакт $R_1$, не имеющий размерности Ind, но та[к]ой, что $R_1 = \bigcup_i N_i$, где $\operatorname{Ind} N_i = 0$, найдем в нем замкнутое множество [$A$]$_1$ и его окрестность $OA_1$ такие, что если $VA_1 \subseteq OA_1$, то граница $|VA_1|$ не [и]меет размерности Ind. В силу леммы, существует такая окрестность $UA_1$, [чт]о $UA_1 \subseteq OA_1$ и $|UA_1| \subseteq R_1 \setminus N_1$. В компакте $R_2 = |UA_1|$ существует замк-

* $\Lambda$ — пустое множество.

** В силу наследственной нормальности, для любых двух множеств $N_1$ и $N_2$ та[ки]х, что $[N_1] \cap N_2 = [N_2] \cap N_1 = \Lambda$, имеются непересекающиеся окрестности $H_1$ и $H_2$ [(о]тделимость по Хаусдорфу).

нутое множество $A_2$ и его окрестность (в $R_2$) $OA_2$ такие, что если $VA_2 \subseteq \subseteq OA_2$, то граница $|VA_2|$ не имеет размерности Ind. В силу леммы, есть окрестность $UA_2$ такая, что $UA_2 \subseteq OA$ и $R_3 = |UA_2| \subseteq R_2 \setminus N_2$. Продолжая это построение до бесконечности, придем к непустым компактам $R_n$ таким, что $R_{n+1} \subseteq R_n \setminus N_n$, чего не может быть (ведь тогда $\bigcap_n R_n = \Lambda$). Теорема доказана.

Следствие. *Между классами* $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{i}$ *и* $\mathfrak{J}$ *имеют место следующие соотношения:* $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{S} \supset \mathfrak{i} \supset \mathfrak{J}$ *в общем случае и* $\mathfrak{f}_c \subset \mathfrak{S}_c = \mathfrak{i}_c = \mathfrak{J}_c$ — *в компактном случае.*

ТЕОРЕМА 5. *Для любого трансфинитного числа* $\beta$, $\beta < \omega_1$, *в классе* $\mathfrak{S}$ *существует компакт* $Q^\beta$ *размерности* $\operatorname{Ind} Q^\beta = \beta$.

Следствие. *В классе* $\mathfrak{S}$ *не существует компактного универсального пространства для пространств класса* $\mathfrak{f}$, *а также и для классов* $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{J}$ *и* $\mathfrak{S}_c$.

Доказательство теоремы 5 заключается в следующем построении и дальнейших четырех леммах.

Определение 2. *Если* $n < \omega_0$, *то компакт* $Q^n$ — *n-мерный куб (при* $n = 0$ — *точка). Если* $\beta$, $\beta < \omega_1$, — *предельное число, то компакт* $Q^\beta$ — *сумма всех попарно не пересекающихся компактов* $Q^\alpha$, $\alpha < \beta$, *и точки* $\xi_\beta$, *в которой каждый компакт* $Q^\alpha$ *и любое открытое в* $Q^\alpha$ *множество открыты в* $Q^\beta$, *а окрестностями точки* $\xi_\beta$ *являются дополнения до конечного числа компактов* $Q^\alpha$ **. *Если* $\beta$, $\beta < \omega_1$, — *изолированное число, то компакт* $Q^\beta$ — *тихоновское произведение компакта* $Q^{\beta-1}$ *на отрезок* $Q^1$.

Замечание. Каждое порядковое число $\beta$ можно единственным образом представить в виде суммы $\alpha(\beta) + k(\beta)$, где $\alpha(\beta)$ — наибольшее из всех предельных чисел, не превосходящих числа $\beta$, а $k(\beta) = \beta - \alpha(\beta)$. Очевидно, что

$$Q^\beta = Q^{\alpha(\beta)} \times Q^{k(\beta)}.$$

Для доказательства нужного нам равенства $\operatorname{Ind} Q^\beta = \beta$ введем следующие классы компактов $K^\beta$.

Определение 3. *Если* $n < \omega_0$, *то класс* $\mathfrak{K}_n$ *состоит из всех n-мерных компактов* $K^n$. *Если* $\beta$, $\beta < \omega_1$, — *предельное число, то класс* $\mathfrak{K}_\beta$ *состоит прежде всего из компактов* $P^\beta$ *вида* $\xi \cup \bigcup K^\alpha$, *где* $K^\alpha$ — *компакты, взятые по одному из каждого класса* $\mathfrak{K}_\alpha$, $\alpha < \beta$, *кроме, быть может, конечного их числа, и еще из предельной точки* $\xi$ *с топологией такой же, какая была введена в определении 2 для компактов* $Q^\beta$; *кроме того, класс* $\mathfrak{K}_\beta$ *состоит еще из всевозможных произведений компактов* $P^\beta$ *на нульмерные компакты* $K^0$. *Если* $\beta$, $\beta < \omega_1$, — *изолированное число, то класс* $\mathfrak{K}_\beta$ *состоит из произведений компактов* $P^\beta$ *на* $k(\beta)$*-мерные компакты:*

$$K^\beta = P^{\alpha(\beta)} \times K^{k(\beta)}.$$

ЛЕММА 5. *Если компакт* $\Phi$ *есть сумма конечного числа попарно не пересекающихся** компактов* $\Phi_i$ *таких, что* $\operatorname{Ind} \Phi_i < \alpha$, *то и* $\operatorname{Ind} \Phi < \alpha$.

Доказательство леммы легко проходит по индукции.

---

* $Q^\beta$ есть александровская компактификация локально-бикомпактной суммы $\bigcup Q^\alpha$.

** По-видимому (для конечного числа слагаемых), лемма верна и без этого предположения; для размерности ind это не так [см. ([10]), стр. 188].

ЛЕММА 6. *Для любого компакта* $K^\beta$ *всегда* $\operatorname{Ind} K^\beta \leqslant \beta$.

Доказательство. Пусть для всех чисел, меньших бесконечного числа $\beta = \alpha + k$, где $\alpha = \alpha(\beta)$, а $k = k(\beta)$, лемма доказана. Пусть

$$K^\beta = P^\alpha \times K^k = (\xi \cup \cup K^\lambda) \times K^k = (\xi \times K^k) \cup \cup (K^\lambda \times K^k)$$

и пусть $A$ — замкнутое множество в $K^\beta$, а $OA$ — его окрестность. Найдем нужную нам окрестность $UA$ множества $A$ в самом трудном предположении, что $A \cap (\xi \times K^k) \neq \Lambda$.

Пусть $A_\xi = A \cap (\xi \times K^k)$, а $A'$ — такое замкнутое в $K^k$ множество, что $A_\xi = \xi \times A'$. Так как множество $A'$ компактно, то существуют окрестность $O\xi$ точки $\xi$ и окрестность $OA'$ множества $A'$ такие, что $[O\xi \times OA'] \subseteq OA$, $|O\xi| = \Lambda$, а $\operatorname{Ind} |OA'| < k$. Уменьшая окрестность $O\xi$, можно добиться того, что дополнение $A \setminus [O\xi \times OA']$ будет целиком лежать в $K^\beta \setminus (O\xi \times K^k)$, т. е. в сумме конечного числа компактов $K^{\lambda_i} \times K^k$. Так как каждый из них и открыт и замкнут в $K^\beta$, то существуют окрестности $UA_{\lambda_i}$ множеств

$$A_{\lambda_i} = A \cap (K^{\lambda_i} \times K^k)$$

такие, что $[UA_{\lambda_i}] \subseteq OA \cap (K^{\lambda_i} \times K^k)$ и $\operatorname{Ind} |UA_{\lambda_i}| < \lambda_i + k$.

Тогда окрестность $UA = (O\xi \times OA') \cup \bigcup_i UA_{\lambda_i}$ — искомая, так как

$$[UA] \subseteq OA, \quad |O\xi \times OA'| \in \mathfrak{K}_{\alpha+k-1}, \quad \operatorname{Ind} |O\xi \times OA'| < \alpha + k$$

$\operatorname{Ind} |UA_{\lambda_i}| < \alpha + k$. Значит, по лемме 5, и $\operatorname{Ind} |UA| < \alpha + k$, что и требовалось доказать.

*Перегородкой* между замкнутыми непересекающимися множествами $A$ и $B$ пространства $R$ назовем такое замкнутое множество $C$, что $R \setminus C = G \cup H$, где $G$ и $H$ — непересекающиеся открытые множества такие, что $A \subseteq G$ и $B \subseteq H$.

В каждом кубе $Q^n$ обозначим через $A_i^{(n-1)}$ и $B_i^{(n-1)}$ пары противоположных $(n-1)$-мерных граней $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

ЛЕММА 7. *Для любого трансфинитного числа* $\beta$, $\beta < \omega_1$, *и любого натурального числа* $n$ *в компакте* $Q^{\beta+n} = Q^\beta \times Q^n$ *для пар* $Q^\beta \times A_i^{(n-1)}$, $Q^\beta \times B_i^{(n-1)}$ *нельзя найти перегородок* $C_i$ *с пересечением* $\bigcap_i C_i$ *размерности* $\operatorname{Ind} \bigcap_i C_i < \beta$.

Доказательство проведем индукцией по числу $\beta + n$. Для натуральных чисел $k + n$ это известно (впрочем, доказательство можно извлечь из последующего). Пусть для всех чисел $\alpha$ и $l$ таких, что $\alpha + l < \beta + n$, это верно, но в компакте $Q^{\beta+n} = Q^\beta \times Q^n$ для пар $Q^\beta \times A_i^{(n-1)}$, $Q^\beta \times B_i^{(n-1)}$ существуют перегородки $C_i$ с пересечением размерности $< \beta$. Представим тогда компакт $Q^{\beta+n}$ в виде произведения: $Q^{\beta+n} = Q^\alpha \times Q^k \times Q^n$, где $\alpha = \alpha(\beta)$, $k = k(\beta)$. Имеем:

$$Q^\beta \times A_i^{(n-1)} = Q^\alpha \times A_i^{(n+k-1)}, \quad Q^\beta \times B_i^{(n-1)} = Q^\alpha \times B_i^{(n+k-1)} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $A_i^{(n+k-1)} = Q^k \times A_i^{(n-1)}$, а $B_i^{(k+n-1)} = Q^k \times B_i^{(n-1)}$. Пусть

$$A_i^{(n+k-1)}, \ B_i^{(n+k-1)} \quad (i = n+1, \ldots, n+k)$$

— остальные $(n+k-1)$-мерные грани куба $Q^{k+n}$.

Тогда, так как $\operatorname{Ind}(\bigcap_i C_i) < \beta$, в пересечении $\bigcap_i C_i$ существует перегородка $C'_{n+1}$ между множествами $Q^\alpha \times A_{n+1}^{(n+k-1)}$ и $Q^\alpha \times B_{n+1}^{(n+k-1)}$ размерности $< \alpha_1 < \beta$. В $Q^{\beta+n}$ существует перегородка $C_{n+1}$ между множествами $Q^\alpha \times A_{n+1}^{(n+k-1)}$ и $Q^\alpha \times B_{n+1}^{(n+k-1)}$ такая, что $C_{n+1} \cap \bigcap_{i\leqslant n} C_i = C'_{n+1}$. Продолжая этот процесс, мы придем к перегородкам $C_i$, $i = 1, \ldots, n+k$, между $Q^\alpha \times A_i^{(n+k-1)}$ и $Q^\alpha \times B_i^{(n+k-1)}$ для всех пар с пересечением $\bigcap_{i\leqslant n+k} C_i$ размерности $< \alpha_k < \alpha_{k-1} < \ldots < \alpha_1 < \beta$. Так как $\beta = \alpha + k$, где $\alpha$ — предельное число, то $\operatorname{Ind} \bigcap_{i\leqslant n+k} C_i < \alpha$. Приведем это последнее утверждение к противоречию. Для этого заметим, что

$$Q^{\beta+n} = Q^\alpha \times Q^{k+n} = (\xi_\alpha \times Q^{k+n}) \cup \bigcup_{\lambda<\alpha} (Q^\lambda \times Q^{k+n}).$$

Так как число $\alpha$ - предельное, то существует такое число $\lambda$, $\lambda < \alpha$, что

$$\operatorname{Ind} \bigcap_{i\leqslant k+n} C_i < \lambda.$$

Тогда в компакте $Q^{\lambda+k+n} = Q^\lambda \times Q^{k+n}$, для которого

$$\lambda + k + n < \alpha + k + n < \beta + n,$$

получим, что между парами $Q^\lambda \times A_i^{(k+n-1)}$, $Q^\lambda \times B_i^{(k+n-1)}$ имеются перегородки $C_i^\lambda = C_i \cap Q^{\lambda+k+n}$ с пересечением $\bigcap_{i\leqslant n+k} C_i^\lambda$ размерности $< \lambda$ (в силу монотонности размерности Ind по замкнутым множествам), вопреки индукционному предположению.

Лемма доказана.

Отсюда почти непосредственно вытекает

ЛЕММА 8. *Для каждого компакта* $Q^\beta$ *всегда* $\operatorname{Ind} Q^\beta \geqslant \beta$.

Поступило
7.VI. 1958 г.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Гуревич В. и Воллмен Г., Теория размерности, ИЛ., 1948.

[2] Скляренко Е., О размерностных свойствах бесконечномерных пространств, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 23 (1959), 197—212.

[3] Čech E., Sur la dimension les espaces parfaitement normaux, Bull. intern. Acad. Sci. Bohème, 1932.

[4] Hurewicz W., Über die Einbettung von separabler Räume in gleichdimensionale kompakte Räume, Monatshefte für Math. und Phys., 37 (1930), 199—208.

[5] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, М.— Л., 1948.

[6] Nöbeling G., Die neuesten Ergebnisse der Dimensionstheorie, Jahresbericht Deutsch. Math. Ver., XLI, Heft 1/4 (1931), 1—17.

[7] Скляренко Е., Бикомпактные расширения семибикомпактных пространств, Доклады Ак. наук СССР, 120, № 6 (1958), 1200—1203.

[8] Смирнов Ю., О весе кольца ограниченных непрерывных функций над нормальным пространством, Матем. сборн., 30 (72): 1 (1952), 213—218.

[9] Шанин Н. А., К теории бикомпактных расширений топологических пространств, Доклады Ак. наук СССР, 38, № 5—6 (1943), 166—169.

[10] Toulmin C. H., Shuffling ordinals and transfinite dimension, Proc. London Math. Soc., 3, № 4 (1954), 177—196.

[11] Nagata Jun-iti. On countable-dimensional spaces, Proc. Japan Acad., 34, № 3 (1958), 146—149.

**ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР**

**Серия математическая**

23 (1959), 197—212

Е. Г. СКЛЯРЕНКО

# О РАЗМЕРНОСТНЫХ СВОЙСТВАХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(*Представлено академиком* **П. С. Александровым**)

Работа посвящена изучению некоторых размерностных свойств бесконечномерных пространств с помощью перегородок.

## Введение

Настоящая работа в основном посвящена исследованию бесконечно-
ıерных пространств с помощью «перегородок». «Перегородкой» между
ıножествами $A_i$ и $B_i$ П. С. Александров предложил называть всякое
такое замкнутое множество $C$, что дополнение $R \setminus C$ несвязно и притом
так распадается в сумму непересекающихся открытых множеств $G$ и $H$,
что $A \subseteq G$, а $B \subseteq H$.

Основное определение. Назовем пространство $R$ *слабо-бесконеч-
номерным*, если для любой счетной системы $\pi$ пар замкнутых мно-
жеств $A_i$, $B_i$, $A_i \cap B_i = \phi$*, можно найти конечное число (вообще гово-
ря, зависящее от $\pi$) перегородок $C_i$**, $i = i_1, \ldots, i_k$, с пустым
пересечением: $\bigcap_i C_i = \phi$. Если это не так, назовем $R$ *сильно-бесконечно-
мерным*.

Это определение предложено Ю. М. Смирновым. Для компактных про-
странств оно эквивалентно определению П. С. Александрова, в котором
е требуется, чтобы число перегородок $C_i$ было конечным [см. (1), стр.
4—15 предисловия к русскому переводу]. Такой подход дает возмож-
ость пользоваться теорией существенных отображений П. С. Алексан-
рова [см. (2), (3)], чего нельзя сказать о подходе Гуревича [см. (1),
тр. 75—78].

В § 1 изучение некомпактных слабо-бесконечномерных пространств
водится к компактному случаю двумя способами. Это, прежде всего,
еорема 4 о вложении: *всякое некомпактное слабо-бесконечномерное про-
странство со счетной базой можно топологически вложить в слабо-
бесконечномерный компакт.*

Теорема 3 характеризует некомпактные слабо-бесконечномерные про-
странства: это такие пространства, которые можно разложить в сумму

---

* $\phi$ — пустое множество.

** Разумеется, каждое $C_i$ является перегородкой между $A_i$ и $B_i$.

слабо-бесконечномерного компакта Ф и счетного числа открытых конечномерных множеств $\Gamma_k$ так, что выполняется следующее условие сходимости:

s) начиная с некоторого номера, все точки каждой последовательности $\{x_i\}$, $x_i \in R$, не имеющей предельных точек, содержатся в одном из множеств $\Gamma_k$.

Наконец, доказывается, что известное подмножество $H$ гильбертова параллелепипеда, состоящее из всех тех точек, которые имеют лишь конечное число отличных от нуля координат, нельзя топологически вложить ни в какой слабо-бесконечномерный компакт (даже бикомпакт!), несмотря на то, что оно слабо бесконечномерно почти во всех известных в топологии смыслах * (в том числе и в смысле П. С. Александрова), кроме принятого здесь определения Ю. М. Смирнова (теорема 5).

В § 2 доказывается теорема о наличии в сильно-бесконечномерных бикомпактах бесконечномерных канторовых многообразий. В отличие от аналогичной теоремы Б. Левшенко [см. ([3]), теорема 6], в которой под бесконечномерным канторовым многообразием понимается всякий бикомпакт, не разбиваемый никаким конечномерным замкнутым множеством, в нашей теореме от канторовых многообразий требуется, чтобы они не разбивались никаким слабо-бесконечномерным замкнутым множеством.

Наконец, в § 3 анализируется принятое здесь определение слабо-бесконечномерных пространств; мы хотим установить, что даст это определение, если потребовать, чтобы число перегородок $C_i$, дающих пустое пересечение, не зависело от выбора счетной системы пар $\{(A_i, B_i)\}$. Оказывается, это определение приводит нас к конечномерным пространствам. Из теоремы 7 получаем: *нормальное пространство тогда и только тогда имеет размерность* $\dim R \leqslant n$, *когда к любой счетной системе пар замкнутых множеств* $A_i$, $B_i$, $A_i \cap B_i = \phi$, *можно подобрать* $n+1$ *перегородку* $C_i$ *с пустым пересечением.*

Таким образом, во всяком нормальном пространстве $R$ размерности $n$ имеется такая счетная система пар $A_i$, $B_i$, $A_i \cap B_i = \phi$, что ни к одной подсистеме из $n$ пар нельзя подобрать $n$ перегородок с пустым пересечением.

Теорема 8 показывает, что полученные результаты нельзя формально обобщить на несчетные системы пар, потому что *в любом компакте для любой несчетной системы пар замкнутых множеств* $A_\lambda, B_\lambda$, $A_\lambda \cap B_\lambda = \phi$, *можно найти две перегородки с пустым пересечением.*

Эта работа выполнена под руководством Ю. М. Смирнова, которому я выражаю искреннюю благодарность.

---

* Оно является суммой счетного числа замкнутых конечномерных множеств и, стало быть, суммой счетного числа нульмерных множеств, а поэтому и слабо-бесконечномерно в смысле П. С. Александрова [см. ([3]), теорема 4]. Впрочем, оно не обладает трансфинитной размерностью, так как в противном случае, по одной теореме Гуревича, оно топологически вкладывалось бы в компакт с трансфинитной размерностью, а всякий такой компакт слабо-бесконечномерен [см. ([1]), стр. 77, и ([3]), теорема 4].

## § 1. Строение слабо-бесконечномерных пространств и теорема о вложении

Заметим, что многие результаты настоящей работы естественно формулируются и доказываются не только для пространств со счетной базой применительно к которым они, может быть, и имеют основной интерес), но, как правило, в значительно более общих предположениях. Поэтому всюду под пространством условимся понимать *нормальное* пространство. В соответствии с этим всюду под размерностью будем понимать *размерность* dim, *определенную с помощью покрытий.*

Для формулировки теоремы 1 о строении слабо-бесконечномерных пространств нам потребуется понятие *локальной размерности* loc dim, введенное Даукером ([4]), и еще несколько вспомогательных понятий.

Определение 1. Локальной размерностью $\operatorname{loc}\dim_x R$ пространства $R$ в точке $x$, $x \in R$, называется такое натуральное $n$ (включая число 0 и символ $\infty$), что у точки $x$ имеется окрестность $Ox$ размерности $n$, но нет окрестностей размерности меньшей, чем $n$.

Локальной размерностью $\operatorname{loc}\dim R$ пространства $R$ называется такое натуральное число $n$, что $\operatorname{loc}\dim_x R \leqslant n$ для любой точки $x$, $x \in R$, но $\operatorname{loc}\dim_y R = n$ для некоторой точки $y$, $y \in R$*.

Определение 2. Назовем последовательность точек $x_i$ пространства $R$ *разрозненной*, если она не имеет в нем предельных точек.

Определение 3. Скажем, что последовательность точек $x_i$ пространства $R$ почти вся содержится во множестве $\Gamma$, если множество $\{x_i\} \setminus \Gamma$ конечно **

Определение 4. Назовем счетную систему открытых множеств $\Gamma_n$ пространства $R$ сходящейся, если каждая разрозненная последовательность точек почти вся содержится в одном из множеств $\Gamma_n$***.

Определение 5. Пределом сходящейся системы множеств $\Gamma_n$ назовем множество $\Phi = R \setminus \bigcup\limits_n \Gamma_n$.

Введем обозначение: множество всех точек $x$ пространства $R$, для которых $\operatorname{loc}\dim_x R \leqslant n$, обозначим через $L_n$.

Нами будут доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Во всяком слабо-бесконечномерном*** пространстве* $R$ *существует сходящаяся система открытых множеств* $\Gamma_n$ *конечной локальной размерности* (т. е. $\operatorname{loc}\dim \Gamma_n < \infty$) *с компактным слабо-бесконечномерным пределом* $\Phi = R \setminus \bigcup \Gamma_n$.

---

* В силу нормальности пространства $R$ (в нем всякое множество типа $F_\sigma$ нормально, а также справедлива теорема суммы для размерности $\dim : \dim(\bigcup\limits_i F_i) = \sup\limits_i \{\dim F_i\}$), в определении вместо открытых окрестностей можно брать и замкнутые.

** Другими словами, для некоторого $n$ и каждого $i$, большего, чем $n$, имеем: $x_i \in \Gamma$.

*** Это и есть условие сходимости s) из введения.

**** См. основное определение в самом начале введения.

ТЕОРЕМА 2. *Если в пространстве $R$ существует сходящаяся система слабо-бесконечномерных открытых множеств $\Gamma_n$ со слабо-бесконечномерным пределом $\Phi = R \setminus \bigcup_n \Gamma_n$, то $R$ слабо-бесконечномерно.*

Утверждение теоремы 1 вытекает из следующих четырех лемм.

ЛЕММА 1. *Для всякой разрозненной последовательности точек $x_i$ существует локально-конечная* система окрестностей $Ox_i$ с попарно не пересекающимися замыканиями.*

Доказательство. В нашем случае каждое подмножество множества $\{x_i\}$ замкнуто. Поэтому функция $f(x_i) = i$ непрерывна на множестве $\{x_i\}$. Продолжив ее в непрерывную функцию $F$ на все пространство $R$ и взяв полные прообразы $F^{-1}\left(i - \frac{1}{3},\ i + \frac{1}{3}\right)$ интервалов $\left(i - \frac{1}{3}, i + \frac{1}{3}\right)$, получим искомую систему окрестностей $Ox_i$.

ЛЕММА 2. *Для любой локально-конечной счетной системы попарно не пересекающихся замкнутых множеств $D_n$ таких, что $\dim D_n \geqslant n$, сумма $\bigcup_n D_n$ сильно-бесконечномерна.*

Доказательство. Так как $\dim D_n \geqslant n$, то имеется существенное** отображение $F_n$ множества $D_n$ в $n$-мерный куб $Q^n$ [см. (2), стр. 25]. Легко доказать, что полные прообразы $A_i^{(n)}$, $B_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, n$, пар противоположных $(n-1)$-мерных граней куба $Q^n$ нельзя разделить в $D_n$ перегородками с пустым пересечением. Множества $A_i = \bigcup_n A_i^{(n)}$ и $B_i = \bigcup_i B_i^{(n)}$, в силу локальной конечности системы $\{D_n\}$, замкнуты и $A_i \cap B_n = \phi$ для любого $i$. Очевидно, пары $A_i$, $B_i$ нельзя разделить в $R$ конечным числом перегородок с пустым пересечением, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. *Система открытых множеств $L_n$ всякого слабо-бесконечномерного пространства $R$ сходится в нем.*

Доказательство. Допустив, что система множеств $L_n$ не сходится, можно найти такую разрозненную последовательность точек $x_i$, что множества $\{x_i\} \setminus L_n$ бесконечны. Из последовательности $\{x_i\}$ выберем подпоследовательность точек $x_{i_n}$ таких, что $x_{i_n} \notin L_n$. Так как она разрозненна, то, в силу леммы 1, существует локально-конечная система окрестностей $Ox_{i_n}$ с попарно не пересекающимися замыканиями. Но тогда замыкания также составляют локально-конечную систему и $\dim [Ox_{i_n}] > n$ для каждого $n$. По лемме 4, сумма $\bigcup_n [Ox_{i_n}]$ сильно-бесконечномерна, а вместе с ней должно быть сильно-бесконечномерным и все пространство $R$, вопреки предположению. Лемма доказана.

---

* Система множеств $M_\lambda$ пространства $R$ локально-конечна в нем, если у каждой точки $x \in R$ есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств $M_\lambda$. Нетрудно видеть, что замыкания $[M_\lambda]$ множеств $M_\lambda$ локально-конечной системы также составляют локально-конечную систему и что $[\bigcup_\lambda M_\lambda] = \bigcup_\lambda [M_\lambda]$.

** Отображение $F$ в куб $Q^n$ называется *несущественным*, если имеется такое отображение $F'$ пространства $R$ в границу $S^{n-1}$ куба $Q^n$, что $F'(x) = F(x)$, если $F(x) \in S^{n-1}$.

ЛЕММА 4. *Предел Ф всякой сходящейся системы открытых множеств есть замкнутое компактное* множество, слабо-бесконечномерное, ли слабо-бесконечномерно R.*

Эта простая лемма завершает доказательство теоремы 1.

Замечание 1. Если предел Ф сходящейся системы $\gamma$ открытых ножеств $\Gamma_i$ пуст, то система $\gamma$ содержит конечное покрытие (другими ловами, $\bigcup_{i\leqslant n}\Gamma_i = R$ для некоторого $n$).

Значит, *если* $R\setminus\bigcup_n L_n=\phi$ *для системы множеств* $L_n$ *слабо-беско-ечномерного пространства* $R$, *то* $\operatorname{loc}\dim R<\infty$ *и даже* $\dim R<\infty$, *ли пространство R паракомпактно*** [см. (4), стр. 108], *в частности, ли R метризуемо.*

Для доказательства теоремы 2 нужны следующие четыре леммы.

ЛЕММА 5. *Пусть Ф — слабо-бесконечномерное замкнутое множество ространства R; если всякое замкнутое множество Ф′, не пересекаю-еся с Ф, слабо-бесконечномерно, то слабо-бесконечномерно и все про-ранство R.*

Доказательство. Пусть $\{A_i, B_i\}$ — счетная система пар замкну-ых множеств и $A_i\cap B_i=\phi$ для любого $i$. Пусть $A_i'=A_i\cap\Phi$ и $B_i'=B_i\cap\Phi$. Так как Ф слабо-бесконечномерно, то найдется конечная дсистема пар $(A_i', B_i')$, $i=1,\ldots,m$, для которых существуют перего-дки $C_i'$, $i=1,\ldots,m$, с пустым пересечением. Так как $R$ нормально, существуют окрестности $OC_i'$ множеств $C_i'$ такие, что

$$OC_i'\subseteq R\setminus A_i\setminus B_i \quad\text{и}\quad \bigcap_{i\leqslant m}OC_i'=\phi$$

м. (2′), стр. 58]. Множество $C_i'$ является перегородкой между $A_i'$ и $B_i'$ Ф; это означает, что

$$\Phi\setminus C_i'=G_i'\cup H_i',$$

е $G_i'$ и $H_i'$ — такие открытые в Ф множества, что

$$G_i\cap H_i=\phi,\quad A_i'\subseteq G_i' \text{ и } B_i'\subseteq H_i'.$$

оэтому

$$\Phi\setminus OC_i'=A_i''\cup B_i'',$$

е $A_i''=G_i'\setminus OC_i'$ и $B_i''=H_i'\setminus OC_i'$ замкнуты в Ф. Кроме того, множест а $A_i\cup A_i''$ и $B_i\cup B_i''$ замкнуты в $R$ и не пересекаются ($i=1,\ldots,m$).

Возьмем произвольным образом перегородки $C_i$ между $A_i\cup A_i''$ и $B_i\cup B_i''$ в $R$. Для них будем иметь

$$\bigcap_{i\leqslant m}C_i\cap\Phi\subseteq\bigcap_{i\leqslant m}OC_i'$$

, значит,

$$\Phi\cap\bigcap_{i\leqslant m}C_i=\phi.$$

* Пустое множество $\phi$ компактно.

** Пространство *паракомпактно*, если в любое его открытое покрытие можно исать открытое локально-конечное покрытие. Любое метризуемое пространство аракомпактно [см. (5) или (6)].

Кроме того, $\Phi' = \bigcap_{i \leqslant m} C_i$ замкнуто в $R$, значит, оно слабо-бесконечномерно. Поэтому для пар замкнутых множеств $A_i \cap \Phi'$ и $B_i \cap \Phi'$, $i = m+1, \ m+2, \ldots$, в $\Phi'$ найдется конечное число перегородок $C'_{m+1}, \ldots, C'_n$ с пустым пересечением. Точно так же, как это было сделано с перегородками $C'_i$ в $\Phi$, и здесь можно найти такие перегородки $C_{m+1}, \ldots, C_n$ в пространстве $R$ для пар $(A_i, B_i)$, что

$$\bigcap_{m<i\leqslant n} C_i \cap \Phi' = \phi,$$

т. е.

$$\bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} C_i = \phi,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 6. *Если замкнутые множества $\Phi_i$, $i = 1, \ldots, n$, слабо-бесконечномерны, то слабо-бесконечномерна и сумма $\bigcup_{i\leqslant n} \Phi_i$.*

Для доказательства достаточно взять два слагаемых $\Phi_1$ и $\Phi_2$ и применить лемму 5.

ЛЕММА 7. *Если сумма $\bigcup_{i\leqslant n} \Gamma_i$ конечного числа открытых слабо-бесконечномерных множеств $\Gamma_i$ нормальна, то она тоже слабо-бесконечномерна.*

Для доказательства, в силу нормальности суммы $\bigcup \Gamma_i$, можно взять такие замкнутые в $\bigcup \Gamma_i$ множества $H_i$, что $H_i \subseteq \Gamma_i$ и $\bigcup_{i\leqslant n} H_i = \bigcup_{i\leqslant n} \Gamma_i$ [см. ([2]) или ([2'])], и применить к ним лемму 6.

ЛЕММА 8. *Если замкнутое множество $\Phi'$ содержится в сумме открытых множеств $\Gamma_n$, составляющих сходящуюся систему, то $\Phi'$ содержится в сумме конечного числа множеств $\Gamma_n$.*

Доказательство. Допустив, что множество $\Phi'$ не содержится ни в одной конечной сумме множеств $\Gamma_n$, можно найти такую последовательность точек $x_i$, что $x_i \in \Phi' \setminus \bigcup_{n\leqslant i} \Gamma_n$. Так как система $\{\Gamma_n\}$ — сходящаяся, то последовательность $\{x_i\}$ — неразрозненная, а потому имеет хотя бы одну предельную точку, пусть, например точку $x$. Ясно, что $x \in \Phi'$ и, значит, $x \in \Gamma_n$ для некоторого $n$, что противоречит выбору последовательности $\{x_i\}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть множества $\Gamma_n$ и дополнение $\Phi = R \setminus \cup \Gamma_n$ удовлетворяют условию теоремы 2. В силу леммы 5, достаточно доказать, что всякое замкнутое множество $\Phi'$, не пересекающееся с $\Phi$, слабо-бесконечномерно, а это непосредственно следует из лемм 8 и 7. Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Метризуемое пространство $R$ тогда и только тогда слабо-бесконечномерно, когда в нем существует сходящаяся система открытых конечномерных множеств $\Gamma_k$ со слабо-бесконечномерным компактным пределом $\Phi = R \setminus \bigcup \Gamma_k$.*

Доказательство. Достаточность данного условия вытекает из теоремы 2, а необходимость — из теоремы 1, если только заметить, что в силу паракомпактности каждого множества $\Gamma_k$, справедливо равенство

$$\operatorname{loc} \dim \Gamma_k = \dim \Gamma_k$$

[см ([4]), стр. 108].

ТЕОРЕМА 4. *Всякое слабо-бесконечномерное пространство со счет-й базой можно топологически вложить в слабо-бесконечномерный мпакт.*

Доказательство. В силу теоремы 3, пространство $R$ содержит одящуюся систему конечномерных открытых множеств $\Gamma_k$, предел кото-й $\Phi$ слабо-бесконечномерен. Если он пуст, то, в силу замечания 1, остранство $R$ является суммой конечного числа открытых конечно-рных множеств $\Gamma_k$, а поэтому и само конечномерно. Значит, по теоре- Нёбелинга — Гуревича [см. (1), стр. 89], его можно вложить в неко-рый конечномерный куб. Если же компакт $\Phi$ не пуст, то рассмотрим следовательность $U_n$ его $\frac{1}{n}$-окрестностей:

$$U_n = \mathscr{E}\left\{x \in R : \rho(x, \Phi) < \frac{1}{n}\right\}.$$

В силу леммы 8, каждое замкнутое множество $F_n = R \setminus U_n$ содер-ится в сумме конечного числа множеств $\Gamma_k$, а потому каждое мно-ество $F_k$ конечномерно. Согласно одной теореме Гуревича [см. (1′), § 5], остранство $R$ можно топологически вложить в такой компакт $R^*$, что

$$\dim F_n = \dim R^* [F_n]$$

ля всех $n$. Покажем, что

$$R^* = \Phi \cup \bigcup_n R^* [F_n].$$

Действительно, если $x \in R^* \setminus \Phi$, то существует такая окрестность $x$, что

$$R^* [Ox] \cap \Phi = \phi.$$

начит,

$$\rho(R \cap R^* [Ox], \Phi) > 0$$

$$R \cap R^* [Ox] \subseteq F_n$$

ля некоторого числа $n$. Но так как

$$R^* [R \cap Ox] = R^* [Ox],$$

о $x \in R^* [F_n]$ для некоторого числа $n$. Итак, компакт $R^*$ является сум-ой счетного числа слабо-бесконечномерных замкнутых множеств. Зна-ит, в силу одной теоремы Левшенко [см. (3), теорема 4], компакт $R^*$ або-бесконечномерен в смысле П. С. Александрова, а следовательно, в нашем смысле (см. введение). Теорема доказана.

Замечание 2. Как показано в работе автора (7) (теорема 2), ци-рованную здесь теорему Гуревича можно обобщить на случай любых рмальных пространств следующим образом: *всякое нормальное про-ранство $R$ с фиксированной последовательностью замкнутых множеств , можно топологически вложить в бикомпакт $R^*$ того же веса и та-й, что* $\dim F_n = \dim R^* [F_n]$ *для любого $n$.*

Отсюда тем же способом можно доказать следующее обобщение тео-мы 4.

ТЕОРЕМА 4′. *Всякое метризуемое слабо-бесконечномерное пространство можно топологически вложить в слабо-бесконечномерный бикомпакт того же веса.*

Покажем, что для пространств, слабо-бесконечномерных в смысле Александрова, теорема 4 о вложении, вообще говоря, не верна. Конечно, существует много пространств со счетной базой, слабо-бесконечномерных в смысле П. С. Александрова, но не слабо-бесконечномерных в принятом здесь смысле, которые можно топологически вкладывать в слабо-бесконечномерные компакты, например пространства, являющиеся суммами попарно не пересекающихся открытых конечномерных множеств возрастающих размерностей (см. лемму 2). Но в то же время существуют и пространства, слабо-бесконечномерные в смысле П. С. Александрова, не имеющие слабо-бесконечномерных компактных расширений. Примером такого пространства является известное подмножество $H$ гильбертова параллелепипеда $Q^{\infty}$, состоящее из всех тех его точек, у которых лишь конечное число координат отлично от нуля. Пространство $H$, являясь объединением счетного числа кубов возрастающих размерностей, слабо-бесконечномерно в смысле П. С. Александрова [см. ([3]), теорема 4].

ТЕОРЕМА 5. *Все бикомпактные расширения пространства $H$ сильно-бесконечномерны.*

Доказательство. Пусть $H^*$ — какое-нибудь бикомпактное расширение пространства $H$. Точки $a_1 = \{0, 0, \ldots, 0 \ldots\}$ и $b_1 = \{1, 0, 0, \ldots \ldots, 0, \ldots\}$ пространства $H$ имеют в расширении $H^*$ окрестности $Oa_1$ и $Ob_1$, замыкания которых не пересекаются. Пусть $\varepsilon_1 = 1$. Натуральное число $k_1$ и положительное число $\varepsilon_2$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, выберем так, что

$$A_1 = \mathscr{E}\{\{x_i\} \in H : x_1 = 0,\ x_i \leqslant \varepsilon_2 \text{ при } 1 < i \leqslant k_1\} \subseteq Oa_1$$

и

$$B_1 = \mathscr{E}\{\{x_i\} \in H : x_1 = \varepsilon_1,\ x_i \leqslant \varepsilon_2 \text{ при } 1 < i \leqslant k_1\} \subseteq Ob_1.$$

Множества $A_1$ и $B_1$ замкнуты в $H$ и $H^*[A_1] \cap H^*[B_1] = \phi$, в силу выбора окрестностей $Oa_1$ и $Ob_1$.

Приняв это за первый шаг индукции, докажем, что существуют натуральные числа $k_i$, положительные числа $\varepsilon_i$ и замкнутые в $H$ множества $A_i$ и $B_i$ такие, что $k_i < k_j$ и $\varepsilon_i > \varepsilon_j$, если $i < j$,

$$A_n = \mathscr{E}\{\{x_i\} \in H : x_i \leqslant \varepsilon_i \text{ при } i < n,\ x_n = 0,\ x_i \leqslant \varepsilon_{n+1} \text{ при } n < i \leqslant k_n\},$$

$$B_n = \mathscr{E}\{\{x_i\} \in H : x_i \leqslant \varepsilon_i \text{ при } i < n,\ x_n = \varepsilon_n,\ x_i \leqslant \varepsilon_{n+1} \text{ при } n < i \leqslant k_n\},$$

$$H^*[A_n] \cap H^*[B_n] = \phi.$$

Для доказательства предположим, что для всех чисел $i$, меньших некоторого числа $n$, числа $k_i$, $\varepsilon_{i+1}$ и множества $A_i$ и $B_i$, удовлетворяющие вышеприведенным условиям, уже найдены. Найдем числа $k_n$, $\varepsilon_{n+1}$ и множества $A_n$ и $B_n$, удовлетворяющие этим же условиям.

Рассмотрим $(n-1)$-мерные параллелепипеды

$$a_n = \mathscr{E}\{\{x_i\} \in H : x_i \leqslant \varepsilon_i \text{ при } i < n,\ x_j = 0 \text{ при } j \geqslant n\}$$

и

$$b_n = \mathscr{E}\{\{x_i\} \in H : x_i \leqslant \varepsilon_i \text{ при } i < n,\ x_n = \varepsilon_n,\ x_j = 0 \text{ при } j > n\}.$$

Они не пересекаются и компактны. Поэтому в пространстве $H$ существуют окрестности $Oa_n$ и $Ob_n$ компактов $a_n$ и $b_n$ такие, что

$$H^*[Oa_n] \cap H^*[Ob_n] = \phi.$$

В силу компактности, можно считать, что эти окрестности являются объединениями конечного числа базисных] окрестностей. Значит, существуют натуральное число $k_n$, $k_n > k_{n-1}$, и положительное число $\varepsilon_{n+1}$ $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, такие, что для соответствующих замкнутых в $H$ множеств $A_n$ и $B_n$ имеем вложения $A_n \subseteq Oa_n$ и $B_n \subseteq Ob_n$. Очевидно,

$$H^*[A_n] \cap H^*[B_n] = \phi.$$

Итак, можно считать, что числа $k_n$, $\varepsilon_n$ и пары множеств $A_n$ и $B_n$ уже построены для всех $n$.

Остается показать, что в расширении $H^*$ не существует конечного числа перегородок $C_n$, $n \leqslant N$, между соответствующими множествами $H^*[A_n]$ и $H^*[B_n]$ с пустым пересечением. В самом деле, если бы такие перегородки $C_n$, $n \leqslant N$, в расширении $H^*$ нашлись, то в $N$-мерном кубе

$$Q^N = \mathscr{E}\{\{x_i\} \in H : x_i \leqslant \varepsilon_i \text{ при } i \leqslant N,\ x_j = 0 \text{ при } j > N\}$$

множества $C_n \cap Q^N$ являлись бы перегородками между соответствующими множествами $A_n \cap Q^N$ и $B_n \cap Q^N$, которые, как легко видеть, представляют собой $(N-1)$-мерные противоположные грани куба $Q^N$, причем мы имели бы, что

$$\bigcap_{n \leqslant N} (C_n \bar{\cap}\ Q^N) = \phi,$$

чего не может быть. Теорема доказана.

## § 2. О бесконечномерных канторовых многообразиях

Определение. Бикомпакт $R$ назовем бесконечномерным канторовым многообразием, если его нельзя разбить * никаким слабо-бесконечномерным замкнутым множеством.

Если это определение ослабить, потребовав, чтобы не существовало конечномерных разбивающих замкнутых множеств, то мы придем к бесконечномерным канторовым многообразиям в смысле Левшенко. С помощью теории существенных отображений Левшенко доказал, что *всякий сильно-бесконечномерный бикомпакт содержит бесконечномерное канторово многообразие в его смысле* [см (3), теорема 6].

На самом деле верна следующая более сильная

ТЕОРЕМА 6. *Всякий сильно-бесконечномерный бикомпакт содержит бесконечномерное канторово многообразие (в сильном смысле).*

Доказательство. Пусть $R$ — сильно-бесконечномерный бикомпакт, а $\{(A_i, B_i)\}$ — счетная система пар замкнутых множеств таких, что $A_i \cap B_i = \phi$ при любом $i$, для которых не существует перегородок

---

* Говорят, что множество $C$ разбивает пространство $R$, если дополнение $R \setminus C$ несвязно.

$C_i$ (между $A_i$ и $B_i$) с пустым конечным пересечением $\bigcap_{i\leqslant N} C_i$. Утверждение теоремы вытекает из следующих двух лемм.

ЛЕММА 9. *Существует замкнутое множество $\Phi$ бикомпакта $R$, в котором пары $(A_i \cap \Phi,\ B_i \cap \Phi)$ нельзя разбить в $\Phi$ конечным числом перегородок с пустым пересечением, причем никакое собственное замкнутое подмножество $\Phi'$ множества $\Phi$ этим свойством уже не обладает: в $\Phi'$ пары $\{A_i \cap \Phi',\ B_i \cap \Phi'\}$ можно разбить конечным числом перегородок с пустым пересечением.*

ЛЕММА 10. *Замкнутое множество $\Phi$, существование которого утверждается в лемме 9, является бесконечномерным канторовым многообразием.*

Доказательство леммы 9. Рассмотрим совокупность $S$ всех замкнутых множеств $\Phi_\lambda$ бикомпакта $R$ таких, что ни в одном из множеств $\Phi_\lambda$ пары $(A_i \cap \Phi_\lambda,\ B_i \cap \Phi_\lambda)$ нельзя разбить конечным числом перегородок с пустым пересечением. Совокупность $S$ не пуста: в нее входит сам бикомпакт $R$. Совокупность $S$ является частично упорядоченным множеством: $\Phi_\lambda < \Phi_\mu$, если $\Phi_\lambda \subset \Phi_\mu$. Докажем, что *любая упорядоченная в смысле этого включения часть $S'$ совокупности $S$ ограничена снизу пересечением всех множеств $\Phi_\lambda$ из $S'$*. Действительно, допустим, вопреки этому, что пересечение

$$\Phi = \bigcap_{\Phi_\lambda \in S'} \Phi_\lambda$$

не принадлежит совокупности $S$, т. е. что для пар $(A_i \cap \Phi,\ B_i \cap \Phi)$ в $\Phi$ существуют перегородки $C_i'$, $i \leqslant m$, с пустым пересечением. Отсюда точно так же, как и в доказательстве леммы 5, можно заключить (в силу нормальности бикомпакта $R$), что в $R$ существуют перегородки $C_i$, $i \leqslant m$, между $A_i$ и $B_i$ такие, что

$$\bigcap_{i\leqslant m} C_i \cap \Phi = \phi.$$

Так как каждое множество $\Phi_\lambda$ из $S'$ принадлежит $S$, то

$$\Phi_\lambda \cap \bigcap_{i\leqslant m} C_i \neq \phi$$

для всех $\Phi_\lambda$ из $S'$. Непустые бикомпакты

$$\Phi_\lambda \cap \bigcap_{i\leqslant m} C_i$$

снова составляют упорядоченную по включению совокупность, а потому

$$\bigcap_{\Phi_\lambda \in S'} (\Phi_\lambda \cap \bigcap_{i\leqslant m} C_i) \neq \phi,$$

что противоречит равенству

$$\Phi \cap \bigcap_{i\leqslant m} C_i = \phi.$$

Итак, для каждой упорядоченной части $S'$ совокупности $S$ пересечение $\bigcap_{\Phi_\lambda \in S'} \Phi_\lambda$ также принадлежит $S$. Поэтому можно применить известную

лемму Хаусдорфа — Цорна: *в $S$ существует минимальное множество $\Phi$.* Это множество как раз удовлетворяет условиям леммы 9, что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 10. По существу надо доказать следующее предложение: *бикомпакт $\Phi$ является бесконечномерным канторовым многообразием, если в нем существует счетная система пар замкнутых множеств $A_i$, $B_i$ ($A_i \cap B_i = \phi$ при всех $i$), которые в $\Phi$ нельзя разбить конечным числом перегородок с пустым пересечением, такая, что в каждом собственном замкнутом подмножестве $\Phi'$ бикомпакта $\Phi$ пары множеств $A_i \cap \Phi'$ и $B_i \cap \Phi'$ можно разбить перегородками с пустым конечным пересечением.*

Допустим, что бикомпакт $\Phi$ не является бесконечномерным канторовым многообразием, т. е. что существует замкнутое слабо-бесконечномерное множество $C$ такое, что

$$\Phi \setminus C = G_1 \cup G_2,$$

где $G_1$ и $G_2$ — непустые непересекающиеся открытые в $\Phi$ множества. Тогда для собственных замкнутых множеств $\Phi_1 = \Phi \setminus G_1$ и $\Phi_2 = \Phi \setminus G_2$ бикомпакта $\Phi$ имеем: $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi$ и $\Phi_1 \cap \Phi_2 = C$. В силу выбора бикомпакта $\Phi$ и системы пар $(A_i, B_i)$, в каждом собственном множестве $\Phi_\lambda$, $\lambda = 1,2$, существуют перегородки $C_{\lambda i}$, $i \leqslant N$, между соответствующими множествами $A_i \cap \Phi_\lambda$ и $B_i \cap \Phi_\lambda$, с пустым пересечением

$$\bigcap_{i \leqslant N} C_{\lambda i} = \phi.$$

Из определения перегородок, так же как и в начале этого доказательства, можно заключить, что имеются такие замкнутые в $\Phi_\lambda$ множества $A_{\lambda i}$ и $B_{\lambda i}$, $\lambda = 1, 2$, что

$$\Phi_\lambda = A_{\lambda i} \cup B_{\lambda i}, \quad C_{\lambda i} = A_{\lambda i} \cap B_{\lambda i},$$

$$A_i \cap \Phi_\lambda \subseteq \Phi_\lambda \setminus B_{\lambda i} \text{ и } B_i \cap \Phi_\lambda \subseteq \Phi_\lambda \setminus A_{\lambda i}.$$

Тогда множества

$$C_i = (A_{1i} \cup A_{2i}) \cap (B_{1i} \cup B_{2i})$$

являются перегородками между соответствующими множествами $A_i$ и $B_i$ в бикомпакте $\Phi$, так как

$$A_i \subseteq \Phi \setminus (B_{1i} \cup B_{2i}), \quad B_i \subseteq \Phi \setminus (A_{1i} \cup A_{2i})$$

$$\Phi = (A_{1i} \cup A_{2i}) \cup (B_{1i} \cup B_{2i})$$

для любого $i$, $i \leqslant N$. При этом $\bigcap_{i \leqslant N} C_i \subseteq C$, потому что

$$\bigcap_{i \leqslant N} C_i \setminus \Phi_1 \subseteq \bigcap_{i \leqslant N} (A_{2i} \cup B_{2i}) = \bigcap_{i \leqslant N} C_{2i} = \phi$$

и аналогично,

$$\bigcap_{i \leqslant N} C_i \setminus \Phi_2 \subseteq \bigcap_{i \leqslant N} C_{1i} = \phi.$$

Так как замкнутое множество $C$ слабо-бесконечномерно, то в нем для счетной системы пар множеств $A_i \cap C$, $B_i \cap C$ при $i > N$ существуют перегородки $C_i'$, $N < i \leqslant N'$, такие, что

$$\bigcap_{N<i\leqslant N'} C_i' = \phi.$$

Снова так же, как и в доказательстве леммы 5, можно построить в бикомпакте $\Phi$ перегородки $C_i$ (между соответствующими множествами $A_i$ и $B_i$), $N < i \leqslant N'$, такие, что $C \cap \bigcap_{N<i\leqslant N'} C_i = \phi$.

Таким образом, в бикомпакте $\Phi$ нашлись перегородки $C_i$, $i \leqslant N'$, между множествами $A_i$ и $B_i$ с пустым пересечением:

$$\bigcap_{i\leqslant N'} C_i = \bigcap_{i\leqslant N} C_i \cap \bigcap_{N<i\leqslant N'} C_i \subseteq C \cap (\Phi \setminus C) = \phi.$$

Этого, в силу первоначальных допущений, не может быть. Значит, $\Phi$ — бесконечномерное канторово многообразие, что и требовалось доказать. Лемма 10, а с нею и теорема 6 доказаны.

## § 3. Характеристика конечномерных пространств с помощью перегородок

П. С. Александров обратил особое внимание на то, что размерность dim можно характеризовать с помощью перегородок [см. ([1]), стр. 14]. Это можно сделать следующим образом.

ТЕОРЕМА 7. *Для того чтобы пространство $R$ имело размерность* $\dim R \geqslant n$, *достаточно, чтобы существовала такая система $n$ пар замкнутых множеств $A_i$, $B_i$, $A_i \cap B_i = \phi$, которые нельзя разбить перегородками с пустым пересечением, и необходимо, чтобы существовала счетная система пар замкнутых множеств $A_i$, $B_i$, $A_i \cap B_i = \phi$, такая, что никакие $n$ пар $(A_i, B_i)$ из этой системы нельзя было разбить перегородками с пустым пересечением.*

Заметим, что необходимое условие сильнее, чем достаточное, так что каждое из них оказывается как необходимым, так и достаточным. Именно первое условие и было замечено П. С. Александровым. В своих неопубликованных лекциях по теории размерности им была доказана вытекающая из теоремы 7

ТЕОРЕМА 7′. *Пространство $R$ имеет размерность* $\dim R \geqslant n$ *тогда и только тогда, когда в нем существует система из $n$ пар замкнутых множеств $A_i$, $B_i$, $A_i \cap B_i = \phi$, которые нельзя разбить перегородками с пустым пересечением.*

Заметим, что для пространств со счетной базой эта теорема фактически доказана Гуревичем [см. ([1]), стр. 58, III].

Доказательство теремы 7. Достаточность первого условия доказывается весьма просто: пусть в пространстве $R$ существует $n$ пар замкнутых множеств $A_i$, $B_i$, $A_i \cap B_i = \phi$, не разделимых перегородками с пустым пересечением. По известной лемме Урысона, существуют непре-

ывные функции $f_i$, $i \leqslant n$, такие, что

$$0 \leqslant f_i(x) \leqslant 1, \quad f_i(x) = 0 \text{ для всех } x \in A_i$$

$$f_i(x) = 1 \text{ для всех } x \in B_i.$$

Таким образом, мы получаем *существенное* * отображение $F$ простран-тва $R$ в $n$-мерный куб $Q^n$.

В самом деле, если бы отображение $F$ было несущественным, то наш-ось бы отображение $G$ пространства $R$ в границу $S^{n-1}$ куба $Q^n$ такое, что $G(x) = F(x)$, если $F(x) \in S^{n-1}$. Возьмем в кубе $Q^n$ за «перегородки» между парами его $(n-1)$-мерных граней пересечения $C_i$ куба с $(n-1)$-мерными гиперплоскостями, проходящими через центр $\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$ куба параллельно соответствующим $(n-1)$-мерным граням. Полные прообразы $^{-1}(C_i)$ этих перегородок $C_i$ являются, как нетрудно видеть, перегородка-и в пространстве $R$ между соответствующими множествами $A_i$ и $B_i$, причем их пересечение пусто, так как

$$G(R) \cap \bigcap C_i = \phi.$$

Но именно этого не может быть.

Докажем теперь вторую часть теоремы 7. Для этого с помощью изве-тного метода, широко применяемого Б. Левшенко [см. ([3])], здесь удобно ерейти к характеристике размерности с помощью аппроксимации се-ейств функций **.

Сформулируем в виде леммы и вкратце докажем лишь нужное нам словие:

ЛЕММА 11. *Если к любой счетной системе пар замкнутых множеств* $A_i$, $B_i$, $A_i \cap B_i = \phi$ *для всех* $i$, *можно найти* $n$ *перегородок* $C_{i_j}$ *с пустым ересечением, то к любой счетной системе действительных непрерывных функций* $f_i$ *и для любого положительного числа* $\varepsilon$ *можно подобрать* $n$ *функций* $g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}$ *таких, что* $\rho(f_{i_j}, g_{i_j}) < \varepsilon$ *и* $\bigcap_j g_{i_j}^{-1}(0) = \varphi$.

Доказательство леммы. Пусть для данных функций $f_i$ и чи-ла $\varepsilon > 0$

$$A_i = \mathscr{E}\left\{x \in R : f_i(x) \leqslant -\frac{\varepsilon}{3}\right\}, \quad B_i = \mathscr{E}\left\{x \in R : f_i(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{3}\right\}.$$

усть, для простоты, при $i \leqslant n$ существуют перегородки $C_i$ с пустым ересечением. Тогда существуют и замкнутые перегородки $C_i'$ типа $G_\delta$ акже с пустым пересечением ***. Так же как и в доказательстве леммы 10,

---

* Согласно П. С. Александрову, отображение $F$ пространства $R$ в куб $Q^n$ назы-ается *несущественным*, если имеется такое отображение $G$ пространства $R$ в грани- $S^{n-1}$ куба $Q^n$, что $G(x) = F(x)$, если $F(x) \in S^{n-1}$ [ср. ([2']), стр. 215].

** По существу — это видоизмененная характеристика размерности с помощью ущественных отображений.

*** Тем же способом, как и в доказательстве леммы 5, можно построить сначала крестности $OC_i$, являющиеся перегородками между соответствующими множествами $A_i$ и $B_i$ и такие, что $\bigcap_i OC_i = \phi$. Потом с помощью леммы Урысона о функциях можно построить и замкнутые перегородки $C_i'$ типа $G_\delta$ такие, что $C_i' \subseteq OC_i$.

получаем, что существуют замкнутые множества $A_i'$, $B_i'$, для которых:

$$R = A_i' \cup B_i', \quad C_i' = A_i' \cap B_i', \quad A_i \subseteq R \setminus B_i', \quad B_i \subseteq R \setminus A_i'.$$

Имея это в виду, легко построить функции $g_i$ (действительные и непрерывные) такие, что

$$C_i = g_i^{-1}(0), \quad g_i(x) = f_i(x),$$

если $x \in A_i \cup B_i$. Кроме того,

$$-\frac{\varepsilon}{3} \leqslant g_i(x) \leqslant 0, \quad \text{если } x \in A_i' \setminus A_i,$$

и

$$0 \leqslant g_i(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \text{ если } x \in B_i' \setminus B_i.$$

Нетрудно проверить, что $g_i(x)$ — искомые функции *. Лемма доказана.

Итак, для доказательства второй части теоремы 7 достаточно построить на пространстве $R$ счетную систему непрерывных функций $f_i$ таких, что при некотором положительном числе $\varepsilon$ для любых непрерывных функций $g_i$, удовлетворяющих условиям $\rho(f_i, g_i) < \varepsilon$, пересечение $\bigcap_j g_{i_j}^{-1}(0)$ не пусто, какие бы $n$ функций $g_{i_j}$ ни взять.

Чтобы найти искомую последовательность функций $f_i$ и число $\varepsilon > 0$, рассмотрим последовательность функций $\omega_i$, определенных на координатном эвклидовом пространстве $E^n$ следующими формулами:

$$\omega_i(y) = 2^{(n-1)i} y_1 + \cdots + 2^i \cdot y_{n-1} + y_n,$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — координаты точки $y$. Любая система $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}$ из $n$ функций $\omega_i$ определяет аффинное преобразование $\Omega_{i_1 \ldots i_n}$ пространства $E^n$ в себя, так как для определителя $|2^{ki_j}|$ имеем:

$$|2^{ki_j}| = \prod_{\alpha < \beta} (2^{i_\beta} - 2^{i_\alpha}) \geqslant 2^{-C_n^2} \cdot 2^{(n-1)i_n} \ldots 2^{i_2} > 0.$$

При этом каждый главный минор не больше, чем $2^{(n-1)i_n} \ldots 2^{i_2}$. Поэтому каждый элемент матрицы обратного аффинного преобразования $\Omega_{i_1 \ldots i_n}^{-1}$ не превосходит числа $2^{C_n^2}$. Следовательно,

$$\rho(\Omega_{i_1 \ldots i_n}^{-1}(z), \Omega_{i_1 \ldots i_n}^{-1}(z')) \leqslant n^2 \cdot 2^{C_n^2} \cdot \rho(z, z'),$$

независимо от выбора точек $z$, $z'$ из пространства $E^n$ и индексов $i_1, \ldots, i_n$ $(i_1 < i_2 < \ldots < i_n)$.

Теперь для $n$-мерного пространства $R$, согласно теореме 4.5 Александрова [см. ([2]), стр. 25], возьмем существенное отображение $H$ этого пространства в единичный куб $Q^n$ с центром в начале координат $o$ пространства $E^n$. Оказывается, что функции $f_i = \omega_i H$ — искомые. В самом деле, в силу леммы 4.8 [см. ([2]), стр. 25], существует такое число $\delta > 0$, что для любого отображения $G$ пространства $R$ в $Q^n$ такого, что $\rho(G, H) < \delta$,

* Для построения нужно взять функцию $g'_{A_i}$, равную нулю на $C_i'$ и совпадающую с $f_i$ на $A_i$, и с сохранением множества нулей продолжить ее в непрерывную функцию $g_{A_i}$ на замкнутое множество $A_i'$, удовлетворяющую требуемым неравенствам [см ([6']), стр. 142]. Аналогично строим функции $g_{B_i}$ на $B_i$.

епременно $G^{-1}(o) \neq \phi$. Пусть

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2n^3 \cdot 2^{C_n^2}}$$

пусть функции $g_i$ таковы, что $|f_i - g_i| < \varepsilon$. Возьмем произвольно $n$ ункций $g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}$ и определенное ими отображение $G''$ пространства $R$ $E^n$. Очевидно,

$$\rho(G'', F) < n\varepsilon,$$

де $F = \Omega_{i_1 \ldots i_n} H$. Легко аппроксимировать отображение $G''$ пространства $R$ $E^n$ таким непрерывным отображением $G'$ пространства $R$ в параллеле-ипед

$$\Omega_{i_1 \ldots i_n}(H(R)) = \Omega_{i_1 \ldots i_n}(Q^n),$$

то

$$\rho(G', G'') < n\varepsilon$$

м. ($^2{}'$), стр. 212]. Тогда будем иметь:

$$\rho(G', F) < 2n\varepsilon.$$

Заметим еще, что, конечно, нужно потребовать, чтобы

$$G'^{-1}(o) = G''^{-1}(o),$$

это всегда можно сделать при наших предположениях.

Рассмотрим, наконец, отображение

$$G = \Omega_{i_1 \ldots i_n}^{-1} G'$$

оостранства $R$ в куб $Q^n$. Из предыдущего следует, что

$$\rho(G, H) < \frac{n^3 \cdot 2^{C_n^2} \cdot 2n\delta}{2 \cdot n^3 \cdot 2^{C_n^2}} = \delta.$$

начит $G^{-1}(o) \neq \phi$, а потому и $G''^{-1}(o) \neq \phi$, т. е.

$$\bigcap_j g_{i_j}^{-1}(0) \neq \phi.$$

орема доказана.

Покажем, что необходимое условие доказанной теоремы нельзя уси-ить, потребовав несчетности системы пар.

ТЕОРЕМА 8. *В любом компакте $R$ для любой несчетной системы р замкнутых множеств $A_\lambda$, $B_\lambda$, $A_\lambda \cap B_\lambda = \phi$, существуют два непере-сающихся замкнутых множества $C_{\lambda_1}$ и $C_{\lambda_2}$ таких, что $C_{\lambda_i}$ является пе-городкой между $A_{\lambda_i}$ и $B_{\lambda_i}$.*

Доказательство. В силу уже известных рассуждений, достаточ- показать, что в любой несчетной системе функций $f_\lambda$, определенных компакте $R$, какое бы число $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, найдутся две фун-ции $g_{\lambda_1}$ и $g_{\lambda_2}$ такие, что

$$|g_{\lambda_i} - f_{\lambda_i}| < \varepsilon \quad \text{и} \quad g_{\lambda_1}^{-1}(0) \cap g_{\lambda_2}^{-1}(0) = \phi.$$

о непосредственно вытекает из того, что пространство всех непрерывных

функций, определенных на компакте $R$, имеет счетную базу. Действительно, в системе функций $f_\lambda$ имеются две функции $f_{\lambda_1}$ и $f_{\lambda_2}$ такие, что $|f_{\lambda_1} - f_{\lambda_2}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Полагая $g_{\lambda_1} = f_{\lambda_1}$, а $g_{\lambda_2} = f_{\lambda_2} + \frac{\varepsilon}{2}$, получим искомые функции. Теорема доказана.

Поступило
13. VI. 1958

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Гуревич В. и Воллмен Г., Теория размерности, ИЛ., 1948.

[1'] Hurewicz W., Über die Einbettung von separabler Räume in gleichdimensionale kompakte Räume, Monatshefte für Math. und Phys., 37 (1930), 199—208.

[2] Александров П. С., On the Dimension of Normal Spaces, Proc. Roy. Soc., A, 189, № 2 (1947), 11—39.

[2'] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947.

[3] Левшенко Б., О сильно-бесконечномерных пространствах, Ученые зап. МГУ, Математика, 10, № 200, 1959.

[4] Dowker C. H., Local Dimension of Normal Spaces, Quart. J. Math., 6, № 22 (1955), 101—120.

[5] Stone A. H., Paracompactness and Product Spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 54, № 10 (1948), 977—982.

[6] Смирнов Ю. М., О метризации топологических пространств, Успехи матем. наук, 6(46)(1951),100—111.

[6'] Смирнов Ю. М., К теории вполне регулярных пространств, Ученые записки МГУ, серия матем., 5, вып. 155 (1952), 137—155.

[7] Скляренко Е., О вложении нормальных пространств в бикомпакты того же веса и той же размерности, Доклады Ак. наук СССР, 123, № 1 (1958), 36—39.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 213—242

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА $n$-МЕРНОМ ОТКРЫТОМ МНОЖЕСТВЕ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Изучаются свойства функций многих переменных, принадлежащих классам $W_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$ и $H_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$, где $G$—произвольное открытое множество $n$-мерного пространства $R_n$. В частности, на этот случай распространяется теорема вложения, доказанная для $G = R_n$ в работе (6).

## Введение

0.1. В работах автора (5) и (6) рассматривались свойства введенных ям классов $W_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ и $H_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ функций, определенных на всем $n$-мерюм пространстве $R_n = R$ или на некоторых специальных областях, принадлежащих к $R_n$.

Интересные исследования, относящиеся к этим вопросам, принадлежат акже E. Gagliardo (2), который рассматривал классы вида $W_{p_1,p_2}^{(r_1,r_2)}(G)$ и некоторых частных значений $p_1$, $p_2$, $r_1$, $r_2$ и специальных областей $G$. . Gagliardo интересовал вопрос о компактности в $C$ рассмотренных им лассов функций.

Настоящая работа посвящена изучению вопросов, аналогичных изложенным в работах (5), (6), но для классов, состоящих из функций, определенных на произвольном открытом множестве $G \subset R_n$. Поскольку $G$ роизвольно, утверждения, которые имели место для функций, определенных на $R_n$, сохраняются для $G$ только в известной их части. При ом соответствующие приводимые в работе примеры показывают, что это аходится в существе дела.

Центральное место занимает основная теорема 4.1, представляющая бою аналог соответствующей теоремы вложения (при $m = n$), доказанной в работах (5), (6). В этой теореме мы ограничиваемся рассмотрем, в качестве исходного, класса $W_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}$. Приводятся примеры, показывающие, что условия теоремы не могут быть ослаблены.

Отметим, что в определение класса $W_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}$ входят свойства только смешанных производных от входящих в него функций, поэтому при $= \ldots = p_n = p$ и $r_1 = \ldots = r_n = r = 2,3,\ldots$ этот класс, по крайней ре для произвольных областей $G \subset R_n$, не совпадает с классом $W_p^{(r)}(G)$ Соболева (8).

Все предшествующие теореме 4.1 теоремы и леммы так или иначе служат для обоснования этой теоремы; исключение составляют пункты 1.6, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, приведенные попутно.

План работы таков:

В § 1 рассматривается определенная на прямоугольном параллелепипеде $\sigma$ с ребрами, параллельными осям координат, функция $f(\bar{x}) \in W_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(\sigma)$ или $H_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(\sigma)$. Дается эффективное представление $f$ в виде суммы многочлена $P$ степеней $\bar{r}_i$ по $x_i$ и функции $F$, линейно зависящей от несмешанных частных производных $\frac{\partial^{\bar{r}_i} f}{\partial x_i^{\bar{r}_i}}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Другие подобные разложения $f = P + F$ изучались в работах A. Sard'a [7] и И. А. Эзрохи [9].

В § 2 приведены некоторые теоремы о продолжении функций $f$ за параллелепипед $\sigma$ с сохранением дифференциальных свойств; из этих теорем с помощью прежних результатов автора [5], [6] выводятся теоремы вложения для функций классов $W_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(\sigma)$ и $H_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(\sigma)$.

В § 3 вводится определение новых классов $\bar{h}_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$ и $\overline{H}_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$, несколько отличных от $H_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$.

Наконец, в § 4 в терминах указанных новых классов доказывается основная теорема вложения для случая, когда $G$ есть произвольное открытое множество. Доказательство ведется путем синтеза предыдущих результатов.

0.2. Условимся в следующих обозначениях.

Если $\mathscr{E} \subset R_n$ — измеримое множество и $f$ — определенная на нем измеримая функция, то

$$\left(\int_{\mathscr{E}} |f|^p \, d\mathscr{E}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p(\mathscr{E})} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

если этот интеграл конечен. В этом случае будем писать:

$$f \in L_p(\mathscr{E}).$$

Всюду в дальнейшем мы считаем, что $r_i > 0$, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $r_i = \bar{r}_i + \alpha_i$, где $\bar{r}_i$ — целое и $0 < \alpha_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Аналогичное предположение делаем и относительно чисел $r$, $p$, $\alpha$ (без индексов).

0.3. Функция $f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на открытом множестве $G$, имеет, по определению, обобщенную производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ на $G$, если для нее выполняются следующие условия:

1) функция $f$ измерима на $G$;

2) после соответствующего видоизменения $f$ на множестве $n$-мерной меры нуль она абсолютно непрерывна по $x_1$ почти (в смысле $n-1$-мерной меры) для всех $(x_2, \ldots, x_n)$ на любом замкнутом отрезке, принадлежащем к $G$ (направленном по оси $x_1$).

При выполнении этих условий, очевидно, существует почти всюду на $G$ обычная производная $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, которая и называется обобщенной.

Аналогично определяются обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Производные высшего порядка определяются по индукции, а именно:

$$\frac{\partial^0 f}{\partial x_k^0} = f, \quad \frac{\partial^s f}{\partial x_k^s} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^{s-1} f}{\partial x_k^{s-1}} \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Следует иметь в виду, что условие 2) говорит, что частная производ-
ая $f^{(s)}$ порядка $s$ хотя и получается из частной производной $f^{(s-1)}$ по-
ядка $s-1$ путем обычного составления отношения приращения $f^{(s-1)}$
соответствующему приращению аргумента и перехода к пределу,
днако предварительно, быть может, надо видоизменить $f^{(s-1)}$ на множе-
тве $n$-мерной меры нуль. Впрочем, в случае несмешанной производной
$\frac{\partial^s f}{\partial x_k^s}$, как нетрудно видеть, для получения промежуточных производных
$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \ldots, \frac{\partial^s f}{\partial x_k^s}$ нет необходимости всякий раз менять предыдущую
роизводную на множестве меры нуль, достаточно это сделать только по
тношению к самой функции $f$.

Заметим еще, что это определение слабее определения обобщенной
роизводной по Соболеву, так как оно не предполагает суммируемости
роизводной.

0.4. Пусть $r_i$ — целые, и пусть определенная на открытом множестве
$\subset R$ функция $f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет несмешанные обобщенные
астные производные $f_{x_k}^{(s)} = \frac{\partial^s f}{\partial x_k^s}$ $(s = 0, 1, \ldots, r_k, \ k = 1, \ldots, n)$, обла-
ающие свойством:

$$\| f_{x_k}^{(s)} \|_{L_{p_k}(G)} < \infty.$$

В этом случае будем говорить, что функция $f$ принадлежит к классу
$W_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}$, и положим

$$\| f \|_{W_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G)} = \sum_1^n (\| f \|_{L_{p_k}(G)} + \| f_{x_k}^{(r_k)} \|_{L_{p_k}(G)}).$$

0.5. Функция $f$ принадлежит к классу $H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G)$ ($r_i$ — не обяза-
ельно целое), если $f \in W_{p_1, \ldots, p_n}^{(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)}(G)$ и существует константа $M$ такая,
о выполняются неравенства

$$\| f_{x_k}^{(\bar{r}_k)}(\bar{x} + \bar{h}_k) - f_{x_k}^{(\bar{r}_k)}(\bar{x}) \|_{L_p(G')} \leqslant M |\bar{h}_k|^{\alpha_k} \quad (1)$$

ри $0 < \alpha_k < 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ и

$$\| f_{x_k}^{(\bar{r}_k)}(\bar{x} + \bar{h}_k) - 2 f_{x_k}^{(\bar{r}_k)}(\bar{x}) + f_{x_k}^{(\bar{r}_k)}(\bar{x} - \bar{h}_k) \|_{L_p(G')} \leqslant M | \bar{h}_k \quad (2)$$

ри $\alpha_k = 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ для любых открытых множеств $G' \subset G$ и
екторов $\bar{h}_k$, направленных по оси $x_k$ и таких, что в случае (1) они
двигают $G'$ в пределах $G$, а в случае (2) $\bar{h}_k$ и $-\bar{h}_k$ сдвигают $G'$ в пре-
елах $G$.

Наименьшую константу $M$, для которой имеют место неравенства (1) и (2), будем обозначать через $M^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G)$ и положим

$$\|f\|_{H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G)} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \|f\|_{L_{p_k}(G)} + M^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G).$$

Оба определения классов $W^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G)$ и $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G)$ в этой работе применяются только для случая, когда $G$ есть прямоугольный (конечный или бесконечный) параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат, в частности, когда $G \subset R$. Применительно к произвольному открытому множеству $G \subset R$ появляется необходимость ввести некоторые видоизменения этих классов: $\overline{h}^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G)$ и $\overline{H}^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G)$.

## § 1. Некоторые видоизменения формулы Тейлора

1.1. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функцию $f(x)$, имеющую суммируемую производную порядка $r-1$ на $[a, b]$ *. Для такой функции остаточный член $R(x, x_0)$ в равенстве

$$f(x) = \sum_{j=0}^{r-1} f^{(j)}(x_0)\frac{(x-x_0)^j}{j!} + R(x, x_0) \quad (a \leqslant x, x_0 \leqslant b) \tag{1}$$

есть суммируемая на квадрате $a \leqslant x, x_0 \leqslant b$ функция:

$$\int_a^b\int_a^b |R(x, x_0)|\, dx\, dx_0 < \infty. \tag{2}$$

Разделим отрезок $[a, b]$ на $2r+2$ равных частичных отрезка

$$\Delta_0, \ldots, \Delta_{2r+1}$$

и выберем на каждом отрезке $\Delta_{2k}$ с четным индексом по точке $x_k$. Пусть $G$ обозначает $(r+1)$-мерный куб точек $(x_0, x_1, \ldots, x_r)$, координаты $x_k$ которых соответственно принадлежат к частичным отрезкам $\Delta_{2k}$: $x_k \in \Delta_{2k}$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$.

Объем куба $G$ обозначим через

$$\varkappa = \left(\frac{b-a}{2r+2}\right)^{r+1}.$$

Перенося в равенстве (1) $R(x, x_0)$ в левую часть и подставляя вместо $x$ числа $x_1, \ldots, x_r$, получим линейную систему $r$ уравнений

$$\sum_{j=0}^{r-1} \frac{(x_k-x_0)^j}{j!} f^{(j)}(x_0) = f(x_k) - R(x_k, x_0), \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{3}$$

с $r$ неизвестными $f^{(j)}(x_0)$. Определитель системы обозначим через

$$W = W(x_1-x_0, \ldots, x_r-x_0) = \begin{vmatrix} 1 & (x_1-x_0) & \ldots & \frac{(x_1-x_0)^{r-1}}{(r-1)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & (x_r-x_0) & \ldots & \frac{(x_r-x_0)^{r-1}}{(r-1)!} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(x_1-x_0, \ldots, x_r-x_0)\frac{(x_k-x_0)^j}{j!} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}\frac{(x_k-x_0)^j}{j!}, \tag{4}$$

* Точнее, это означает и будет означать в дальнейшем, что $f(x)$ абсолютно непрерывна вместе со своими производными до порядка $r-2$ включительно.

э, таким образом, $\alpha_{jk}$ есть адъюнкт определителя $W$, соответствующий элементу $(x_k - x_0)\ (j!)^{-1}$.

Из (3) и (4) следует:

$$f^{(j)}(x_0) = \frac{1}{W}\sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}\,[f(x_k) - R(x_k, x_0)] \quad (j = 0, 1, \ldots, r-1). \tag{5}$$

Подставив эти выражения для производных $f^{(j)}(x_0)$ в равенство (1), оинтегрировав обе его части по кубу $G$ точек $(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ и разде-в на $\varkappa$, получим:

$$f(x) = P(x) + F(x), \tag{6}$$

э

$$\text{ix)} = \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\varkappa}\int_G \frac{\alpha_{jk}(x_1 - x_0, \ldots, x_r - x_0)}{W(x_1 - x_0, \ldots, x_r - x_0)}\,[f(x_k) - R(x_k, x_0)]\,\frac{(x - x_0)^j}{j!}\,dG \tag{7}$$

ть многочлен степени $r-1$ и

$$F(x) = \frac{1}{\varkappa}\int_G R(x, x_0)\,dG. \tag{8}$$

1.2. Пусть на прямоугольнике $\sigma = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ задана функ-я $f(x, y)$, имеющая почти для всех $y$ частные производные $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ до по-дка $r-1$ включительно * и почти для всех $x$ — частные производные · до порядка $s-1$ включительно. Кроме того, имеется в виду, что нкция $f(x, y)$ суммируема на $\sigma$ и остаточные члены в разложениях йлора

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{r-1}\frac{\partial^j f(x_0, y)}{\partial x^j}\frac{(x - x_0)^j}{j!} + R_x(x, x_0, y)\ {**}, \tag{1}$$

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{s-1}\frac{\partial^i f(x, y_0)}{\partial y^i}\frac{(y - y_0)^i}{i!} + R_y(x, y, y_0) \tag{2}$$

$$(a \leqslant x, x_0 \leqslant b, \quad c \leqslant y, y_0 \leqslant d),$$

торые, по условию, имеют смысл соответственно почти для всех $y \in [c, d]$ и $a \leqslant x, x_0 \leqslant b$ и почти для всех $x \in [a, b]$ при $c \leqslant y \leqslant y_0 \leqslant d$, сумми-емы:

$$\int_a^b\int_a^b\int_c^d |R_x|\,dy\,dx_0\,dx < \infty,$$

$$\int_a^b\int_c^d\int_c^d |R_y|\,dy_0\,dy\,dx < \infty.$$

Тогда, на основании выведенных в п. 1.1 равенств (6), (7), (8), почти

---

* См. сноску на стр. 216.

** $R_x$ и $R_y$ не обозначают частных производных от $R$, в отличие от употреб-мого в этой работе обозначения $f_x^{(k)}$ — частной производной $k$-го порядка по $x$ от $f$.

для всех $y \in [c, d]$ имеет место равенство

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\varkappa} \int_G \frac{\alpha_{jk}(x_1 - x_0, \ldots, x_r - x_0)}{W(x_1 - x_0, \ldots, x_r - x_0)} \times$$

$$\times [f(x_k, y) - R_x(x_k, x_0, y)] \frac{(x - x_0)^j}{j!} dG + \frac{1}{\varkappa} \int_G R_x(x, x_0, y)\, dG \quad (3)$$

и почти для всех $x \in [a, b]$ — равенство

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{\varkappa'} \int_{G'} \frac{\beta_{il}(y_1 - y_0, \ldots, y_s - y_0)}{W'(y_1 - y_0, \ldots, y_s - y_0)} \times$$

$$\times [f(x, y_l) - R_y(x, y_l, y_0)] \frac{(y - y_0)^i}{i!} dG' + \frac{1}{\varkappa'} \int_{G'} R_y(x, y, y_0)\, dG', \quad (4)$$

где мы положили

$$W' = W'(y_1 - y_0, \ldots, y_s - y_0) = \begin{vmatrix} 1 & y_1 - y_0 \ldots \frac{(y_1 - y_0)^{s-1}}{(s-1)!} \\ \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 & y_s - y_0 \ldots \frac{(y_s - y_0)^{s-1}}{(s-1)!} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \beta_{il}(y_1 - y_0, \ldots, y_s - y_0) \frac{(y_l - y_0)^i}{i!}$$

и считаем, что $G'$ есть куб, состоящий из точек $(y_0, y_1, \ldots, y_s)$, где $y_l \in \Delta'_{2l}$ $(l = 0, 1, \ldots, s)$ и $\Delta'_l$ образуют систему равных по длине отрезков

$$\Delta'_0, \Delta'_1, \ldots, \Delta'_{2s+1},$$

на которые разделен отрезок $[c, d]$.

Положив в формуле (4) $x = x_k$ и подставив полученное выражение для $f(x_k, y)$ в правую часть равенства (3), получим в результате окончательную формулу:

$$f(x, y) = P(x, y) + F(x, y), \quad (5)$$

где

$$P(x, y) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{l=0}^{s} \frac{1}{\varkappa\varkappa'} \times$$

$$\times \int_G \int_{G'} \frac{\alpha_{jk}\beta_{il}}{WW'} [f(x_k, y_l) - R_y(x_k, y_l, y_0)] \frac{(x - x_0)^j}{j!} \frac{(y - y_0)^i}{i!} dG'\, dG, \quad (6)$$

$$F(x, y) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\varkappa\varkappa'} \int_G \int_{G'} \frac{\alpha_{jk}}{W} R_y(x_k, y, y_0)\, dG'\, dG -$$

$$- \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\varkappa} \int_G R_x(x_k, x_0, y) \frac{(x - x_0)^j}{j!} dG + \frac{1}{\varkappa} \int_G R_x(x, x_0, y)\, dG. \quad (7)$$

$P(x, y)$ представляет собою многочлен степени $r - 1$ по $x$ и степени $s - 1$ по $y$.

1.3. Функции $P(x, y)$ и $F(x, y)$ можно рассматривать как результаты

этветствующих линейных операций над $f(x, y)$:

$$P(x, y) = Q_\sigma(f(x, y); x, y) = Q_\sigma(f) = Q_\sigma^{(r-1, s-1)}(f),$$
$$F(x, y) = U_\sigma(f(x, y); x, y) = U_\sigma(f) = U_\sigma^{(r-1, s-1)}(f). \tag{1}$$

Операции $Q_\sigma$ и $U_\sigma$ применяются к функциям $f$, определенным на прямо-льнике $\sigma$. Подстановка

$$x = a + l\xi, \quad y = c + m\eta \quad (b - a = l,\ d - c = m) \tag{2}$$

еобразует $\sigma$ в единичный квадрат

$$\Delta = \{0 \leqslant \xi,\ \eta \leqslant 1\}.$$

функции $f(a + l\xi, c + m\eta)$, определенной на $\Delta$, применимы операции $(f(a + l\xi, c + m\eta); \xi, \eta)$ и $Q_\Delta(f(a + l\xi, c + m\eta; \xi, \eta)$, которые опреде-ются как частный случай $U_\sigma$ и $Q_\sigma$, когда $\sigma$ совпадает с $\Delta$.

Для каждой рассматриваемой функции $f(x, y)$ имеют место равенства:

$$Q_\sigma(f(x, y); a + l\xi, c + m\eta) = Q_\sigma(f(a + l\xi, c + m\eta; \xi, \eta), \tag{3}$$
$$U_\sigma(f(x, y); a + l\xi, c + m\eta) = U_\sigma(f(a + l\xi, c + m\eta; \xi; \eta). \tag{4}$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства (3), надо выражение, ящее в квадратных скобках равенства (6) п. 1.2, записать, воспользавшись формулой (1) п. 1.1, в виде

$$f(x_k, y_l) - R_y(x_k, y_l, y_0) = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\partial^i f(x_k, y_l)}{\partial y^i} \frac{(y_l - y_0)^i}{i!}$$

учесть, что при замене переменных (2) точки $(x_0, \ldots, x_r)$, $(y_0, \ldots, y_s)$ частей $G$, $G'$ перейдут соответственно в точки $(\xi_0, \ldots, \xi_r)$, $(\eta_0, \ldots, \eta_s)$ частей $G_*$, $G_*'$, определенных как $G$ и $G'$ для единичного квадрата $\Delta$.

Равенство (4) есть следствие равенства (3), так как

$$f = Q_\sigma(f) + U_\sigma(f).$$

1.4. Линейные операции $Q_\sigma$ и $U_\sigma$ являются ограниченными в смысле, торый будет указан ниже.

Обозначим через $\sigma_x$ и $\sigma_y$ прямоугольные параллелепипеды

$$\sigma_x = \{a \leqslant x, x_0 \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$\sigma_y = \{a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y_0, y \leqslant d\}$$

этветственно в пространствах точек $(x, x_0, y)$ $(x, y, y_0)$.

Предположим, что $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p(\sigma)$, $R_x(x, x_0, y) \in L_p(\sigma_x)$, $(x, y, y_0) \in L_q(\sigma_y)$. Тогда существует положительная константа $c_\sigma$, зави-щая от $\sigma$, $p$, $q$, $r$, $s$, но не от $f$, для которой имеют место неравенства:

$$\|P\|_{L_p(\sigma)} < c_\sigma(\|f\|_{L_p(\sigma)} + \|R_y\|_{L_q(\sigma_y)}), \tag{1}$$
$$\|F\|_{L_p(\sigma)} < c_\sigma(\|R_x\|_{L_p(\sigma_x)} + \|R_y\|_{L_q(\sigma_y)}). \tag{2}$$

Чтобы доказать их, достаточно доказать аналогичные неравенства дельно для всех интегралов, входящих в правые части равенств (6) (7) п. 1.2:

$$\varphi = \iint\limits_{G\,G'} \frac{\alpha_{jk}\beta_{il}}{WW'} [f(x_k, y_l) - R_y(x_k, y_l, y_0)] \frac{(x - x_0)^j}{j!} \frac{(y - y_0)^i}{i!} dG\,dG',$$

$$\psi = \iint\limits_{G\,G'} \frac{\alpha_{jk}}{W} R_y(x_k, y, y_0)\, dG'\, dG,$$

$$\chi = \iint\limits_{G\,G'} R_x(x_k, x_0, y) \frac{(x-x_0)^j}{j!} dG'\, dG,$$

$$\omega = \int\limits_G R_x(x, x_0, y)\, dG.$$

Так как функции $\alpha_{jk}$, $\beta_{il}$, $\frac{1}{W}$, $\frac{1}{W'}$, $(x-x_0)^j$, $(y-y_0)^i$ ограничены на $\sigma$ некоторой константой, зависящей от $\sigma$, $r$, $s$, то

$$|\varphi| < c_1 \iint\limits_{G\,G'} |f(x_k, y_l) - R_y(x_k, y_l, y_0)|\, dG\, dG' < c_1 \Big( \int\limits_\sigma |f|\, d\sigma + \int\limits_{\sigma y} |R_y|\, d\sigma_y \Big),$$

$$|\psi| < c'_1 \Big( \int\limits_a^b \int\limits_c^d |R_y(x,\ y,\ y_0)|^q dy_0 dx \Big)^{\frac{1}{q}},$$

откуда

$$\|\varphi\|_{L_p(\sigma)} < c_2 (\|f\|_{L_p(\sigma)} + \|R_y\|_{L_q(\sigma_y)}), \quad \|\psi\|_{L_p(\sigma)} < c_3 \|R_y\|_{L_q(\sigma_y)}.$$

Далее,

$$|\chi| < c_4 \int\limits_a^b \int\limits_a^b |R_x(x, x_0, y)|\, dx\, dx_0 < c_5 \Big( \int\limits_a^b \int\limits_a^b |R_x|^p dx\, dx_0 \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\chi\|_{L_p(\sigma)} < c'_5 \|R_x\|_{L_p(\sigma_x)}.$$

Наконец,

$$|\omega| < c_6 \Big( \int |R_x|^p\, dx_0 \Big)^{\frac{1}{p}},$$

откуда

$$\|\omega\|_{L_p(\sigma_x)} < c_7 \|R_x\|_{L_p(\sigma_x)}.$$

Этим неравенства (1), (2) доказаны.

Если на функцию $f(x, y)$ наложить более сильные условия сравнительно с теми, которые были предположены в начале п. 1.2, то можно написать более детальные выражения для функций $R_x$ и $R_y$ и соответственно прийти к неравенствам, детализирующим неравенства (1) и (2). В последующих двух параграфах будут рассмотрены два таких конкретных случая.

1.5. Пусть $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $r$ и $s$ — положительные целые числа и пусть функция $f(x, y) \in W_{p,\,q}^{(r,\,s)}(\sigma)$. Тогда для $f(x, y)$ имеют смысл формула (1) п. 1.2 для почти всех $y \in [c, d]$ и формула (2) п. 1.2 для почти всех $x$. Больше того, как хорошо известно, имеют место равенства ($a \leqslant x$, $x_0 \leqslant b$):

$$R_x(x, x_0, y) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{x_0}^{x} (u - x_0)^{r-1} f_x^{(r)}(u, y)\, du, \tag{1}$$

$$R_y(x, y, y_0) = \frac{1}{(s-1)!} \int\limits_{y_0}^{y} (v - y_0)^{s-1} f_y^{(s)}(x, v)\, dv. \tag{2}$$

В данном случае $f_x^{(r)} \in L_p(\sigma)$, поэтому

$$|R_x| < c_1 \int_a^b |f_x^{(r)}(x, y)|\, dx < c_2 \left(\int_a^b |f_x^{(r)}(x, y)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

куда

$$\|R_x\|_{L_p(\sigma_x)} < c_3 \|f_x^{(r)}\|_{L_p(\sigma)}. \tag{1}$$

Аналогично, из того, что $f_y^{(s)} \in L_q(\sigma)$, следует, что

$$\|R_y\|_{L_q(\sigma_y)} < c_4 \|f_y^{(s)}\|_{L_q(\sigma)}. \tag{2}$$

Из полученных неравенств (1), (2) вытекает следующее утверждение: Существует константа $c_\sigma$, зависящая от $p$, $q$, $r$, $s$, $\sigma$ и такая, что для ех функций $f \in W_{p,q}^{(r,s)}(\sigma)$ имеют место неравенства:

$$\|P\|_{L_p(\sigma)} \leqslant c_\sigma (\| f \|_{L_p(\sigma)} + \|f_y^{(s)}\|_{L_q(\sigma)}), \tag{3}$$

$$\|F\|_{L_p(\sigma)} \leqslant c_\sigma (\|f_x^{(r)}\|_{L_p(\sigma)} + \|f_y^{(s)}\|_{L_q(\sigma)}), \tag{4}$$

функции $P$ и $F$ определяются равенствами (6), (7) п. 1.2 и $p \geqslant q$.

1.6. Пусть $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $r, s$ — целые, $r-1$, $s-1 \geqslant 0$, $0 < \alpha$, $\leqslant 1$ и функция $f(x, y) \in H_{p,q}^{r-1+\alpha,\, s-1+\beta}(\sigma)$.

Тогда для функции $f(x, y)$ имеют смысл формулы (1) и (2) п. 1.2 соответственно для почти всех $y$ и почти всех $x$ с остатками, которые можно писать следующим образом:

$$R_x(x, x_0, y) = \frac{1}{(r-2)!} \int_{x_0}^{x} (u - x_0)^{r-2} [f_x^{(r-1)}(u, y) - f_x^{(r-1)}(x_0, y)]\, du, \tag{1}$$

$$R_y(x, y, y_0) = \frac{1}{(r-2)!} \int_{y_0}^{y} (v - y_0)^{r-2} [f_y^{(s-1)}(x, v) - f_y^{(s-1)}(x, y_0)]\, dv. \tag{2}$$

В силу того, что $f \in H_{p,q}^{r-1+\alpha,\, s-1+\beta}(\sigma)$, для константы

$$M_f = M_f(\sigma) = M_{p,q}^{(r,s)}(f; \sigma)$$

ют место неравенства ($h > 0$):

$$\left(\int_a^{b-h}\int_c^d |f_x^{(r-1)}(x+h, y) - f_x^{(r-1)}(x, y)|^p\, dy\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M_f h^\alpha, \tag{3}$$

$$\left(\int_a^b\int_c^{d-h} |f_y^{(s-1)}(x, y+h) - f_y^{(s-1)}(x, y)|^q\, dy\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant M_f h^\beta. \tag{4}$$

Докажем, что существует постоянная $c$, не зависящая от $f$, такая, что

$$\|R_x\|_{L_p(\sigma_x)} \leqslant c M_f(\sigma), \quad \|R_y\|_{L_p(\sigma_y)} < c M_f(\sigma). \tag{5}$$

В самом деле, пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$; тогда

$$|R_x| < c_1 \left(\int_{x_0}^{x} |f_x^{(r-1)}(u, y) - f_x^{(r-1)}(x_0, y)|^p\, du\right)^{\frac{1}{p}},$$

поэтому

$$\int_a^b |R_x|^p\,dx_0 < c_2\int_a^x\int_{x_0}^x |f_x^{(r-1)}(u,y)-f_x^{(r-1)}(x_0,y)|^p\,du\,dx_0+$$

$$+c_2\int_x^b\int_x^{x_0} |f_x^{(r-1)}(u,y)-f_x^{(r-1)}(x_0,y)|^p\,du\,dx_0=$$

$$=c_2\int_a^x\int_0^{x-x_0} |f_x^{(r-1)}(x_0+h,y)-f_x^{(r-1)}(x_0,y)|^p\,dh\,dx_0+$$

$$+c_2\int_x^b\int_0^{x_0-x} |f_x^{(r-1)}(x_0-h,y)-f_x^{(r-1)}(x_0,y)|^p\,dh\,dx_0=$$

$$=c_2\int_0^{x-a}\int_a^{x-h} |f_x^{(r-1)}(x_0+h,y)-f_x^{(r-1)}(x_0,y)|^p\,dx_0\,dh+$$

$$+c_2\int_0^{b-x}\int_{x+h}^b |f_x^{(r-1)}(x_0-h,y)-f_x^{(r-1)}(x_0,y)|^p\,dx_0\,dh$$

и

$$\int_c^d\int_a^b |R_x|^p\,dx_0\,dy < c_2\int_0^{x-a}\left(\int_c^d\int_a^{x-h} |f_x^{(r-1)}(x_0+h,y)-f_x^{(r-1)}(x_0,y)|^p\,dx_0\,dy\right)dh+$$

$$+c_2\int_0^{b-x}\left(\int_c^d\int_{x+h}^b |f_x^{(r-1)}(x_0-h,y)-f_x^{(r-1)}(x_0,y)|^p\,dx_0\,dh\right)^p dh.$$

Отсюда, приняв во внимание (3), получим:

$$\|R_x\|^p_{L_p(\sigma_x)} \leqslant c_2\left(\int_0^{x-a} M_f^p h^{\alpha p}dh+\int_0^{b-x} M_f^p h^{\alpha p}\,dh\right) < c_3^p M_f^p.$$

Этим для конечных $p$ доказано первое неравенство (5). Второе неравенство доказывается аналогично. При $p=\infty$ и $q=\infty$ неравенства (5) тривиальным образом вытекают из формул (1), (2), (3) и (4).

Из неравенства (5) и неравенств (1), (2) п. 1.4 вытекает следующее предложение, которое мы сформулируем в несколько других терминах, заменяя $r-1+\alpha$, $s-1+\beta$ соответственно на $r$, $s$ (не целые) и $r-1$, $s-1$ — на $\bar r$, $\bar s$:

Для операций $P=Q_\sigma^{(\bar r,\bar s)}(f)$, $F=U_\sigma^{(\bar r,\bar s)}(f)$ существует константа $c_\sigma$, зависящая от $p$, $q$, $r$, $s$, $\sigma$, такая, что для всех $f\in H_{p,q}^{(r,s)}(\sigma)$ имеют место неравенства:

$$\|P\|_{L_p(\sigma)} \leqslant c_\sigma\|f\|_{H_{p,q}^{(r,s)}(\sigma)}, \tag{6}$$

$$\|F\|_{L_p(\sigma)} \leqslant c_\sigma M_{p,q}^{(r,s)}(f,\sigma). \tag{7}$$

1.7. Все сказанное в предыдущих параграфах по аналогии переносится случай функций

$$f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

$n$ переменных $\bar{x}(x_1, \ldots, x_n)$, заданных на прямоугольном параллелепеде

$$\sigma = \{a_k \leqslant x_k \leqslant b_k;\ k = 1, \ldots, n\}.$$

ли функция $f$ для любого $x_\nu$ имеет частные производные $\frac{\partial^k f}{\partial x_\nu^k}$ $(k=0, 1, \ldots, r_\nu;\ \nu = 1, \ldots, n)$, то ее можно формально представить в виде

$$f = \sum_{j=0}^{r_\nu - 1} \frac{\partial^j f(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu^{(0)}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)}{\partial x_\nu^j} \frac{(x - x_\nu^{(0)})^j}{j!} +$$

$$+ R_\nu(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu, x_\nu^0, x_{\nu+1}, \ldots, x_n) \tag{1}$$

$$(a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \quad a_\nu \leqslant x_\nu^{(0)} \leqslant b_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

функция $R_\nu$ определена на соответствующем $n+1$-мерном параллепипеде

$$\sigma_\nu = \{a_k \leqslant x_k \leqslant b_k,\ a_\nu \leqslant x_\nu^{(0)} = b_\nu\}, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Если допустить, кроме того, что $f \in L(\sigma)$ и $R_\nu = L(\sigma_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, ввести в рассмотрение для каждого $\nu$ куб $G_\nu$, состоящий из точек $\ldots, x_1^{(\nu)}, \ldots, x_{r_\nu}^{(\nu)})$, где $x_k^{(\nu)} \in \Delta_{2k}^{(\nu)}$ и система равных по длине отрезков

$$\Delta_0^{(\nu)}, \Delta_1^{(\nu)}, \ldots, \Delta_{2r_\nu+1}^{(\nu)} \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ят отрезок $(a_\nu, b_\nu)$ на $2r_\nu + 2$ частей, то, рассуждая как в п. 1.2. мы учим $n$ формул, соответствующих разным $\nu$ и аналогичных формуле (3) 1.2, где роль $x, y, x_0, x_1, \ldots, x_r$ соответственно играют $x_\nu(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, \ldots, x_n), x_0^{(\nu)}, \ldots, x_{r_\nu}^{(\nu)}$.

Мы теперь можем подставить выражение для $f$ из $n$-й формулы в правую часть $(n-1)$-й, полученное выражение — в правую часть $(n-2)$-й формулы и т. д., пока не дойдем до формулы, соответствующей $\nu = 1$. езультате получим равенство

$$f = P + F, \tag{2}$$

логичное равенству (5) п. 1.2, где $P$ есть многочлен степеней $r_\nu - 1$ ветственно по $x_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. При этом функции $P$ и $F$ являются льтатами линейных операций

$$P(\bar{x}) = Q_\sigma(f(\bar{x}); \bar{x}) = Q_\sigma(f) = Q_\sigma^{(r_1-1, \ldots, r_n-1)}(f), \tag{3}$$

$$F(\bar{x}) = U_\sigma(f(\bar{x}); \bar{x}) = U_\sigma(f) = U_\sigma^{(r_1-1, \ldots, r_n-1)}(f), \tag{4}$$

дающих свойством:

$$Q_\sigma(f(\bar{x}); a_1 + l_1\xi_1, \ldots, a_n + l_n\xi_n) = Q_\Delta(f(a_1 + l_1\xi_1, \ldots, a_n + l_n\xi_n); \bar{\xi}), \tag{5}$$

$$U_\sigma(f(\bar{x}); a_1 + l_1\xi_1, \ldots, a_n + l_n\xi_n) = U_\Delta(f(a_1 + l_1\xi_1, \ldots, a_n + l_n\xi_n); \bar{\xi}) \tag{6}$$

где

$$l_i = b_i - a_i, \quad x_i = a_i + l_i \xi_i \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

и

$$\Delta \doteq \{0 \leqslant \xi_i \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

— единичный куб в пространстве точек $\bar{\xi}$.

Для чисел $p_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющих условиям:

$$1 \leqslant p_\nu \leqslant \infty, \quad p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_n,$$

в предположении, что $f \in L_{p_1}(\sigma)$, $R_\nu \subset L_{p_\nu}(\sigma_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, имеют место неравенства:

$$\|P\|_{L_{p_1}(\sigma)} < c_\sigma \left(\|f\|_{L_{p_1}(\sigma)} + \sum_2^n \|R_\nu\|_{L_p(\sigma_\nu)}\right), \tag{7}$$

$$\|F\|_{L_{p_1}(\sigma)} < c_\sigma \sum_1^n \|R_\nu\|_{p_\nu(\sigma_\nu)}, \tag{8}$$

аналогичные неравенствам (1), (2) п. 1.4. В неравенствах (7), (8) константа $c_\sigma$ зависит от $r_\nu$, $p_\nu$, $\sigma$, но не от $f$.

Если $f \in W^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(\sigma)$ и $p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n$, то имеют место аналогичные неравенствам (3), (4) п. 1.5 неравенства

$$\|P\|_{L_{p_1}(\sigma)} \leqslant c_\sigma \left(\|f\|_{L_{p_1}(\sigma)} + \sum_2^n \|f^{(r_\nu)}_{x_\nu}\|_{L_{p_\nu}(\sigma)}\right), \tag{9}$$

$$\|F\|_{L_{p_1}(\sigma)} \leqslant c_\sigma \sum_1^n \|f^{(r_\nu)}_{x_\nu}\|_{L_{p_\nu}(\sigma)}, \tag{10}$$

$$P = Q_\sigma^{(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)}(f), \quad F = U_\sigma^{(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)} \quad (\bar{r}_\nu = r_\nu - 1, \nu = 1, \ldots, n),$$

где $f^{(r_\nu)}_{x_\nu}$ обозначает частную производную от $f$ по $x_\nu$ порядка $r_\nu$.

Наконец, если $r_1, \ldots, r_n$ — положительные не целые и числа $p_i$ удовлетворяют неравенствам $p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n$, то для всякой функции $f \in H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$ имеют место неравенства:

$$\|P\|_{L_{p_1}(\sigma)} \leqslant c_\sigma \|f\|_{H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(\sigma)}, \tag{11}$$

$$\|F\|_{L_{p_1}(\sigma)} \leqslant c_\sigma M^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(f; \sigma), \tag{12}$$

$$P = Q_\sigma^{(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)}(f), \quad F = U_\sigma^{(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)}(f).$$

В неравенствах (9), (10), (11), (12) константа $c_\sigma$ зависит от входящих в соответствующие классы параметров и от $\sigma$, но не от $f$.

## § 2. Теоремы о продолжении и теоремы вложения для прямоугольного параллелепипеда

2.1. Пусть по-прежнему $\sigma$ обозначает произвольный прямоугольный параллелепипед в $R_n$ с ребрами, параллельными осям координат.

2.1.1. ТЕОРЕМА. *Пусть $r_i$ — целые, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$, и функция $f \in W^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(\sigma)$. Тогда возможно продолжить функцию $f$ на прост-*

*ранство $R_n$ так, что продолженная функция $\bar f \in W^{(r_1,\dots,r_n)}_{p_1,\dots,p_n}(R_n)$ и при этом существует константа $c_\sigma$, зависящая от $p_i$, $r_i$, $\sigma$, но не от $f$, такая, что для всех $f \in W^{(r_1,\dots,r_n)}_{p_1,\dots,p_n}(\sigma)$ выполняется неравенство*

$$\|\bar f\|_{W^{(r_1,\dots,r_n)}_{p_1,\dots,p_n}(R_n)} < c'_\sigma \|f\|_{W^{(r_1,\dots,r_n)}_{p_1,\dots,p_n}(\sigma)}. \qquad (1)$$

2.1.2. ТЕОРЕМА. *Пусть числа $r_i$ — не целые *, $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ $(i = 1,\dots, n)$, и функция $f \in H^{(r_1,\dots,r_n)}_{p_1,\dots,p_n}(\sigma)$. Тогда возможно продолжить функцию $f$ на пространство $R_n$ так, что продолженная функция $\bar f \in H^{(r_1,\dots,r_n)}_{p_1,\dots,p_n}(R_n)$ и при этом существует константа $c$, зависящая от $p_i$, $r_i$, но не от $f$ и $\sigma$, такая, что для всех $f \in H^{(r_1,\dots,r_n)}_{p_1,\dots,p_n}(\sigma)$ выполняется неравенство*

$$\|\bar f\|_{H^{(r_1,\dots,r_n)}_{p_1,\dots,p_n}(R_n)} < c'_\sigma \|f\|_{H^{(r_1,\dots,r_n)}_{p_1,\dots,p_n}(\sigma)}.$$

Справедливость сформулированных двух теорем устанавливается аналогично тому, как это делалось в случае классов $W^{(r_1,\dots,r_n)}_p$ и $H^{(r_1,\dots,r_n)}_p$ [см. ([4])].

В одномерном случае $n = 1$ и $r = r_1 < 1$ теорема 2.1.2 доказана В. К. Дзядыком ([1]); при $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} > r$ она просто следует из одного результата Катнера ([3]).

2.2. ЛЕММА. 1) *Пусть заданы числа $r_i$, $p_i$ $(i = 1, \dots, n)$, $q$ и натуральные числа $n$ и $m$, для которых выполняются неравенства*

$$r_i > 0, \quad 1 \leqslant p_i \leqslant q \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant m \leqslant n, \quad \rho_i = \frac{r_i \varkappa}{\varkappa_i} > 0, \qquad (1)$$

*где*

$$\varkappa = \begin{vmatrix} 1 - \sum\limits_{l=1}^{n} \dfrac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{q}}{r_l} & -\dfrac{1}{q}\sum\limits_{1}^{n} \dfrac{1}{r_l} \\ -\sum\limits_{m+1}^{n} \dfrac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{q}}{r_l} & 1 - \dfrac{1}{q}\sum\limits_{m+1}^{n} \dfrac{1}{r_l} \end{vmatrix} > 0, \qquad (2)$$

$$\varkappa_i = 1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p_i}}{r_l} \quad (i = 1, \dots, n). \qquad (3)$$

2) *Пусть задан прямоугольный параллелепипед*

$$\sigma = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1, \dots, n\},$$

* Для целых $r_i$ эта теорема, надо полагать, тоже верна, но пока не доказана даже при $n = 1$.

*длина* $l_i = b_i - a_i$ *ребер которого удовлетворяет соотношению*

$$\frac{l_1^{r_1}}{\left(\prod_{k=1}^{n} l_k\right)^{\frac{1}{p_1}}} = \cdots = \frac{l_n^{r_n}}{\left(\prod_{k=1}^{n} l_k\right)^{\frac{1}{p_n}}}. \quad (4)$$

*Обозначим через* $\sigma_m$ *m-мерное сечение* $\sigma$, *состоящее из всех точек* $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *с фиксированными постоянными* $x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$.

3) *Пусть* $f \in W_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(\sigma)$ *(при целых* $r_i$*).*

*Тогда*

$$F = U_\sigma^{(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)}(f) = U_\sigma(f) \in H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}(\sigma_m), \qquad \bar{r}_i = r_i - 1 \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (5)$$

*и для некоторой константы* $\lambda$, *не зависящей от* $f$ *и* $\sigma$, *имеет место неравенство*

$$M_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}(F; \sigma_m) \leqslant \lambda \sum_1^n \left\| \frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}} \right\|_{L_{p_k}(\sigma)} \quad (6)$$

2.2.1. Доказательство леммы 2.2 в случае $\sigma = \Delta$*. Пусть $f \in W_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(\Delta)$. Тогда функция $F = U_\Delta(f)$ отличается от $f$ на многочлен $P$ степеней $r_i - 1$ соответственно по $x_i$. Поэтому

$$\frac{\partial^{r_i} f}{\partial x_i^{r_i}} = \frac{\partial^{r_i} F}{\partial x_i^{r_i}} \quad (i = 1, \ldots, n), \quad F \in W_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(\Delta) \quad (1)$$

и

$$\sum_1^n \| f_{x_i}^{(r_i)} \|_{L_{p_i}(\Delta)} = \sum_1^n \| F_{x_i}^{(r_i)} \|_{L_{p_i}(\Delta)}. \quad (2)$$

Согласно 2.1.1, функцию $F$ можно продолжить на пространство $R_n$ так, что для продолженной функции $\bar{F}$ будет выполняться неравенство (1) п. 2.1.1, где $\sigma = \Delta$.

Отсюда

$$\|\bar{F}\|_{H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(R_n)} < c_1 \|\bar{F}\|_{W_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(R_n)} <$$

$$< c_1 c'_\Delta \| F \|_{W_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(\Delta)} = c_1 c'_\Delta \left( \|F\|_{L_{p_1}(\Delta)} + \sum_1^n \| F_{x_k}^{(r_k)} \|_{L_{p_k}(\Delta)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_1 c'_\Delta (c_\Delta + 1) \sum_1^n \| f_{x_k}^{(r_k)} \|_{L_{p_k}(\Delta)} \quad (p_1 \geqslant \ldots \geqslant p_n). \quad (3)$$

Последнее неравенство имеет место на основании (2) и формулы (10) п. 1.7.

Теперь мы можем применить общую теорему, доказанную в работе ([6]) (стр. 326), в силу которой можно утверждать, что функция $\bar{F} \in H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}(R_m)$ и

$$\|\bar{F}\|_{H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}(R_m)} < c_2 \|\bar{F}\|_{H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(R_n)}, \quad (4)$$

---

* $\Delta$ есть единичный куб.

так как $F = \overline{F}$ на $\Delta_m$ и, таким образом,

$$M_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}(F, \Delta_m) \leqslant \|F\|_{H_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}(\Delta_m)} = \|\overline{F}\|_{H_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}(R_m)},$$

о окончательно из (4) и (3) будет следовать, что $F \in H_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}(\Delta_m)$, и праведливость неравенства (6) п. 2.2:

$$M_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}(F, \Delta_m) < \lambda \sum_1^n \left\| \frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}} \right\|_{L_{p_k}(\Delta)},$$

де можно положить

$$\lambda = c_1 c'_\Delta (c_\Delta + 1) c_2.$$

2.2.2. Доказательство леммы 2.2 в общем случае. Не нарушая общности, будем считать, что

$$a_i = 0, \quad b_i = l_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть $f \in W_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots r_n)}$. Положим

$$0 < \beta < \beta + h \leqslant l_1, \quad x_i = l_i \xi_i, \quad h = l_1 h_1, \quad \beta = l_1 \alpha.$$

Тогда, если $\rho_1$ не целое, то

$$\left(\int_0^\beta \int_0^{l_r} \cdots \int_0^{l_m} |F_{x_1}^{(\overline{\rho}_1)}(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - F_{x_1}^{(\overline{\rho}_1)}(x_1, \ldots, x_n)|^q \, dx_1 \ldots dx_m\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_0^\alpha \int_0^1 \cdots \int_0^1 |F_{x_1}^{(\overline{\rho}_1)}(l_1(\xi_1 + h_1), l_2 \xi_2, \ldots, l_m \xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) -\right.$$

$$\left. - F_{x_1}^{(\overline{\rho}_1)}(l_1 \xi_1, \ldots, l_m \xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)|^q \, d\xi_1 \ldots d\xi_m\right)^{\frac{1}{q}} \left(\prod_{i=1}^m l_i\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_0^\alpha \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \frac{\partial^{\overline{\rho}_1}}{\partial \xi_1^{\overline{\rho}_1}} F(l_1(\xi_1 + h_1), l_2 \xi_2, \ldots, l_m \xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) -\right.\right.$$

$$\left. - \frac{\partial^{\overline{\rho}_1}}{\partial \xi_1^{\overline{\rho}_1}} F(l_1 \xi_1, \ldots, l_m \xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)|^q \, d\xi_1 \ldots d\xi_m\right)^{\frac{1}{q}} \left(\prod_{i=1}^m l_i\right)^{\frac{1}{q}} l_1^{-\overline{\rho}_1} \leqslant$$

$$\leqslant \text{в силу неравенства (6) п. 2.2} \leqslant \lambda h_1^{\rho_1 - \overline{\rho}_1} \left(\prod_1^m l_i\right)^{\frac{1}{q}} l_1^{-\overline{\rho}_1} \times$$

$$\times \sum_1^n \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \frac{\partial^{r_i} F}{\partial \xi_i^{r_i}}(l_1 \xi_1, \ldots, l_n \xi_n) \right|^{p_i} d\xi_1, \ldots, d\xi_n\right)^{\frac{1}{p_i}} =$$

$$\lambda h^{\rho_1 - \overline{\rho}_1} \left(\prod_1^m l_i\right)^{\frac{1}{q}} l_1^{-\rho_1} \sum_{i=1}^n \|F_{x_i}^{(\overline{r}_i)}\|_{L_{p_i}(\sigma)} = \lambda \sum_1^n \left\| \frac{\partial^{r_i} f}{\partial x_i^{r_i}} \right\|_{L_{p_i}(\sigma)} h^{\rho_1 - \overline{\rho}_1} \quad (h > 0). \quad (1)$$

Дело в том, что из соотношений (4) п. 2.2 следует, что

$$l_i = \exp\left\{\frac{\lambda}{r_i}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_i}}{r_k}\right)\right\}, \tag{2}$$

где $\lambda$ — произвольное число, откуда

$$\left(\prod_1^m l_i\right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p_i}} \left(\prod_{m+1}^n l_i\right)^{-\frac{1}{p_1}} l_1^{r_1 - \bar{\rho}_1} = 1. \tag{3}$$

Если $\rho_1$ — целое, то, производя выкладки, совершенно аналогичные приведенным в формуле (1), мы получим:

$$\left(\int_0^{\beta}\int_0^{l_1}\ldots\int_0^{l_m} |F_{x_1}^{(\bar{\rho}_1)}(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - 2F_{x_1}^{(\bar{\rho}_1)}(x_1, \ldots, x_n) + \right.$$

$$\left. + F_{x_1}^{(\bar{\rho}_1)}(x_1 - h, x_2, \ldots, x_n)|^q\, dx_1 \ldots dx_m\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \lambda \sum_1^n \left\| \frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}} \right\|_{L_{p_k}(\sigma)} h. \tag{4}$$

Неравенства, подобные (1) и (4), можно получить, рассматривая нормы, в смысле $L_q(\sigma)$, приращения функций $f_{x_k}^{(\rho_k)}$, соответствующие приращениям аргументов $x_k\,(k = 2, \ldots, n)$, что доказывает неравенство (6) п. 2.2.

2.2.3. ЛЕММА. *Пусть выполняются условия* 1) *и* 2) *леммы* 2.2 *и, кроме того, пусть*

3) $f \in H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(\sigma)$ ($r_i$ — *не целые* *).

*Тогда*

$$F = U_{\sigma}^{(\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)}(f) = U_{\sigma}(f) \in H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}(\sigma_m)$$

*и для некоторой константы* $\lambda$, *не зависящей от* $f$ *и* $\sigma$, *имеет место неравенство*

$$M_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}(F; \sigma_m) < \lambda M_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(f; \sigma). \tag{1}$$

2.2.4. Доказательство леммы 2.2.3 при $\sigma = \Delta$. Пусть $f \in H_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(\Delta)$ и $r_i$ — не целые. Тогда функция $F = U_{\Delta}(f)$ отличается от $f$ на многочлен $P$ степеней $\bar{r}_i$ соответственно по $x_i$. Поэтому

$$\Delta_{hx_i} P_{x_i}^{(\bar{r}_i)} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \; **,$$

откуда

$$\Delta_{hx_i} f_{x_i}^{(\bar{r}_i)} \equiv \Delta_{hx_i} F_{x_i}^{(\bar{r}_i)} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$M_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(f; \Delta) = M_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(F, \Delta).$$

Дальше рассуждения ведутся так же, как в п. 2.2.1, на основании 2.1.2 и неравенства (12) п. 1.7.

---

* Для целых $r_i$ эта теорема, надо полагать, тоже верна. Во всяком случае, если неравенство (1) верно при одном $\sigma$ для некоторой константы $\lambda$, то оно верно и при всяком другом $\sigma$ при той же константе $\lambda$.

** Мы считаем, что $\Delta_{hx_i} f = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$.

2.2.5. Доказательство леммы 2.2.3 в общем случае. Будем для простоты снова считать, что

$$a_i = 0, \quad b_i = l_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть $f \in H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(\sigma)$ ($r_i$ — не целые). Положим $0 < \beta < \beta + h \leqslant l_1$, $x_i = l_i\xi_i$, $h = l_1 h_1$, $\beta = l_1\alpha$. Тогда если $\bar{\rho}_1$ — не целое, то

$$\left(\int_0^\beta \int_0^{l_2} \cdots \int_0^{l_m} |F^{(\bar{\rho}_1)}_{x_1}(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - F^{(\bar{\rho}_1)}(x_1, \ldots, x_n)|^q \, dx_1 \ldots dx_m\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_0^\alpha \int_0^1 \cdots \int_0^1 |F^{(\bar{\rho}_1)}_{x_1}(l_1(\xi_1 + h_1), l_2\xi_2, \ldots, l_m\xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) -\right.$$

$$\left. - F^{(\bar{\rho}_1)}_{x_1}(l_1\xi_1, \ldots, l_m\xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)|^q \, d\xi_1 \ldots d\xi_m\right)^{\frac{1}{q}} \left(\prod_1^m l_i\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\int_0^\alpha \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left|\frac{\partial^{\bar{\rho}_1}}{\partial \xi_1^{\bar{\rho}_1}} F(l_1(\xi_1 + h_1), l_2\xi_2, \ldots, l_m\xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) -\right.\right.$$

$$\left. - \frac{\partial^{\bar{\rho}_1}}{\partial \xi_1^{\bar{\rho}_1}} F(l_1\xi_1, \ldots, l_m\xi_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)\right|^q d\xi_1 \ldots d\xi_m\Big)^{\frac{1}{q}} \left(\prod_{i=1}^m l_i\right)^{\frac{1}{q}} l_1^{-\bar{\rho}_1} \leqslant$$

$\leqslant$ в силу неравенства (1) п. 2.2.3 $\leqslant$

$$\leqslant \lambda \left(\prod_{i=1}^m l_i\right)^{\frac{1}{q}} l_1^{-\bar{\rho}_1} \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{0 < \alpha_i < \alpha_i + h_i \leqslant 1} h_i^{\bar{r}_i - r_i} \times$$

$$\times \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^{\alpha_i} \int_0^1 \cdots \int_0^1 |F^{(\bar{r}_i)}_{x_i}(l_1\xi_1, \ldots, l_{i-1}\xi_{i-1}, l_i(\xi_i + h_i), l_i\xi_{i+1}, \ldots, l_n\xi_n) -\right.$$

$$\left. - F^{(\bar{r}_i)}_{x_i}(l_1\xi_1, \ldots, l_n\xi_n)|^{p_i} l_i^{\bar{r}_i p_i} d\xi_1 \ldots d\xi_n\right)^{\frac{1}{p_i}} h_1 =$$

$$= \lambda \left(\prod_{i=1}^m l_i\right)^{\frac{1}{q}} l_1^{-\bar{\rho}_1} \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{0 < \beta_i < \beta_i + h_i < l_i} h_i^{\bar{r}_i - r_i} \times$$

$$\times \left(\int_0^{l_1} \cdots \int_0^{l_{i-1}} \int_0^{\beta_i} \int_0^{l_{i+1}} \cdots \int_0^{l_n} | f^{(\bar{r}_i)}_{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) -\right.$$

$$\left. - f^{(\bar{r}_i)}_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)|^{p_i} dx_1, \ldots, dx_n\right)^{\frac{1}{p_i}} l_i^{r_i} \left(\prod_1^n a_k\right)^{-\frac{1}{p_i}} h^{\rho_1 - \bar{\rho}_1} l_1^{\bar{\rho}_1 - \rho_1} =$$

$$= \text{в силу равенства (3) п. 2.2.2} = \lambda M^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(f; \Delta) h^{\rho_1 - \bar{\rho}_1} \quad (h > 0). \quad (1)$$

Аналогичные неравенства можно получить, рассматривая приращения $x_k$ при $k = 1, \ldots, m$. Если же при каком-либо $k$ $\bar{\rho}_k$ — целое, то следует рассматривать вместо первой разности вторую, что приводит к тому же результату.

## § 3. Определение класса $w_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$.

В п. 0. 4 рассматривался подобный класс, в обозначение которого входила прописная буква $W$.

3.1. Пусть числа $r_k$ — целые.

По определению, функция $f$, заданная на открытом множестве $G$, принадлежит к классу $w_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$, если она имеет на $G$ обобщенные (см. 0.3) несмешанные частные производные $\frac{\partial^s f}{\partial x_k^s}$ $(s=0,1,\ldots,r_k;\ k=1,\ldots,n)$. При этом для высших производных выполняется условие:

$$\left\|\frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|_{L_{p_k}(G)} < \infty \quad (k=1,\ldots,n).$$

3.2. ЛЕММА. *Если $G=\sigma$ есть прямоугольный конечный параллелепипед*

$$\sigma=\{a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \quad k=1,\ldots,n\},$$

*то*

$$w_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(\sigma) \subset W_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(\sigma).$$

Доказательство. Ограничимся случаем двух переменных $x=x_1$, $y=x_2$. Пусть

$$f(x,y)=w_{p_1,p_2}^{(r_1,r_2)}(\sigma).$$

Тогда функцию $f(x,y)$ возможно видоизменить на множестве двумерной меры нуль так, что существует множество $E_y' \subset [a_2,b_2]$ *, отличающееся от $[a_2,b_2]$ на множество одномерной меры нуль и обладающее следующим свойством:

Для всякого $y \in E_y'$ функция $f(x,y)$, рассматриваемая как функция от $x$, имеет на любом отрезке $[c,d]$ абсолютно непрерывные производные $f_x^{(k)}(x,y)$ до порядка $r_1-1$ включительно. Кроме того, существующая почти всюду производная $f_x^{(r_1)}(x,y)$ по условию обладает свойством

$$\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} |f_x^{(r_1)}(x,y)|^{p_1}\,dx\,dy < \infty, \tag{1}$$

откуда следует, что функция

$$\psi(y)=\int_{a_1}^{b_1} |f_x^{(r_1)}(x,y)|^{p_1}\,dx$$

измерима на $[a_2,b_2]$ и конечна на некотором множестве $E_y''[a_2,b_2]$, отличающемся от $[a_2,b_2]$ на множество одномерной меры нуль. Но в таком случае для всех $y \in E_y = E_y' E_y''$ функция $f(x,y)$, рассматриваемая как функция от $x$, является абсолютно непрерывной на всем отрезке $[a_1,b_1]$ вместе со своими производными $f_x^{(k)}$ $(k=0,1,\ldots,r_1-1)$ и имеет место представление:

$$f(x,y)=\sum_{0}^{r_1-1}\frac{(x-a_1)^k}{k!}\underset{[a_1\leqslant x\leqslant b_1]}{f_x^{(k)}(a_1,y)}+\frac{1}{(r_1-1)!}\int_{a_1}^{x}(x-a_1)^{r_1-1}f_x^{(r_1)}(u,y)\,du. \tag{2}$$

---

* $[a,b]$ — замкнутый отрезок, $(a,b)$ — открытый отрезок.

С другой стороны, функцию $f(x, y)$ можно второй раз видоизменить а множестве двумерной меры нуль, после чего, на основании рассуж-ений, аналогичных приведенным выше, можно указать множество $E_x \subset [a_1, b_1]$ такое, что если $x \in E_x$, то $f(x, y)$ по $y$ абсолютно непрерывна а полном отрезке $[a_2, b_2]$. При этом, очевидно, можно выбрать различные очки $x_1, \ldots, x_{r_1} \in E_x$ так, что функции $f(x_k, y)$ $(k = 1, \ldots r_1)$, полученные осле второго видоизменения $f$, будут соответственно отличаться от $(x_k, y)$, полученных после первого видоизменения, на множества одно-ерной меры нуль.

Таким образом, если в формуле (2) (где $f$ понимается в смысле пер-ого видоизменения) подставить последовательно вместо $x$ $x_k$, то левые е части будут принадлежать по переменной $y$ к $L_{p_1}[a_2, b_2]$. Остаточные лены также принадлежат к $L_{p_1}[a_2, b_2]$, но тогда и каждая из функций $^{(k)}(a_1, y) \in L_{p_1}[a_2, b_2]$ $(k = 0,1, \ldots, r_1 - 1)$, так как определитель (Вандер-онда), составленный из коэффициентов при этих функциях, не равен улю.

Отсюда, учитывая (1), легко вывести, что $f(x, y) \in L_{p_1}(\sigma)$. Из соответ-вующих формул, полученных дифференцированием равенства (2) $k$ раз $\leqslant r_1 - 1)$ по $x$, легко заключить, что и $f_x^{(k)}(x, y) \in L_{p_1}(\sigma)$.

Аналогично доказывается, что $f_y^{(k)}(x, y) \in L_{p_2}(\sigma)$ $(k = 0, 1, \ldots, r_2 - 1)$, о доказывает утверждение.

3.3 ЛЕММА. *Если область $G$ ограничена двумя поверхностями вида $= \psi_i(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ $(i = 1,2)$, содержит в себе прямоуголь-й параллелепипед*

$$\sigma = \{a_s \leqslant x_s \leqslant b_s, \quad s = 1, \ldots, n\}$$

*е проекция в направлении $x_k$ на плоскость $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ впадает с такой же проекцией $\sigma$, т. е. с* *

$$\sigma^{(k)} = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}.$$

*ь*

$$w_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G) \subset W_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G).$$

Доказательство. Ограничимся случаем $n = 2$. Если $f \in w_{p_1, p_2}^{(r_1, r_2)}(G)$, на основании рассуждений, приведенных при доказательстве преды-щей леммы для всех $y \in E_y$ и $x \in [a_1, b_1]$, функцию $f(x, y)$ можно пред-вить по формуле (2) п. 3.2 на $\sigma$, а также, очевидно, и на $G$. При этом

$$f_x^{(k)}(a_1, y) \in L_{p_1}[a_2, b_2] \quad (k = 0,1, \ldots, r_1 - 1).$$

Пусть $x = \psi(y)$, $y \in [a_2, b_2]$ есть уравнение кривой части границы $G$, пусть

$$|\psi(y)| \leqslant K, \quad \frac{(\psi(y) - a_1)^k}{k!} \leqslant K \quad (k = 0, \ldots, r_1 - 1, \ a_2 \leqslant y \leqslant b_2).$$

---

* Отмечу, что подобные области по другому поводу рассматривались Ю. Д. Ка-ако в его курсовой работе.

Тогда

$$\|f\|_{L_{p_1}(\sigma)} \leqslant K \left\{ \sum_{0}^{r_1-1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{\psi(y)} |f_x^{(k)}(a_1, y)|^{p_1} dx\, dy \right)^{\frac{1}{p_1}} + \right.$$

$$\left. + \left( \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{\psi(y)} \left| \int_{a_1}^{x} f_x^{(r_1)}(u, y)\, du \right|^{p_1} dx\, dy \right)^{\frac{1}{p_1}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant K^{1+\frac{1}{p_1}} \left\{ \sum_{0}^{r_1-1} \|f_x^{(k)}(a_1, y)\|_{L_{p_1}(a_2, b_2)} + \|f_x^{(r_1)}\|_{L_{p_1}(\sigma)} \right\} < \infty.$$

Продифференцировав $s$ раз по $x$ равенство (2) и производя оценки, аналогичные (2), получим:

$$\left\| \frac{\partial^s f}{\partial x^s} \right\|_{L_{p_1}(\sigma)} < \infty \quad (s = 0, 1, \ldots, r_1 - 1).$$

Подобным образом получаются неравенства

$$\left\| \frac{\partial^s f}{\partial y^s} \right\|_{L_{p_2}(\sigma)} < \infty \quad (s = 0, 1, \ldots, r_2 - 1).$$

Лемма доказана.

Как следствие, из нее вытекает

3.4. ТЕОРЕМА. *Если область $G$ есть (теоретико-множественная) сумма конечного числа областей, определенных в п. 3.3, то*

$$w_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G) \subset W_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G).$$

3.5. Заметим, что для несвязных открытых множеств (в том числе ограниченных) теорема 3.4, вообще говоря, неверна. В этом можно, например, убедиться, рассматривая множество $G$, состоящее из счетного числа не связанных между собой компонент $G_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Если, например, $f \in w_{p_1, p_2}^{(1,1)}(G)$, то, не изменяя принадлежности к классу, можно видоизменить $f$, прибавляя к $f$ на $G_k$ соответствующую константу $c_k$ так, чтобы видоизмененная функция $\bar{f}$ не была суммируемой в нужных степенях на $G$.

## § 4. Определение классов $\bar{h}_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G)$, $\bar{H}_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G)$ для произвольной области $G \subset R$

4.1. Как уже было отмечено в п. 2.2.2, все решения системы уравнений

$$\frac{l_1^{r_1}}{\left(\prod_{k=1}^{n} l_k\right)^{\frac{1}{p_1}}} = \cdots = \frac{l_n^{r_n}}{\left(\prod_{k=1}^{n} l_k\right)^{\frac{1}{p_n}}} \tag{1}$$

можно определить по формуле

$$l_i = \exp\left\{ \frac{\lambda}{r_i} \left( 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_i}}{r_k} \right) \right\} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где $\lambda$ — произвольное число.

Можно считать, что каждый класс $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}$ определяет некоторую истему чисел

$$l_i(\lambda) \quad (i=1,\ldots,n). \tag{3}$$

Если числа $r_i, p_i, q$ удовлетворяют условиям 1) леммы 2.2 при $. = n$, то (как уже доказано для прямоугольной области) имеет место ложение классов

$$H^{(\rho'_1,\ldots,\rho'_n)}_{q} \subset H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n},$$

де

$$\rho'_i = \frac{r_i\varkappa'}{\varkappa'_i} > 0, \quad \varkappa' = 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{q}}{r_k} > 0,$$

$$\varkappa'_1 = 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{p_i}}{r_k} \quad (i=1,\ldots,n).$$

истема чисел

$$l'_i(\mu) \quad (i=1,\ldots,n), \tag{4}$$

оответствующая классу $H^{(\rho'_1,\ldots,\rho'_n)}_{q}$, определяется по формуле

$$l'_i(\mu) = \exp\left\{\frac{\mu}{\rho'_i}\right\} = \exp\left\{\frac{\mu\varkappa_i}{r_i\varkappa'}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{r_i}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{p_k}-\frac{1}{p_i}}{r_k}\right)\right\} \quad (i=1,\ldots,n), \tag{5}$$

е $\lambda = \frac{\mu}{\varkappa'}$, т. е. совпадает с системой (2).

Если числа $r_i$, $p_i$, $q$ удовлетворяют условиям леммы 2.2.3 при некоором $m\,(1 \leqslant m \leqslant n)$, то имеет место дальнейшее вложение классов

$$H^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}_{q} \subset H^{(\rho'_1,\ldots,\rho'_n)}_{q}.$$

При этом система чисел $l''_j(\mu)$ $(j=1,\ldots,m)$, соответствующая клас- $H^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}_{q}$, определяется по формуле

$$l''_j(\nu) = \exp\left\{\frac{\nu}{\rho_j}\right\},$$

е

$$\rho_j = \varkappa''\rho'_i, \quad \varkappa'' = 1 - \frac{1}{q}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{\rho'_j} \quad (\varkappa''_i = 1),$$

е., полагая $\mu = \frac{\nu}{\varkappa''}$, получим:

$$l''_j(\nu) = \exp\left\{\frac{\mu}{\rho'_j}\right\} \quad (j=1,\ldots,m), \tag{6}$$

е $\mu$ — произвольная постоянная *. Сравнивая (6) с (5), заключаем, что стема $l''_j$ $(j=1,\ldots,m)$ эквивалентна системе $l'_j$ $(j=1,\ldots,m)$ первых $m$ сел системы $l'_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

* Известно [см. (6)], что здесь имеет место транзитивный закон: переход от $\begin{pmatrix} r_1,\ldots,r_n \\ p_1,\ldots,p_n\end{pmatrix}$ к II $\begin{pmatrix} \rho'_1,\ldots,\rho'_n \\ q,\ldots,q\end{pmatrix}$ и отсюда к III $\begin{pmatrix} \rho_1,\ldots,\rho_m \\ q,\ldots,q\end{pmatrix}$ эквивалентен непосредственному переходу от I к III.

Из сказанного вытекает следующее утверждение.

4.2. Если система $\{l_1(\lambda), \ldots, l_n(\lambda)\}$ соответствует классу $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$ то система $\{l_1(\lambda), \ldots, l_m(\lambda)\}$ соответствует классу $H^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}_q \subset H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$, однозначно определяемому теоремой вложения при заданном натуральном $m \leqslant n$ и любом $q \geqslant p_i \, (i = 1, \ldots, n)$.

4.3. Зададим теперь число $h > 0$ и определим в пространстве $R_n$ прямоугольный параллелепипед (основной параллелепипед)

$$\sigma^{(\nu)}(h) = \sigma^{(\nu)}\begin{pmatrix} r_1, \ldots, r_n \\ p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix} h \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

соответствующий направлению $x_\nu$, следующим образом. Параллелепипед $\sigma^{(\nu)}(h)$ имеет ребра $l_i^{(\nu)}(h)$, параллельные соответственно осям $x_i$, система чисел $\{l_i^{(\nu)}(h)\}$ соответствует классу $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$ (удовлетворяет уравнениям (1) п. 4.1) и имеет место равенство

$$l_\nu^{(\nu)}(h) = 2h. \tag{2}$$

Равенство (2) (в силу формулы (2) п. 4.1) однозначно определяет длины остальных ребер $l_1^{(\nu)}(h), \ldots, l_{\nu-1}^{(\nu)}(h), l_{\nu+1}^{(\nu)}(h), \ldots, l_n^{(\nu)}(h)$.

Из сказанного в. п. 4.2 следует, что для классов вложения

$$H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)} \subset H_q^{(\rho'_1, \ldots, \rho'_n)} \subset H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n},$$

о которых шла речь в предыдущих пунктах, имеет место равенство:

$$\sigma^{(\nu)}\begin{pmatrix} r_1, \ldots, r_n \\ p_1, \ldots, p_n \end{pmatrix} h = \sigma^{(\nu)}\begin{pmatrix} \rho'_1, \ldots, \rho'_n \\ q, \ldots, q \end{pmatrix} h \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

т. е. совпадение соответствующих основных параллелепипедов; кроме того, основной параллелепипед

$$\sigma^{(\nu)}\begin{pmatrix} \rho_1, \ldots, \rho_m \\ q, \ldots, q \end{pmatrix} h \quad (\nu = 1, \ldots, m)$$

есть проекция соответствующего основного параллелепипеда (3) на плоскость $(x_1, \ldots, x_m)$.

4.4. В предыдущем пункте были определены основные параллелепипеды $\sigma^{(\nu)}(h) \, (\nu = 1, \ldots, n)$, соответствующие классу * $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$. Нам еще будет удобно ввести ($n$-мерные) параллелепипеды $\sigma^{(\nu)}(h)_*$ (со звездочкой), каждый из которых определяется следующим образом: его ребра параллельны осям координат, и все они, за исключением $\nu$-го ребра (параллельного оси $x_\nu$), равны соответствующим ребрам $\sigma^{(\nu)}(h)$, а $\nu$-е ребро имеет длину, равную $h$, т. е. равную половине длины соответствующего ребра $\sigma^{(\nu)}(h)$. Таким образом, $\sigma^{(\nu)}(h)_*$ есть одна из половинок $\sigma^{(\nu)}(h)$, полученная рассечением $\sigma^{(\nu)}(h)$ плоскостью, перпендикулярной к оси $x_\nu$ и проходящей через середину $\nu$-го ребра $\sigma^{(\nu)}(h)$.

Зададим положительные числа $r_i$, $p_i \, (1 \leqslant p_i \leqslant \infty)$ и $h$ и произвольную область $G \subset R_n$.

---

* или классу $W^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$ при $r_i$ целых.

Введем прямоугольную сеть *

$$N^{(\nu)}(h) = N^{(\nu)}\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_n & h \\ r_1, \ldots, r_n & \end{pmatrix},$$

азбивающую $R_n$ на равные между собой параллелепипеды

$$\sigma^{(\nu)}(h)_* = \sigma^{(\nu)}\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_n & h \\ r_1, \ldots, r_n & \end{pmatrix}_* \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Рассмотрим (при данном $\nu$) два непосредственно рядом стоящих в на- эавлении $x_\nu$ параллелепипеда $\sigma^{(\nu)}(h)_*$ (т. е. имеющих общую грань, эрпендикулярную оси $x_\nu$). Про тот из них, который состоит из точек большей координатой $x_\nu$, будем говорить, что он находится правее горого (в направлении $x_\nu$), а про второй будем говорить, что он нахо- ится левее первого (в направлении $x_\nu$).

Если параллелепипед $\sigma^{(\nu)}(h)_* \subset G$ и в то же время рядом стоящий с им справа в направлении $x_\nu$ параллелепипед $\sigma^{(\nu)}(h)_*$ полностью не при- адлежит к $G$, то такой параллелепипед мы обозначим через $\sigma_\Gamma^{(\nu)}(h)_*$ и азовем граничным в направлении $x_\nu$. Остальные (не граничные) парал- элепипеды $\sigma^{(\nu)}(h)_* \subset G$ обозначим через $\sigma_g^{(\nu)}(h)_*$.

Обозначим через $G^{(\nu)}(h)$ теоретико-множественную сумму

$$G^{(\nu)}(h) = \sum \sigma_g^{(\nu)}(h)_*$$

сех $\sigma_g^{(\nu)}(h)_*$.

4.5. По определению, функция $f \in \overline{h}_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G)$, если она удовлетво- ает следующим условиям:

1) функция $f$ имеет на $G$ обобщенные производные $\frac{\partial^s f}{\partial x_k^s}$ $(s = 0, 1, \ldots$ $\ldots, \overline{r}_k,\ k = 1, \ldots, n)$ (не обязательно суммируемые на $G$);

2) существует константа

$$\overline{M} = \overline{M}(f) = \overline{M}_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(f; G)$$

акая, что для всех (допустимых) $h > 0$ и $\nu = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} &\| \Delta_{x_\nu h} f_{x_\nu}^{(\overline{r}_\nu)} \|_{L_{p_\nu}(G_h^{(\nu)})} \leqslant \overline{M}(f)\, h^{r_\nu - \overline{r}_\nu} \quad (r_\nu \text{— не целое}), \\ &\| \Delta^2_{x_\nu h} f_{x_\nu}^{(\overline{r}_\nu)} \|_{L_{p_\nu}(G_h^{(\nu)})} \leqslant \overline{M}(f)\, h \quad (r_\nu \text{— целое}), \end{aligned} \tag{1}$$

акова бы ни была сеть

$$N^{(\nu)}\begin{pmatrix} p_1, \ldots, p_n & h \\ r_1, \ldots, r_n & \end{pmatrix} = N^{(\nu)}(h)^{**}.$$

Для определенности будем считать, что $\overline{M}(f)$ есть наименьшая кон- станта, для которой при заданной функции $f$ выполняются неравенства ) при любых сдвигах сети $N^{(\nu)}(h)$.

* Значок $(\nu)$ указывает, что сеть связана с направлением $x_\nu$. Надо иметь в виду, го для заданных $\nu$ и $h$ возможны разные сети, получаемые одна из другой сдвигами.

** Т. е. при любых сдвигах сети $N^{(\nu)}(h)$.

4.6. По определению, функция $f \in \overline{H}^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G)$, если *

1) $f \in W^{(\bar{r}_1,\ldots,\bar{r}_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G)$ (см. 0.4) и

2) удовлетворяется условие 2) п. 4.5.

Положим

$$\|f\|_{\overline{H}^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}} = \max_k \|f\|_{L_{p_k}(G)} + \overline{M}^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(f; G).$$

4.7. В этом пункте мы остановимся на выяснении связи между классом $\overline{H}^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G)$ и классом $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(G)$ (см. введение), который уже рассматривался в наших прежних работах.

1) В случае, когда $G = R_n$, оба определения классов $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(R_n)$ и $\overline{H}^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(R_n)$ совпадают и $M(f) = \overline{M}(f)$, так как $R_n^{(\nu)}(h) = R_n$.

2) Если

$$G = \sigma = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1,\ldots,n\}$$

есть прямоугольный параллелепипед, то указанные классы также совпадают. Однако константы $M(f)$ и $\overline{M}(f)$, вообще говоря, разные.

Чтобы убедиться в этом, ограничимся рассмотрением функции $f(x, y)$ от двух переменных, заданной на прямоугольнике

$$\sigma = \{0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b\},$$

когда $r$ и $s$ — не целые. Рассуждения остаются в силе и в случае, когда оба или одно из чисел $r, s$ — целые, только вместо первых разностей функции $f$ надо рассматривать вторые.

Совершенно очевидно, что $H^{(r,s)}_{p,q}(\sigma) \subset \overline{H}^{(r,s)}_{p,q}(\sigma)$ и $\overline{M}(f) \leqslant M(f)$.

Пусть теперь $f \in \overline{H}^{(r,s)}_{p,q}(\sigma)$. Обозначим через $h_0$ какое-либо положительное число, настолько малое, что по крайней мере один параллелепипед

$$V^{(\nu)}(h_0) = V^{(\nu)}\begin{pmatrix} r, & s \\ p, & q \end{pmatrix} h_0 \Big) \subset \sigma \quad (\nu = 1,2).$$

Тогда тем более найдется $\sigma^{(\nu)}(h) \subset \sigma$, если $h \leqslant h_0$.

Обозначим

$$\sigma_n = \{0 \leqslant x \leqslant a - h, \quad 0 \leqslant y \leqslant b\}.$$

Если $h \geqslant h_0$, то

$$\left(\int_{\sigma_h} |\Delta_{xh} f_x^{(\bar{r})}|^p \, d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2 \| f_x^{(\bar{r})} \|_{L_p(\sigma)} \left(\frac{h}{h_0}\right)^{r-\bar{r}} =$$

$$= M_1 h^{r-\bar{r}} \quad (h_0 \leqslant h < a). \tag{1}$$

Перенумеруем углы $\sigma_h$ и построим четыре сети $N_i^{(x)}(h)$**$(i = 1, 2, 3, 4)$ (см. п. 4.4), каждая из которых соответственно содержит в себе стороны одного из углов. Определяем теперь, как это было объяснено в п. 4.4, четыре множества $G_i^{(x)}(h)$ $(i = 1,2,3,4)$, соответствующие сетям $N_i^{(x)}(h)$.

---

* Ср. с п. 4.5.

** Значок $(x)$ в $N_i^{(x)}(h)$ обозначает в данном случае, что сеть связана с направлением оси $x$.

Легко видеть, что

$$\sigma_h \subset \sum_{i=1}^{4} G_i^{(x)}(h),$$

где сумма понимается в теоретико-множественном смысле.

По условию, $f \in \overline{H}_{p,q}^{(r,s)}(\sigma)$, поэтому

$$\int_{\sigma_h} |\Delta_{xh} f_x^{(\bar r)}|^p d\sigma \leqslant \sum_{i=1}^{4} \int_{G_i^{(x)}(h)} |\Delta_{xh} f_x^{(\bar r)}|^p d\sigma \leqslant 4\overline{M}(f)^p h^{p(r-\bar r)},$$

откуда

$$\left(\int_{\sigma_h} |\Delta_{xh} f_x^{(\bar r)}|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 4^{\frac{1}{p}} \overline{M}(f)\, h^{r-\bar r} \quad (0 < h < h_0). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует:

$$\left(\int_{\sigma_h} |\Delta_{xh} f_x^{(\bar r)}|^p\, d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant M_2 h^{r-\bar r} \quad (0 < h < a),$$

где

$$M_2 = \max\left\{M_1, 4^{\frac{1}{p}}\, \overline{M}(f)\right\}.$$

Аналогичное неравенство можно получить для $\Delta_{yh} f_y^{(\bar s)}$, что доказывает, что

$$\overline{H}_{p,q}^{(r,s)}(\sigma) \subset H_{pq}^{(r,s)}(\sigma).$$

## § 5. Теорема вложения для произвольного открытого множества

5.1. ТЕОРЕМА. 1) *Пусть заданы числа* $p_i\, (i = 1, \ldots, n)$, $q$ *и натуральные числа* $r_i$, *для которых выполняются неравенства*

$$r_i > 0, \quad 1 \leqslant p_i \leqslant q \leqslant \infty, \quad \rho_i = \frac{r_i \varkappa}{\varkappa_i} > 0 \tag{1}$$

(*т. е. неравенства* (1), (2), (3) п. 2. 2 *при* $n = m$), *где*

$$\varkappa = 1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{q}}{r_l}, \tag{2}$$

$$\varkappa_i = 1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p_i}}{r_l}. \tag{3}$$

2) *Пусть задан класс* $w_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G)$, *где* $G$ — *произвольное открытое множество из* $R_n$.

3) *Пусть*

$$\bar r_i \leqslant \rho_i < r_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

*Тогда*

$$w_{p_1, \ldots, p_n}^{(r_1, \ldots, r_n)}(G) \subset \bar h_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_n)}(G) = \bar h_{q, \ldots, q}^{(\rho_1, \ldots, \rho_n)}(G)$$

*и существует константа* $\mu$, *зависящая от* $r_i$, $p_i$, *но не от* $G$ *и* $f$, *такая,*

*что*

$$\overline{M}_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}(f;G)=\overline{M}_{q,\ldots,q}^{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}(f;G)\leqslant\mu\sum_1^n\left\|\frac{\partial^{r_k}f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|_{L_{p_k}(G)}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $f\in w_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(G)$. Зададим $h>0$ и построим (см. п. 4. 4) сеть

$$N^{(\nu)}(h)=N^{(\nu)}\begin{pmatrix}r_1,\ldots,r_n\\ p_1,\ldots,p_n\end{pmatrix},$$

соответствующую направлению $x_\nu$ $(\nu=1,\ldots,n)$. Каждому параллелепипеду $V_g^{(\nu)}(h)_*$ сети (принадлежащему к $G$) приведем в соответствие (вдвое больший) параллелепипед $V_g^{(\nu)}(h)$, левая половина которого есть $V_g^{(\nu)}(h)_*$.

Так как параллелепипед $V_g^{(\nu)}(h)_*$ не является граничным, то $V_g^{(\nu)}(h)\subset G$. Рассмотрим функцию $f$ на одном определенном параллелепипеде $V_g^{(\nu)}(h)$.

На основании леммы 3.2, $f\in W_{p_1,\ldots,p_n}^{(r_1,\ldots,r_n)}(V_g^{(\nu)}(h))$, и на $V_g^{(\nu)}(h)$, согласно 1.7, функцию $f$ можно представить в виде суммы

$$f=Q_{V_g^{(\nu)}(h)}(f)+U_{V_g^{(\nu)}(h)}(f)=Q(f)+U(f), \tag{6}$$

где $Q$ есть многочлен степеней $\bar r_i=r_i-1$ соответственно по $x_i$.

К параллелепипеду $V_g^{(\nu)}(h)$ применима лемма 2.2 при $m=n$, так как неравенства (1), (2) и (3) доказываемой теоремы и неравенства (1), (2), (3) п. 2. 2 соответственно совпадают; кроме того, ребра $V_g^{(\nu)}(h)$ удовлетворяют соотношению (4) п. 2. 2. Поэтому

$$F=U(f)=H_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}(V_g^{(\nu)}(h)) \tag{7}$$

и

$$M_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}(F;V_g^{(\nu)}(h))\leqslant\lambda\sum_{k=1}^n\left\|\frac{\partial^{r_k}f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|_{L_{p_k}(V_g^{(\nu)}(h))} \tag{8}$$

Далее, в силу того, что $P=Q(f)$ есть многочлен степеней $\bar r_i$ соответственно по $x_i$, из (6) и (7), следует, что и $f\in H_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}(V_g^{(\nu)}(h))$.

Но $P$ есть многочлен степени $r_\nu-1$ по $x_\nu$. Если $\rho_\nu$ не целое, т. е. $\rho_\nu>\bar r_\nu$, то $\bar\rho_\nu=\bar r_\nu=r_\nu-1$ и в этом случае производная

$$P_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}=\frac{\partial^{\bar\rho_\nu}P}{\partial x_\nu^{\bar\rho_\nu}}$$

не зависит от $x_\nu$ и $\Delta_{hx_\nu}P_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}\equiv0$. Отсюда следует, что

$$\Delta_{hx_\nu}f_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}\equiv\Delta_{hx_\nu}F_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}\quad(\rho_\nu\text{ — не целое}). \tag{9}$$

Если же $\rho_\nu$ — целое, т. е. $\rho_\nu=\bar r_\nu=r_\nu-1$, то $\bar\rho_\nu=\rho_\nu-1=r_\nu-2$, производная $P_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}$ будет первой степени относительно $x_\nu$ и $\Delta_{hx_\nu}^2P_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}\equiv0$, откуда

$$\Delta_{hx_\nu}^2f_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}=\Delta_{hx_\nu}^2F_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}\quad(\rho_\nu\text{ — целое}). \tag{10}$$

Из (8), (9) и (10) следует, что при $\rho_\nu$ не целом

$$\frac{1}{h^{\rho_\nu-\bar\rho_\nu}}\left\|\Delta_{hx_\nu} f_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}\right\|_{L_q(V_g^{(\nu)}(h))_*} = \frac{1}{h^{\rho_\nu-\bar\rho_\nu}}\left\|\Delta_{hx_\nu} F_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}\right\|_{L_q(V_g^{(\nu)}(h))_*} \leqslant$$

$$\leqslant M_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}(F; V_g^{(\nu)}(h)) \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|_{L_{p_k}(V_g^{(\nu)}(h)} \tag{11}$$

при $\rho_\nu$ целом

$$\frac{1}{h}\left\|\Delta_{hx_\nu}^2 f_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}\right\|_{L_q(V_g^{(\nu)}(h))_*} = \ldots \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|_{L_{p_k}(V_g^{(\nu)}(h))} \tag{12}$$

Введем в рассмотрение множество

$$G^{(\nu)}(h) = \sum V_g^{(\nu)}(h)_*,$$

состоящее из всех $V_g^{(\nu)}(h)_*$ (см. п. 4. 4). Будем считать $\rho_\nu$ не целым, тогда, на основании (12), получим *:

$$\frac{\left\|\Delta_{hx_\nu} f_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}\right\|_{L_q(G^{(\nu)}(h))}}{h^{\rho_\nu-\bar\rho_\nu}} \leqslant \left\{\sum_{V_g^{(\nu)}(h)_*}\left(\frac{\left\|\Delta_{hx_\nu} f_{x_\nu}^{(\bar\rho_\nu)}\right\|_{L_q(V_q^{(\nu)}(h)_*)}}{h^{\rho_\nu-\bar\rho_\nu}}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\left\{\sum_{V_g^{(\nu)}(h)_*}\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|_{L_{p_k}(V_g^{(\nu)}(h))}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant \lambda\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{V_g^{(\nu)}(h)_*}\left\|\frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|^q_{L_{p_k}(V_g^{(\nu)}(h))}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{V_g^{(\nu)}(h)}\left\|\frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|^{p_k}_{L_{p_k}(V_g^{(\nu)})}\right)^{\frac{1}{p_k}} \leqslant \lambda\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{1}{p_k}}\left\|\frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|_{L_{p_k}(G)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mu\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|_{L_{p_k}(G)}, \tag{13}$$

* Первое неравенство в (13) следует на основании соотношения

$$\|\psi\|^q_{L_q(\mathcal{E})} \leqslant \sum \|\psi\|^q_{L_q(\mathcal{E}_i)},$$

если $\mathcal{E} = \Sigma\mathcal{E}_i,\ q \geqslant 1$; второе неравенство следует из формулы (10), третье неравенство — из соотношения

$$\left(\sum_k\left(\sum_i |a_{ik}|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \sum_k\left(\sum_i |a_{ik}|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad q \geqslant 1;$$

четвертое неравенство — из соотношения

$$\left(\sum |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

если $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$; пятое неравенство разъясняется ниже в тексте.

где

$$\mu = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda 2^{\frac{1}{p_k}}, \quad h > 0.$$

Предпоследнее неравенство в этой цепи объясняется следующим образом: полагая $\psi = \dfrac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}}$, имеем:

$$\sum_{V_g^{(\nu)}(h)} \| \psi \|^{p_k}_{L_{p_k}(V_g^{(\nu)}(h))} \leqslant 2 \int_G | \psi |^{p_k} dG = 2 \| \psi \|^{p_k}_{L_{p_k}(G)},$$

так как теоретико-множественная сумма $\sum V_g^{(\nu)}(h) \subset G$ и параллелепипеды $V_g^{(\nu)}(h)$ перекрываются в каждой точке не более чем два раза.

Аналогичными рассуждениями в случае, если $\rho_\nu$ — целое, на основании (13), получим:

$$\frac{1}{h} \left\| \Delta^2_{hx_\nu} f^{(\bar{\rho}_\nu)}_{x_\nu} \right\|_{L_q(G^{(\nu)}(h))} \leqslant \mu \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}} \right\|_{L_{p_k}(G)} \quad (h > 0). \tag{14}$$

Из (12) и (13) следует:

$$\overline{M}_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_n)}(f; G) \leqslant \mu \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}} \right\|_{L_{p_k}(G)},$$

т. е. формула (5).

Принадлежность функции $f$ к классу $\bar{h}_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_n)}(G)$ определяется тем, что она, по условию теоремы, имеет обобщенные несмешанные производные до порядков $r_1, \ldots, r_n$ (соответственно по $x_1, \ldots, x_n$) включительно; тем более существуют обобщенные частные производные до порядков $\bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_n$ включительно; кроме того, имеет место формула (5).

5.2. Третье условие теоремы 5.1, выражаемое равенством (4), является существенным, как показывает следующий простой пример.

Рассмотрим функцию $f(x, y, z) = x^2 y$ на кубе $\Delta = \{0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}$, принадлежащую, очевидно, к классу $W_{2,2,2}^{(3,3,3)}(\Delta)$. Таким образом,

$$p_i = 2, \quad r_i = 3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Положим $q = \infty$. Тогда

$$\varkappa = \frac{1}{2}, \quad \varkappa_i = 1, \quad \rho_i = \frac{3}{2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

В данном случае неравенство (5) п. 5.1 не может выполняться, потому что на $\Delta$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} \equiv 0$$

и правая часть формулы (5), где надо считать $G = \Delta$, равняется нулю, в то время как левая часть не равна нулю, так как функция $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ удовлетворяет (в метрике $L_\infty$) на $\Delta$ по переменной $x$ условию Липшица с положительной константой и левая часть формулы (5) для рассматриваемой функции больше нуля.

В этом примере функция принадлежит к требуемому теоремой классу $H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_n)}$, но не выполняется неравенство (5). Усложняя пример, можно добиться того, что $f$ не будет принадлежать к $H_q^{(\rho_1, \ldots, \rho_n)}$. В самом де-

ле, зададим последовательность положительных чисел $h_n (n=1,2,\ldots)$ такую, что

$$64\sum_1^\infty h_n < 1 \tag{1}$$

и построим в трехмерном пространстве $R_3$ точек $(x, y, z)$ область $G$, состоящую из попарно не пересекающихся между собой кубов $v_1, v_2, \ldots$ с ребрами, параллельными осям координат. При этом мы будем считать, что куб $v_n$ имеет ребро, равное $2h_n$. Кроме того, будем считать, что все кубы $v_n$ находятся внутри куба $1 \leqslant x, y, z \leqslant 2$, что, вследствие (1), очевидно возможно.

Определим на $G$ функцию $f$ при помощи равенств:

$$F = F(x, y, z) = \frac{1}{h_n} x^2 y \text{ на } v_n \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Очевидно,

$$\|F\|^2_{L_2(G)} = \sum_{n=1}^\infty \int_{v_n} |F|^2 dv_n \leqslant 64 \sum_{n=1}^\infty h_n < 1,$$

и так как несмешанные производные от $F$ третьего порядка тождественно равны нулю на $G$, то $F \in W_2^{(3)}(G)$ и

$$\|F\|_{W_2^{(3)}(G)} = \|F\|_{L_2(G)} < 1.$$

Заметим, что в нашем случае сеть (см. п. 3.2)

$$N^x(h_n) = N^{(x)}\begin{pmatrix} 3, & 3, & 3 & \\ 2, & 2, & 2 & h_n \end{pmatrix}$$

состоит из полукубов $\sigma^x(h_n)_*$ (с ребром в направлении оси $x$ длиной $h_n$ и остальными ребрами длиной $2h_n$). Будем считать, что сеть $N^x(h_n)$ путем соответствующего сдвига подобрана так, что куб $v_n$ совпадает с одним из кубов $\sigma^x(h_n)$ (состоящим из двух полукубов $\sigma^x(h_n)_*$) сети $N^x(h_n)$.

Если считать, как в предыдущем примере, $q=\infty$, то определяемые условием 1) теоремы 5.1 числа $\rho_i = \frac{3}{2}$ $(i=1, 2, 3)$. Если допустить, как это следовало бы по теореме 5.1 при выполнении неравенства (4) теоремы, что $F \in W_\infty^{\frac{3}{2}}(G)$, то мы имели бы

$$M_\infty^{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}(F,G) \geqslant M_\infty^{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)}(F;v_n) \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{(x,y,z)\in\sigma^{(x)}(h_n)_*\subset v_n} \frac{|F'_x(x+h_n, y, z) - F'_x(x, y, z)|}{h_n^{\frac{1}{2}}} \geqslant \sup \frac{2y}{h_n^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{1}{h_n^{\frac{1}{2}}}. \tag{2}$$

Однако это невозможно, так как правая часть (2) стремится при неограниченном возрастании $n$ к бесконечности.

5.3. Сделаем еще одно замечание по поводу теоремы 5.1. Дело в том, что если область $G$ совпадает со всем пространством $R_n$ или если $G$ есть прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям коорди-

нат (или в периодическом случае), то из условий теоремы 5.1 следует наряду с неравенством (5) теоремы еще и тот факт, что функция $f$ принадлежит к классу $L_p(G)$ и при этом выполняется неравенство

$$\|f\|_{L_q(G)} \leqslant c\left(\max_k \|f\|_{L_{p_k}(G)} + \sum_1^n \left\|\frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}}\right\|_{L_{p_k}(G)}\right), \tag{1}$$

где $c$ — константа, не зависящая от $f$.

В общем случае — для произвольного открытого множества $G$ — неравенство (1) не имеет места, как показывает следующий простой пример.

Пусть множество $G$ есть теоретико-множественная сумма $G = \sum_1^\infty G_k$ областей (открытых связных множеств), меры которых $\mu_k = \mu(G_k)$ удовлетворяют условиям *:

$$\sum_1^\infty \mu_k < \infty, \quad \sum_1^\infty a_k^p \mu_k < \infty, \quad \sum_1^\infty a_k^q \mu_k = \infty, \tag{2}$$

где $1 < p < q < \infty$ и числа $a_k > 0$ $(k = 1,2,\ldots)$.

Положим $f = a_k$ на $G_k$ $(k = 1,2,\ldots)$. Очевидно, $f \in W_p^{(r)}(G)$, где $r$ — любое положительное целое. Однако $f \notin L_q(G)$. Первое неравенство (2) говорит о том, что множество $G$ может быть ограниченным.

Этот пример показывает также, что для произвольного открытого множества $G$ в теореме 5.1 нельзя заменить $\bar{h}_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}$ на $\bar{H}_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_n)}$.

Поступило
9. X. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дзядык В. К., О продолжении функций, удовлетворяющих условию Липшица в метрике $L_p$, Матем. сборн., 40 (82): 2 (1956), 239—242.

[2] Gagliardo E., Un criterio di eguale continuità per funzioni di due variabili, Rendiconti del Seminario matematico della Universita Padova, XXVI (1956), 148—167.

[3] Kuttner B., Some theorems on fractional derivatives, Proc. London Math. Soc., 3, № 12 (1953), 480—497.

[4] Никольский С. М., О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств, Матем. сборн., 40 (82):2 (1956), 243—268.

[5] Никольский С. М., Теоремы вложения для функций с частными производными, рассматриваемыми в различных метриках, Доклады Ак. наук СССР, 118, № 1 (1958), 35—37.

[6] Никольский С. М., Теоремы вложения для функций с частными производными, рассматриваемыми в различных метриках, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 22 (1958), 321—336.

[7] Sard A., Remainders: functions of several variables, Acta Math., 84 (1950), 319—346.

[8] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа к математической физике, изд. ЛГУ, 1950.

[9] Эзрохи И. А., Общие формы остаточных членов линейных формул многомерного приближенного анализа, Матем. сборн., 38 (80): 4 (1956), 389—416.

* Эти условия можно осуществить, например, полагая $\mu_k = k^{-p}$, $a_k = k^{\frac{p-1}{q}}$, $k = 1,2,\ldots$).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 243—256

И. И. ИБРАГИМОВ

# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе изучаются экстремальные свойства целых функций $f(z)$ конечной степени $\leqslant \nu$, $p$-я степень модуля которых интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$. Для функций $f(z)$ из указанного класса устанавливается точное неравенство между нормами $\|f\|_{p_1}$ и $\|f\|_p$, а также между нормами $\|f^{(n)}\|_{p_1}$ и $\|f\|_p$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $1 \leqslant p \leqslant p_1 \leqslant \infty$. Кроме того, получается ряд точных результатов, являющихся уточнением или обобщением некоторых известных свойств целых функций конечной степени, не превышающей $\nu$.

Многие задачи теории наилучшего приближения функций действитель-
го переменного на всей вещественной оси посредством целых функций
нечной степени, как видно из исследований С. Н. Бернштейна [см. (²),
р. 371—395 и 408—420], С. М. Никольского (³) и других авторов, тесно
язаны с экстремальными свойствами целых функций конечной степени.

С. Н. Бернштейн доказал, что для класса целых функций $f(z)$ конечной
епени $\nu$, ограниченных на всей вещественной оси, имеет место неравен-
во [см. (¹), стр. 269—270 и 321—329]:

$$\max_{-\infty<x<\infty} |f'(x)| \leqslant \nu \max_{-\infty<x<\infty} |f(x)|. \tag{0.1}$$

Неравенство (0.1) имеет место также в метрике пространства $L_p(-\infty, \infty)$
и любом $p \geqslant 1$ [см. (³), стр. 247], т. е.

$$\|f'(x)\|_p \leqslant \nu \|f(x)\|_p, \tag{0.2}$$

$$\|f\|_p = \|f(x)\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обозначим через $W_\nu^{(p)}$ класс целых функций $f(z)$ конечной степени $\nu$,
которых выполняется условие:

$$\|f\|_p < \infty \quad (p > 0).$$

С. М. Никольский (³) доказал, что если $1 \leqslant p < p' < \infty$ и $f(z) \in W_\nu^{(p)}$,
имеет место неравенство

$$\|f\|_{p'} \leqslant 2\nu^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|f\|_p. \tag{0.3}$$

Ряд точных неравенств для целых функций $f(z)$ конечной степени $\nu$ из класса $W_\nu^{(2)}$ был установлен в работе автора ([4]).

В настоящей работе эти результаты обобщаются на целые функции из класса $W_\nu^{(p)}$ для $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Рассматриваемую нами задачу можно сформулировать так: пусть $f(z) \in W_\nu^{(p)}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ и $K(z)$ — регулярная функция в области $|z| \geqslant \lambda$, равная нулю на бесконечности, причем $\lambda > \nu$ — любое действительное число. Требуется оценить модуль функционала

$$J(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\lambda} f(\zeta) K(\zeta) \, d\zeta \tag{0.4}$$

посредством чисел $\|f\|_p$ и $\|\Phi\|_p$ при любом $p$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, где

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\lambda} e^{iu\zeta} K(\zeta) \, d\zeta, \quad \|\Phi\|_p = \left( \int\limits_{-\nu}^{\nu} |\Phi(u)|^p \, du \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В частности, мы устанавливаем неравенство вида:

$$\max_{-\infty < x < \infty} |f(x)| \leqslant A_p \nu^\alpha \|f\|_p, \tag{0.5}$$

находим точное значение констант $A_p$ и $\alpha$ для всего класса $W_\nu^{(p)}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ и находим функцию, превращающую неравенство (0.5) в равенство. Подобная экстремальная задача решена нами в классе тригонометрических полиномов [см. ([5])].

1. Мы будем пользоваться теоремой Винера — Палей, согласно которой класс целых функций $W_\nu^{(2)}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\nu}^{\nu} e^{iuz} \varphi(u) \, du, \tag{1.1}$$

где $\varphi(u) \in L_2(-\nu, \nu)$ [см. ([6]), стр. 148), и имеет место равенство

$$\|f\|_2 = \left( \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \int\limits_{-\nu}^{\nu} |\varphi(u)|^2 \, du \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.2}$$

Прежде всего мы докажем теорему, являющуюся некоторым добавлением к этой теореме Винера — Палей.

ТЕОРЕМА 1. *Любая целая функция из класса* $W_\nu^{(p)}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ *одновременно принадлежит и к классу* $W_\nu^{(2)}$, *т. е. может быть представлена в виде* (1.1).

Доказательство. Известно, что целая функция $f(z)$ конечной степени $\nu$ из класса $W_\nu^{(p)}$ при любом $p \geqslant 1$ ограничена по модулю на всей вещественной оси:

$$\max_{-\infty < x < \infty} |f(x)| \leqslant B, \tag{1.3}$$

где $B$ — некоторое положительное число.

Далее, в силу (1.3), при $1 \leqslant p < 2$ имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{2-p} |f(x)|^p \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left( \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)| \right)^{2-p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \leqslant B^{2-p} \|f\|_p^p,$$

или

$$\|f\|_2 \leqslant B^{\frac{2-p}{2}} \|f\|_p^{\frac{p}{2}}. \tag{1.4}$$

Неравенство (1.4) показывает, что если $f(z)$ принадлежит к множеству $W_\nu^{(p)}$, где $1 \leqslant p < 2$, то она принадлежит также и к множеству $W_\nu^{(2)}$, т. е. может быть представлена в виде (1.1).

В силу равенства (1.1), функционал $J(f)$ принимает вид:

$$J(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\nu}^{\nu} e^{iu\zeta} \varphi(u)\, du\right] K(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\nu}^{\nu} \varphi(u) \left\{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\lambda} e^{iu\zeta} K(\zeta)\, d\zeta\right\} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\nu}^{\nu} \varphi(u)\, \Phi(u)\, du, \tag{1.5}$$

где

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\lambda} e^{iu\zeta} K(\zeta)\, d\zeta. \tag{1.6}$$

Предположим, что положительные числа $p$ и $q$ связаны соотношением

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.7}$$

Тогда, в силу неравенства Гёльдера, из равенства (1.5) получим:

$$|J(f)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{\int\limits_{-\nu}^{\nu} |\varphi(u)|^q\, du\right\}^{\frac{1}{q}} \left\{\int\limits_{-\nu}^{\nu} |\Phi(u)|^p\, du\right\}^{\frac{1}{p}},$$

или

$$|J(f)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\varphi\|_q \|\Phi\|_p. \tag{1.8}$$

Неравенство (1.8) показывает, что оценка $|J(f)|$ связана с оценками $\|\varphi\|_q$ и $\|\Phi\|_p$ посредством чисел $\nu$, $\|f\|_p$ и $p\,(p \geqslant 1)$.

2. Докажем следующую общую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Если целая функция $f(z)$ принадлежит к классу $W_\nu^{(p)}$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, и если $K(z)$ — регулярная функция в области $|z| \geqslant \lambda\,(\lambda > \nu)$ и обращается в нуль на бесконечности, то для модуля функционала $J(f)$ имеет место неравенство:*

$$|J(f)| \leqslant (2\pi)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \|\Phi\|_p, \tag{2.1}$$

*где $\Phi(u)$ определяется равенством* (1.6),

$$\|\Phi\|_p = \left(\int\limits_{-\nu}^{\nu} |\Phi(u)|^p\, du\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_p = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Известно, что если целая функция $f(z)$ определяется равенством (1.1), то функция $\varphi(u) \in L_2(-\nu, \nu)$ определяется равенством

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt. \tag{2.2}$$

Введем функцию

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{на отрезке } [-\nu,\nu],\\ 0 & \text{вне этого отрезка.}\end{cases}$$

Очевидно, что функцию $f(z)\in W_\nu^{(p)}$ можно представить в виде

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{izu}\psi(u)\,du,$$

причем

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}f(t)\,dt$$

Как известно [см. ([7]), стр. 128, теорема 74], если функция $f(x)$ принадлежит к $L_p(-\infty,\infty)$, где $1<p\leqslant 2$, то функция

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{ixt}\,dt$$

удовлетворяет неравенству:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^q\,dx\leqslant(2\pi)^{-\frac{1}{2}q+1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.3}$$

На основании (2.3) мы можем утверждать, что для функции

$$\psi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}f(t)\,dt$$

имеет место неравенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(-x)|^q\,dx\leqslant(2\pi)^{-\frac{1}{2}q+1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{2.4}$$

причем нетрудно заметить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(-x)|^q\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^q\,dx=\int_{-\nu}^{\nu}|\varphi(x)|^q\,dx=\|\varphi\|_q^q.$$

Таким образом, неравенство (2.4) принимает вид:

$$\int_{-\nu}^{\nu}|\varphi(x)|^q\,dx\leqslant(2\pi)^{-\frac{1}{2}q+1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

или

$$\|\varphi\|_q\leqslant(2\pi)^{-\frac{q-2}{2q}}\|f\|_p^{\frac{p}{q(p-1)}}. \tag{2.5}$$

В силу (2.5), неравенство (1.8) можно записать в виде:

$$|J(f)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2\pi)^{-\frac{q-2}{2q}}\|f\|_p^{\frac{p}{q(p-1)}}\|\Phi\|_p.$$

Отсюда, на основании (1.7), следует неравенство (2.1) при условии, что $1<p\leqslant 2$.

Покажем, что неравенство (2.1) верно и при $p=1$. В самом деле, равенства (2.2) следует, что

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1. \tag{2.6}$$

алее, из равенства (1.5) имеем:

$$|J(f)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \max_{-\nu\leqslant u\leqslant\nu} |\varphi(u)| \cdot \int_{-\nu}^{\nu} |\Phi(u)|\,du.$$

тсюда, на основании неравенства (2.6), находим:

$$|J(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \|f\|_1 \cdot \|\Phi\|_1,$$

о совпадает с неравенством (2.1) при $p=1$.

3. Отметим ряд следствий из теоремы 2.

Следствие 1. *Для целой функции $f(z)$ из класса $W_\nu^{(p)}$, где $0<p\leqslant 2$, еет место неравенство*

$$\max_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \leqslant \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p, \tag{3.1}$$

*ичем знак равенства достигается в случае $p=2$ для функции*

$$f(x) = \frac{\sin \nu x}{x} \in W_\nu^{(2)}.$$

Доказательство. Полагая

$$K(\zeta) = (\zeta - x)^{-1} \quad (|x| < \lambda),$$

равенства (0.4) находим, что $J(f) = f(x)$, а из равенства (1.6) находим,

$$\Phi(u) = e^{iux} \text{ и } \|\Phi\|_p = (2\nu)^{\frac{1}{p}}.$$

этому при $1\leqslant p\leqslant 2$ из неравенства (2.1) следует неравенство (3.1). кажем, что неравенство (3.1) верно и в случае $0<p<1$. Положим $= 1+\alpha$, где $0<\alpha<1$. Тогда (3.1) запишется в виде:

$$\max_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \leqslant \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f\|_{1+\alpha}. \tag{3.1*}$$

В силу неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{1+\alpha}\,dx \leqslant \left(\max_{-\infty<x<\infty} |f(x)|\right) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^\alpha\,dx,$$

ем:

$$\|f\|_{1+\alpha}^{1+\alpha} \leqslant \left(\max_{-\infty<x<\infty} |f(x)|\right) \|f\|_\alpha^\alpha,$$

что неравенство (3.1*) принимает вид:

$$\max_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \leqslant \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\max_{-\infty<x<\infty} |f(x)|\right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \|f\|_\alpha^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

юда получаем:

$$\max_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \leqslant \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \|f\|_\alpha.$$

Последнее неравенство показывает, что неравенство (3.1) верно и в случае $0 < p = \alpha < 1$.

То, что в неравенстве (3.1) для случая $p = 2$ знак равенства достигается для функции $f(x) = \frac{\sin \nu x}{x}$, вытекает из следующих равенств:

$$\max_{-\infty < x < \infty} |f(x)| = \max_{-\infty < x < \infty} \left| \frac{\sin \nu x}{x} \right| = \nu,$$

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin \nu x}{x} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (\pi\nu)^{\frac{1}{2}}.$$

Неравенство (3.1) в случае $p = 2$ доказано в нашей работе ([4]).

Примечание. Заменяя в неравенстве (3.1) функцию $f(x) \in W_\nu^{(p)}$ $(0 < p \leqslant 2)$ ее производной $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, получим:

$$\max_{-\infty < x < \infty} |f^{(n)}(x)| \leqslant \left( \frac{\nu}{\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \|f^{(n)}\|_p \quad (0 < p \leqslant 2).$$

Отсюда, в силу (0.2), следует неравенство:

$$\max_{-\infty < x < \infty} |f^{(n)}(x)| \leqslant \left( \frac{1}{\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \nu^{n + \frac{1}{p}} \|f\|_p \quad (0 < p \leqslant 2). \tag{3.2}$$

Таким же образом из неравенства С. М. Никольского (0.3) в случае $p' = \infty$ получим:

$$\max_{-\infty < x < \infty} |f^{(n)}(x)| \leqslant 2\nu^{n + \frac{1}{p}} \|f\|_p, \tag{3.2*}$$

Очевидно, неравенство (3.2) является уточнением неравенства (3.2*). В то же время само неравенство (3.2) может быть уточнено. Это более точное неравенство, являющееся уточнением неравенства (3.2), устанавливает

Следствие 2. *Для любой производной целой функции $f(z)$ из класса $W_p^{(\nu)}$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, на вещественной оси имеет место неравенство:*

$$\max_{-\infty < x < \infty} |f^{(n)}(x)| \leqslant [\pi(np + 1)]^{-\frac{1}{p}} \nu^{n + \frac{1}{p}} \|f\|_p, \tag{3.3}$$

*причем в случае $n = 1$ и $p = 2$ знак равенства достигается для функции*

$$f_0(z) = \frac{\sin \nu z}{(\nu z)^2} - \frac{\cos \nu z}{\nu z} \in W_\nu^{(2)}.$$

Доказательство. Пусть

$$K(\zeta) = n!\,(\zeta - x)^{-n-1},$$

где $x$ — действительный параметр такой, что $|x| < \lambda$. Тогда из равенства (0.4) находим, что

$$J(f) = f^{(n)}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

В силу равенства (1.5), имеем:

$$\Phi(u) = (iu)^n e^{iux}, \quad \|\Phi\|_p = \left( \frac{2\nu^{np+1}}{np + 1} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому из неравенства (2.1) следует (3.3).

Очевидно, в случае $n=1$ и $p=2$ неравенство (3.3) примет вид:

$$\max_{-\infty<x<\infty}|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\cdot \nu^{\frac{3}{2}}\|f\|_2. \tag{3.3*}$$

кажем, что в неравенстве (3.3*) знак равенства достигается для нечетной ной функции $f_0(x)$ из класса $W_\nu^{(2)}$.

Имеем:

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin\nu t}{(\nu t)^2}-\frac{\cos\nu t}{\nu t}\right]^2 dt = 2\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\nu t}{(\nu t)^2}-\frac{\cos\nu t}{\nu t}\right]^2 dt.$$

Полагая здесь $t=\sqrt{x}$, получим:

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\nu\sqrt{x}}{(\nu\sqrt{x})^2}-\frac{\cos\nu\sqrt{x}}{\nu\sqrt{x}}\right]^2\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}} = \nu^2\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\nu\sqrt{x}}{(\nu\sqrt{x})^3}-\frac{\cos\nu\sqrt{x}}{(\nu\sqrt{x})^2}\right]^2\sqrt{x}\,dx.$$

сюда следует:

$$\|f\|_2 = \nu\left\{\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\nu\sqrt{x}}{(\nu\sqrt{x})^3}-\frac{\cos\nu\sqrt{x}}{(\nu\sqrt{x})^2}\right]^2\cdot\sqrt{x}\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В работе [8] доказано, что

$$\left\{\int_0^{\infty}\left[\frac{\sin\nu\sqrt{x}}{(\nu\sqrt{x})^3}-\frac{\cos\nu\sqrt{x}}{(\nu\sqrt{x})^2}\right]^2\cdot\sqrt{x}\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi}{3\nu^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

едовательно,

$$\|f\|_2 = \nu\cdot\left(\frac{\pi}{3\nu^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi}{3\nu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вычислим значение $|f'(x)|$ при $x=0$. Очевидно

$$f'(x) = \frac{1}{\nu^2}\cdot\frac{\nu^2x^2\sin\nu x - 2\sin\nu x + 2\nu x\cos\nu x}{x^3}$$

$$\lim_{t\to 0}|f'(t)| = \nu\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin t - 2\sin t + 2t\cos t}{t^3}.$$

Применяя правило Лопиталя, находим:

$$|f'(0)| = \lim_{t\to 0}|f'(t)| = \frac{\nu}{3}.$$

ким образом,

$$|f'(0)| = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}\cdot\nu^{\frac{3}{2}}\|f\|_2 = \frac{\nu}{3},$$

е. неравенство (3.3*) превращается в равенство для функции $f_0(x)$. авенство (3.3) в случае $p=2$ доказано в нашей работе [4].

Заметим, что если в неравенстве (3.3) формально положить $p=\infty$, получится неравенство С. Н. Бернштейна (0.1) для $n=1$.

Следствие 3. *Для коэффициентов Тейлора $a_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ целой кции $f(z)$ из класса $W_\nu^{(p)}$, где $1\leqslant p\leqslant 2$, имеет место неравенство*

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{n!}[\pi(np+1)]^{-\frac{1}{p}}\nu^{n+\frac{1}{p}}\|f\|_p. \tag{3.4}$$

Неравенство (3.4) непосредственно следует из неравенства (3.3).

Следствие 4. *Если* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — *произвольные комплексные числа и* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — *коэффициенты Тейлора целой функции* $f(z)$ *из класса* $W_\nu^{(p)}$, *где* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *то имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k c_k\right| \leqslant \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\nu^k |c_k|}{k!\,(kp+1)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_p. \tag{3.4*}$$

Неравенство (3.4*) непосредственно следует из неравенства (3.4).

Следствие 5. *Если*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in W_\nu^{(p)} \quad (1 \leqslant p \leqslant 2)$$

*и* $\beta_1, \beta_2$ — *любые действительные числа, то имеет место неравенство*

$$\left|\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta_2^{k+1} - \beta_1^{k+1})\nu^k}{(k+1)!\,(kp+1)^{\frac{1}{p}}}. \tag{3.5}$$

В самом деле, имея в виду, что

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (\beta_2^{k+1} - \beta_1^{k+1}),$$

и пользуясь неравенством (3.4), мы получим неравенство (3.5).

Заметим, что в случае $\beta_1 = -\beta_2 = -\beta\ (\beta > 0)$ неравенство (3.5) примет вид:

$$\left|\int_{-\beta}^{\beta} f(x)\,dx\right| \leqslant 2\beta \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta\nu)^{2m}}{(2m+1)!\,(2mp+1)^{\frac{1}{p}}}, \tag{3.6}$$

Следствие 6. *Если* $f(z) \in W_\nu^{(p)}\ (1 \leqslant p \leqslant 2)$ *и* $0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{\nu}$, *то имеет место неравенство*

$$\left|f\left(x + \frac{\beta}{2}\right) - f\left(x - \frac{\beta}{2}\right)\right| \leqslant 2 \sin \frac{\nu\beta}{2} \cdot \|f\|_p \cdot \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Положим

$$K(\zeta) = \left(\zeta - x - \frac{\beta}{2}\right)^{-1} - \left(\zeta - x + \frac{\beta}{2}\right)^{-1},$$

Тогда функционал $J(f)$ примет вид:

$$J(f) = f\left(x + \frac{\beta}{2}\right) - f\left(x - \frac{\beta}{2}\right).$$

Далее, в силу равенства (1.6), имеем:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\lambda} e^{it\zeta} \left[\left(\zeta - x - \frac{\beta}{2}\right)^{-1} - \left(\zeta - x + \frac{\beta}{2}\right)^{-1}\right] d\zeta =$$

$$= e^{itx} \left(e^{\frac{it\beta}{2}} - e^{-\frac{it\beta}{2}}\right) = 2ie^{itx} \sin \frac{t\beta}{2}.$$

Отсюда находим:

$$\|\Phi\|_p = \left(\int_{-\nu}^{\nu} \left| e^{itx} \cdot 2i \sin \frac{t\beta}{2} \right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = 2\left(\int_{-\nu}^{\nu} \left|\sin \frac{t\beta}{2}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2 \sin \frac{\nu\beta}{2} (2\nu)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, из неравенства (2.1) следует, что

$$\left| f\left(x + \frac{\beta}{2}\right) - f\left(x - \frac{\beta}{2}\right)\right| \leqslant (2\pi)^{-\frac{1}{p}} \cdot 2 \sin \frac{\nu\beta}{2} \cdot (2\nu)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

Итак, неравенство (3.7) доказано при условии $1 \leqslant p \leqslant 2$. Если в нем рмально положить $p = \infty$, то получится следующее неравенство Н. Бернштейна [см. ([2]), стр. 442]:

$$\left| f\left(x + \frac{\beta}{2}\right) - f\left(x - \frac{\beta}{2}\right)\right| \leqslant 2 \sin \frac{\nu\beta}{2} \cdot \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)|. \tag{3.8}$$

Это неравенство дополняет неравенство С. М. Никольского [см. ([9])]:

$$\max_{-\infty < x < \infty} |f'(x)| \leqslant \frac{\nu}{2} \cdot \sup \left| f\left(x + \frac{\pi}{2\nu}\right) - f\left(x - \frac{\pi}{2\nu}\right)\right|. \tag{3.9}$$

Напомним, что если

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\nu}^{\nu} e^{iuz} \varphi(u)\, du, \tag{3.10}$$

функция

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\nu}^{\nu} (i \operatorname{sign} u)\, e^{iuz} \varphi(u)\, du \tag{3.10*}$$

зывается сопряженной с функцией $f(z)$.

Следствие 7. *Если $f(z)$ — целая функция из класса $W_\nu^{(p)}$, то для нкции $\tilde{f}(z)$, сопряженной с $f(z)$, имеет место неравенство:*

$$\max_{-\infty < x < \infty} |\tilde{f}(x)| \leqslant \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \tag{3.11}$$

*и* $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Доказательство. Положим

$$K(\zeta) = \frac{i\delta}{\zeta - x},$$

 $\delta$ может иметь значения $+1$ и $-1$. В этом случае из формулы (1.6) едует, что

$$\Phi(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \lambda} e^{iu\zeta} \frac{i\delta\, d\zeta}{\zeta - x} = i\delta e^{iux}.$$

евидно, если положить $\delta = \operatorname{sign} u$, то из равенства (0.4) получим:

$$J(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\nu}^{\nu} (i \operatorname{sign} u)\, e^{iux} \cdot \varphi(u)\, du = \tilde{f}(x).$$

Далее, в силу теоремы 1, при любом $p$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ имеет место равенство:

$$\max_{-\infty < x < \infty} |\tilde{f}(x)| \leqslant (2\pi)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \cdot \|\Phi\|_p,$$

где

$$\|\Phi\|_p = \Big(\int\limits_{-\nu}^{\nu} |i\,\mathrm{sign}\,u \cdot e^{iux}|^p\,du\Big)^{\frac{1}{p}} = (2\nu)^{\frac{1}{p}}.$$

Итак, неравенство (3.11) доказано.

Очевидно в неравенстве (3.11) функции $f(x)$ и $\widetilde{f}(x)$ можно менять местами, т. е. мы одновременно имеем:

$$\max_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \leqslant \Big(\frac{\nu}{\pi}\Big)^{\frac{1}{p}} \|\widetilde{f}\|_p \quad (1 \leqslant p \leqslant 2). \tag{3.12}$$

Следствие 8. *Если целая функция $f(z)$ принадлежит множеству $W_\nu^{(p)}$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, то при любом вещественном $x$ имеет место неравенство:*

$$\Big|f\Big(x+\frac{\pi}{2\nu}\Big)+f\Big(x-\frac{\pi}{2\nu}\Big)\Big| \leqslant 2\Big(\frac{\nu}{\pi\sqrt{\pi}}\Big)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{\Gamma\Big(\frac{p+1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{p+2}{2}\Big)}\right]^{\frac{1}{p}} \|f\|_p \tag{3.13}$$

*при* $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Доказательство. Положим

$$K(\zeta) = \Big(\zeta - x - \frac{\pi}{2\nu}\Big)^{-1} + \Big(\zeta - x + \frac{\pi}{2\nu}\Big)^{-1}.$$

Тогда функционал $J(f)$ примет вид:

$$J(f) = f\Big(x+\frac{\pi}{2\nu}\Big) + f\Big(x-\frac{\pi}{2\nu}\Big).$$

Далее, в силу неравенства (1.6), имеем:

$$\Phi(u) = e^{iux}\Big(e^{\frac{i\pi u}{2\nu}} + e^{-\frac{i\pi u}{2\nu}}\Big) = 2e^{iux}\cos\frac{\pi u}{2\nu}.$$

Отсюда находим:

$$\|\Phi\|_p = 2\Big(\int\limits_{-\nu}^{\nu}\Big|\cos\frac{\pi u}{2\nu}\Big|^p du\Big)^{\frac{1}{p}} = 2^{1+\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_0^{\nu}\cos^p\frac{\pi u}{2\nu}\cdot du\Big)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{1+\frac{1}{p}}\Big(\frac{2\nu}{\pi}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p t\cdot dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Имея в виду, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p t\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\Big(\frac{p+1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{p+2}{2}\Big)},$$

получаем:

$$\|\Phi\|_p = 2^{1+\frac{1}{p}}\Big(\frac{\nu}{\sqrt{\pi}}\Big)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{\Gamma\Big(\frac{p+1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{p+2}{2}\Big)}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, из неравенства (2.1) следует неравенство (3.13).

Заметим, что неравенство (3.13) остается в силе и для разности

$$f\Big(x+\frac{\pi}{2\nu}\Big) - f\Big(x-\frac{\pi}{2\nu}\Big).$$

В этом можно убедиться, выбирая функцию $K(\zeta)$ в виде:

$$K(\zeta)=\left(\zeta-x-\frac{\pi}{2\nu}\right)^{-1}-\left(\zeta-x+\frac{\pi}{2\nu}\right)^{-1}.$$

Следствие 9. *Если целая функция $f(z)$ принадлежит множеству* $^{p)}(1\leqslant p\leqslant 2)$, *то при любом вещественном $x$ выполняется неравенство*:

$$\left|f\left(x+\frac{2\pi}{\nu}\right)-f(x)\right|<4\left(\frac{\nu}{\pi\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\|f\|_p. \tag{3.14}$$

Доказательство. Очевидно

$$\left(x+\frac{2\pi}{\nu}\right)-f(x)\right|=\left|\left[f\left(x+\frac{2\pi}{\nu}\right)+f\left(x+\frac{\pi}{\nu}\right)\right]-\left[f\left(x+\frac{\pi}{\nu}\right)+f(x)\right]\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|f\left(x+\frac{2\pi}{\nu}\right)+f\left(x+\frac{\pi}{\nu}\right)\right|+\left|f\left(x+\frac{\pi}{\nu}\right)+f(x)\right|.$$

Отсюда, в силу неравенства (3.13), следует неравенство (3.14).

М. Г. Крейн ([10]) показал, что при определенном условии непрерывная нкция $\gamma(t)\,(-\nu\leqslant t\leqslant\nu)$ допускает представление в виде интеграла рье — Стильтьеса:

$$\gamma(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iut}\,d\omega(u), \tag{3.15}$$

$\omega(u)$ — функция ограниченной вариации [см., например, ([6]), . 169—173].

Пусть целая функция $f(z)$ принадлежит множеству $W_\nu^{(p)}$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$, едовательно, допускает представление (1.1). Рассмотрим функцию

$$f_\gamma(z)=\int_{-\nu}^{\nu}e^{izt}\,\gamma(t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{3.16}$$

$\varphi(t)\in L_2(-\nu,\ \nu)$ и определяется равенством (2.2).

Следствие 10. *Если $f(z)$ — целая функция из множества* $^{(p)}_{\nu}(1\leqslant p\leqslant 2)$ *и если непрерывная функция $\gamma(t)\,(-\nu\leqslant t\leqslant\nu)$ допускает едставление* (3.15), *то для функции $f_\gamma(x)$ выполняется неравенство*

$$\max_{-\infty<x<\infty}|f_\gamma(x)|\leqslant\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot(\operatorname{var}\omega)\cdot\|f\|_p \tag{3.17}$$

*и* $1\leqslant p\leqslant 2$.

Доказательство. Положим

$$K(\zeta)=\frac{\gamma(t)}{\zeta-x}\quad(|x|<\lambda,\quad-\nu\leqslant t\leqslant\nu).$$

огда из неравенства (1.6) получим:

$$\Phi(t)=\gamma(t)\,e^{itx}. \tag{3.18}$$

В силу (3.18), из равенства (1.5) находим:

$$J(f)=\int_{-\nu}^{\nu}\Phi(t)\,\varphi(t)\,dt=\int_{-\nu}^{\nu}e^{itx}\,\gamma(t)\,\varphi(t)\,dt=f_\gamma(x).$$

Кроме того, в силу (3.18), имеем:

$$\|\Phi\|_p = \left(\int_{-\nu}^{\nu} |\Phi(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{-1}^{\nu} |\gamma(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда, на основании обобщенного неравенства Гёльдера, выводим:

$$\|\Phi\|_p = \|\lambda\|_p = \left(\int_{-\nu}^{\nu} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} d\omega(u) \right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |d\omega(u)| \left(\int_{-\nu}^{\nu} dt\right)^{\frac{1}{p}} = (2\nu)^{\frac{1}{p}} \cdot (\operatorname{var}\omega).$$

Таким образом, из неравенства (2.1) следует неравенство (3.17). Пусть, в частности,

$$\gamma(t) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu u} e^{itu} d\omega_0(u) \quad (-\nu \leqslant t \leqslant \nu, \quad |\varepsilon| = 1),$$

где $\omega_0(u)$ — неубывающая функция ограниченной вариации.

Легко видеть, что

$$\operatorname{var}\omega_0(u) = |\gamma(\nu)|,$$

и, следовательно, неравенство (3.15) примет вид:

$$\max_{-\infty<x<\infty} |f_\gamma(x)| \leqslant \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} |\gamma(\nu)| \|f\|_p. \tag{3.19}$$

Полагая здесь формально $p = \infty$, получим неравенство М. Г. Крейна [см. ([10])]:

$$\max_{-\infty<x<\infty} |f_\gamma(x)| \leqslant |\gamma(\nu)| \cdot \max_{-\infty<x<\infty} |f(x)|. \tag{3.20}$$

Нетрудно заметить, что в этом неравенстве функция $f(z) = ce^{i\nu z}$ является экстремальной функцией.

4. Благодаря следствию 1 теоремы 2 мы можем доказать более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 3*. *Если* $0 < p \leqslant 2$ *и* $p' \geqslant p$, *то для целой функции* $f(z)$ *из класса* $W_\nu^{(p)}$ *имеет место неравенство*:

$$\|f\|_{p'} \leqslant \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|f\|_p. \tag{4.1}$$

Доказательство. В случае $p' > p$, где $1 \leqslant p \leqslant 2$, имеем:

$$\|f\|_{p'}^{p'} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{p'} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{p'-p} |f(x)|^p dx \leqslant$$

---

* Примечание при корректуре. Для случая $p > 2$ следствие 1 и теорема 3 могут быть дополнены:

*Если* $f(z) \in W_\sigma^{(p)}$ $(p>2)$, *то* $\max_{-\infty<x<\infty} |f(x)| \leqslant \left(\frac{\sigma p}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \| f(x) \|_p$ (дополнение к следствию 1);

*Если* $2 < p \leqslant p' \leqslant \infty$, *то* $\| f(x) \|_{p'} \leqslant \left(\frac{\sigma p}{\pi}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \| f(x) \|_p$ (дополнение к теореме 3).

$$\leqslant (\max|f(x)|)^{p'-p}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx \leqslant (\max|f(x)|^{p'-p}\|f\|_p^p.$$

Отсюда, в силу неравенства (3.1), следует, что

$$\|f\|_{p'}^{p'} \leqslant \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{p'-p}{p}}\|f\|_p^{p'-p}\|f\|_p^p = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{p'-p}{p}}\|f\|_p^{p'}.$$

звлекая корень степени $p'$ из обеих частей последнего неравенства, олучим (4.1). Неравенство (4.1) является уточнением неравенства М. Никольского (0.3). Очевидно вместо абсолютной константы 2 в нера-нстве (0.3) мы имеем константу $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}$.

ТЕОРЕМА 4. *Если $1\leqslant p\leqslant 2$ и $p'\geqslant p$, то для любой производной* $^{n)}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$, *где $f(z)\in W_\nu^{(p)}$, имеет место неравенство*:

$$\|f^{(n)}\|_{p'} \leqslant [\pi(np+1)]^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}\nu^{n+\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|f\|_p. \tag{4.2}$$

Доказательство. Очевидно, если $1\leqslant p\leqslant 2$ и $p'\geqslant p$, то

$$\|f\|_{p'}^{p'} = \int_{-\infty}^{\infty}|f^{(n)}(x)|^{p'-p}|f^{(n)}(x)|^p\,dx \leqslant (\max|f^{(n)}(x)|)^{p'-p}\cdot\|f^{(n)}(x)\|_p^p.$$

Отсюда, в силу неравенств (0.2) и (3.2), следует, что

$$\|f^{(n)}\|_{p'}^{p'} \leqslant [(\pi(np+1))^{-\frac{1}{p}}\cdot\nu^{n+\frac{1}{p}}\|f\|_p]^{p'-p}(\nu^n\|f\|_p)^p.$$

звлекая корень степени $p'$ из обеих частей последнего неравенства, лучим неравенство (4.2).

Заметим, что если мы напишем неравенство (0.3) для $f^{(n)}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ затем воспользуемся неравенством (0.2), то получим:

$$\|f^{(n)}\|_{p'} \leqslant 2\nu^{n+\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|f\|_p. \tag{4.3}$$

евидно, неравенство (4.2) является уточнением неравенства (4.3).

ТЕОРЕМА 5. *Если $1\leqslant p\leqslant 2$, $p'\geqslant p$ и целая функция $f(z)$ из класса* $^{(p)}$ *удовлетворяет условию $\|f\|_p\leqslant 1$, то для обобщенного модуля непре-вности*

$$\omega_{p'}(f;\ \beta) = \sup_{0<h\leqslant\beta}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

*еет место неравенство*:

$$\omega_{p'}(f;\ \beta) \leqslant \left(2\sin\frac{\nu\beta}{2}\right)^{\frac{p'-p}{p'}}\cdot\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}[\omega_p(f;\ \beta)]^{\frac{p}{p'}}. \tag{4.4}$$

Доказательство. При $p'\geqslant p$ имеем:

$$[\omega_{p'}(f;\ \beta)]^{p'} =$$

$$= \sup_{0<h\leqslant\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right|^{p'-p}\left|f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right|^p dx \leqslant$$

$$\sup_{0<h\leqslant\beta}\left|f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right|^{p'-p}\sup_{0<h\leqslant\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f\left(x-\frac{h}{2}\right)\right|^p dx.$$

В силу неравенства (3.7), отсюда следует, что

$$[\omega_{p'}(f;\ \beta)]^{p'} \leqslant \left[2\sin\frac{\nu\beta}{3}\cdot\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\ \|f\|_p\right]^{p'-p}\cdot[\omega_p(f;\ \beta)]^p.$$

Извлекая корень степени $p'$ из обеих частей последнего неравенства, находим:

$$\omega_{p'}(f;\ \beta) \leqslant \left(2\sin\frac{\nu\beta}{2}\right)^{\frac{p'-p}{p'}}\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|f\|_p^{\frac{p'-p}{p'}}[\omega_p(f;\ \beta)]^{\frac{p}{p'}}.$$

Отсюда, в силу условия $\|f\|_p \leqslant 1$, следует неравенство (4.4).

Институт физики и математики
АН Азерб. ССР

Поступило
7. III. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Собрание сочинений. Т. 1, Изд. АН СССР, Москва, 1952.
[2] Бернштейн С. Н., Собрание сочинений. Т. 2, Изд. АН СССР, Москва, 1954.
[3] Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII, 1951.
[4] Ибрагимов И. И., Экстремальные задачи в классе целых функций экспоненциального типа, Успехи матем. наук, 12, вып. 3 (75) (1957), 323—328.
[5] Ибрагимов И. И., Экстремальные задачи в классе тригонометрических полиномов, Известия Ак. наук Азерб. ССР, 2 (1958), 1—17.
[6] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Москва, 1947.
[7] Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Москва, 1948.
[8] Джрбашян М. М. и Тавадян А. Б., Некоторые экстремальные задачи для целых функций, Известия Ак. наук Арм. ССР, 7, № 5 (1954), 1—17.
[9] Никольский С. М., Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна, Доклады Ак. наук СССР, 60, № 9 (1948), 1507—1510.
[10] Крейн М. Г., О представлении функций интегралами Фурье — Стильтьеса, Уч. зап. Куйбышевского пед. ин-та, вып. 7 (1943), 1—24.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 257—274

И. С. КАЦ

# РОСТЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В статье изучается влияние поведения функций $\rho(x)$ и $q(x)$ в правой окрестности точки $x=0$ на рост при $\lambda \to +\infty$ спектральной функции дифференциальной системы:

$$-y''(x)+q(x)\,y(x)-\lambda\rho(x)\,y(x)=0 \quad (0 \leqslant x < L \leqslant \infty),$$
$$y'(0)=m, \quad y(0)=n.$$

## Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y''(x)+q(x)\,y(x)-\lambda\rho(x)\,y(x)=0 \quad (0 \leqslant x < L \leqslant \infty), \tag{1}$$

 $\rho(x)>0$ и $q(x)$ $(0 \leqslant x < L)$ — вещественные измеримые функции, ммируемые на любом отрезке $[0,\ l]$, где $0<l<L$. Всюду в дальнейшем дем считать эти условия выполненными. Тогда неубывающая функция

$$M(x)=\int_0^x \rho(s)\,ds \quad (0 \leqslant x < L) \tag{2}$$

ожительна и конечна при любом $x \in (0,\ L)$.

Функцию $u(x)$ $(0 \leqslant x < L)$ назовем решением уравнения (1), если она еет абсолютно непрерывную первую производную и если равенство

$$-u''(x)+q(x)\,u(x)-\lambda\rho(x)\,u(x)=0$$

еет место почти всюду на $[0,\ L)$.

Обозначим через $L_M$ гильбертово пространство всех $M$-измеримых нкций $f(x)$ $(0 \leqslant x < L)$, имеющих $M$-суммируемый квадрат на $[0,\ L)$, через $L_M^0$ — множество тех функций из $L_M$, которые равны нулю в не-торой левой окрестности точки $x=L$, своей для каждой функции.

Пусть $u(x;\ \lambda)$ — решение системы

$$\left.\begin{aligned}&-y''(x)+q(x)\,y(x)-\lambda\rho(x)\,y(x)=0 \quad (0 \leqslant x < L),\\ &y'(0)=m, \quad y(0)=n \quad (\operatorname{Im} m=\operatorname{Im} n=0;\ m^2+n^2 \neq 0).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Неубывающая функция

$$\tau(\lambda)=\tau(\lambda-0) \quad (-\infty<\lambda<\infty;\ \tau(0)=0)$$

ывается *спектральной функцией* системы (3), если отображение $U$:

$f \to F$, где $f \in L_M^0$,

$$F(\lambda) = \int_0^L f(x) u(x; \lambda) dM(x) \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

есть изометрическое отображение пространства $L_M^0$ в гильбертово пространство $L_\tau$ всех $\tau$-измеримых на $(-\infty, \infty)$ функций, имеющих $\tau$-суммируемый квадрат, т. е. если для любой функции $f \in L_M^0$ имеет место равенство

$$\int_0^L |f(x)|^2 dM(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\tau(\lambda).$$

М. Г. Крейн показал, что если $\tau(\lambda)$ — какая-либо спектральная функция системы (3), то в том случае, когда $n \neq 0$, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{1 + |\lambda|^\alpha}\text{*} \tag{4}$$

сходится при $\alpha = 1$ и расходится при $\alpha = 0$, а в том случае, когда $n = 0$, интеграл (4) сходится при $\alpha = 2$ и расходится при $\alpha = 1$.

В настоящей работе будет доказано, что множество вещественных значений $\alpha$, при которых сходится интеграл (4), определяется поведением функции $M(x)$ (и, следовательно, $\rho(x)$) в правой окрестности точки $x = 0$, а именно, будет доказано следующее предложение.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Если $\tau(\lambda)$—спектральная функция системы (3), то для сходимости интеграла (4) при некотором вещественном $\alpha$ необходимо и достаточно, чтобы при $n \neq 0$ сходился интеграл*

$$\int_0^l \left(\int_0^x M(s)\, ds\right)^{\alpha-1} dx,$$

*а при $n = 0$ — интеграл*

$$\int_0^l \left(\int_0^x s\, dM(s)\right)^{\alpha-2} dM(x) \tag{5}$$

*хотя бы при одном (а следовательно, при любом) значении $l \in (0, L)$.*

Если, в частности,

$$0 < \varliminf_{x \to 0} \frac{M(x)}{x^\beta} \leqslant \varlimsup_{x \to 0} \frac{M(x)}{x^\beta} < \infty.$$

---

* Сходимость этого интеграла характеризует поведение функции $\tau(\lambda)$ только при $\lambda \to +\infty$. Действительно, как известно [см. ([4])],

$$\int_{-\infty}^{0} \exp(\sqrt{|\lambda|}\, t)\, d\tau(\lambda) < \infty \text{ при } 0 \leqslant t < 2\int_0^L \rho(x)\, dx.$$

Поэтому интеграл (4) сходится при тех и только тех вещественных значениях $\alpha$, при которых сходится интеграл $\int_0^\infty \frac{d\tau(\lambda)}{1+\lambda^\alpha}$.

Отметим еще, что последний интеграл сходится при тех и только тех значениях $\alpha > 0$, при которых сходится интеграл $\int_1^\infty \frac{\tau(\lambda)}{\lambda^{\alpha+1}}\, d\lambda$.

как нетрудно видеть, при $n \neq 0$ интеграл (4) сходится тогда и только [т]да, когда $\alpha > \frac{\beta}{1+\beta}$, а при $n=0$ — когда $\alpha > \frac{2+\beta}{1+\beta}$.

Как показал В. А. Марченко ([6]), при $M(x) \equiv x$ и $n=1$

$$\tau(\lambda) = \frac{2}{\pi}\lambda^{\frac{1}{2}} + o(\lambda^{\frac{1}{2}}) \quad (\lambda \to +\infty),$$

хорошо согласуется со сказанным выше (см. сноску на стр. 3).

Заметим, что система (3) эквивалентна интегральному уравнению

$$)= n + mx + \int_0^x (x-s)\,y(s)\,dQ(s) - \lambda \int_0^x (x-s)\,y(s)\,dM(s) \quad (0 \leqslant x < L), \quad (6)$$

$M(x)$ — неубывающая на $[0, L)$ функция, определенная равенством (2), а

$$Q(x) = \int_0^x q(s)\,ds \quad (0 \leqslant x < L)$$

вещественная функция ограниченного изменения на каждом отрезке $l]$, где $0 < l < L$, причем обе функции абсолютно непрерывны. связи с этим спектральную функцию системы (3) можно назвать спек-льной функцией интегрального уравнения (6).

Теперь понятие спектральной функции может быть обобщено на тот чай, когда $M(x)$ $(0 \leqslant x < L;\ M(0) = 0)$ есть произвольная (а не только олютно непрерывная) неубывающая функция, а $Q(x)$ $(0 \leqslant x < L)$ — извольная вещественная функция, имеющая ограниченное изменение каждом отрезке $[0, l]$, где $0 < l < L$. Основная теорема распростра-тся и на этот случай, если дополнительно предположить, что $x) > M(+0) = M(0) = 0$ при любом $x \in (0, L)$, а интеграл (5) заменить еграл ом

$$\int_0^l \left( \int_0^{x-0} s\,dM(s) \int_0^{x+0} s\,dM(s) \right)^{\frac{\alpha-2}{2}} dM(x).$$

Основная теорема в этом общем виде является уточнением полученных ми ранее результатов [см. ([2])].

## § 1. Некоторые факты теории дифференциальной системы (3) в случае $q(x) \equiv 0$

В этом параграфе будет приведен ряд фактов, заимствованных главным разом из работ М. Г. Крейна.

1. Пусть $\varphi(x;\ \lambda)$ и $\psi(x;\ \lambda)$ $(0 \leqslant x < L)$ — решения дифференциального авнения

$$-y''(x) - \lambda\rho(x)\,y(x) = 0 \quad (0 \leqslant x < L), \quad (1.1)$$

еделяемые условиями:

$$\varphi(0;\ \lambda) = 1, \quad \varphi'(0;\ \lambda) = 0, \qquad \psi(0;\ \lambda) = 0, \quad \psi'(0;\ \lambda) = 1.$$

Нам понадобятся в дальнейшем некоторые свойства функций $\varphi(x;\ \lambda)$ $\psi(x;\ \lambda)$.

Отметим, прежде всего, что при $0 \leqslant x < L$

$$;\ \lambda)\,\psi'(x;\ \lambda) - \varphi'(x;\ \lambda)\,\psi(x;\ \lambda) = \varphi(0;\ \lambda)\,\psi'(0;\ \lambda) - \varphi'(0;\ \lambda)\,\psi(0;\ \lambda) = 1. \quad (1.2)$$

Нетрудно убедиться, что функция $\varphi(x; \lambda)$ представима в виде

$$\varphi(x; \lambda) = \varphi_0(x) - \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) - \lambda^3\varphi_3(x) + \cdots, \qquad (1.3)$$

где

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_{n+1}(x) = \int\limits_0^x \Big( \int\limits_0^s \varphi_n(t)\, dM(t) \Big) ds \quad (0 \leqslant x < L;\ n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (1.4)$$

функция $\psi(x; \lambda)$ — в виде

$$\psi(x; \lambda) = \psi_0(x) - \lambda\psi_1(x) + \lambda^2\psi_2(x) - \lambda^3\psi_3(x) + \ldots, \qquad (1.5)$$

где

$$\psi_0(x) = x, \quad \psi_{n+1}(x) = \int\limits_0^x \Big( \int\limits_0^s \psi_n(t)\, dM(t) \Big) ds \quad (0 \leqslant x < L;\ n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (1.6)$$

а функция $\psi'(x; \lambda)$ — в виде

$$\psi'(x; \lambda) = \psi'_0(x) - \lambda\psi'_1(x) + \lambda^2\psi'_2(x) - \lambda^3\psi'_3(x) + \ldots. \qquad (1.7)$$

Как легко следует из равенств (1.4) и (1.6) и из того, что $dM(x) = \rho(x)\, dx$, где $\rho(x) > 0$,

$$\varphi_j(x) > 0, \quad \psi_j(x) > 0, \quad \psi'_j(x) > 0 \quad \text{при } 0 < x < L \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$\varphi_j(0) = \psi_j(0) = \psi'_j(0) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Легко показать [см. ([1]), стр. 266—269], что функции $\varphi(x; \lambda)$, $\frac{\psi(x; \lambda)}{x}$ и $\psi'(x; \lambda)$ при фиксированном $x \in (0, L)$ являются детерминантами Фредгольма нагруженных интегральных уравнений с положительно определенными ядрами. Поэтому имеют место представления:

$$\varphi(x; \lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j(x)}\Big), \quad \psi(x; \lambda) = x \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda}{\nu_j(x)}\Big),$$
$$\psi'(x; \lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\lambda}{\mu_j(x)}\Big), \qquad (1.8)$$

где $\lambda_j(x) > 0$, $\nu_j(x) > 0$ и $\mu_j(x) > 0$ — корни этих функций.

Заметим, что, как следует из (1.8) и (1.3), при $z > 0$

$$\ln \varphi(x; -z) = \sum_{j=1}^{\infty} \ln \Big(1 + \frac{z}{\lambda_j(x)}\Big) \leqslant z \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j(x)} = z\,\varphi_1(x),$$

откуда получаем:

$$\varphi(x; -z) \leqslant e^{z\varphi_1(x)} \quad (z > 0;\ 0 \leqslant x < L). \qquad (1.9)$$

Аналогично, из (1.8) и (1.7) вытекает, что

$$\psi'(x; -z) \leqslant e^{z\psi'_1(x)} \quad (z > 0;\ 0 \leqslant x < L). \qquad (1.10)$$

Кроме того, из (1.3) и (1.7) и неотрицательности функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \psi'_1(x), \psi'_2(x), \ldots$ следует, что при $z > 0$ и $0 \leqslant x < L$

$$\varphi(x; -z) \geqslant 1 + z\varphi_1(x) \geqslant 1, \qquad (1.11)$$

$$\psi'(x; -z) \geqslant 1 + z\psi'_1(x) \geqslant 1. \qquad (1.12)$$

2. Функцию комплексного переменного $\Omega(z)$ будем относить к клас- $(R)$ в том и только в том случае, когда она определена и голоморфна и $\operatorname{Im} z \neq 0$ и удовлетворяет требованиям:

$$\Omega(\bar{z}) = \overline{\Omega(z)},$$
$$\operatorname{Im} \Omega(z) \operatorname{Im} z \geqslant 0 \quad (\operatorname{Im} z \neq 0).$$

М. Г. Крейном дано описание множества всех спектральных функций стемы

$$\left.\begin{aligned} &-y''(x) - \lambda\rho(x)\, y(x) = 0 \quad (0 \leqslant x < l), \\ &y'(0) = 0, \quad y(0) = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (\rho,\ l;\ 0,\ 1)\ *$$

$l < L$, а именно, доказана [см. (5)] следующая теорема **.

*Если $\Omega(z)$ принадлежит классу $(R)$ или вырождается в бесконечную нстанту, то функция*

$$R(z) = \frac{\psi'(l;\, z)\,\Omega(z) + \psi(l;\, z)}{\varphi'(l;\, z)\,\Omega(z) + \varphi(l;\, z)} \qquad (1.13)$$

*инадлежит классу $(R)$ и допускает единственное абсолютно сходя- ееся представление вида*

$$R(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0), \qquad (1.14)$$

$\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty;\ \tau(0) = 0)$ — *некоторая неубывающая нкция. Совокупность всех полученных таким образом функций $\tau(\lambda)$ впадает с совокупностью всех спектральных функций дифференциальной стемы $(\rho,\ l;\ 0{,}1)$.*

Функция $\dfrac{\psi(l;\, z)}{\varphi(l;\, z)}$, которая получается в правой части (1.13) при $(z) \equiv 0$, голоморфна при $z \,\bar{\in}\, [\lambda_1,\ \infty)$, где $\lambda_1 = \lambda_1(l)\ (> 0)$ — наименьший рень функции $\varphi(l;\, z)$. Поэтому соответствующая спектральная функция $(\lambda)$, в силу формулы обращения Стильтьеса, не имеет точек роста при $< \lambda_1$ и, следовательно,

$$\frac{\psi(l;\, z)}{\varphi(l;\, z)} = \int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\tau_0(\lambda)}{\lambda - z} \quad (z \,\bar{\in}\, [\lambda_1,\ \infty)).$$

ункцию $\tau_0(\lambda) = \tau_0(\lambda - 0)$ $(\tau_0(\lambda_1) = \tau_0(\lambda_1 - 0);\quad \tau_0(0) = 0)$, определенную им равенством, будем называть главной спектральной функцией си- емы $(\rho,\ l;\ 0,\ 1)$.

Из (1.2) и (1.11) следует, что при $z > 0$

$$\left[\frac{\psi(x;\, -z)}{\varphi(x;\, -z)}\right]' = \frac{1}{\varphi^2(x;\, -z)},$$

---

* Такое обозначение мы будем применять для системы типа (3), если $q(x) \equiv 0$; и этом на первом месте будем указывать функцию $\rho(x)$, на втором — правый нец интервала, в котором рассматривается дифференциальное уравнение, а затем сла $m$ и $n$.

** В работе (5) эта теорема формулируется иначе. Однако, как легко видеть и. (4), равенства (1.16) и (1.17)], из равенств $\varphi_0(x) = 1$ и $\psi_0(x) = x$ следует, что

$$\frac{\psi'(l;\, z)\,\Omega(z) + \psi(l;\, z)}{\varphi'(l;\, z)\,\Omega(z) + \varphi(l;\, z)} = \frac{\mathcal{E}_0(l;\, z)\,(l + \Omega(z)) + \mathcal{E}_1(l;\, z)}{D_0(l;\, z)\,(l + \Omega(z)) + D_1(l;\, z)},$$

так как из принадлежности одной из функций $\Omega(z)$ и $l + \Omega(z)$ классу $(R)$ выте- ет принадлежность другой, то теорема 1 работы (5) влечет формулируемое здесь едложение.

а так как $\dfrac{\psi(0;\,-z)}{\varphi(0;\,-z)}=0$, то

$$\frac{\psi(l;\,-z)}{\varphi(l;\,-z)}=\int_0^l\frac{dx}{\varphi^2(x;\,-z)}\qquad(z>0).$$

Таким образом, если $\tau_0(\lambda)$ — главная спектральная функция системы $(\rho,\,l;\,0,\,1)$, то

$$\int_0^l\frac{dx}{\varphi^2(x;\,-z)}=\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\tau_0(\lambda)}{\lambda+z}\qquad(z>0).\tag{1.15}$$

Как известно [см. ([4]), § 1 и 3], при фиксированном $z\,(\operatorname{Im}z>0)$ точка

$$\frac{\psi'(l;\,z)\,t+\psi(l;\,z)}{\varphi'(l;\,z)\,t+\varphi(l;\,z)}$$

с изменением $t$ от $-\infty$ до $\infty$ описывает против часовой стрелки границу круга $K_1(l,\,z)$, лежащего в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что при $\operatorname{Im}z>0$ правая часть в (1.13) принадлежит кругу $K_1(l,\,z)$. Таким образом, когда функция $\tau(\lambda)$ пробегает совокупность всех спектральных функций, число $R(z)$, связанное с $\tau(\lambda)$ равенством (1.14), принадлежит $K_1(l,\,z)$. Отметим, что радиус $r_1(l,\,z)$ круга $K_1(l,\,z)$ [см. ([4]), § 1] определяется равенством

$$r_1^{-1}(l,\,z)=2\operatorname{Im}z\int_0^l|\varphi(x;\,z)|^2\,dM(x).\tag{1.16}$$

3. Для системы $(\rho,\,l;\,1,\,0)$ описание множества всех спектральных функций усложняется. Имеет место следующая теорема.

*Если $\Omega(z)$ принадлежит классу $(R)$ или вырождается в бесконечную константу, то функция*

$$R(z)=-\frac{\varphi'(l;\,z)\,\Omega(z)+\varphi(l;\,z)}{\psi'(l;\,z)\,\Omega(z)+\psi(l;\,z)}\tag{1.17}$$

*принадлежит классу $(R)$ и допускает единственное абсолютно сходящееся представление вида*

$$R(z)=c+\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}+\frac{1}{\lambda-z}\right)d\tau(\lambda)\qquad(\operatorname{Im}z\neq0),\tag{1.18}$$

*где $c$ — вещественная константа, зависящая от выбора $\Omega(z)\in(R)$, а $\tau(\lambda)=\tau(\lambda-0)$ $(-\infty<\lambda<\infty;\ \tau(0)=0)$ — неубывающая функция.*

*Совокупность всех полученных таким образом функций $\tau(\lambda)$ совпадает с совокупностью всех спектральных функций системы*

$$\left.\begin{aligned}&-y''(x)-\lambda\rho(x)\,y(x)=0\quad(0\leqslant x<l),\\&y'(0)=1,\qquad y(0)=0.\end{aligned}\right\}\tag{$\rho,\,l;\,1,\,0$}$$

Функция $-\dfrac{\varphi'(l;\,z)}{\psi'(l;\,z)}$, которая получается в правой части (1.17) при $\Omega(z)\equiv\infty$, голоморфна при $z\,\overline{\in}\,[\mu_1,\,\infty)$, где $\mu_1=\mu_1(l)\;(>0)$ — наименьший корень функции $\psi'(l;\,z)$. Поэтому соответствующая спектральная функция

λ) системы $(\rho, l; 1, 0)$, которую мы будем называть главной, не имеет ...ек роста при $-\infty < \lambda < \mu_1$ и, как следует из (1.17) и (1.18),

$$-\frac{\varphi'(l; z)}{\psi'(l; z)} = c_\infty + \int_{\mu_1}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{1}{\lambda - z}\right) d\tau_0(\lambda) \quad (z \,\overline{\in}\, [\mu_1, \infty)). \qquad (1.19)$$

...ложив здесь $z = 0$, получим, что

$$c_\infty = -\int_{\mu_1}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\right) d\tau_0(\lambda).$$

...дставив это значение $c_\infty$ в (1.19), будем иметь:

$$-\frac{\varphi'(l; z)}{\psi'(l; z)} = \int_{\mu_1}^{\infty} \frac{z\, d\tau_0(\lambda)}{\lambda(\lambda - z)} \quad (z \,\overline{\in}\, [\mu_1, \infty)). \qquad (1.20)$$

Учитывая, что функции $\varphi(x; \lambda)$ и $\psi(x; \lambda)$ удовлетворяют дифференциаль...му уравнению (1.1), получим, в силу (1.2), что

$$\left[\frac{\varphi'(x; -z)}{\psi'(x; -z)}\right]' = \frac{z\rho(x)}{[\psi'(x; -z)]^2} \quad (0 \leqslant x < l;\ z > 0),$$

...так как $\varphi'(0; -z) = 0$, то

$$\frac{\varphi'(l; -z)}{\psi'(l; -z)} = z \int_0^l \frac{dM(x)}{[\psi'(x, -z)]^2}{}^{*} \quad (z > 0).$$

... (1.20) и последнего равенства вытекает, что

$$\int_0^l \frac{dM(x)}{[\psi'(x; -z)]^2} = \int_{\mu_1}^{\infty} \frac{d\tau_0(\lambda)}{\lambda(\lambda + z)} \quad (z > 0). \qquad (1.21)$$

Когда $\operatorname{Im} z > 0$, точка

$$-\frac{\varphi'(l; z)\, t + \varphi(l; z)}{\psi'(l; z)\, t + \psi(l; z)}$$

...и изменении $t$ от $-\infty$ до $\infty$ описывает против часовой стрелки гра...цу некоторого круга $K_0(l, z)$, лежащего в верхней полуплоскости. ...этому при $\operatorname{Im} z > 0$ правая часть равенства (1.17) принадлежит кругу ...$(l, z)$. Радиус $r_0(l, z)$ этого круга определяется равенством

$$r_0^{-1}(l, z) = 2 \operatorname{Im} z \int_0^l |\psi(x; z)|^2 dM(x). \qquad (1.22)$$

---

* В общем случае, указанном в конце введения, функции $\psi'(x; \lambda)$ и $\varphi'(x; \lambda)$ ...ют скачки в тех же точках, что и функция $M(x)$, в остальных точках они не...рывны, а последнее равенство приобретает вид

$$\frac{\varphi'(l; -z)}{\psi'(l; -z)} = z \int_0^l \frac{dM(x)}{\psi'(x-0; -z)\,\psi'(x+0; -z)},$$

...и, конечно, функция $M(x)$ непрерывна при $x = l$. Этим и объясняются измене...я, получающиеся в основной теореме при переходе к общему случаю.

## § 2. Два важных предложения о росте спектральных функций систем $(\rho, l; 0, 1)$ и $(\rho, l; 1, 0)$

В этом параграфе будут доказаны две теоремы, из которых станет ясно, что множество значений $\alpha$, при которых сходится интеграл (4). где $\tau(\lambda)$ — спектральная функция системы $(\rho, L; i, 1-i)$ $(i = 0, 1)$, зависит лишь от числа $i\,(i = 0, 1)$ и поведения функции $\rho(x)$ в сколь угодно малой правой окрестности точки $x = 0$. Это будет следовать из теорем $\mathrm{I}_1$ и $\mathrm{I}_0$, если мы учтем, что, согласно определению, всякая спектральная функция системы $(\rho, L; i, 1-i)$ $(i = 0, 1)$ является спектральной функцией системы $(\rho, l; i, 1-i)$, где $0 < l < L$.

Для доказательства теорем $\mathrm{I}_1$ и $\mathrm{I}_0$ мы воспользуемся следующим доказанным нами ранее предложением [см. ([3]), теорема 1] об интегральных представлениях функций класса $(R)$.

ТЕОРЕМА А. *Для того чтобы функция $f(z) \in (R)$ допускала абсолютно сходящееся представление*

$$f(z) = a + \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{\lambda^2+1} + \frac{1}{\lambda - z}\right) d\tau(\lambda) \quad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{2.1}$$

*где $a$ — вещественное число, а $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ — неубывающая функция такая, что при некотором $\alpha\,(0 < \alpha < 2)$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{1 + |\lambda|^{\alpha}} < \infty,$$

*необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(i\eta)}{\eta^{\alpha}}\, d\eta < \infty.$$

ТЕОРЕМА $\mathrm{I}_1$ *. *Если хотя бы одна из спектральных функций $\tau_1(\lambda)$ системы $(\rho, l; 0, 1)$, где $0 < l < L$, такова, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_1(\lambda)}{1 + |\lambda|^{\alpha}} < \infty \quad (\operatorname{Im} \alpha = 0), \tag{2.2}$$

*то для любой спектральной функции $\tau_2(\lambda)$ этой системы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_2(\lambda)}{1 + |\lambda|^{\alpha}} < \infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Как следует из сказанного во введении, при $\alpha \geqslant 1$ утверждение теоремы тривиально, а при $\alpha \leqslant 0$ не может выполняться условие теоремы. Итак, пусть $0 < \alpha < 1$ и пусть $R_1(z)$ и $R_2(z)$ — функции, определенные равенствами

$$R_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_1(\lambda)}{\lambda - z}, \quad R_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_2(\lambda)}{\lambda - z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0).$$

* Номера предложений, относящихся к случаю $n \neq 0$, мы будем отличать индексом 1, а номера предложений, относящихся к случаю $n = 0$,— индексом 0 (см. сноску* на стр. 261).

именив теорему A* к функции $R_1(z)$, получим, согласно (2.2), что

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{Im} R_1(i\eta)}{\eta^\alpha} < \infty. \tag{2.4}$$

чки $R_1(i\eta)$ и $R_2(i\eta)$ принадлежат кругу $K_1(l, i\eta)$ радиуса $r_1(l, i\eta)$. вещественности $\lambda_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ в представлении (1.8) функции $x; \lambda)$ следует, что

$$|\varphi(x; i\eta)| \geqslant 1 \quad (\eta > 0).$$

гда формула (1.16) дает:

$$r_1(l, i\eta) \leqslant \frac{1}{2\eta} M^{-1}(l) \quad (\eta > 0).$$

сказанного выше и последнего неравенства вытекает, что

$$|R_2(i\eta) - R_1(i\eta)| \leqslant \frac{1}{\eta} M^{-1}(l)$$

следовательно,

$$|\operatorname{Im} R_2(i\eta) - \operatorname{Im} R_1(i\eta)| \leqslant \frac{1}{\eta} M^{-1}(l).$$

Учитывая (2.4) и то, что $\alpha > 0$, получим отсюда:

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{Im} R_2(i\eta)}{\eta^\alpha} d\eta \leqslant \int_1^\infty \frac{\operatorname{Im} R_1(i\eta)}{\eta^\alpha} d\eta + \frac{1}{M(l)} \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^{\alpha+1}} < \infty.$$

ова применяя теорему A, получим неравенство (2.3).

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА $I_0$. *Если хотя бы одна из спектральных функций $\tau_1(\lambda)$ темы $(\rho, l; 1, 0)$, где $0 < l < L$, такова, что*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\tau_1(\lambda)}{1 + |\lambda|^\alpha} < \infty \quad (\operatorname{Im} \alpha = 0),$$

* Мы имеем право применять здесь теорему A, ибо, если функция $f(z) \in (R)$ ускает абсолютно сходящееся представление

$$f(z) = b + \int_{-\infty}^\infty \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{*}$$

$b$ — вещественное число, а $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(\tau(0) = 0)$ — неубывающая функция, она представима и в виде (2.1), причем в обоих представлениях фигурирует одна а же функция $\tau(\lambda)$. Действительно, из абсолютной сходимости интеграла в пра- части (*) вытекает абсолютная сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\lambda\, d\tau(\lambda)}{1 + \lambda^2} = k < \infty.$$

тому положив $a = b + k$, получим из (*), что

$$f(z) = a + \int_{-\infty}^\infty \left(-\frac{\lambda}{1 + \lambda^2} + \frac{1}{\lambda - z}\right) d\tau(\lambda).$$

*то для любой спектральной функции* $\tau_2(\lambda)$ *этой системы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_2(\lambda)}{1+|\lambda|^\alpha} < \infty.$$

Доказательство. Из сказанного во введении следует, что в доказательстве нуждается только тот случай, когда $1 < \alpha < 2$.

Как следует из п. 3 § 1, существуют два вещественных числа $c_1$ и $c_2$ такие, что значения функций

$$R_1(z) = c_1 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{1}{\lambda - z}\right) d\tau_1(\lambda)$$

и

$$R_2(z) = c_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{1}{\lambda - z}\right) d\tau_2(\lambda)$$

принадлежат кругу $K_0(l, z)$ при любом $z$ из верхней полуплоскости.

Учитывая равенство (1.22), определяющее радиус круга $K_0(l, z)$, и представление (1.8) функции $\psi(x; \lambda)$, убедимся при помощи предложения А в справедливости теоремы.

## § 3. Доказательство основной теоремы для систем $(\rho, L; 0, 1)$ и $(\rho, L; 1, 0)$

ЛЕММА I. *Каковы бы ни были числа* $\beta \in (0, 1)$ *и* $\theta > 0$, *найдутся два таких конечных положительных числа* $D_1(\beta, \theta)$ *и* $D_2(\beta, \theta)$, *что при* $\lambda \geqslant \theta$

$$\frac{D_1(\beta, \theta)}{\lambda^\beta} \leqslant \int_1^{\infty} \frac{dz}{z^\beta(\lambda + z)} < \frac{D_2(\beta, \theta)}{\lambda^\beta}$$

Доказательство. Произведя замену $z = t\lambda$, получим:

$$\int_1^{\infty} \frac{dz}{z^\beta(\lambda + z)} = \frac{1}{\lambda^\beta} \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{dt}{t^\beta(t+1)}. \tag{3.1}$$

При $0 < \beta < 1$

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^\beta(t+1)} < \infty,$$

а так как подынтегральная функция положительна и $\lambda \geqslant \theta > 0$, то

$$(0<)\int_{\frac{1}{\theta}}^{\infty} \frac{dt}{t^\beta(t+1)} \leqslant \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{dt}{t^\beta(t+1)} < \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^\beta(t+1)} (<\infty). \tag{3.2}$$

Обозначив первый интеграл в (3.2) через $D_1(\beta, \theta)$, а третий — через $D_2(\beta, \theta)$ и учитывая равенство (3.1), получим утверждение леммы.

ЛЕММА II₁. *Если* $0 < l < L$, *то для любого* $\beta \in (0, 1)$ *найдутся два таких конечных положительных числа* $C_1(\beta, l)$ *и* $C_2(\beta, l)$, *что при* $0 \leqslant x \leqslant l$

$$C_1(\beta, l)\, \varphi_1^{\beta-1}(x) \leqslant \int_1^{\infty} \frac{dz}{z^\beta \varphi^2(x; -z)} \leqslant C_2(\beta, l)\, \varphi_1^{\beta-1}(x).$$

Доказательство. Из неравенств (1.9) и (1.11) вытекает, что

$$\int_1^\infty \frac{dz}{z^\beta e^{2z\varphi_1(x)}} \leqslant \int_1^\infty \frac{dz}{z^\beta \varphi^2(x; -z)} \leqslant \int_1^\infty \frac{dz}{z^\beta (1+z\varphi_1(x))^2}. \qquad (3.3)$$

к как $\varphi_1(x)$ — неубывающая функция, то из замены $z\varphi_1(x) = u$ следует, при $0 \leqslant x \leqslant l$

$$\int_1^\infty \frac{dz}{z^\beta e^{2z\varphi_1(x)}} = \varphi_1^{\beta-1}(x) \int_{\varphi_1(x)}^\infty \frac{du}{u^\beta e^{2u}} \geqslant \varphi_1^{\beta-1}(x) \int_{\varphi_1(l)}^\infty \frac{du}{u^\beta e^{2u}}, \qquad (3.4)$$

$$\int_1^\infty \frac{dz}{z^\beta (1+z\varphi_1(x))^2} = \varphi_1^{\beta-1}(x) \int_{\varphi_1(x)}^\infty \frac{du}{u^\beta (1+u)^2} \leqslant \varphi_1^{\beta-1}(x) \int_0^\infty \frac{du}{u^\beta (1+u)^2}. \qquad (3.5)$$

ложив

$$C_1(\beta, l) = \int_{\varphi_1(l)}^\infty \frac{du}{u^\beta e^{2u}}, \quad C_2(\beta, l) = \int_0^\infty \frac{du}{u^\beta (1+u)^2},$$

лучим из (3.3), (3.4) и (3.5) утверждение леммы.

ЛЕММА $\mathrm{II}_0$. *Если $0 < l < L$, то для любого $\beta \in (0, 1)$ найдутся два ких конечных положительных числа $\mathscr{E}_1(\beta, l)$ и $\mathscr{E}_2(\beta, l)$, что при $0 \leqslant x \leqslant l$*

$$\mathscr{E}_1(\beta, l)\,[\psi_1'(x)]^{\beta-1} \leqslant \int_1^\infty \frac{dz}{z^\beta [\psi'(x; -z)]^2} \leqslant \mathscr{E}_2(\beta, l)\,[\psi_1'(x)]^{\beta-1}.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы $\mathrm{II}_1$, лько вместо неравенств (1.9) и (1.11) нужно использовать неравенства 10) и (1.12).

ТЕОРЕМА $\mathrm{II}_1$. *Пусть $\tau(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — какая-либо спектральная нкция системы*

$$\left.\begin{aligned} &-y''(x) - \lambda\rho(x)\,y(x) = 0 \quad (0 \leqslant x < L),\\ &y'(0) = 0, \quad y(0) = 1; \end{aligned}\right\} \qquad (\rho, L; 0, 1)$$

*еда интеграл*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{d\tau(\lambda)}{1+|\lambda|^\alpha} \qquad (3.6)$$

*дится при тех и только тех вещественных значениях $\alpha$, при которых дится интеграл*

$$\int_0^l \left(\int_0^x M(s)\,ds\right)^{\alpha-1} dx$$

*тя бы при одном (и, следовательно, любом) $l \in (0, L)$.*

Доказательство. При $\alpha \leqslant 0$ интегралы (3.6) и (3.7) расходятся, при $\alpha \geqslant 1$ сходятся. Для интеграла (3.6) это следует из сказанного введении, а для интеграла (3.7) это легко усмотреть непосредственно,

$$0 < \int_0^x M(s)\,ds < M(l)\,x \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Осталось рассмотреть лишь случай, когда $0 < \alpha < 1$.

Пусть $l$ — какое-либо число из интервала $(0, L)$, а $\tau_0(\lambda)$ — главная спектральная функция системы $(\rho, l; 0, 1)$. Так как $\tau(\lambda)$ является спектральной функцией системы $(\rho, L; 0, 1)$, то, как легко следует из определения спектральной функции, $\tau(\lambda)$ является спектральной функцией системы $(\rho, l; 0, 1)$. Поэтому, согласно теореме $I_1$, интеграл (3.6) сходится при тех и только тех значениях $\alpha (0 < \alpha < 1)$, при которых сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_0(\lambda)}{1+|\lambda|^\alpha} = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\tau_0(\lambda)}{1+\lambda^\alpha}, \tag{3.8}$$

где $\lambda_1 = \lambda_1(l) > 0$.

Как было сказано в п. 2 § 1, при $z > 0$

$$\int_0^l \frac{dx}{\varphi^2(x; -z)} = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\tau_0(\lambda)}{\lambda+z}. \tag{3.9}$$

Из (3.9) следует, что

$$\int_1^{\infty}\left(\int_0^l \frac{dx}{z^\alpha\varphi^2(x; -z)}\right)dz = \int_1^{\infty}\left(\int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\tau_0(\lambda)}{z^\alpha(\lambda+z)}\right)dz$$

и, согласно известной теореме о перемене порядка интегрирования [см. (7), стр. 134],

$$\int_0^l\left(\int_1^{\infty} \frac{dz}{z^\alpha\varphi^2(x; -z)}\right)dx = \int_{\lambda_1}^{\infty}\left(\int_1^{\infty} \frac{dz}{z^\alpha(\lambda+z)}\right)d\tau_0(\lambda), \tag{3.10}$$

независимо от того, конечны или бесконечны левая и правая части этого равенства.

С одной стороны, из равенства (3.10) и лемм I и $II_1$ следует, что

$$C_1(\alpha, l)\int_0^l \varphi_1^{\alpha-1}(x)\,dx < D_2(\alpha, \lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\tau_0(\lambda)}{\lambda^\alpha}. \tag{3.11}$$

С другой стороны, из тех же лемм и того же равенства (3.10) вытекает, что

$$C_2(\alpha, l)\int_0^l \varphi_1^{\alpha-1}(x)\,dx \geqslant D_1(\alpha, \lambda_1)\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\tau_0(\lambda)}{\lambda^\alpha}. \tag{3.12}$$

Так как числа $C_1(\alpha, l)$, $C_2(\alpha, l)$, $D_1(a, \lambda_1)$ и $D_2(\alpha, \lambda_1)$ конечны и положительны, то из неравенств (3.11) и (3.12) следует, что интеграл

$$\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{d\tau_0(\lambda)}{\lambda^\alpha} \tag{3.13}$$

сходится при тех и только тех значениях $\alpha (0 < \alpha < 1)$, при которых сходится интеграл

$$\int_0^l \varphi_1^{\alpha-1}(x)\,dx.$$

Так как $\lambda_1 > 0$, то интеграл (3.13) сходится при тех и только тех значениях $\alpha$, при которых сходится интеграл (3.8) и, следовательно, инте-

и (3.6). А так как, согласно (1.4),

$$\varphi_1(x) = \int_0^x M(s)\,ds,$$

этим теорема доказана.

ТЕОРЕМА II$_0$. *Пусть* $\tau(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — *какая-либо спектральная нкция системы*

$$\left.\begin{aligned} -y''(x) - \lambda\rho(x)\,y(x) = 0 \quad (0 \leqslant x < L),\\ y'(0) = 1, \qquad y(0) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (\rho, L; 1, 0)$$

*да интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{1 + |\lambda|^\alpha} \tag{3.14}$$

*ится при тех и только тех вещественных значениях* $\alpha$, *при которых дится интеграл*

$$\int_0^l \left(\int_0^x s\,dM(s)\right)^{\alpha-2} dM(x) \tag{3.15}$$

*я бы при одном (и, следовательно, при любом)* $l \in (0, L)$.

Доказательство. При $\alpha \leqslant 1$ интегралы (3.14) и (3.15) расходятся, ри $\alpha \geqslant 2$ сходятся. Для интеграла (3.15) это легко усмотреть непосредвнно, а для (3.14) это следует из сказанного во введении. Остается мотреть случай $1 < \alpha < 2$.

Пусть $l$ — какое-либо число из интервала $(0, L)$, а $\tau_0(\lambda)$ — главная тральная функция системы $(\rho, l; 1, 0)$ (см. п. 3 § 1). Как и в докальстве теоремы II$_1$, из теоремы I$_0$ следует, что интеграл (3.14) сходя при тех и только тех значениях $\alpha$ $(1 < \alpha < 2)$, при которых сходя интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_0(\lambda)}{1 + |\lambda|^\alpha} = \int_{\mu_1}^{\infty} \frac{d\tau_0(\lambda)}{1 + |\lambda|^\alpha} \quad (\mu_1 > 0). \tag{3.16}$$

им образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что еграл (3.16) сходится при тех и только тех значениях $\alpha$ $(1 < \alpha < 2)$, которых сходится интеграл (3.15).

Положим

$$\sigma(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\tau_0(t)}{t} = \int_{\mu_1}^\lambda \frac{d\tau_0(t)}{t} \quad (\lambda \geqslant \mu_1).$$

следует из (1.21),

$$\int_0^l \frac{dM(x)}{[\psi'(x; -z)]^2} = \int_{\mu_1}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda + z} \quad (z > 0). \tag{3.17}$$

одя из этого равенства, мы с помощью лемм I и II$_0$ точно так же, при доказательстве теоремы II$_1$, получим, что интеграл

$$\int_{\mu_1}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^{\alpha-1}} = \int_{\mu_1}^{\infty} \frac{d\tau_0(\lambda)}{\lambda^\alpha} \tag{3.18}$$

дится при тех и только тех значениях $\alpha$ $(0 < \alpha - 1 < 1)$, при которых

сходится интеграл

$$\int_0^l [\psi_1'(x)]^{\alpha-2}\, dM(x).$$

Учитывая, что интеграл (3.18) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл (3.16), а также то, что, как следует из (1.6),

$$\psi_1'(x) = \int_0^x s\, dM(s),$$

мы получим утверждение теоремы.

## § 4. Доказательство основной теоремы в общем случае

1. Возвратимся к системе (3). Докажем сначала основную теорему для случая, когда $n \neq 0$. Для этого нам понадобятся два вспомогательных предложения.

ЛЕММА III$_1$. *Если $n \neq 0$, то найдется такое число $l_0 \in (0, L)$, что любая спектральная функция системы* (3) *является спектральной функцией системы*

$$\left.\begin{aligned} &-Y''(X) - \lambda\tilde{\rho}(X)Y(X) = 0 \quad (0 \leqslant X < \tilde{l}_0), \\ &Y'(0) = 0, \quad Y(0) = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (\tilde{\rho}, \tilde{l}_0;\ 0, 1)$$

*где $\tilde{l}_0$ и функция $\tilde{\rho}(X)$ определены равенствами:*

$$X = X(x) = \int_0^x \frac{ds}{U^2(s)} \quad (0 \leqslant x \leqslant l_0), \tag{4.1}$$

$$\tilde{\rho}(X) = U^4(x)\rho(x), \tag{4.2}$$

$$\tilde{l}_0 = X(l_0) = \int_0^{l_0} \frac{ds}{U^2(s)}, \tag{4.3}$$

*а $U(x)$ — решение системы* (3) *при $\lambda = 0$.*

Доказательство. Так как функция $U^2(x)$ непрерывна и, согласно условию, $U^2(0) = n^2 > 0$, то найдется число $l_0 \in (0, L)$ и два положительных числа $K_1$ и $K_2$ такие, что при $0 \leqslant x \leqslant l_0$

$$K_1 \leqslant U^2(x) \leqslant K_2.$$

При таком выборе $l_0$ интегралы в правых частях (4.1) и (4.3) сходятся.

Будем считать, что переменные $x$ и $X$, фигурирующие в одном равенстве, связаны равенством (4.1). Пусть $u(x; \lambda)$ — решение системы (3) и

$$\Phi(X; \lambda) = \frac{u(x; \lambda)}{U(x)}. \tag{4.4}$$

Функция $\Phi(X; \lambda)$ является решением системы $(\rho, \tilde{l}_0;\ 1, 0)$. Действительно,

$$-\frac{d^2}{dX^2}\Phi(X; \lambda) - \lambda\tilde{\rho}(X)\Phi(X; \lambda) =$$

$$= -\frac{dx}{dX}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dX}\cdot\frac{d}{dx}\,\frac{u(x; \lambda)}{U(x)}\right) - \lambda\rho(x)U^4(x)\,\frac{u(x; \lambda)}{U(x)} =$$

$$= U^3(x)\left[-u''(x; \lambda) + \frac{U''(x)}{U(x)}u(x; \lambda) - \lambda\rho(x)u(x; \lambda)\right] = 0,$$

$u(x;\lambda)$ является решением дифференциального уравнения системы (3) $J''(x)/U(x) = q(x)$.

Кроме того, легко проверить, что $\Phi(0;\lambda) = 1$ и $\Phi'(X;\lambda)|_{X=0} = 0$.

Пусть $\tau(\lambda)$ — спектральная функция системы (3). Покажем, что она яется спектральной функцией системы $(\widetilde{\rho}, \widetilde{l_0}; 0, 1)$.

Пусть $g(X) \in L_{\widetilde{M}}(0, \widetilde{l_0})$, где

$$\widetilde{M}(X) = \int_0^X \widetilde{\rho}(S)\,dS \quad (0 \leqslant X \leqslant \widetilde{l_0}), \tag{4.5}$$

$$f(x) = \begin{cases} g(X)\ \ U(x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l_0, \\ \quad 0 & \text{при } l_0 \leqslant x < L; \end{cases} \tag{4.6}$$

да из (4.1) и (4.2) следует, что

$$\int_0^L |f(x)|^2 \rho(x)\,dx = \int_0^{\widetilde{l_0}} |f(x)|^2 \rho(x)\,dx = \int_0^{\widetilde{l_0}} |g(X)|^2 \widetilde{\rho}(X)\,dX < \infty. \tag{4.7}$$

ким образом, $f(x) \in L_M^0$. Пусть

$$F(\lambda) = \int_0^L f(x)\,u(x;\lambda)\,dM(x) = \int_0^{l_0} f(x)\,u(x;\lambda)\,dM(x). \tag{4.8}$$

ласно определению спектральной функции системы (3),

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\,d\tau(\lambda) = \int_0^L |f(x)|^2 \rho(x)\,dx. \tag{4.9}$$

сть

$$G(\lambda) = \int_0^{\widetilde{l_0}} g(X)\,\Phi(X;\lambda)\,\widetilde{\rho}(X)\,dX. \tag{4.10}$$

(4.10), (4.6), (4.4), (4.2), (4.1) и (4.8) следует, что

$$G(\lambda) = \int_0^{l_0} \frac{f(x)}{U(x)}\,\frac{u(x;\lambda)}{U(x)}\,U^4(x)\,\rho(x)\,\frac{dx}{U^2(x)} = \int_0^{l_0} f(x)\,u(x;\lambda)\,\rho(x)\,dx = F(\lambda). \tag{4.11}$$

оме того, из (4.11), (4.9) и (4.7) вытекает, что

$$\int_0^{\infty} |G(\lambda)|^2\,d\tau(\lambda) = \int_0^{\widetilde{l_0}} |g(X)|^2\,\widetilde{\rho}(X)\,dX.$$

Из (4.10) и последнего равенства следует, согласно определению, что ) — спектральная функция системы $(\widetilde{\rho}, \widetilde{l_0}; 0, 1)$.

ЛЕММА IV$_1$. *Если $0 < l < l_0$, где $l_0$ — число, выбранное в доказательстве предыдущей леммы, $\widetilde{l} = X(l)$, а функции $X(x)$ и $\widetilde{M}(X)$ определены енствами (4.1), (4.2) и (4.5), то интеграл*

$$I(\alpha) = \int_0 \left(\int_0^x M(s)\,ds\right)^{\alpha-1} dx \tag{4.12}$$

*сходится при тех и только тех вещественных значениях* $\alpha$, *при которых сходится интеграл*

$$\widetilde{I}(\alpha)=\int_0^{\widetilde{l}}\left(\int_0^X \widetilde{M}(S)\,dS\right)^{\alpha-1}dX. \tag{4.13}$$

Доказательство. Из выбора $l_0$ вытекает, что

$$K_1\leqslant U^2(x)\leqslant K_2 \quad (0\leqslant x\leqslant l_0), \tag{4.14}$$

где $K_1$ и $K_2$ — положительные числа; поэтому из (4.1) следует, что

$$0<\widetilde{l}=X(l)\leqslant lK_1^{-1}<\infty.$$

Так как

$$\widetilde{M}(X)=\int_0^X\widetilde{\rho}(S)\,dS=\int_0^x \rho(s)\,U^4(s)\,\frac{ds}{U^2(s)}=\int U^2(s)\,dM(s),$$

то из (4.14) следует, что

$$K_1M(x)\leqslant\widetilde{M}(X)\leqslant K_2M(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l<l_0), \tag{4.15}$$

а так как

$$\int_0^X\widetilde{M}(S)\,dS=\int_0^x\widetilde{M}(S(s))\,\frac{ds}{U^2(s)},$$

то из (4.14) и (4.15) вытекает, что

$$\frac{K_1}{K_2}\int_0^x M(s)\,ds\leqslant\int_0^X\widetilde{M}(S)\,dS\leqslant\frac{K_2}{K_1}\int_0^x M(s)\,ds \quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{4.16}$$

Из равенства

$$\int_0^{\widetilde{l}}\left(\int_0^X\widetilde{M}(S)\,dS\right)^{\alpha-1}dX=\int_0^l\left(\int_0^{X(x)}\widetilde{M}(S)\,dS\right)^{\alpha-1}\frac{dx}{U^2(x)}$$

и неравенств (4.14) и (4.16) выводим, что при $\alpha>1$

$$K_1^{\alpha-1}K_2^{-\alpha}I(\alpha)\leqslant\widetilde{I}(\alpha)\leqslant K_1^{-\alpha}K_2^{\alpha-1}I(\alpha),$$

а при $\alpha\leqslant 1$

$$K_2^{\alpha-2}K_1^{1-\alpha}I(\alpha)\leqslant\widetilde{I}(\alpha)\leqslant K_1^{\alpha-2}K_2^{1-\alpha}I(\alpha).$$

Отсюда вытекает, что интегралы (4.12) и (4.13) одновременно конечны или бесконечны. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА III$_1$. *Если* $\tau(\lambda)$ — *спектральная функция системы* (3), *где* $n\neq 0$, *то интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau(\lambda)}{1+|\lambda|^\alpha} \tag{4.17}$$

*сходится при тех и только тех вещественных значениях* $\alpha$, *при которых сходится интеграл*

$$\int_0^l\left(\int_0^x M(s)ds\right)^{\alpha-1}dx$$

*хотя бы при одном (и, следовательно, при любом)* $l\in(0,L)$.

Доказательство. Пусть $0 < l < l_0$, где $l_0$ — число, существование которого доказано в лемме $III_1$, и $\tau(\lambda)$ — спектральная функция системы (3). Так как функция $\tau(\lambda)$ является спектральной функцией системы (3), то, согласно лемме $III_1$, она является спектральной функцией системы $(\widetilde{\rho}, \widetilde{l_0}; 0, 1)$. Поэтому из теоремы $II_1$ вытекает, что интеграл (4.17) сходится при тех и только тех вещественных значениях $\alpha$, при которых сходится интеграл (4.13) и, согласно лемме $IV_1$, при тех и только тех $\alpha$, при которых сходится интеграл (4.12). Теорема доказана.

2. Докажем теперь основную теорему при $n = 0$. Как и в случае $n \neq 0$, нам понадобятся две леммы.

ЛЕММА $III_0$. *Если $n = 0$, то найдется такое число $l_0 \in (0, L)$, что любая спектральная функция системы* (3) *является спектральной функцией системы*

$$\left.\begin{aligned} &-Y''(X) - \lambda\widetilde{\rho}(X)Y(X) = 0 \quad (0 \leqslant X < \widetilde{l_0}),\\ &Y'(0) = 1, \quad Y(0) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (\widetilde{\rho}, \widetilde{l_0};\ 1, 0)$$

*где $\widetilde{l_0}$ и $\widetilde{\rho}(X)$ определены равенствами:*

$$X = X(x) = \int_0^x \frac{ds}{V^2(s)} \quad (0 \leqslant x \leqslant l_0), \tag{4.18}$$

$$\widetilde{\rho}(X) = V^4(x)\rho(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l_0), \tag{4.19}$$

$$\widetilde{l_0} = X(l_0) = \int_0^{l_0} \frac{ds}{V^2(s)},$$

*$V(x)$ — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению* (1) *при $\lambda = 0$ и условиям*

$$V(0) = m\ (\neq 0), \quad V'(0) = 0.$$

Для доказательства нужно выбрать $l_0$ так, чтобы на отрезке $[0, l_0]$ функция $V(x)$ не обращалась в нуль, рассмотреть функцию

$$\Psi(X; \lambda) = \frac{u(x; \lambda)}{V(x)} \quad (0 \leqslant X \leqslant \widetilde{l_0}),$$

где $u(x; \lambda)$ — решение системы (3), и показать, как и в доказательстве леммы $III_1$, что функция $\Psi(X; \lambda)$ удовлетворяет системе $(\widetilde{\rho}, \widetilde{l}; 1, 0)$ и что любая спектральная функция системы (3) является спектральной функцией системы $(\widetilde{\rho}, \widetilde{l_0}; 0, 1)$.

ЛЕММА $IV_0$. *Если $0 < l < l_0$, где $l_0$ — число, выбранное при доказательстве предыдущей леммы, $\widetilde{l} = X(l)$, а функции $X(x)$ и $\widetilde{\rho}(X)$ определены равенствами* (4.18) *и* (4.19), *то интеграл*

$$\int_0^l \left(\int_0^x s\,dM(s)\right)^{\alpha-2} dM(x)$$

*сходится при тех и только тех вещественных значениях $\alpha$, при которых сходится интеграл*

$$\int_0^{\widetilde{l}} \left(\int_0^X S\,d\widetilde{M}(S)\right)^{\alpha-2} d\widetilde{M}(X),$$

где

$$\widetilde{M}(X) = \int_a^X \widetilde{\rho}(S)\, dS.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы $IV_1$.

ТЕОРЕМА $III_0$. *Если* $\tau(\lambda)$ — *спектральная функция системы* (3), *где* $n = 0$, *то интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{1 + |\lambda|^{\alpha}}$$

*сходится при тех и только тех вещественных значениях* $\alpha$, *при которых сходится интеграл*

$$\int_0^l \left( \int_0^x s dM(s) \right)^{\alpha-2} dM(x),$$

*хотя бы при одном* (*и, следовательно, при любом*) $l \in (0, L)$.

Доказательство этой теоремы получается из доказательства теоремы $III_1$, если в нем ссылки на леммы $III_1$, $IV_1$ и теорему $II_1$ заменить соответственно ссылками на леммы $III_0$, $IУ_0$ и теорему $II_0$.

Измаильский
гос. педагогический ин-т

Поступило
10. V. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, ГТТИ, 1950.

[2] Кац И. С., О поведении спектральных функций дифференциальных систем второго порядка, Доклады Ак. наук СССР, 106, № 2 (1956), 183—186.

[3] Кац И. С., Об интегральных представлениях аналитических функций, отображающих верхнюю полуплоскость в ее часть, Успехи матем. наук, XI, вып. 3 (69) (1956), 139—144.

[4] Крейн М. Г., О неопределенном случае краевой задачи Штурма — Лиувилля в интервале (0,∞), Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 293—324.

[5] Крейн М. Г., Аналог неравенств Чебышева — Маркова в одномерной краевой задаче, Доклады Ак. наук СССР, 89, № 1 (1953), 5—8.

[6] Марченко В. А., Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, Труды Моск. математ. об-ва, т. 1 (1952), 363—375.

[7] Сакс С., Теория интеграла, ИЛ, 1949.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 275—294

В. С. ВЛАДИМИРОВ

# ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

(*Представлено академиком* **Н. Н. Боголюбовым**)

Методом Н. Н. Боголюбова улучшаются границы для областей аналитичности функций, используемых при доказательствах некоторых дисперсионных соотношений в квантовой теории поля.

## § 1. Введение и формулировка результатов

В связи с обоснованием дисперсионных соотношений в квантовой теории оля [см. (1), (2)] возникла следующая задача: допускают ли обобщенные ункции, удовлетворяющие некоторым условиям, аналитическое продол-ение в комплексную область и если допускают, то какова будет соот-тствующая область аналитичности?

Приведем некоторые необходимые для дальнейшего определения и означения, используемые в теории обобщенных функций или в кванто-й теории поля.

Обобщенной функцией $f$ в смысле Соболева — Шварца [см. (3), (4)] зовем всякий линейный непрерывный функционал $(f, \varphi)$ над простран-ом $S$ Шварца [см. (4), (5)] или, что то же, на введенных Боголюбовым сах $C(p, q; n)$ [см., например, (6)]; при этом для обобщенной функции удем употреблять обозначения:

$$f(x), \quad \int f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Условимся говорить, что некоторое выражение

$$f(k, x), \quad k = (k_1, k_2, \ldots, k_m), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

яется обобщенной функцией относительно (вещественной) переменной аналитической в области $G$ относительно (комплексной) переменной если при всех $\varphi$ из $S$ выражение $\int f(k, x)\,\varphi(x)\,dx$ есть голоморфная кция в области $G$.

Под аналитическим продолжением обобщенной функции $f(x)$ из веще-нной области $G_0$ в комплексную область $G$ мы будем понимать голо-фную в области $G$ функцию $f(x+iy)$, обладающую следующими ствами:

) при каждом фиксированном $y$ функция $f(x+iy)$ есть обобщенная кция относительно $x$ для тех $x$, при которых $x+iy \in G$;

2) для любой функции $\varphi$ из $S$, носитель которой заключен в области $G_0$, имеет место предельное соотношение

$$\int f(x+iy)\varphi(x)\,dx \to \int f(x)\varphi(x)\,dx, \quad y\to 0, \quad x+iy\in G.$$

Наконец, условимся об обозначениях. Через $x$, $k$, $p$,... будем обозначать вещественные или комплексные точки четырехмерного пространства (4-вектора), например:

$$x=(x_0, x_1, x_2, x_3)=(x_0, \vec{x}), \quad \vec{x}=(x_1, x_2, x_3),$$

$$k=(k_0, k_1, k_2, k_3)=(k_0, \vec{k})=p+iq=(p_0+iq_0, \ \vec{p}+i\vec{q}\ ).$$

Символами $xk, x^2, \vec{x}\vec{k}$ и $\vec{x}^2$ будем обозначать формы:

$$xk=x_0k_0-x\ \vec{k}, \quad x^2=x_0^2-\vec{x}^2, \quad \vec{x}\vec{k}=\sum_{1\leqslant s\leqslant 3} x_s k_s, \quad \vec{x}^2=\sum_{1\leqslant s\leqslant 3} x_s^3.$$

Через $|\vec{x}|$, $|\vec{p}|$ и т. д. обозначим длины соответствующих векторов. Символами $x\lessgtr 0$, $x\gtrless 0$ будем обозначать области:

$$x\lessgtr 0\text{: если } x_0<0 \text{ или } x^2<0;$$
$$x\gtrless 0\text{: если } x_0>0 \text{ или } x^2<0.$$

Преобразование Фурье $\widetilde{f}(p)$ обобщенной функции $f(x)$ определим по формуле

$$\widetilde{f}(p)=\int f(x)\,e^{ipx}\,dx, \quad dx=dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

Следуя методу Н. Н. Боголюбова [см. (1), дополнение А] и используя результаты работы (7), мы докажем здесь следующую общую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть даны четыре обобщенные функции четырех 4-векторов:*

$$F_{lm}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad l, m=r, a, \quad x_s=(x_{s0}, \vec{x}_s), \quad s=1, 2, 3, 4,$$

*инвариантные относительно преобразований из неоднородной ортохронной группы Лоренца и удовлетворяющие условиям:*

$$F_{rr}=0, \text{ если } x_1\lessgtr x_3 \text{ или } x_2\lessgtr x_4,$$
$$F_{ra}=0, \text{ если } x_1\lessgtr x_3 \text{ или } x_2\gtrless x_4,$$
$$F_{ar}=0, \text{ если } x_1\gtrless x_3 \text{ или } x_2\lessgtr x_4,$$
$$F_{aa}=0, \text{ если } x_1\gtrless x_3 \text{ или } x_2\gtrless x_4.$$

*Предположим, что их преобразования Фурье* $\widetilde{F}_{lm}(p_1, p_2, p_3, p_4)$,

$$\int F_{lm}(x_1, \ldots, x_4)\exp i(p_1x_1+\ldots+p_4x_4)\,dx_1\ldots dx_4=$$
$$=(2\pi)^4\,\delta(p_1+\ldots+p_4)\,\widetilde{F}_{lm}(p_1, \ldots, p_4),$$

*определенные на многообразии*

$$p_1+p_2+p_3+p_4=0, \tag{1.1}$$

*удовлетворяют условиям:*

$$\widetilde{F}_{rm} = \widetilde{F}_{am}, \quad \text{если } p_1^2 < (M+1)^2 \quad \text{и} \quad p_3^2 < \gamma^2 \quad m = r, a,$$
$$\widetilde{F}_{lr} = \widetilde{F}_{la}, \quad \text{если } p_2^2 < (M+1)^2 \quad \text{и} \quad p_4^2 < \gamma^2, \quad l = r, a,$$

$\widetilde{F}_{lm} = 0$, *если* $(p_1 + p_3)^2 < (M+1)^2$ *или* $p_{10} + p_{30} < 0$, $\quad l, m, = r, a$, *ричем считаем, что* $\gamma > 1$, $M + 1 \geqslant \gamma$.

*Пусть* $V$ *и* $\tau_0$ — *любые фиксированные числа, подчиненные неравен-твам*

$$V < \tau_0 \leqslant 1, \quad \tau_0 \geqslant -1 - 2M. \tag{2.1}$$

*Тогда можно указать такое достаточно малое положительное число , не зависящее от* $t$, *и построить такую обобщенную функцию* $\Phi(z_1, z_2, , z_4, z_5; t)$ *вещественной переменной* $t$, *которые будут удовлетворять словиям:*

1) $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_5; t)$ — *голоморфная функция относительно* $(z_1, z_2, \ldots, z_5)$ *области*

$$|z_1 - M^2| < \rho, \quad |z_2 - M^2| < \rho, \quad |z_3 - \tau| < \rho,$$
$$|z_4 - \tau| < \rho, \ |z_5 + 4\Delta^2| < \frac{\rho}{t^2}, \tag{3.1}$$

*е вещественные параметры* $\tau$ *и* $\Delta^2$ *независимо пробегают промежутки*

$$V \leqslant \tau \leqslant \tau_0, \quad 0 \leqslant \Delta^2 < \Delta_m^2, \quad \Delta_m^2 = \gamma\left(1 - \frac{1 - \tau_0}{2M + 2}\right) - \tau_0. \tag{4.1}$$

2) $\Phi(z_1, z_2, \ldots, z_5; t) = 0$, *если* $t < \frac{1}{2}(M+1)$.

3) *Для вещественных* $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ *из многообразия* (1.1), *для кото-х величины*

$$z_1 = p_1^2, \quad z_2 = p_2^2, \quad z_3 = p_3^2, \quad z_4 = p_4^2, \quad z_5 = (p_1 + p_2)^2$$

*и всех*

$$t^2 = \frac{1}{4}(p_1 + p_3)^2 \geqslant \frac{1}{4}(M+1)^2$$

*инадлежат области* (3.1) *и* $p_{10} + p_{30} \geqslant 0$, *имеет место представление*

$$_{lm}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \Phi\left[p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2, (p_1 + p_2)^2; \frac{1}{2}\sqrt{(p_1 + p_3)^2}\right], \quad l, m = r, a.$$

Теорема 1 в более общей формулировке впервые была доказана Н. Боголюбовым в работе ([1]) (дополнение А), причем доказательство водилось для случая $\tau_0 = 1$ и $\gamma = 3$. Было установлено, что $= \frac{M}{M+1}$. Этот результат был впоследствии улучшен в работе ([7]) и сем в работе ([2]), где было доказано, что $\Delta_m^2 = 2$.

При доказательстве теоремы 1 существенно используется теорема § 2), доказанная в работе ([7]). Нужно отметить, что теорема 2 здесь пользуется далеко не в полной мере. Поэтому значение $\Delta_m^2$, указан- в теореме 1, может быть увеличено. Но для этого пришлось бы атиться к большому численному счету. Однако при некоторых соот-шениях параметров $M, \gamma$ и $\tau_0$ объем вычислительной работы сводится, существу, к численному решению системы трех алгебраических урав-ний с тремя неизвестными (например, методом Ньютона). Именно, еет место следующее усиление теоремы 1.

ТЕОРЕМА 1a. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* $M \geqslant 1$. *Среди всех решений* $(x, u, v)$ $(0 \leqslant u \leqslant x,\ 0 \leqslant v \leqslant x)$ *системы алгебраических уравнений**

$$\left.\begin{aligned} &2u^2 + \left(\frac{u\gamma}{x-u}\right)^2 = 2v^2 + \left(\frac{vM+v}{x-v}\right)^2, \\ &M+1 = \sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{x-u}\right)^2}(x-2u) + \sqrt{1+\left(\frac{M+1}{x-v}\right)^2}(x-2v), \\ &2v^2 + \left(\frac{vM+v}{x-v}\right)^2 - \left[\sqrt{1+\left(\frac{M+1}{x-v}\right)^2}(x-2v) - \frac{M+1}{2} - \frac{M^2-\tau_0}{2M+2}\right]^2 - \\ &\qquad - M^2 - x^2 + \left(\frac{M+1}{2} + \frac{M^2-\tau_0}{2M+2}\right)^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

*выберем решение с наименьшим* $x$. *Обозначим это решение через* $(\Delta_m, u_0, v_0)$ *и предположим, что оно удовлетворяет неравенствам*

$$M+1+\frac{M^2-\tau_0}{M+1} - 2\sqrt{1+\left(\frac{M+1}{\Delta_m - v_0}\right)^2}\left[\Delta_m \frac{M^2-\tau_0}{(M+1)^2} - \right.$$
$$\left. - v_0\left(\frac{2M^2-2\tau_0}{(M+1)^2} - 1\right)\right] \geqslant 0, \quad (6a.1)$$

$$1 - \frac{M^2-\tau_0}{(M+1)^2} - \frac{\Delta_m^2}{2\Delta_m^2 + (M+1)^2} \geqslant 0. \quad (6b.1)$$

*Тогда с указанным* $\Delta_m$ *справедливы все заключения теоремы* 1, *причем*

$$\Delta_m^2 > \gamma\left(1 - \frac{1-\tau_0}{2M+2}\right) - \tau_0. \quad (7.1)$$

Таким образом, теорема 1a дает бóльшее значение для $\Delta_m^2$, чем теорема 1. С помощью этой теоремы вычислены значения $\Delta_m^2$ для некоторых физических процессов и, тем самым, доказана справедливость соответствующих дисперсионных соотношений для всех $\Delta^2 < \Delta_m^2$ [см. ([1]), ([8])]:

$$\begin{aligned} &M = 7, \quad \tau_0 = 1, \quad \gamma = 3, \quad \Delta_m^2 = 2{,}56, \\ &M = 7, \quad \tau_0 = 0, \quad \gamma = 2, \quad \Delta_m^2 = 2{,}42, \\ &M = 7, \quad \tau_0 = 1, \quad \gamma = 2, \quad \Delta_m^2 = 1{,}29. \end{aligned}$$

Наконец, для обоснования дисперсионных соотношений для различных виртуальных процессов [см. ([9])] мы установим здесь справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1b. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $M = 7$, $\tau_0 = 1$, $\gamma = 2$; *пусть, далее,* $k$ — *любое число из промежутка* $[0,2]$. *Тогда справедливы все заключения теоремы* 1, *если область аналитичности* (3.1) — (4.1) *заменить на*

$$\left.\begin{aligned} &|z_1 - M^2| < \rho, \quad |z_2 - M^2| < \rho, \quad |z_3 - \tau| < \rho, \quad |z_4 - \tau + 2k| < \rho, \\ &|z_5 + 4\Delta^2| < \frac{\rho}{t^2}, \quad V \leqslant \tau \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \Delta^2 < \Delta_m^2, \\ &\Delta_m^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{7}{8}k - \frac{k^2}{64} + \sqrt{1 + \frac{7}{4}k - \frac{k^2}{64} - \frac{7}{256}k^3}\right). \end{aligned}\right\} \quad (8.1)$$

---

* Такое решение всегда существует.

Нужно отметить, что значение $\Delta_m^2$, приведенное в формуле (8.1), может быть увеличено.

## § 2. Вспомогательная теорема

Для доказательства результатов, изложенных в § 1, воспользуемся следующей вспомогательной теоремой, доказанной в работе (7) (теорема I).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть даны две обобщенные функции* $F_r(x)$ *и* $F_a(x)$, $x=(x_0, \ldots, x_3)$, *удовлетворяющие условиям:*

$$F_r(x)=0, \text{ если } x \leqslant 0; \quad F_a(x)=0, \text{ если } x \geqslant 0,$$

*и пусть их преобразования Фурье* $\widetilde{F}_l(p)$, $l=r, a$, *совпадают в области* $G_0(c_j)$, *где*

$$G_0(c_j)\colon\ c_1-\sqrt{\vec{p}^2+m_1^2}<p_0<-c_2+\sqrt{\vec{p}^2+m_2^2}. \tag{1.2}$$

*Тогда существует функция* $\widetilde{\Phi}(k)$ *комплексного переменного* $k=(p_0+iq_0, \vec{p}+i\vec{q})$, *голоморфная в области* $G(c_j)=\bigcup\limits_{a\leqslant b} G(c_j;\, a,\, b)$ *и такая, что при вещественных* $p$ *из области* $G_0(c_j)$ $\widetilde{\Phi}(p)=\widetilde{F}_r(p)=\widetilde{F}_a(p)$.

*К области* $G(c_j,\ a,\ b)$, $a\leqslant b$ *, *отнесем совокупность комплексных точек* $k$, *удовлетворяющих неравенству*

$$\lambda<1, \tag{2.2}$$

*а также обладающих тем свойством, что при всех* $\xi$ *из промежутка* $[a, b]$ *выполнены неравенства:*

$$c_1-\sqrt{[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}]_+^2+m_1^2}<\xi<-c_2+$$
$$+\sqrt{[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}]_+^2+m_2^2}, \tag{3.2}$$

$$\lambda=\frac{|\vec{q}|}{|\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}|}, \quad Q=\left|\vec{p}-\frac{\operatorname{Re}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}{\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}}\vec{q}\right|, \tag{4.2}$$

$\eta_+^2=\eta^2$, *если* $\eta>0$, $\eta_+^2=0$, *если* $\eta<0$.

Другими словами, комплексная точка $k$ принадлежит области аналитичности $G(c_j)$ в том и только том случае, если для нее найдется хотя бы одна пара вещественных чисел $a$ и $b$, $a\leqslant b$, таких, что неравенства (2.2) и (3.2) будут выполнены.

Определение области аналитичности $G(c_j)$, данное в теореме 2, неудобно для применений, ввиду сложности ее определения. Поэтому здесь мы приводим ряд более простых критериев принадлежности точки $k$ к области $G(c_j)$.

1. Если

$$c_1-m_1<-c_2+m_2, \tag{5.2}$$

то область

$$|\vec{q}|<|\operatorname{Im}\sqrt{(k_0-c_1+m_1)(k_0+c_2-m_2)}| \tag{6.2}$$

содержится в области $G(c_j)$.

Действительно, полагая $a=c_1-m_1+\varepsilon$ и $b=-c_2+m_2-\varepsilon$, где $\varepsilon$ — сколь угодно малое положительное число, и пользуясь неравенствами

* Случай $a=b$ соответствует тривиальной части области $G(c_j)$: $q^2>0$.

(2.2), (3.2) и (5.2), заключаем, что множество точек (6.2) содержится в $G(c_j)$.

Этот результат впервые был установлен Н. Н. Боголюбовым в работе ([1]) (дополнение А, теорема IV) и впоследствии был доказан другими методами в работах ([2]) и ([7]).

2. Множество точек $k$, определяемое условиями: либо $q^2 > 0$, либо при $q^2 \leqslant 0$

$$c_1 - \sqrt{(|\vec{p}| - \sqrt{-q^2})_+^2 + m_1^2} + \sqrt{-q^2} < p_0 <$$

$$< -c_2 + \sqrt{(|\vec{p}| - \sqrt{-q^2})_+^2 + m_2^2} - \sqrt{-q^2}, \tag{7.2}$$

содержится в области $G(c_j)$. В частности, если точка $(p_0, \vec{k})$, $\operatorname{Im} p_0 = 0$, принадлежит области $G(c_j)$, то и все точки вида $(p_0 + iq_0, \vec{k})$ будут принадлежать $G(c_j)$.

Для доказательства достаточно рассмотреть те $k$, для которых $q^2 \leqslant 0$. Полагая при $\varepsilon > 0$

$$a = p_0 - \sqrt{-q^2} - \varepsilon, \quad b = p_0 + \sqrt{-q^2} + \varepsilon, \tag{8.2}$$

получим:

$$|\operatorname{Im} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}|^2 = \vec{q}^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{-q^2} > \vec{q}^2,$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)} = 0.$$

Следовательно, неравенство (2.2) выполнено. Неравенства (3.2) будут выполнены, если

$$c_1 - \sqrt{\left(|\vec{p}| - \frac{b-a}{2}\right)_+^2 + m_1^2} < \xi <$$

$$< -c_2 + \sqrt{\left(|\vec{p}| - \frac{b-a}{2}\right)_+^2 + m_2^2}, \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

Последние неравенства будут удовлетворены в силу (7.2) и (8.2) при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

3. Из критерия 2 следует такое утверждение: вещественная точка $p$ принадлежит области $G(c_j)$ в том случае, если она принадлежит области $G_0(c_j)$.

Этот результат был впервые установлен Н. Н. Боголюбовым в работе ([1]) (дополнение А, теорема 1); в дальнейшем он был доказан другими методами в работах ([2]), ([7]), ([10]). В работе ([2]) такого типа теоремы названы теоремами «edge of the wedge».

4. Комплексная точка $k$ принадлежит области $G(c_j)$ в том и только том случае, если система пяти уравнений

$$\lambda |\operatorname{Im} \sqrt{(k_0 - a)(k_0 - b)}| = |\vec{q}|, \tag{9.2}$$

$$\varepsilon_j \xi_j - c_j + \sqrt{[Q - \lambda\sqrt{(\xi_j - a)(b - \xi_j)}]^2 + m_j^2} = 0, \tag{10.2}$$

$$\sqrt{(\xi_j - a)(b - \xi_j)\{[Q - \lambda\sqrt{(\xi_j - a)(b - \xi_j)}]^2 + m_j^2\}} =$$

$$= \lambda \varepsilon_j [Q - \lambda\sqrt{(\xi_j - a)(b - \xi_j)}] \left(\frac{b+a}{2} - \xi_j\right), \tag{11.2}$$

$=1,\ 2,\ \varepsilon_1=1,\ \varepsilon_2=-1$, имеет решение $(\lambda,\ a,\ b,\ \xi_1,\ \xi_2)$, удовлетворяю-ее неравенствам

$$\lambda < 1; \tag{12.2}$$

$$a \leqslant \xi_1 \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \xi_2 \leqslant b. \tag{13.2}$$

Действительно, анализ поведения кривых

$$\varepsilon_j \xi - c_j + \sqrt{[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)\,(b-\xi)}]_+^2 + m_j^2}, \quad a \leqslant \xi \leqslant b, \quad j=1,\ 2,$$

казывает, что неравенства (3.2) эквивалентны неравенствам

$$\varepsilon_j\xi_j - c_j + \sqrt{[Q-\lambda\sqrt{(\xi_j-a)\,(b-\xi_j)}]^2 + m_j^2} > 0, \quad j=1,\ 2, \tag{14.2}$$

е $\xi_j=\xi_j(a,\ b;\ k)$ — вещественные корни уравнений (11.2), удовлетворяю-ие неравенствам (13.2).

Итак, комплексная точка $k$ принадлежит области $G(c_j;\ a,\ b)$ в том только том случае, если для нее выполнены неравенства (2.2) и (14.2).

Отсюда, в частности, следует, что область $G(c_j;\ a,\ b)$ монотонно и прерывно увеличивается с уменьшением $c_1$ или $c_2$; следовательно, ким же свойством обладает и область $G(c_j)$.

Обозначим через $G_1(c_j)$ множество (комплексных) точек $k$, удовлетво-ющих условиям критерия 4. Это множество открыто, так как оно рактеризуется неравенством $\lambda(k)<1$, где $\lambda(k)$ есть непрерывная функ-я $k$, определяемая системой уравнений (9.2) — (11.2) и неравен-ами (13.2).

Докажем включение

$$G_1(c_j) \subset G(c_j). \tag{15.2}$$

сть $k \in G_1(c_j)$. Прибавляя к обеим частям равенств (10.2) любое $\varepsilon>0$, лючаем, на основании (14.2), что

$$k \in G(c_j-\varepsilon;\ a,\ b) \subset G(c_j-\varepsilon).$$

при $\varepsilon \to +0$ область $G(c_j-\varepsilon)$, непрерывно и монотонно уменьшаясь, емится к $G(c_j)$. Следовательно, $k \in \overline{G}(c_j)$ — замыканию $G(c_j)$. Так как $c_j$) открыто, то, повторяя это рассуждение, заключаем, что точка $k$ надлежит $\overline{G}(c_j)$ вместе с некоторой своей окрестностью, а это и зна-, что $k \in G(c_j)$.

Включение (15.2) позволяет ослабить условие (14.2) в характеристике ласти $G(c_j)$ в том смысле, что там допускается знак равенства.

Из определения областей $G(c_j)$ и $G_1(c_j)$ и из включения (15.2) имеем:

$$G(c_j) = \bigcup_{\delta_j \geqslant 0} G_1(c_j+\delta_j). \tag{16.2}$$

илу монотонности области $G(c_j)$, можно написать также:

$$G(c_j) = \bigcup_{\delta_j \geqslant 0} G(c_j+\delta_j).$$

леднее равенство вместе с равенством (16.2) и включением (15.2) водят к равенству

$$G(c_j) = G_1(c_j),$$

рое и устанавливает справедливость критерия 4.

Следствие. *Точка $k$ принадлежит области $G(c_j;\ a,\ b)$ в том и только том случае, если для нее выполнены неравенства* (2.2) *и* (3.2), *причем в неравенствах* (3.2) *допускаются знаки равенства.*

5. В частности, если точка $k$ имеет вид $k^* = (p_0,\ \vec{k})$, $\operatorname{Im} p_0 = 0$, то критерий принадлежности ее к области $G(c_j)$ упрощается. В этом случае, в силу (4.2), имеем:

$$\lambda = \frac{|\vec{q}\,|}{\sqrt{(p_0 - a)(b - p_0)}}, \quad Q = |\vec{p}\,|, \quad a < p_0 < b. \tag{17.2}$$

Точка $k^* = (p_0,\ \vec{k})$ принадлежит области $G(c_j)$ в том и только том случае, если существует решение $(\lambda,\ u,\ v)$ системы трех алгебраических уравнений

$$u^2(1 + \lambda^2) + \left(\frac{um_1}{|\vec{p}\,| - \lambda u}\right)^2 = v^2(1 + \lambda^2) + \left(\frac{vm_2}{|\vec{p}\,| - \lambda v}\right)^2, \tag{18a.2}$$

$$c_1 + c_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{m_1}{|\vec{p}\,| - \lambda u}\right)^2}\left(|\vec{p}\,| - \lambda u - \frac{u}{\lambda}\right) + \\ + \sqrt{1 + \left(\frac{m_2}{|\vec{p}\,| - \lambda v}\right)^2}\left(|\vec{p}\,| - \lambda v - \frac{v}{\lambda}\right), \tag{18b.2}$$

$$v^2(1 + \lambda^2) + \left(\frac{vm_2}{|\vec{p}\,| - \lambda v}\right)^2 - \\ - \left[(p_0 - c_2)\lambda + \sqrt{1 + \left(\frac{m_2}{|\vec{p}\,| - \lambda v}\right)^2}\,(\lambda\,|\vec{p}\,| - \lambda^2 v - v)\right]^2 = \vec{q}^{\,2}, \tag{18c.2}$$

удовлетворяющее условиям:

$$0 \leqslant \lambda < 1, \quad 0 \leqslant \lambda u \leqslant |\vec{p}\,|, \quad 0 \leqslant \lambda v \leqslant |\vec{p}\,|. \tag{19.2}$$

Действительно, полагая в уравнениях (9.2) — (11.2)

$$\alpha = \frac{b - a}{2}, \quad \beta = \frac{b + a}{2}, \; u = \sqrt{(\xi_1 - a)(b - \xi_1)}, \quad v = \sqrt{(\xi_2 - a)(b - \xi_2)},$$
$$\xi_1 = \beta - \sqrt{\alpha^2 - u^2}, \quad \xi_2 = \beta + \sqrt{\alpha^2 - v^2},$$

и принимая во внимание (17.2), получим:

$$u\sqrt{(|\vec{p}\,| - \lambda u)^2 + m_1^2} = \lambda(|\vec{p}\,| - \lambda u)\sqrt{\alpha^2 - u^2}, \tag{20a.2}$$

$$v\sqrt{(|\vec{p}\,| - \lambda v)^2 + m_2^2} = \lambda(|\vec{p}\,| - \lambda v)\sqrt{\alpha^2 - v^2}, \tag{20b.2}$$

$$\beta - \sqrt{\alpha^2 - u^2} - c_1 + \sqrt{(|\vec{p}\,| - \lambda u)^2 + m_1^2} = 0, \tag{20c.2}$$

$$-\beta - \sqrt{\alpha^2 - v^2} - c_2 + \sqrt{(|\vec{p}\,| - \lambda v)^2 + m_2^2} = 0, \tag{20d.2}$$

$$\lambda\sqrt{\alpha^2 - (p_0 - \beta)^2} = |\vec{q}\,|. \tag{20e.2}$$

Исключая из этих уравнений $\alpha$ и $\beta$, получим систему (18.2); условия (12.2) и (13.2) перейдут при этом в (19.2).

## § 3. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 проход... по схеме доказательства теоремы III аботы ([7]). Поэтому мы будем про... его кратко, обращая внимание ишь на новые моменты и отсылая читателя, интересующегося подроб- остями, к работам ([1]), ([7]), ([2]).

Используя свойства обобщенных функций ... и $\widetilde{F}_{lm}$, указанные в ус- овиях теоремы 1, заключаем, что эти функции фактически зависят от евяти переменных $(y_{10}, \vec{y}_1, y_{20}, \vec{y}_2, y_0)$ и $(r_{10}, \vec{r}_1, r_{20}, \vec{r}_2, t)$. Здесь старые еременные $p_1, p_2, p_3, p_4$ связаны с новыми переменными $r_1, r_2, t$ соот- ошениями:

$$p_1 = r_1 + r_3, \quad p_2 = -r_2 - r_3, \quad p_3 = r_3 - r_1, \quad p_4 = r_2 - r_3,$$
$$r_3 = (t, \vec{0}). \tag{1.3}$$

Обозначим функции $F_{lm}$, $\widetilde{F}_{lm}$ в новых переменных через

$$f_{lm}(y_1, y_2, y_0), \quad \widetilde{f}_{lm}(r_1, r_2, t), \quad l, m = r, a.$$

осле соответствующей перенумерации введенные функции будут обладать ойствами:

1) $f_{rr} = 0$, если $y_1 \leqslant 0$ или $y_2 \leqslant 0$,
   $f_{ra} = 0$, если $y_1 \leqslant 0$ или $y_2 \geqslant 0$,
   $f_{ar} = 0$, если $y_1 \geqslant 0$ или $y_2 \leqslant 0$,
   $f_{aa} = 0$, если $y_1 \geqslant 0$ или $y_2 \geqslant 0$.

2) $\widetilde{f}_{rm} = \widetilde{f}_{am}$, $m = r, a$, если $r_1 \in G_0(t)$, где $G_0(t)$ есть множество точек удовлетворяющих неравенствам:

$$t - \sqrt{\vec{p}^2 + \gamma^2} < p_0 < -t + \sqrt{\vec{p}^2 + (M+1)^2}, \tag{2.3}$$

$\widetilde{f}_{lr} = \widetilde{f}_{la}$, $l = r, a$, если $r_2 \in G_0(t)$,

3) $\widetilde{f}_{lm} = 0$, $l, m = r, a$, если $t < t_0 = \frac{1}{2}(M+1)$,

4) $\widetilde{f}_{lm}$ — инварианты относительно пространственных вращений и отра- ний векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$.

Воспользовавшись теоремой 2, заключаем о существовании функции $k_1, k_2; t)$, голоморфной по совокупности (комплексных) переменных $k_2)$ в области $G(t) \times G(t)$ и обобщенной относительно (вещественной) еменной $t$. Мы обозначили здесь через $G(t)$ область $G(c_j)$ из теоремы 2 значениях параметров $c_1 = c_2 = t$, $m_1 = \gamma$, $m_2 = M + 1$.

Полученная функция $\widetilde{\Phi}(k_1, k_2; t)$ при вещественных $(k_1, k_2) = (r_1, r_2)$ области $G_0(t) \times G_0(t)$ совпадает с функциями $\widetilde{f}_{lm}(r_1, r_2; t)$ и обра- тся в нуль при $t < t_0$; кроме того, эта функция инвариантна отно- ельно пространственных вращений и отражений векторов $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$. По- у она зависит от $(k_1, k_2)$ лишь посредством пяти переменных:

$$k_{10}, \quad k_{20}, \quad \vec{k}_1^2, \quad \vec{k}_2^2, \quad \vec{k}_1\vec{k}_2.$$

сто них введем эквивалентную систему переменных $z = (z_1, \ldots, z_5)$,

положив

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (k_{10}+t)^2 - \vec{k}_1^2, \\ z_2 &= (k_{20}+t)^2 - \vec{k}_2^2, \\ z_3 &= (k_{10}-t)^2 - \vec{k}_1^2, \\ z_4 &= (k_{20}-t)^2 - \vec{k}_2^2, \\ z_5 &= (k_{10}-k_{20})^2 - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} k_{10} &= \frac{z_1 - z_3}{4t}, \quad k_{20} = \frac{z_2 - z_4}{4t}, \\ (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 &= -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2, \\ \vec{k}_1^2 &= t^2 - \frac{z_1 + z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2, \\ \vec{k}_2^2 &= t^2 - \frac{z_2 + z_4}{2} + \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2. \end{aligned}\right. \tag{4.3}$$

Таким образом,

$$\widetilde{\Phi}(k_1, k_2; t) = \Phi(z; t).$$

Используя свойства функции $\widetilde{\Phi}(k_1, k_2; t)$ и учитывая формулы преобразований переменных (1.3) и (3.3), заключаем, что построенная функция $\Phi(z; t)$ удовлетворяет свойствам 2) и 3), указанным в теореме 1. Чтобы установить справедливость для нее свойства 1), а с ним и теоремы, осталось доказать существование такого достаточно малого числа $\rho > 0$, что при каждом $t \geqslant t_0$ точки $z$ области (3.1) отображаются преобразованием (4.3) в область аналитичности $G(t) \times G(t)$ переменных $(k_1, k_2)$.

Представим векторы $\vec{k}_j$, $j = 1,2$, удовлетворяющие соотношениям (4.3), в виде

$$\vec{k}_j = A_j(z, t)\vec{e}_1 + \varepsilon_j A_3(z; t)\vec{e}_2, \tag{5.3}$$

где $\vec{e}_j$ — произвольные ортонормальные векторы и $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$. В силу (4.3), функции $A_j$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяют соотношениям

$$A_1^2 + A_3^2 = t^2 - \frac{z_1 + z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2,$$

$$A_2^2 + A_3^2 = t^2 - \frac{z_2 + z_4}{2} + \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2,$$

$$(A_1 - A_2)^2 + 4A_3^2 = -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2.$$

Вычисления показывают, что эти функции обладают свойствами:

1) При каждом $t \geqslant t_0$ функции $A_j$ голоморфны относительно $z$ всюду, кроме аналитической поверхности

$$4t^2 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 + z_5 + \frac{1}{16t^2}(z_1 + z_2 - z_3 - z_4)^2. \tag{6.3}$$

2) Для всех $z$ из окрестности (3.1) точки $z_0 = (M^2, \ M^2, \tau, \tau, -4\Delta^2)$ раведливо неравенство

$$|A_j(z;\ t) - A_j(z_0;\ t)| < \frac{c}{t}\rho, \tag{7.3}$$

ли $t$ достаточно велико; здесь $c$ не зависит от $t$, $\Delta^2$ и $\tau$.

3)
$$A_1^2(z_0;\ t) = A_2^2(z_0;\ t) = \varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau),\ A_3(z_0;\ t) = \Delta, \tag{8.3}$$
е

$$\varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau) = \left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2 - M^2 - \Delta^2. \tag{9.3}$$

В силу (4.3), (5.3) и (8.3), комплексные 4-векторы $k_j$, $j = 1, 2$, ответствующие точкам $z_0$, можно представить в виде

$$k_j = \left[\frac{M^2 - \tau}{4t}, \quad \varphi(t,\ \Delta^2,\ \tau)\,\vec{e}_1 + \varepsilon_j \Delta \vec{e}_2\right]. \tag{10.3}$$

Итак, с учетом (7.3) задача свелась к доказательству существования кого достаточно малого числа $\eta > 0$, не зависящего от $t$, $\Delta^2$ и $\tau$, что и каждом $t \geqslant t_0$ область $G(t)$ содержит множество точек вида:

$$(k_0,\ \vec{k}) = \left[\frac{M^2 - \tau}{4t} + k_0',\ \varphi(t;\ \Delta^2\tau)\,\vec{e}_1 + \Delta\vec{e}_2 + \vec{k}'\right], \tag{11.3}$$

$(k_0',\ \vec{k}')$ — любой комплексный 4-вектор такой, что $|k_0'| < \frac{\eta}{t}$, $|\vec{k}'| < \frac{\eta}{t}$, числа $\tau$ и $\Delta^2$ независимо пробегают интервалы (4.1).

Рассмотрим два случая. 1°. $\varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau) > 0$. В силу критерия 2 (§ 2), 5.3) можно считать $\operatorname{Im} k_0' = 0$. Поэтому

$$p_0 = \frac{M^2 - \tau}{4t} + \operatorname{Re} k_0', \quad q_0 = 0, \quad \vec{q} = \operatorname{Im} \vec{k}',$$
$$\vec{p} = \varphi(t;\ \Delta^2,\ \tau)\,\vec{e}_1 + \Delta\vec{e}_2 + \operatorname{Re} \vec{k}',$$

уда следует:

$$\begin{gathered} p_0 = \frac{M^2 - \tau}{4t} + O\left(\frac{\eta}{t}\right), \quad q_0 = 0, \\ |\vec{p}| = \sqrt{\left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2 - M^2} + O\left(\frac{\eta}{t}\right), \quad |\vec{q}| = O\left(\frac{\eta}{t}\right). \end{gathered} \tag{12.3}$$

В силу (7.2) и (12.3), достаточно установить справедливость неенств

$$\left[t + \frac{M^2 - \tau}{4t} + O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2 < (M+1)^2 + \left[\sqrt{\left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2 - M^2} + O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2,$$

$$\left[t - \frac{M^2 - \tau}{4t} + O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2 < \gamma^2 + \left[\sqrt{\left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2 - M^2} + O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2$$

достаточно малых $\eta$ и при всех рассматриваемых $t$ и $\tau$. Последние венства обеспечиваются условиями $\tau_0 \leqslant 1$ и $\gamma > 1$.

2°. $\varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau) \leqslant 0$. В этом случае множество точек (10.3) компактно. тому для доказательства теоремы достаточно показать, что точки

$$k^*(t;\ \Delta,\ \tau) = \left[\frac{M^2 - \tau}{4t},\ i\,|\varphi(t;\ \Delta^2,\ \tau)|\,\vec{e}_1 + \Delta\vec{e}_2\right] \tag{13.3}$$

всех рассматриваемых $\tau$ и $\Delta^2$ принадлежат $G(t)$, $t \geqslant t_0$.

Воспользуемся критерием 1 (§ 2). Условие (5.2) в нашем случае примет вид

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{\gamma}{2}.$$

Оно выполнено, так как $\varphi^2 \leqslant 0$. Таким образом, в силу (6.2), (13.3) и (9.3), достаточно установить неравенство

$$f(t;\ \Delta^2,\ \tau) \equiv \left(\frac{M^2-\tau}{4t} - t + \gamma\right)\left(M + 1 - t - \frac{M^2-\tau}{4t}\right) + \varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau) \equiv$$
$$\equiv \frac{M^2-\tau}{4t}(M + 2t + 1 - \gamma) + 2t^2 + \gamma(M+1) -$$
$$- t(M + 1 + \gamma) - M^2 - \Delta^2 > 0$$

для всех рассматриваемых $t$, $\Delta^2$ и $\tau$; но это последнее неравенство является следствием неравенств

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = -\frac{1}{4t}(M + 2t + 1 - \gamma) < 0,$$
$$f(t_0;\ \Delta^2,\ \tau_0) = \gamma\left(1 - \frac{1-\tau_0}{2M+2}\right) - \tau_0 - \Delta^2 = \Delta_m^2 - \Delta^2 > 0,$$
$$\frac{\partial f(t;\ \Delta^2,\ \tau_0)}{\partial t} > (M + 1 - \gamma)\left[1 - \frac{M^2-\tau_0}{(M+1)^2}\right] \geqslant 0.$$

Все приведенные здесь рассуждения справедливы, если выражение (6.3) отлично от нуля. При $z = z_0$ это выражение превращается в $4\varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau)$. Но доказано, что нри $\varphi^2 = 0$ точки компакта (13.3) принадлежат области $G(t)$. Поэтому все особенности на поверхности (6.3) устранимы.

Теорема 1 доказана полностью.

## § 4. Доказательство теоремы 1a

При доказательстве теоремы 1 (случай 2°) использовалась, по существу, не сама область $G(t)$, а только ее более простая аппроксимация, определяемая неравенством (6.2). Это дало возможность получить выражение для $\Delta_m^2$ в явном виде и несколько обобщить теорему. При доказательстве теоремы 1a используется сама область $G(t)$ и, тем самым, увеличивается $\Delta_m^2$.

Итак, чтобы установить справедливость теоремы 1a, достаточно заново рассмотреть случай 2° в доказательстве теоремы 1, т. е. показать, что точки

$$k^*(t;\ \Delta^2,\ \tau) = \left[\frac{M^2-\tau}{4t},\ i\sqrt{M^2 + \Delta^2 - \left(t + \frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2}\vec{e}_1 + \Delta\vec{e}_2\right] \quad (1.4)$$

для всех $\Delta^2$ и $\tau$ из области

$$0 \leqslant \Delta^2 < \Delta_m^2, \quad V \leqslant \tau \leqslant \tau_0, \quad \varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau) \leqslant 0 \quad (2.4)$$

принадлежат $G(t)$, $t \geqslant t_0$.

Предварительно докажем лемму. *Пусть тройка чисел* $(t,\ \Delta^2,\ \tau_0)$ *удовлетворяет неравенству* $\varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau_0) \leqslant 0$ *и* $t \geqslant t_0$ *и пусть* $k^*(t;\ \Delta,\ \tau_0) \in G(t)$. *Тогда*

$$k^*(t;\ \Delta,\ \tau) \in G(t) \quad (3.4)$$

*при всех* $\tau \leqslant \tau_0$, *для которых* $\varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau) \leqslant 0$.

Действительно, так как $k^*(t;\ \Delta, \tau_0) \in G(t)$, то, в силу критерия 4 (§ 2) теоремы 2 (при $c_1 = c_2 = t$, $m_1 = \gamma$, $m_2 = M+1$), существует решение $(\tau_0)$, $a_0$, $b_0$, $\xi_1^0$, $\xi_2^0$], удовлетворяющее системе уравнений (9.2) — (11.2) и равенству (12.2):

$$\lambda(\tau_0) < 1. \tag{4.4}$$

оме того, при всех $\xi$ из промежутка $[a_0, b_0]$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &\xi - t + \sqrt{[\Delta - \lambda(\tau_0)\sqrt{(\xi - a_0)(b_0 - \xi)}]_+^2 + \gamma^2} \geqslant 0, \\ &-\xi - t + \sqrt{[\Delta - \lambda(\tau_0)\sqrt{(\xi - a_0)(b_0 - \xi)}]_+^2 + (M+1)^2} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

есь мы используем обозначения:

$$\begin{aligned} &\lambda^2(\tau) = \frac{\psi_1(\tau)}{\psi_2(\tau)}, \qquad \psi_1(\tau) = -\varphi^2(t;\ \Delta^2, \tau); \\ &\psi_2(\tau) = \left(\frac{M^2 - \tau}{4t} - a_0\right)\left(b_0 - \frac{M^2 - \tau}{4t}\right). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Для доказательства (3.4) достаточно установить неравенство

$$\lambda(\tau) \leqslant \lambda(\tau_0), \quad \tau \leqslant \tau_0, \tag{7.4}$$

тогда, в силу монотонности функции $\eta_+^2$, а также из (4.4) и (5.4) ем иметь $k^*(t;\ \Delta^2, \tau) \in G(t;\ a_0, b_0) \subset G(t)$.

Прежде чем перейти к доказательству неравенства (7.4), установим авенство:

$$a_0 + b_0 + 2t \geqslant 0. \tag{8.4}$$

уравнений (20b.2) и (20d.2) имеем:

$$\ldots + b_0 + 2t = 2\,\frac{\Delta\lambda(\tau_0) - \lambda^2(\tau_0)\,v_0 - v_0}{\lambda(\tau_0)\,[\Delta - \lambda(\tau_0)\,v_0]}\sqrt{[\Delta - \lambda(\tau_0)\,v_0]^2 + (M+1)^2}. \tag{9.4}$$

как $M + 1 \geqslant \gamma$, то из уравнения (18a.2) следует, что $v_0 \leqslant u_0$. При- я это во внимание, а также учитывая неравенство (19.2): $\Delta - \lambda(\tau_0)\,v_0 \geqslant 0$, равнения (18b.2) получаем:

$$\Delta\lambda(\tau_0) - \lambda^2(\tau_0)\,v_0 - v_0 \geqslant 0.$$

ода и из (9.4) следует неравенство (8.4).

Из (6.4) и (8.4) выводим неравенство

$$\frac{d}{d\tau}[\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)] = \frac{1}{4t}(a_0 + b_0 + 2t) \geqslant 0.$$

ода и из (4.4) вытекает, что $\lambda(\tau) < 1$, если $\tau \leqslant \tau_0$. А тогда

$$\frac{d\lambda^2(\tau)}{d\tau} = \frac{\psi_1'(\tau) - \lambda^2(\tau)\,\psi_2'(\tau)}{\psi_2(\tau)} \geqslant \begin{cases} \dfrac{4t^2 + M^2 - \tau}{8t^2\psi_2(\tau)} > 0, & \text{если } \psi_2'(\tau) \leqslant 0, \\[2ex] \dfrac{a_0 + b_0 + 2t}{4t\psi_2(\tau)} \geqslant 0, & \text{если } \psi_2'(\tau) > 0. \end{cases}$$

м образом, неравенство (7.4) доказано, а с ним и лемма.

силу леммы, наша задача свелась к следующей: найти такое макси- ное положительное число $\Delta_m^2$, что при каждом $t$, $t \geqslant t_0$, область

$G(t)$ содержит множество точек:

$$k^*(t;\ \Delta,\ \tau_0) = \left[\frac{M^2-\tau_0}{4t},\quad i\sqrt{M^2+\Delta^2-\left(t+\frac{M^2-\tau_0}{4t}\right)^2}\,\vec{e}_1+\Delta\vec{e}_2\right], \tag{10.4}$$

$$0 \leqslant \Delta^2 < \Delta_m^2, \quad \varphi^2(t,\ \Delta^2,\ \tau_0) \leqslant 0.$$

Точки $k^*(t;\ \Delta,\ \tau_0)$, для которых $t$ и $\Delta$ лежат на кривой $\varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau_0)=0$, принадлежат $G(t)$. Поэтому для каждого $t,\ t \geqslant t_0$, можно указать такое число $x = x(t)$, что все точки $k^*(t;\ \Delta,\ \tau_0)$, для которых

$$\left(t+\frac{M^2-\tau_0}{4t}\right)^2 - M^2 \leqslant \Delta^2 < x^2,$$

принадлежат области $G(t)$, в то время как точка $k^*(t;\ x,\ \tau_0)$ уже не принадлежит ей. Это значит, что точка $k^*(t;\ x,\ \tau_0)$ принадлежит границе области $G(t)$, т. е., по теореме 2, для этой точки $\lambda = 1$.

Применим теперь критерий 5 (§ 2) принадлежности точек (10.4) к области $G(t)$. Устремляя в уравнениях (18.2) $\Delta$ к $x(t)$ и, следовательно, $\lambda$ к 1, для определения $x = x(t)$ получим систему алгебраических уравнений:

$$2u^2+\left(\frac{u\gamma}{x-u}\right)^2 = 2v^2+\left(\frac{vM+v}{x-v}\right)^2, \tag{11a.4}$$

$$2t = \sqrt{1+\left(\frac{\gamma}{x-u}\right)^2}(x-2u)+\sqrt{1+\left(\frac{M+1}{x-v}\right)^2}(x-2v), \tag{11b.4}$$

$$2v^2+\left(\frac{vM+v}{x-v}\right)^2-\left[\sqrt{1+\left(\frac{M+1}{x-v}\right)^2}(x-2v)-t-\frac{M^2-\tau_0}{4t}\right]^2 -$$

$$- M^2 - x^2 + \left(t+\frac{M^2-\tau_0}{4t}\right)^2 = 0 \tag{11c.4}$$

и условия:

$$0 \leqslant u \leqslant x, \quad 0 \leqslant v \leqslant x. \tag{12.4}$$

Заметим, что одновременно мы доказали существование требуемого решения системы (11.4) при любом $t \geqslant t_0$.

Итак, для определения $x(t)$ необходимо найти все решения $(x,\ u,\ v)$ системы (11.4), удовлетворяющие условиям (12.4), и принять за $x(t)$ наименьшее $x$. Совершая изложенную процедуру для всех $t,\ t \geqslant t_0$, получим непрерывные функции $x(t)$, $u(t)$ и $v(t)$. Тогда ясно, что

$$\Delta_m = \min_{t \geqslant t_0} x(t), \tag{13.4}$$

и наша задача решена.

Так как область (6.2) существенно меньше области $G(t)$, то из геометрических соображений вытекает неравенство (7.1).

Выведем теперь достаточные условия (6.1), обеспечивающие реализацию минимума в (13.4) в точке $t = t_0$. В этом случае $\Delta_m = x(t_0)$ будет определяться системой (11.4) при $t = t_0$, т. е. системой (5.1).

Для доказательства предположим противное: пусть

$$\Delta_m = \min_{t \geqslant t_0} x(t) < x_0, \quad x_0 = x(t_0). \tag{14.4}$$

Так как существуют достаточно большие $t$, при которых $x(t) > \Delta_m$, о из (14.4) и из непрерывности функции $x(t)$ следует существование акого числа $t_1 > t_0$, что при этом $t_1$ система уравнений (11.4) имеет ешение

$$(x_0,\ u_1,\ v_1), \quad 0 \leqslant u_1 \leqslant x_0, \quad 0 \leqslant v_1 \leqslant x_0, \tag{15.4}$$

де

$$u_1 = u(t_1), \quad v_1 = v(t_1).$$

Введем функцию переменного $t$

$$f(t) = 2v^2 + \left(\frac{vM + v}{x_0 - v}\right)^2 - \\ -\left[\sqrt{1 + \left(\frac{M+1}{x_0 - v}\right)^2}(x_0 - 2v) - t - \frac{M^2 - \tau_0}{4t}\right]^2 - \\ - M^2 - x_0^2 + \left(t + \frac{M^2 - \tau_0}{4t}\right)^2,$$

де функция $v = v(t)$ определяется из системы уравнений [ср. (11a.4) (11b.4)]

$$2u^2 + \left(\frac{u\gamma}{x_0 - u}\right)^2 = 2v^2 + \left(\frac{vM + v}{x_0 - v}\right)^2, \tag{16a.4}$$

$$2t = \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{x_0 - u}\right)^2}(x_0 - 2u) + \sqrt{1 + \left(\frac{M+1}{x_0 - v}\right)^2}(x_0 - 2v). \tag{16b.4}$$

По предположению,

$$f(t_0) = 0, \quad f(t_1) = 0, \quad t_1 > t_0. \tag{17.4}$$

Пользуясь условиями (6.1), мы докажем, что $f'(t) > 0$ при $t \geqslant t_0$. Но ге будет противоречить соотношениям (17.4). Следовательно, предполоение (14.4) неверно, а поэтому там будет иметь место равенство.

Дифференцируя $f(t)$, получаем:

$$\frac{1}{2}f'(t) = \left(1 - \frac{M^2 - \tau_0}{4t^2}\right)(x_0 - 2v)\sqrt{1 + \left(\frac{M+1}{x_0 - v}\right)^2} + \\ + \left[\sqrt{(x_0 - v)^2 + (M+1)^2} - t - \frac{M^2 - \tau_0}{4t}\right]\frac{2(x_0 - v)^3 + x_0(M+1)^2}{(x_0 - v)^2\sqrt{(x_0 - v)^2 + (M+1)^2}}v'. \tag{18.4}$$

ифференцирование уравнений (16.4) по $t$ и исключение $u'$ дает:

$$\frac{2(x_0 - v)^3 + x_0(M+1)^2}{(x_0 - v)^2\sqrt{(x_0 - v)^2 + (M+1)^2}}v' = \\ = \frac{-2}{1 + \sqrt{\dfrac{[2(x_0 - u)^2 + \gamma^2][(x_0 - v)^2 + (M+1)^2]}{[2(x_0 - v)^2 + (M+1)^2][(x_0 - u)^2 + \gamma^2]}}} \tag{19.4}$$

Мы предполагаем, что $M + 1 \geqslant \gamma$. Поэтому из уравнения (16a.4) следует, что

$$A = \left(\frac{M+1}{x_0 - v}\right)^2 \geqslant \left(\frac{\gamma}{x_0 - u}\right)^2 = B, \quad v \leqslant u.$$

Принимая во внимание неравенство

$$\frac{(2 + B)(1 + A)}{(2 + A)(1 + B)} \geqslant 1, \quad A \geqslant B > 0,$$

получаем из (19.4):

$$[2(x_0-v)^3+x_0(M+1)^2]\,v' \geqslant -(x_0-v)^2\sqrt{(x_0-v)^2+(M+1)^2}. \quad (20.4)$$

Из неравенства $v \leqslant u$, а также из уравнения (16b.4) получаем неравенство

$$x_0-2v>0.$$

Ввиду последнего неравенства, а также в силу отрицательности $v'$, для доказательства неравенства $f'(t)>0$ достаточно рассмотреть тот случай, когда множитель перед $v'$ во втором слагаемом в правой части (18.4) положителен. Но тогда, в силу (20.4), будем иметь:

$$\frac{1}{2}f'(t)\geqslant\left(1-\frac{M^2-\tau_0}{4t^2}\right)(x_0-2v)\sqrt{1+\left(\frac{M+1}{x_0-v}\right)^2}+$$
$$+t+\frac{M^2-\tau_0}{4t}-\sqrt{(x_0-v)^2+(M+1)^2}. \quad (21.4)$$

Оба слагаемых в правой части неравенства (21.4) возрастают с увеличением $t$ при $t\geqslant t_0$: первое — в силу неравенства $v'<0$, второе — в силу неравенств (20.4) и (6b.1). Поэтому для обеспечения неравенства $f(t)>0$ достаточно потребовать положительности правой части (21.4) при $t=t_0$. Это приводит нас к условию (6a.1).

Теорема 1a доказана.

## § 5. Доказательство теоремы 1b

Доказательство теоремы 1b проводится по схеме доказательства теоремы 1. Отличие здесь только в том, что у вектора

$$z_0=(M^2,\ M^2,\ \tau,\ \tau-2k,\ -4\Delta^2)$$

третья и четвертая компоненты не совпадают. Как и при доказательстве теоремы 1 (§ 3), достаточно установить следующее: для любых четверок чисел $(t,\ \Delta^2,\ \tau,\ k)$, подчиненных неравенствам

$$t\geqslant t_0,\quad 0\leqslant\Delta^2<\Delta^2_m,\quad V\leqslant\tau\leqslant 1,\quad 0\leqslant k\leqslant 2, \quad (1.5)$$

найдется (комплексная) пара 4-векторов $(k_1,\ k_2)$, удовлетворяющая соотношениям (4.3):

$$\left.\begin{aligned} k_{10}&=\frac{M^2-\tau}{4t},\\ k_{20}&=\frac{M^2-\tau+2k}{4t},\\ \vec{k}_1^2&=\varphi^2(t;\ 0,\tau),\\ \vec{k}_2^2&=\varphi^2(t;\ 0,\tau-2k),\\ (\vec{k}_1-\vec{k}_2)^2&=4\Delta^2+\frac{k^2}{4t^2} \end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

и принадлежащая со своей $\frac{\eta}{t}$-окрестностью области $G(t)\times G(t)$. В равенствах (2.5) функция $\varphi^2$ определена формулой (9.3).

Представляя векторы $\vec{k}_j$, $j=1, 2$, в виде (5.3), получаем в силу (2.5):

$$A_1^2+A_3^2=\varphi^2(t;\ 0, \tau), \quad A_2^2+A_3^2=\varphi^2(t;\ 0, \tau-2k),$$
$$(A_1-A_2)^2+4A_3^2=4\Delta^2+\frac{k^2}{4t^2}, \tag{3.5}$$

откуда следует ($\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_2=-1$):

$$A_j(t;\ \Delta, \tau)=N-\frac{\varepsilon_j k}{4N}\left(1+\frac{M^2-\tau+k}{4t^2}\right), \quad j=1, 2,$$
$$A_3(t;\ \Delta, \tau)=\frac{1}{4Nt}\sqrt{16\,t^2\Delta^2N^2-k^2(M^2+\Delta^2)}, \tag{4.5}$$

где

$$N^2=\varphi^2(t;\ \Delta^2,\ \tau-k). \tag{5.5}$$

Рассмотрим отдельно три случая.

1. $16t^2\Delta^2N^2-k^2(M^2+\Delta^2)\geqslant 0$. Тогда $N^2\geqslant 0$ и,в силу (4.5), векторы $\vec{k}_j$ вещественны. В этом случае применимы те же рассуждения, что и в случае 1° доказательства теоремы 1: точки $k_1$ и $k_2$ вместе со своими $\frac{\eta}{t}$-окрестностями содержатся в области $G(t)$.

2. $16t^2\Delta^2N^2-k^2(M^2+\Delta)\leqslant 0,^2 \quad 0\leqslant\Delta^2\leqslant\frac{Mk}{2M+2}$. Тогда $N^2\geqslant 0$, $A_2\geqslant A_1>0$ и, в силу (3.5) и (4.5),

$$|\vec{p}_j|=A_j(t;\ \Delta, \tau), \quad |\vec{q}_j|=|A_3(t;\ \Delta, \tau)|, \quad |\vec{p}_j|\geqslant|\vec{q}_j|, \quad j=1, 2. \tag{6.5}$$

Применяя критерий 2 (§ 2) при $c_1=c_2=t$, $m_1=\gamma$, $m_2=M+1$ учитывая (6.5), получим неравенства:

$$\left[t+\frac{M^2-\tau}{4t}+|A_3|+O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2<(M+1)^2+\left[A_1-|A_3|+O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2,$$
$$\left[t-\frac{M^2-\tau}{4t}+|A_3|+O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2<\gamma^2+\left[A_1-|A_3|+O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2,$$
$$\left[t+\frac{M^2-\tau+2k}{4t}+|A_3|+O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2<(M+1)^2+\left[A_2-|A_3|+O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2,$$
$$\left[t-\frac{M^2-\tau+2k}{4t}+|A_3|+O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2<\gamma^2+\left[A_2-|A_3|+O\left(\frac{\eta}{t}\right)\right]^2 \tag{7.5}$$

для достаточно малых $\eta$. При больших $t$

$$A_1=O(t), \quad A_2=O(t), \quad |A_3|=O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Поэтому неравенства (7.5) достаточно доказать при $\eta=0$. После соответствующих преобразований получим:

$$\left.\begin{aligned}2|A_3|\left(t+\frac{M^2-\tau+2k}{4t}+A_2\right)&<2M+1,\\ 2|A_3|\left(t-\frac{M^2-\tau}{4t}+A_1\right)&<\gamma^2-\tau,\\ 2|A_3|\left(t-\frac{M^2-\tau+2k}{4t}+A_2\right)&<\gamma^2-\tau+2k.\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Из уравнений (3.5) следует, что функции $A_1$, $A_2$ и $|A_3|$ монотонно убывают с возрастанием $\Delta$. Поэтому неравенства (8.5) достаточно доказать при $\Delta = 0$. Принимая во внимание формулы (4.5) при $\Delta = 0$ и пользуясь неравенством

$$t + \frac{M^2 - \tau + k}{4t} < \frac{8t^2}{kM} N,$$

мы можем свести неравенства (8.5) к следующим:

$$1 + \frac{4t^2 + M^2 - \tau + 2k}{\sqrt{(4t^2 + M^2 - \tau + k)^2 - 16t^2M^2}} + \frac{k(4t^2 + M^2 - \tau + k)}{(4t^2 + M^2 - \tau + k)^2 - 16t^2M^2} < \frac{2t}{kM}(2M + 1),$$

$$1 + \frac{4t^2 - M^2 + \tau}{\sqrt{(4t^2 + M^2 - \tau + k)^2 - 16t^2M^2}} - \frac{k(4t^2 + M^2 - \tau + k)}{(4t^2 + M^2 - \tau + k)^2 - 16t^2M^2} < \frac{2t}{kM}(\gamma^2 - \tau). \tag{9.5}$$

Неравенства (9.5) достаточно доказать при $\tau = 1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти неравенства будут выполнены при

$$\tau = 1, \quad M = 7, \quad \gamma = 2, \quad t \geqslant t_0 = \frac{1}{2}(M + 1), \quad 0 \leqslant k \leqslant 2. \tag{10.5}$$

3. $16t^2\Delta^2N^2 - k^2(M^2 + \Delta^2) \leqslant 0$, $\frac{Mk}{2M+2} \leqslant \Delta^2 < \Delta_m^2$. Представим векторы $\vec{k}_j$ в виде:

$$\vec{k}_j = A_j(t;\ \Delta, \tau)\vec{e}_1 + iA_3(t;\ \Delta, \tau)\vec{e}_2, \quad j = 1, 2.$$

Тогда, в силу (2.5), получим

$$A_1^2 - A_3^2 = \varphi^2(t;\ 0, \tau), \quad A_2^2 - A_3^2 = \varphi^2(t;\ 0, \tau - 2k),$$
$$(A_1 - A_2)^2 = 4\Delta^2 + \frac{k^2}{4t^2}, \tag{11.5}$$

откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} A_1(t;\ \Delta, \tau) &= \frac{k(4t^2 + M^2 - \tau) - 16t^2\Delta^2}{4t\sqrt{k^2 + 16t^2\Delta^2}}, \\ A_2(t;\ \Delta, \tau) &= \frac{k(4t^2 + M^2 - \tau + 2k) + 16t^2\Delta^2}{4t\sqrt{k^2 + 16t^2\Delta^2}}, \\ A_3(t;\ \Delta, \tau) &= \frac{\sqrt{k^2(M^2 + \Delta^2) - 16t^2\Delta^2N^2}}{\sqrt{k^2 + 16t^2\Delta^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

где $N^2$ определено формулой (5.5).

Пользуясь критерием 1 (§ 2), запишем условия аналитичности в виде:

$$k^2(M^2 + \Delta^2) - 16t^2\Delta^2N^2 < (k^2 + 16t^2\Delta^2)\left(\frac{M^2 - \tau}{4t} - t + 2\right) \times$$
$$\times \left(M + 1 - t - \frac{M^2 - \tau}{4t}\right),$$

$$k^2(M^2 + \Delta^2) - 16t^2\Delta^2N^2 < (k^2 + 16t^2\Delta^2)\left(\frac{M^2 - \tau + 2k}{4t} - t + 2\right) \times$$
$$\times \left(M + 1 - t - \frac{M^2 - \tau + 2k}{4t}\right). \tag{13.5}$$

Объединяя оба неравенства (13.5), докажем неравенство $f > 0$, где

$$f(t, \Delta^2, \tau, \mu) \equiv \left(1 + \frac{k^2}{16t^2\Delta^2}\right)\left(\frac{M^2 - \tau + \mu}{4t} - t + 2\right)\left(M + 1 - \tau - \frac{M^2 - \tau + \mu}{4t}\right) - \\ - \frac{k^2}{16t^2}\left(1 + \frac{M^2}{\Delta^2}\right) + \left(t + \frac{M^2 - \tau + k}{4t}\right)^2 - M^2 - \Delta^2, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 2k.$$

Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = -\frac{1}{2t}\left[t + \frac{M^2 - \tau + k}{4t} + \left(1 + \frac{k^2}{16t^2\Delta^2}\right)\left(\frac{M-1}{2} - \frac{M^2 - \tau + \mu}{4t}\right)\right] \leqslant \\ \leqslant -\frac{1}{2t}\left(M - \frac{k}{4t} - \frac{k^2}{16t^2\Delta^2}\frac{M^2 - \tau + 2k}{4t}\right). \qquad (14.5)$$

Из неравенств (10.5) следует, что $t < 4{,}6$ (при $M = 7$, $0 \leqslant k \leqslant 2$) и, кроме того, неравенство

$$\frac{M^2 - \tau + 2k}{4t} \leqslant \sqrt{M^2 + \Delta^2 + \frac{k^2}{16t^2}\left(1 + \frac{M^2}{\Delta^2}\right)} - t + \frac{k}{4t} < 7{,}2 - t + \frac{k}{4t};$$

отсюда и из (14.5) выводим:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} < 0.$$

Поэтому для доказательства неравенства $f > 0$ достаточно показать, что $f(t, \Delta^2, 1, \mu) > 0$.

Вычисляя производную функции $f$ по $\Delta^2$, получаем:

$$\frac{\partial f(t, \Delta^2, 1, \mu)}{\partial \Delta^2} = -1 + \frac{k^2}{16t^2\Delta^4}\left[M^2 - \left(\frac{M^2 - 1 + \mu}{4t} - t + 2\right) \times \right. \\ \left. \times \left(M + 1 - t - \frac{M^2 - 1 + \mu}{4t}\right)\right] \leqslant -1 + \frac{k^2M^2}{16t^2\Delta^4} \leqslant 0.$$

Следовательно, остается доказать, что $f(t, \Delta_m^2, 1, \mu) > 0$. Но это последнее неравенство при $M = 7$ следует из соотношений:

$$f(t_0, \Delta_m^2, 1, \mu) = \left(1 + \frac{k^2}{256\,\Delta_m^2}\right)\left(1 - \frac{\mu^2}{256}\right) - \frac{k^2}{256}\left(1 + \frac{49}{\Delta_m^2}\right) + \\ + \left(7 + \frac{k}{16}\right)^2 - 49 - \Delta_m^2 > 0,$$

$$\frac{\partial f(t, \Delta_m^2, 1, \mu)}{\partial t} = 4t - 10 - \frac{144 + 3\mu}{2t^2} + \frac{k^2}{16t^2\Delta_m^2}\left[-5 + \frac{3t}{2} + \frac{33 + 4\Delta_m^2}{2t} - \right. \\ \left. - \frac{9(48 + \mu)}{4t^2} + \frac{5(48 + \mu)^2}{32\,t^3}\right] > 0,$$

если $0 \leqslant \mu \leqslant 2k$, $0 \leqslant k \leqslant 2$.

Этим заканчивается доказательство того, что область (8.1) есть область аналитичности. Теорема 1b доказана.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность Н. Н. Боголюбову и А. А. Логунову за ценные обсуждения результатов этой работы.

Поступило
26.III.1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В. и Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, Гостехиздат, 1958.

[2] Bremermann H. J., Oehme R. and Taylor J. G., A Proof ot Dispersion Relations in Quantized Field Theories, Phys. Rev., 109 (1958), 2178—2190.

[3] Соболев С. Л., Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy, Матем. сборн., 1 (43):1 (1936), 39—72.
[4] Schwartz L., Théorie des distributions, II, Paris, 1951.
[5] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции. 2. Пространства основных и обобщенных функций, Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958.
[6] Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., Вопросы квантовой теории поля, I, II, Успехи физ. наук, 55 (1955), 149—214; 57 (1955), 1—92.
[7] Боголюбов Н. Н. и Владимиров В. С., Об аналитическом продолжении обобщенных функций, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 22 (1958), 15—48.
[8] Логунов А. А. и Исаев П. С., К теории дисперсионных соотношений для рассеяния γ-квантов на нуклонах, Nuovo Cimento, X (1958), 917—942.
[9] Логунов А. А., К теории дисперсионных соотношений для виртуальных процессов, Nuclear Physics, 10, № 3, 1959.
[10] Jost R. and Lehmann H., Integral-Darstellung kausaler Kommutatoren, Nuovo Cimento, V (1957), 1598—1610.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 295—312

Г. Н. ПОЛОЖИЙ

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе предлагается один новый итерационный метод решения интегральных уравнений Фредгольма. Этот метод характерен тем, что он оказывается сходящимся равномерно при любых несобственных значениях параметра $\lambda$ в уравнении второго рода и сходящимся в среднем для уравнения первого рода, имеющего решение при любом свободном члене. В отличие от ранее известных итерационных процессов, которые строились только в применении к уравнениям второго рода [см. ([1]) — ([8])], построенный нами итерационный процесс не предполагает в конечном счете ни малости параметра $\lambda$, ни каких-либо ограничений, накладываемых на спектр собственных значений, ни каких-либо сведений о нем.

Интегральные уравнения Фредгольма второго и первого рода обычно записывают в виде:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds + f(x), \tag{1}$$

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{2}$$

где $K(x, s)$ — ядро, заданное в прямоугольнике $a < x,\ s < b$, $f(x)$ — функция, заданная в интервале $(a, b)$, $\varphi(x)$ — искомая функция, $\lambda$ — числовой параметр.

Вместо уравнений Фредгольма первого и второго рода (1) и (2) мы будем рассматривать одно интегральное уравнение следующего вида:

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = \mu\varphi(x) + F(x), \tag{3}$$

где $K(x, s)$ и $\varphi(x)$ — те же самые, что в (1) или в (2), $F(x)$ — функция заданная в интервале $(a, b)$, $\mu$ — числовой параметр.

Введем для дальнейшего обозначения:

$$\begin{aligned} B^2 &= \int_a^b\int_a^b |K(x, s)|^2\,dx\,ds, & C^2 &= \int_a^b |K(x, s)|^2\,ds, \\ D^2 &= \int_a^b |F(x)|^2\,dx & E^2 &= \int_a^b |\varphi(x)|^2\,dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Все функции, связанные с интегральным уравнением (3), будем предполагать суммируемыми, а величины (4), как обычно принято в теории интегральных уравнений, — конечными.

## § 1. Решение интегральных уравнений с вещественным ядром

В настоящем параграфе мы будем рассматривать интегральное уравнение (3) при условии, что все величины, входящие в него, являются вещественными.

Условимся под собственным числом ядра $K(x, s)$ понимать числовое значение параметра $\mu$, при котором уравнение

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = \mu\,\varphi(t)$$

имеет ненулевое решение (хотя это и не совсем совпадает с терминологией, общепринятой в теории интегральных уравнений). Под собственной функцией ядра $K(x, s)$, соответствующей данному собственному числу $\mu$, будем понимать указанное ненулевое решение.

1. Случай симметричного ядра, соответствующий уравнению Фредгольма второго рода. Рассмотрим уравнение (3) при $\mu \neq 0$, что, очевидно, соответствует интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром.

Будем предполагать, что $\mu$ не совпадает ни с одним из собственных чисел ядра $K(x, s)$, так как в этом и только в этом случае уравнение (3) имеет решение при любом свободном члене $F(x)$.

Применение к уравнению (3) или к эквивалентному ему уравнению Фредгольма второго рода хорошо известного метода последовательных приближений, как отмечалось выше, приводит к сходящемуся процессу только при значениях параметра $\lambda$, достаточно малых по абсолютной величине. Чтобы избавиться от этого ограничения и получить сходящийся процесс, и притом равномерный, поступим следующим образом.

Положим в уравнении (3) $x = t$ и проинтегрируем по $t$, предварительно умножив обе части равенства на $K(x, t)$. Мы получим:

$$\int_a^b K_2(x, s)\,\varphi(s)\,ds - \mu\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = \int_a^b K(x, s)\,F(s)\,ds,$$

где

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t)\,K(t, s)\,dt.$$

Последнее уравнение, вообще говоря, не эквивалентно уравнению (3), так как ядро $K(x, s)$ может быть не замкнутым. Но если мы это уравнение сложим с уравнением (3), умноженным на $-\mu$, то получим уравнение

$$\int_a^b [K_2(x, s) - 2\mu K(x, s)]\,\varphi(s)\,ds + \mu^2\varphi(x) = \int_a^b K(x, s)\,F(s)\,ds - \mu F(x), \quad (5)$$

эквивалентное уравнению (3). В самом деле, если бы нашлось ненулевое

решение уравнения (5) при $F(x)\equiv 0$, то это означало бы, что

$$\int_a^b K(x,t)\left[\int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds-\mu\varphi(t)\right]dt-$$

$$-\mu\left[\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds-\mu\varphi(x)\right]=0.$$

Но этого быть не может, так как $\mu$ не является собственным числом ядра $K(x,s)$.

Если $\mu_i$ — собственные числа, а $\varphi_i(x)$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции ядра $K(x,s)$, то легко вывести, что ядро

$$N(x,s)=K_2(x,s)-2\mu K(x,s) \tag{6}$$

будет иметь собственные числа $\mu_i^2-2\mu\mu_i$ и те же самые собственные функции. Оператор

$$A\varphi=\int_a^b [K_2(x,s)-2\mu K(x,s)]\,\varphi(s)\,ds+\mu^2\varphi(t)$$

будет иметь собственные числа $k_i=(\mu_i-\mu)^2$ и соответствующие им ортонормированные собственные функции $\varphi_i(x)$. Важным для дальнейшего является то, что все собственные числа $k_i$ оператора $A\varphi$ положительны ($\mu\neq\mu_i$ по условию).

Введем вместо $\varphi(x)$ новую неизвестную функцию

$$\psi(x)=\varphi(x)+\frac{1}{\mu}F(x),\qquad \varphi(x)=-\frac{1}{\mu}F(x)+\psi(x), \tag{7}$$

где в соответствии с интегральным уравнением (3)

$$\psi(x)=\frac{1}{\mu}\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds.$$

Уравнение (5) после этого примет вид

$$A\psi=\int_a^b N(x,s)\psi(s)\,ds+\mu^2\psi(x)=F^*(x), \tag{8}$$

где

$$F^*(x)=\int_a^b\left[K(x,s)+\frac{1}{\mu}N(x,s)\right]F(s)\,ds=$$

$$=\int_a^b\left[\frac{1}{\mu}K_2(x,s)-K(x,s)\right]F(s)\,ds. \tag{9}$$

Уравнение (8), очевидно, эквивалентно уравнению следующего вида:

$$\psi(x)=\psi(x)-\frac{2}{\sigma}\left\{\int_a^b N(x,s)\psi(s)\,ds+\mu^2\psi(x)\right\}+\frac{2}{\sigma}F^*(x),$$

где $\sigma$ — любое число ($\sigma\neq 0$), или, в более компактной форме,

$$\psi(x)=P\psi+\frac{2}{\sigma}F^*(x), \tag{10}$$

где

$$P\psi = \psi(x) - \frac{2}{\sigma} A\psi = \psi(x) -$$

$$-\frac{2}{\sigma}\left\{\int_a^b N(x, s)\psi(s)\,ds + \mu^2\psi(x)\right\}. \tag{11}$$

Собственные числа оператора $P\psi$, очевидно, определятся равенствами

$$\nu_i = 1 - \frac{2}{\sigma} k_i = 1 - \frac{2}{\sigma}(\mu_i - \mu)^2,$$

а его собственными функциями будут функции $\varphi_i(x)$.

Выберем число $\sigma$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma > \max_i (\mu_i - \mu)^2. \tag{12}$$

Практически этому условию, несмотря на то, что фактические значения собственных чисел $\mu_i$ нам неизвестны, можно удовлетворить совершенно эффективно, исходя из следующих соображений. Известно, что обычный метод последовательных приближений в применении к уравнению Фредгольма второго рода сходится при $|\lambda| < \frac{1}{B}$, где $B$ — постоянная, определенная первым из равенств (4), и данное уравнение не имеет собственных значений при $|\lambda| < \frac{1}{B}$. Это означает, что

$$|\mu_i| \leqslant B, \quad (\mu_i - \mu)^2 \leqslant (B + |\mu|)^2$$

и, следовательно, чтобы удовлетворить условию (12), достаточно взять

$$\sigma > (B + |\mu|)^2 = \mu^2 + 2|\mu|\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds} +$$

$$+\int_a^b\int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds. \tag{13}$$

Отправляясь от уравнения (10), где $\sigma$ — любое число, удовлетворяющее условию (12), или, в частности (13), построим следующий процесс подстановок, который всегда будет сходящимся.

Принимая в качестве начального приближения функцию

$$\psi_0(x) = \frac{2}{\sigma} F^*(x)$$

(а не какую-либо другую функцию) и подставляя ее в правую часть уравнения (10), получим некоторую функцию

$$\psi_1(x) = P\psi_0 + \frac{2}{\sigma} F^*(x).$$

Поступая с $\psi_1(x)$ так же, как с $\psi_0(x)$, придем к функции $\psi_2(x)$ и, продолжая этот процесс, получим следующую формулу подстановок:

$$\psi_{m+1}(x) = P\psi_m + \frac{2}{\sigma} F^*(x) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Но функция

$$\frac{2}{\sigma} F^*(x) = \frac{2}{\sigma}\int_a^b \left[\frac{1}{\mu} K_2(x, s) - K(x, s)\right] F(s)\,ds$$

по теореме Гильберта—Шмидта разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд Фурье по собственным ортонормированным функциям ядра $K(x, s)$:

$$\frac{2}{\sigma} F^*(x) = \sum_i c_i \varphi_i(x), \tag{15}$$

где $c_i$ — коэффициенты Фурье функции $\frac{2}{\sigma} F^*(x)$:

$$c_i = \int_a^b \frac{2}{\sigma} F^*(x) \varphi_i(x)\, dx = \left(\frac{\mu_i^2}{\mu} - \mu_i\right) \frac{2}{\sigma} F_i,$$

$$F_i = \int_a^b F(x) \varphi_i(x)\, dx.$$

Учитывая (15), имеем:

$$\psi_1(x) = \sum_i c_i (1 + \nu_i) \varphi_i(x).$$

Точно так же формула (14) дает:

$$\psi_{m+1}(x) = \sum_i c_i (1 + \nu_i + \ldots + \nu_i^{m+1}) \varphi_i(x) = \sum_i c_i \frac{1 - \nu_i^{m+2}}{1 - \nu_i} \varphi_i(x). \tag{16}$$

Собственные числа $\nu_i$ оператора $P$ при сделанном нами выборе числа $\sigma$, удовлетворяющего условию (12) или (13), будут по модулю меньше единицы и поэтому $(m+1)$-е приближение $\psi_{m+1}(x)$ при $m \to \infty$ равномерно сходится к точному решению уравнения (10), которое запишется в виде

$$\psi(x) = \sum_i \frac{c_i}{1 - \nu_i} \varphi_i(x), \tag{17}$$

и последовательность функций

$$\tilde{\varphi}_{m+1}(x) = -\frac{1}{\mu} F(x) + \psi_{m+1}(x) =$$

$$= -\frac{1}{\mu} F(x) + \sum_i c_i \frac{1 - \nu_i^{m+2}}{1 - \nu_i} \varphi_i(x) \tag{18}$$

при $m \to \infty$ будет равномерно сходиться к точному решению исходного интегрального уравнения (3):

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\mu} F(x) + \sum_i \frac{c_i}{1 - \nu_i} \varphi_i(x). \tag{19}$$

При этом погрешность $(m+1)$-х приближений $\psi_{m+1}(x)$ и $\tilde{\varphi}_{m+1}(x)$ определится равенствами:

$$\varphi(x) - \tilde{\varphi}_{m+1}(x) = \psi(x) - \psi_{m-1}(x) = \sum_i c_i \frac{\nu_i^{m+2}}{1 - \nu_i} \varphi_i(x) \ll$$

$$\ll \frac{(\max \nu_i)^{m+2}}{|\mu| \min |\mu_i - \mu|} \sum_i |F_i| |\mu_i \varphi_i(x)| \ll \frac{(\max \nu_i)^{m+2}}{|\mu| \min |\mu_i - \mu|} DC. \tag{20}$$

Эта же погрешность, но в смысле среднего квадратического, определится равенствами:

$$\int_a^b [\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_{m+1}(x)]^2\,dx =$$

$$= \int_a^b [\psi(x) - \psi_{m+1}(x)]^2 dx = \sum_i c_i^2 \frac{\nu_i^{2m+4}}{(1-\nu_i)^2}.$$

Покажем, что точное решение (19) уравнения (3), к которому приводят построенные нами подстановки, можно преобразовать в разложение по собственным функциям решения соответствующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

В самом деле, разложение по собственным функциям решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, как известно, имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_i \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda}\,\varphi_i(x), \tag{21}$$

где $f_i$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по собственным ортонормированным функциям интегрального уравнения. В применении к уравнению (3)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\mu}\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds - \frac{1}{\mu}F(x),$$

и разложение (21) должно иметь вид:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\mu}F(x) + \frac{1}{\mu}\sum_i -\frac{F_i}{\mu}\,\frac{1}{\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu}}\,\varphi_i(x),$$

или

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\mu}F(x) + \frac{1}{\mu}\sum_i \frac{\mu_i F_i}{\mu_i - \mu}\,\varphi_i(x). \tag{22}$$

С другой стороны, подставляя в (19) выражения

$$1 - \nu_i = \frac{2}{\sigma}(\mu_i - \mu)^2, \qquad c_i = \frac{\mu_i}{\mu}(\mu_i - \mu)\frac{2}{\sigma}F_i,$$

мы получаем то же разложение (22). Этим наше утверждение доказано.

Таким образом, построенный процесс подстановок позволяет равномерно сколь угодно приблизиться к точному решению уравнения (3) или, что то же, к точному решению соответствующего уравнения Фредгольма второго рода при любых значениях $\lambda$ (не являющихся собственными значениями интегрального уравнения). Характерно то, что в процессе предельного перехода мы получаем разложение решения интегрального уравнения по собственным функциям ядра, которое в теории интегральных уравнений строилось только в предположении, что собственные функции и собственные числа интегрального уравнения известны.

2. Случай симметричного ядра, соответствующий уравнению Фредгольма первого рода. Рассмотрим уравне-

ние (3) при $\mu = 0$, что соответствует интегральному уравнению Фредгольма первого рода с симметричным ядром.

При этом, естественно, мы будем предполагать, что это уравнение имеет, и притом единственное, решение при всяком свободном члене $F(x)$ *. Другими словами, значение $\mu = 0$ не является собственным числом ядра $K(x, s)$ или, что то же, ядро $K(x, s)$ замкнуто.

Умножая обе части равенства

$$\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds = F(t)$$

на $K(x, t)$ и интегрируя по $t$, получаем уравнение

$$\int_a^b K_2(x, s)\,\varphi(s)\,ds = F^*(x), \tag{23}$$

где

$$F^*(x) = \int_a^b K(x, s)\,F(s)\,ds. \tag{24}$$

Уравнение (23) эквивалентно исходному уравнению (3), так как, записав его в виде

$$\int_a^b K(x, t)\left[\int_a^b K(t, s)\,\varphi(s)\,ds - F(t)\right]dt = 0,$$

можно заметить, что если $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (23), то $\varphi(x)$ будет также удовлетворять исходному интегральному уравнению (3).

Далее, собственными числами ядра $K_2(x, s)$ будут $\mu_i^2$ и, следовательно, все они больше нуля.

Теперь уравнение (23) мы можем заменить следующим эквивалентным ему уравнением:

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \frac{2}{\sigma}\int_a^b K_2(x, s)\,\varphi(s)\,ds + \frac{2}{\sigma}F^*(x),$$

или, в более компактной форме,

$$\varphi(x) = G\varphi + \frac{2}{\sigma}F^*(x), \tag{25}$$

где

$$G\varphi = \varphi(x) - \frac{2}{\sigma}\int_a^b K_2(x, s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{26}$$

а $\sigma$ — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$\sigma > \max_i \mu_i^2, \tag{27}$$

или, в частности, неравенству

$$\sigma > B^2 = \int_a^b\int_a^b K^2(x, s)\,dx\,ds. \tag{28}$$

---

* Очевидно, что функция $F(x)$ удовлетворяет общеизвестным необходимым условиям существования решения интегрального уравнения первого рода [см., например, ([1]), стр. 142].

Очевидно, что собственные числа оператора $G\varphi$ определяются равенствами

$$\nu_i = 1 - \frac{2}{\sigma}\mu_i^2$$

и по модулю меньше единицы.

Отправляясь от уравнения (25), построим сходящийся процесс подстановок.

Взяв в качестве начального приближения функцию

$$\tilde{\varphi}_0(x) = \frac{2}{\sigma} F^*(x)$$

(здесь начальное приближение можно выбрать произвольно, так как ортонормированная система собственных функций ядра $K(x, s)$ является полной), придем к следующей формуле подстановок:

$$\tilde{\varphi}_{m+1}(x) = G\tilde{\varphi}_m + \frac{2}{\sigma} F^*(x) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

Функция $\frac{2}{\sigma} F^*(x)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным ортонормированным функциям $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ ядра $K(x, s)$:

$$\frac{2}{\sigma} F^*(x) = \sum_i c_i \varphi_i(x).$$

Поэтому из формулы (29) имеем:

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \sum_i c_i (1 + \nu_i)\varphi_i(x)$$

и, вообще,

$$\tilde{\varphi}_{m+1}(x) = \sum_i c_i \frac{1 - \nu_i^{m+2}}{1 - \nu_i}\varphi_i(x). \tag{30}$$

Отсюда, учитывая то, что $|\nu_i| < 1$, заключаем, что $(m+1)$-е приближение $\tilde{\varphi}_{m+1}(x)$ при $m \to \infty$ сходится в среднем к функции

$$\varphi(x) \sim \sum_i c_i \frac{1}{1 - \nu_i}\varphi_i(x) = \sum_i \frac{F_i}{\mu_i}\varphi_i(x), \tag{31}$$

которая, очевидно, будет точным решением исходного интегрального уравнения (3) при $\mu = 0$ или, что то же, уравнения Фредгольма первого рода. При этом погрешность будет определяться равенством

$$\varphi(x) - \tilde{\varphi}_{m+1}(x) \sim \sum_i c_i \frac{\nu_i^{m+2}}{1 - \nu_i}\varphi_i(x) = \sum_i \frac{F_i}{\mu_i}\nu_i^{m+2}\varphi_i(x), \tag{32}$$

или, в смысле среднего квадратического, равенством:

$$\int_a^b |\varphi(x) - \tilde{\varphi}_{m+1}(x)|^2\,dx = \sum_i c_i^2 \frac{\nu_i^{2m+4}}{(1 - \nu_i)^2} = \sum_i \frac{F_i^2}{\mu_i^2}\nu_i^{2m+4}. \tag{33}$$

3. Случай несимметричного ядра, соответствующий уравнению Фредгольма второго рода. Рассмотрим снова уравнение (3) при $\mu \neq 0$, но уже с произвольным (вещественным, но не обязательно симметричным) ядром. Предполагаем, что $\mu$ не является собственным числом данного ядра.

Умножая обе части равенства

$$\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds = \mu\varphi(t) + F(t)$$

на $K(t, x)$ и интегрируя по $t$, получаем:

$$\int_a^b {}'K(x, s)\varphi(s)\,ds - \mu\int_a^b K(s, x)\varphi(s)\,ds = \int_a^b K(s, x)F(s)\,ds, \tag{34}$$

где

$$'K(x, s) = \int_a^b K(t, x)K(t, s)\,dt. \tag{35}$$

Уравнение (34), вообще говоря, не эквивалентно исходному уравнению (3). Однако, умножая (3) на $-\mu$ и складывая с (34), мы получим уравнение

$$\int_a^b {}'K(x, s)\varphi(s)\,ds - \mu\int_a^b K(s, x)\varphi(s)\,ds - \mu\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds =$$
$$= -\mu^2\varphi(x) + \int_a^b K(s, x)F(s)\,ds - \mu F(x),$$

или

$$\int_a^b N(x, s)\varphi(s)\,ds = \mu^2\varphi(x) + \mu F(x) - \int_a^b K(s, x)F(s)\,ds, \tag{36}$$

где

$$N(x, s) = \mu[K(x, s) + K(s, x)] - {}'K(x, s), \tag{37}$$

представляющее собой интегральное уравнение с симметричным ядром $N(x, s)$, эквивалентное исходному интегральному уравнению (3), причем $\mu^2$ не является собственным числом ядра $N(x, s)$. В самом деле, если бы это было не так, то нашлась бы функция $\varphi(x) \not\equiv 0$ такая, что

$$\int_a^b K(t, x)\left[\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds - \mu\varphi(t)\right]dt -$$
$$-\mu\left[\int_a^b K(t, s)\varphi(s)\,ds - \mu\varphi(x)\right] = 0.$$

Но этого быть не может, так как $\mu$ не является собственным числом как ядра $K(x, s)$, так и ядра $K(s, x)$, поскольку у этих ядер собственные числа всегда одинаковы.

К уравнению (36), эквивалентному уравнению (3), мы можем применить процесс подстановок, построенный в п. 1, и тем самым по единой расчетной формуле найти приближенное решение и, в результате предельного перехода, — точное решение уравнения (3) с произвольным вещественным ядром $K(x, s)$, если $\mu \neq 0$ не является собственным значением этого ядра.

4. Случай несимметричного ядра, соответствующий уравнению Фредгольма первого рода. Рассмотрим уравне-

ние (3) при $\mu = 0$, считая $K(x, s)$ произвольным вещественным ядром. При этом будем предполагать, что $\mu = 0$ не является собственным числом ядра $K(x, s)$ так же, как и ядра $K(s, x)$. Дело в том, что при условии замкнутости ядра $K(x, s)$ и замкнутости ядра

$$K'(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(s, t) \, dt, \tag{38}$$

как известно [см. ([1])], имеет место существование и единственность решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. С другой стороны, из замкнутости $K(x, s)$ и $K'(x, s)$ вытекает замкнутость ядра $K(s, x)$, так как если бы имелось ненулевое решение уравнения

$$\int_a^b K(s, t) \psi(s) \, ds = 0,$$

то оно было бы решением уравнения с ядром $K'(x, s)$:

$$\int_a^b \int_a^b K(x, t) K(s, t) \psi(s) \, ds \, dt = 0.$$

Обратно, из замкнутости ядер $K(x, s)$ и $K(s, x)$ следует, что ядро $K'(x, s)$ замкнуто, так как, предположив, что при $\psi(x) \not\equiv 0$ имеет место равенство

$$\int_a^b K(x, t) \int_a^b K(s, t) \psi(s) \, ds \, dt = 0,$$

мы приходим к противоречию с тем, что $\mu = 0$ не является собственным числом каждого из ядер $K(x, s)$, $K(s, x)$.

Записав исходное интегральное уравнение (3) при $x = t$,

$$\int_a^b K(t, s) \varphi(s) \, ds = F(t),$$

умножив его на $K(t, x)$ и проинтегрировав по $t$, получаем:

$$\int_a^b \int_a^b K(t, x) K(t, s) \varphi(s) \, ds \, dt = \int_a^b K(t, x) F(t) \, dt,$$

или

$$\int_a^b {}'K(x, s) \varphi(s) \, ds = \int_a^b K(s, x) F(s) \, ds, \tag{39}$$

где ${}'K(x, s)$ — ядро, определенное равенством (35).

Уравнение (39) с симметричным ядром ${}'K(x, s)$ будет эквивалентно исходному интегральному уравнению (3), так как ядро $K(s, x)$, по условию, замкнуто. Таким образом, и в этом случае рассмотренный выше процесс подстановок приводит к приближенному решению, сколь угодно мало отличающемуся от точного решения интегрального уравнения (3).

Этим полностью исчерпывается вопрос о решении интегрального уравнения (3) или эквивалентных ему уравнений Фредгольма второго и первого рода в случае совершенно произвольных вещественных ядер и па-

раметра $\mu$ при единственном условии, чтобы данное значение параметра $\mu$ не являлось собственным числом ядра $K(x, s)$.

## § 2. Распространение метода на интегральные уравнения с комплексными ядрами

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = \mu\varphi(x) + F(x), \tag{3}$$

где, в отличие от предыдущего, $K(x, s)$, $\varphi(x)$, $F(x)$ и $\mu$ могут быть комплекснозначными, остальные же предположения общего характера остаются такими, как в § 1.

Под собственным числом комплексного ядра $K(x, s)$, как и выше, будем понимать такое значение параметра $\mu$, при котором уравнение

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = \mu\varphi(t)$$

имеет ненулевое решение — собственную функцию.

Как и раньше, данное интегральное уравнение (3) будем решать при значениях параметра $\mu$, не являющихся собственными числами ядра $K(x,s)$, в остальном $\mu$ будет произвольным вещественным или комплексным.

1. Случай симметричного ядра при вещественном $\mu$, соответствующий уравнению Фредгольма второго рода. Под симметричным комплексным ядром $K(x, s)$, как известно, понимается ядро, обладающее свойством

$$K(x, s) = \overline{K(s, x)}, \tag{40}$$

где черта сверху обозначает комплексно-сопряженную величину.

Из теории интегральных уравнений или общей теории линейных операторов известно, что собственные числа $\mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ симметричного ядра вещественны, а собственные функции, соответствующие различным собственным числам, ортогональны:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Совокупность собственных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ симметричного ядра $K(x, s)$, подчиненных условиям

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\overline{\varphi_j(x)}\,dx = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

образует ортонормированную систему собственных функций ядра $K(x, s)$.

Рассмотрим уравнение (3) с симметричным ядром $K(x, s)$ при заданном вещественном значении $\mu \neq 0$ (не являющемся собственным числом).

Полагая в уравнении (3) $x = t$ и интегрируя по $t$, умножив предварительно обе части равенства на $K(x,t)$, получим:

$$\int_a^b K_2(x, s)\varphi(s)\,ds - \mu\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = \int_a^b K(x, s)F(s)\,ds,$$

где $K_2(x, s)$ — симметричное ядро:

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) \, dt.$$

Складывая это уравнение с уравнением (3), умноженным на $-\mu$, так же, как и выше, получим уравнение

$$\int_a^b [K_2(x, s) - 2\mu K(x, s)] \varphi(s) \, ds + \mu^2 \varphi(x) =$$

$$= \int_a^b K(x, s) F(s) \, ds - \mu F(x), \qquad (5')$$

эквивалентное уравнению (3).

Очевидно, что каждому собственному числу $\mu_i$ и соответствующей ему собственной функции $\varphi_i(x)$ ядра $K(x, s)$ будет отвечать собственное число $\mu_i^2 - 2\mu\mu_i$ ядра

$$N(x, s) = K_2(x, s) - 2\mu K(x, s) \qquad (6')$$

и та же самая собственная функция этого ядра $\varphi_i(x)$.

Можно показать, что ядро $N(x, s)$ никаких других собственных чисел и собственных функций, отличных от указанных, иметь не будет. В самом деле, пусть $c$ — произвольная постоянная; тогда оператор

$$T\varphi = -c\varphi(x) + \int_a^b N(x, s) \varphi(s) \, ds =$$

$$= -c\varphi(x) - 2\mu \int_a^b K(x, s) \varphi(s) \, ds + \int_a^b \int_a^b K(x, t) K(t, s) \varphi(s) \, ds dt \qquad (41)$$

можно представить следующим образом:

$$T\varphi = (\mu + \sqrt{\mu^2 + c}) [(\mu - \sqrt{\mu^2 + c}) \varphi(x) - \int_a^b K(x, s) \varphi(s) \, ds] -$$

$$- \int_a^b K(x, t) [(\mu - \sqrt{\mu^2 + c}) \varphi(t) - \int_a^b K(t, s) \varphi(s) \, ds] \, dt =$$

$$= (\mu - \sqrt{\mu^2 + c}) [(\mu + \sqrt{\mu^2 + c}) \varphi(x) - \int_a^b K(x, s) \varphi(s) \, ds] -$$

$$- \int_a^b K(x, t) [(\mu + \sqrt{\mu^2 + c}) \varphi(t) - \int_a^b K(t, s) \varphi(s) \, ds] \, dt. \qquad (42)$$

Отсюда видно, что если $c$ — собственное число, а $\varphi(x)$ — соответствующая ему собственная функция ядра $N(x, s)$, то $\varphi(x)$ будет собственной функцией ядра $K(x, s)$, соответствующей собственному числу этого ядра, равному $\mu - \sqrt{\mu^2 + c}$ или $\mu + \sqrt{\mu^2 + c}$, т. е. одному из корней уравнения

$$\mu_i^2 - 2\mu\mu_i = c.$$

Этим наше утверждение доказано.

Теперь очевидно, что оператор

$$A\varphi = \int_a^b N(t, s)\varphi(s)\,ds + \mu^2\varphi(x)$$

будет иметь собственные числа $k_i = (\mu_i - \mu)^2$ и соответствующие им ортонормированные собственные функции $\varphi_i(x)$. При этом все собственные числа $k_i$ будут положительными, так как $\mu \neq \mu_i$ и $\mu$ вещественно по условию.

Введем вместо $\varphi(x)$ новую неизвестную функцию

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{1}{\mu}F(x), \quad \varphi(x) = -\frac{1}{\mu}F(x) + \psi(x). \tag{7'}$$

Тогда, как и выше, уравнение (5′) запишется в виде

$$A\psi = \int_a^b N(x, s)\psi(s)\,ds + \mu^2\psi(x) = F^*(x), \tag{8'}$$

где

$$F^*(x) = \int_a^b \left[K(x, s) + \frac{1}{\mu}N(x, s)\right]F(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{1}{\mu}K_2(x, s) - K(x, s)\right]F(s)\,ds. \tag{9'}$$

Уравнение (8′), как и раньше, можно записать в виде

$$\psi(x) = P\psi + \frac{2}{\sigma}F^*(x), \tag{10'}$$

где

$$P\psi = \psi(x) - \frac{2}{\sigma}A\psi = \psi(x) -$$

$$-\frac{2}{\sigma}\left\{\int_a^b N(x, s)\psi(s)\,ds + \mu^2\psi(x)\right\}, \tag{11'}$$

а $\sigma$ — положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\sigma > \max_i (\mu_i - \mu)^2, \tag{12'}$$

или, в более эффективной форме,

$$\sigma > (B + |\mu|)^2 = \mu^2 + 2|\mu|\sqrt{\int_a^b\int_a^b |K(x, s)|^2\,dx\,ds} +$$

$$+\int_a^b\int_a^b |K(x,s)|^2\,dx\,ds. \tag{13'}$$

Собственные числа $\nu_i$ оператора $P\psi$ определяются равенствами

$$\nu_i = 1 - \frac{2}{\sigma}(\mu_i - \mu)^2$$

и по модулю меньше единицы.

Уравнение (10′) в нашем случае можно решать так же, как и в § 1, для случая вещественного симметричного ядра.

В качестве начального приближения принимаем функцию

$$\psi_0(x) = \frac{2}{\sigma} F^*(x),$$

которая по теореме Гильберта — Шмидта, так же как и в случае вещественного ядра, разлагается в ряд Фурье по собственным функциям ядра $K(x, s)$:

$$\frac{2}{\sigma} F^*(x) = \sum_i c_i \varphi_i(x), \tag{15′}$$

где $c_i$—коэффициенты Фурье:

$$c_i = \int_a^b \frac{2}{\sigma} F^*(x) \overline{\varphi_i(x)}\, dx = \left(\frac{\mu_i^2}{\mu} - \mu_i\right) \frac{2}{\sigma} F_i,$$

$$F_i = \int_a^b F(x) \overline{\varphi_i(x)}\, dx.$$

Формула подстановок

$$\psi_{m+1}(x) = P\psi_m + \frac{2}{\sigma} F^*(x) \tag{14′}$$

при начальном приближении (15′) для $(m+1)$-го приближения дает следующее выражение:

$$\psi_{m+1}(x) = \sum_i c_i (1 + \nu_i + \ldots + \nu_i^{m+1}) \varphi_i(x) = \sum_i c_i \frac{1 - \nu_i^{m+2}}{1 - \nu_i} \varphi_i(x). \tag{16′}$$

Учитывая, что $|\nu_i| < 1$, заключаем, что $\psi_{m+1}(x)$ при $m \to \infty$ равномерно сходится к точному решению уравнения (5′):

$$\psi(x) = \sum_i \frac{c_i}{1 - \nu_i} \varphi_i(x), \tag{17′}$$

а последовательность функций

$$\widetilde{\varphi}_{m+1}(x) = -\frac{1}{\mu} F(x) + \psi_{m+1}(x) =$$

$$= -\frac{1}{\mu} F(x) + \sum_i c_i \frac{1 - \nu_i^{m+2}}{1 - \nu_i} \varphi_i(x) \tag{18′}$$

при $m \to \infty$ равномерно сходится к точному решению исходного интегрального уравнения (3):

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\mu} F(x) + \sum_i \frac{c_i}{1 - \nu_i} \varphi_i(x). \tag{19′}$$

Погрешность $(m+1)$-х приближений $\psi_{m+1}(x)$ и $\widetilde{\varphi}_{m+1}(x)$ определится равенствами (20) § 1, а в смысле среднего квадратического — равенствами

$$\int_a^b |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_{m+1}(x)|^2 dx = \int_a^b |\psi(x) - \psi_{m+1}(x)|^2 dx = \sum_i |c_i|^2 \frac{\nu_i^{2m+4}}{(1 - \nu_i)^2}.$$

Так же, как и в случае вещественного ядра, нетрудно показать, что точное решение (19′) уравнения (3), к которому приводит построенный процесс подстановок, допускает преобразование в разложение по собст-

венным функциям решения соответствующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Таким образом, все, что было получено нами в применении к вещественному симметричному ядру в § 1, п. 1, распространено сейчас на случай симметричных комплексных ядер, но при условии, что параметр $\mu$ в данном интегральном уравнении (3) является вещественным.

2. Случай симметричного ядра, соответствующий уравнению Фредгольма первого рода. Рассмотрим уравнение (3) при $\mu=0$ с комплексным симметричным ядром, предполагая, что $\mu=0$ не является собственным числом ядра $K(x, s)$.

Пусть, как и выше,

$$K_2(x, s)=\int_a^b K(x, t)\, K(t, s)\, dt.$$

Умножая обе части равенства

$$\int_a^b K(t, s)\, \varphi(s)\, ds=F(t)$$

на $K(x, t)$ и интегрируя по $t$, получим уравнение, эквивалентное исходному уравнению (3):

$$\int_a^b K_2(x, s)\, \varphi(s)\, ds=F^*(x), \tag{23'}$$

где

$$F^*(x)=\int_a^b K(x, s)\, F(x)\, ds. \tag{24'}$$

Собственными числами ядра $K_2(x, s)$ будут $\mu_i^2$ и, следовательно, все они положительны.

Уравнение (23′) заменяем эквивалентным ему уравнением следующего вида:

$$\varphi(x)=G\varphi+\frac{2}{\sigma} F^*(x), \tag{25'}$$

где

$$G\varphi=\varphi(x)-\frac{2}{\sigma}\int_a^b K_2(x, s)\, \varphi(s)\, ds, \tag{26'}$$

а $\sigma$ — любое число, удовлетворяющее неравенству

$$\sigma>\max_i \mu_i^2, \tag{27'}$$

или, в частности, неравенству

$$\sigma>B^2=\int_a^b\int_a^b |K(x, s)|^2\, dx\, ds. \tag{28'}$$

Собственные числа оператора $G\varphi$ определяются равенствами

$$\nu_i=1-\frac{2}{\sigma}\mu_i^2$$

и по модулю меньше единицы.

Взяв в качестве начального приближения, например, функцию

$$\psi_0(x) = \frac{2}{\sigma} F^*(x) = \sum_i c_i \varphi_i(x),$$

где $c_i$ — коэффициенты Фурье разложения функции $\frac{2}{\sigma} F^*(x)$ по собственным функциям ядра $K(x, s)$, и отправляясь от формулы подстановок

$$\widetilde{\varphi}_{m+1}(x) = G\widetilde{\varphi}_m + \frac{2}{\sigma} F^*(x) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{29'}$$

получим для $(m+1)$-го приближения $\widetilde{\varphi}_{m+1}(x)$ равенство:

$$\widetilde{\varphi}_{m+1}(x) = \sum_i c_i \frac{1-\nu_i^{m+2}}{1-\nu_i} \varphi_i(x). \tag{30'}$$

Отсюда, учитывая, что $|\nu_i| < 1$, предельным переходом получаем точное решение уравнения (3):

$$\varphi(x) \sim \sum_i c_i \frac{1}{1-\nu_i} \varphi_i(x) = \sum_i \frac{F_i}{\mu_i} \varphi_i(x). \tag{31'}$$

При этом погрешность $(m+1)$-го приближения $\widetilde{\varphi}_{m+1}(x)$ определится равенством (32) или, в смысле среднего квадратического, равенством (33) (см. § 1, п. 2). Этим задача полностью решена.

3. Случай произвольного комплексного ядра, соответствующий уравнению Фредгольма второго рода. Заметим, что в уравнении (3) с входящими в него комплексными членами в самом общем случае без каких-либо ограничений можно считать параметр $\mu$ вещественным, так как в противном случае достаточно $\mu$, $K(x, s)$ и $F(x)$ умножить на $e^{-i\arg\mu}$. Поэтому в дальнейшем, предполагая, что $\mu$ не является собственным числом ядра $K(x, s)$, мы будем также считать, что $\mu$ вещественно.

Полагая в уравнении (3) $x = t$ и интегрируя по $t$, умножив предварительно обе части равенства на $\overline{K(t, x)}$, получим уравнение

$$\int_a^b {}'K(x, s)\varphi(s)\,ds - \mu\int_a^b \overline{K(s, x)}\varphi(s)\,ds = \int_a^b \overline{K(s, x)} F(s)\,ds, \tag{34'}$$

где

$$'K(x, s) = \int_a^b \overline{K(t, x)}\, K(t, s)\,dt. \tag{35'}$$

Складывая уравнение (34′) с уравнением (3), умноженным на $-\mu$, получим уравнение с симметричным ядром:

$$\int_a^b N(x, s)\varphi(s)\,ds = \mu^2\varphi(x) + \mu F(x) - \int_a^b \overline{K(s, x)} F(s)\,ds, \tag{36'}$$

где

$$N(x, s) = \mu\,[K(x, s) + \overline{K(s, x)}] - {}'K(x, s), \tag{37'}$$

которое эквивалентно исходному интегральному уравнению (3). В самом деле, если бы нашлось ненулевое решение $\varphi(x)$ уравнения (36′) при

$F(x)\equiv 0$, т. е. если бы

$$\int_a^b \overline{K(t,x)}\left[\int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds-\mu\varphi(t)\right]dt-$$

$$-\mu\left[\int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds-\mu\varphi(x)\right]=0,$$

что это означало бы, что $\mu$ является собственным числом ядра $\overline{K(s,x)}$, а следовательно, и ядра $K(x,s)$.

Таким образом, решение уравнения (3) в данном общем случае получается как решение интегрального уравнения с симметричным ядром (36′) при помощи подстановок, построенных в п. 1 настоящего параграфа.

4. Случай произвольного комплексного ядра, соответствующий интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Рассмотрим уравнение (3) при $\mu=0$ с произвольным комплексным ядром (не обязательно симметричным). При этом будем предполагать, что $\mu=0$ не является собственным числом ядра $K(x,s)$ также, как ядра $\overline{K(s,x)}$.

Умножая обе части равенства

$$\int_a^b K(t,s)\varphi(s)\,ds=F(t)$$

на $\overline{K(t,x)}$ и интегрируя по $t$, получаем:

$$\int_a^b\int_a^b \overline{K(t,x)}\,K(t,s)\,\varphi(s)\,ds\,dt=\int_a^b \overline{K(t,x)}\,F(t)\,dt,$$

или

$$\int_a^b {}'K(x,s)\,\varphi(s)\,ds=\int_a^b \overline{K(s,x)}\,F(s)\,ds, \tag{39'}$$

где $'K(x,s)$ — симметричное ядро, определенное равенством (35′).

Интегральное уравнение (39′) с симметричным ядром эквивалентно исходному интегральному уравнению (3) с произвольным комплексным ядром, так как ядро $\overline{K(s,x)}$, по условию, замкнуто. Следовательно, и в этом случае процесс подстановок, указанный в п.2 настоящего параграфа, приводит к точному решению интегрального уравнения (3).

Таким образом, резюмируя, можно сказать, что построенный процесс подстановок сходится к точному решению интегрального уравнения (3) в случае любого симметричного или несимметричного, а также вещественного или комплексного ядра $K(x,s)$ при произвольных значениях параметра $\mu$, не являющихся собственными числами ядра $K(x,s)$.

В заключение укажем, что этот итерационный процесс приводит к решению интегрального уравнения (3) также в некоторых случаях, когда данное значение $\mu$ является собственным числом ядра $K(x,s)$. Не приводя здесь полного анализа этого вопроса, на основании формул

(14) и (16) видим, что это, например, будет так, если функция $F$ ортогональна ко всем собственным функциям ядра $K(x, s)$, соответствующим данному собственному числу $\mu$, т. е. когда выполняются необходимые условия существования решения.

Поступило
23.VIII.1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гурса Э., Курс математического анализа, т. 3, ч. 2, ОНТИ, 1934.

[2] Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, ГИТТЛ, 1949.

[3] Коллатц Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953.

[4] Соболев С. Л., Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 413—436.

[5] Натансон И. П., К теории приближенного решения уравнений. Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та им. Герцена, 64 (1948), 3—8.

[6] Бирман М. Ш., Об одном варианте метода последовательных приближений, Вестник ЛГУ, № 9 (1952), 69—77.

[7] Wiarda G., Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen, Leipzig, 1930.

[8] Bückner H., Ein unbeschränkt anwendbares Iterationsverfahren für Fredholmsche Integralgleichungen, Mathem. Nachrichten, 2, № 5 (1949), 304—313.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 313—336

А. И. МАЛЬЦЕВ

# МОДЕЛЬНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ

В работе выделяются особые соответствия между моделями, называемые проективными, и устанавливаются их основные свойства. Для соответствий более сложного типа доказывается внутренняя локальная теорема, частными случаями которой оказываются основные локальные теоремы теории групп.

При изучении свойств классов моделей приходится помимо свойств индивидуальных моделей, выражающихся, обычно, через отношения между элементами фиксированной модели, рассматривать отношения между моделями в целом, такие, например, как отношения «модель $\mathfrak{M}$ есть гомоморфный образ модели $\mathfrak{N}$», «модель $\mathfrak{M}$ изоморфна подмодели модели $\mathfrak{N}$», «$\mathfrak{M}$ есть прямое произведение $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$» и т. д. Основной целью настоящей статьи является выделение тех отношений или соответствий между моделями, которые наиболее тесно связаны с узким исчислением предикатов, и изучение основных свойств таких соответствий. Соответствия этого типа вводятся в § 1 под названием проективных. Основные их свойства изучаются в § 2.

В § 3 рассматриваются соответствия и классы моделей более сложного типа, для записи которых необходим аппарат расширенного исчисления предикатов. Для этих классов доказывается внутренняя локальная теорема, являющаяся центральным результатом работы. В конце работы доказывается элементарная аксиоматизируемость классов $RN$-, $RI$-, $Z$-групп и доказывается, что локальные теоремы как для этих групп, так и для более сложных верхних классов $\overline{RN}$-, $\overline{RI}$-, $\overline{Z}$-, $\widetilde{N}$-групп и свободно доупорядочиваемых групп являются частными случаями упомянутой внутренней локальной теоремы. Локальная теорема для свободно упорядочиваемых групп является, по-видимому, новой. Комбинируя свойства $\overline{RN}$, $\overline{RI}$ и т. д. с требованиями выпуклости подгрупп, можно получить тем же способом ряд новых локальных теорем и для частично упорядоченных групп.

В теории моделей обычно рассматриваются предикаты, определенные на одном основном множестве. При изучении модельных соответствий оказалось необходимым систематически рассматривать предикаты и модели с несколькими основными множествами. В формулах, относящихся к таким многоосновным моделям, предметные кванторы приходится считать специализированными по основным множествам. Обычный процесс «унифицирования» переменных позволяет, в основном, свести изучение многоосновных моделей к изучению одноосновных, и этот прием используется в § 2 для вывода свойств модельных соответствий из известных свойств классов обычных моделей.

По аналогии с предметными специализированными кванторами можно ввести и специализированные предикатные кванторы, если понимать выражения $(\forall_{\mathfrak{A}} P)$, $(\exists_{\mathfrak{A}} P)$ как символы высказываний: «для каждого предиката $P$, обладающего свойством $\mathfrak{A}$», «существует предикат $P$, обладающий свойством $\mathfrak{A}$, такой, что». Именно использование специализированных предикатных кванторов позволило найти формулировку для основной внутренней локальной теоремы.

Аксиоматика предикатного исчисления с многоосновными предикатами изучалась А. Шмидтом ([16]), ([17]). Однако для единства терминологии и удобства чтения в § 1 настоящей работы дается краткая сводка необходимых понятий и результатов.

Некоторые идеи и результаты настоящей работы были опубликованы в заметке ([12]).

## § 1. Многоосновные модели

1. 1. Многоосновные предикаты. Пусть задана система множеств $M_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$, не обязательно различных, но непустых. Будем говорить, что на указанной системе задан $n$-членный предикат $P(x_1,\ldots,x_n)$ рода $\langle i_1,\ldots, i_n\rangle$ $(i_k \in \mathrm{A}, k=1,\ldots,n)$, если каждой последовательности $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ $(a_k \in M_{i_k},\ k=1,\ldots,n)$ поставлено в соответствие *И* (истина) или *Л* (ложь). Задать предикат рода 0 означает задать одно из двух значений *И* или *Л*. К числу основных предикатов далее будут относиться и отношения равенства. Все они будут обозначаться одним символом, хотя этот символ может связывать элементы различных пар основных множеств $M_i$, $M_j$.

При записи формул род предметных переменных будет либо оговариваться особо, либо будет отмечаться верхними индексами. Так, $x^i$, $y^i$ суть предметные символы для элементов множества $M_i$, а $P^{i_1\ldots i_n}$, $Q_s^{i_1\ldots i_n}$ — предикатные символы для предикатов рода $\langle i_1,\ldots, i_n\rangle$.

Все кванторные символы будут предполагаться *специализированными* в том смысле, что выражения $(x^i)$, $(\exists x^i)$, $(\forall P^i)$ будут означать: *«для каждого $x^i$ из $M_i$», «в $M_i$ существует такой элемент $x^i$, что», «для каждого предиката $P^i$ рода $\langle i\rangle$»*. Например, аксиома

$$(x^i)(\exists y^j)\ \ (x^i = y^j)$$

равносильна соотношению

$$M_i \subseteq M_j.$$

Более обще, если $\mathfrak{x}$ — предметное или предикатное переменное, $\sigma$ — некоторое свойство, то символы $(\forall_\sigma \mathfrak{x})$, $(\exists_\sigma \mathfrak{x})$ означают соответственно: *«для каждого $\mathfrak{x}$, обладающего свойством $\sigma$», «существует $\mathfrak{x}$ со свойством $\sigma$ такой, что»*.

Обычные определения формул (правильно образованных) исчисления предикатов естественно обобщаются на случай многоосновных предикатов и специализированных кванторов. Важно, что все обычные тождественно истинные формулы и обычные эквивалентности остаются верными и для многоосновного случая.

Вполне упорядоченная система множеств $M_\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ с заданной на ней вполне упорядоченной системой многоосновных предикатов $P_\gamma(x_1,\ldots,x_{n_\gamma})$ и

фиксированных элементов $a_\delta$ ($\gamma \in \Gamma$, $\delta \in \Delta$) будет называться *многоосновной моделью.* Типом такой модели будет называться последовательность номеров множеств, родов предикатов и фиксированных элементов. Множества $M_\alpha$, предикаты $P_\gamma$ и элементы $a_\delta$ называются *основными* множествами, предикатами и элементами модели.

Отношения изоморфизма и гомоморфизма для многоосновных моделей будут употребляться в том же смысле, что и для одноосновных. Понятие подмодели требуется несколько обобщить.

Пусть $M_\alpha$ ($\alpha \in$ A) — основные множества многоосновной модели $\mathfrak{M}$ и B — некоторое подмножество из A. Тогда B-подмоделью $\mathfrak{M}'$ модели $\mathfrak{M}$ будет называться система подмножеств $M'_\alpha \subseteq M_\alpha$ ($\alpha \in$ B), $M'_\alpha = M_\alpha$ ($\alpha \overline{\in}$ B) с теми же предикатами и фиксированными элементами, что и в $\mathfrak{M}$. Таким образом, предполагается, что фиксированные элементы $\mathfrak{M}$, если они вообще есть, должны принадлежать $\mathfrak{M}'$. В случае B = A $\mathfrak{M}'$ называется просто подмоделью $\mathfrak{M}$.

Классом моделей будет называться система однотипных моделей, содержащая вместе с каждой своей моделью и все ей изоморфные. Символы $M_\alpha$, $P_\gamma$, $a_\delta$ будут употребляться как общие обозначения основных множеств, предикатов и элементов моделей класса.

Формула, не содержащая других свободных переменных, кроме символов $P_\gamma$, $a_\delta$, и не содержащая этих символов в качестве связанных переменных, будет называться *аксиомой* или *замкнутой* формулой. Все формулы будут предполагаться приведенными к предваренной (пренексной) форме и когда будет говориться о кванторах, то будут иметься в виду кванторы пренексной формы, если не оговорено противное.

Формулы, содержащие лишь универсальные предметные кванторы, будут называться универсальными.

Подклас $L$ класса моделей $K$ называется аксиоматизируемым (элементарным) внутри $K$, если существует такая, вообще бесконечная, система аксиом $\mathfrak{L}$ узкого исчисления предикатов (УИП), что $L$ состоит из тех и только тех моделей класса $K$, которые удовлетворяют всем аксиомам рассматриваемой системы. Если все аксиомы системы $\mathfrak{L}$ можно выбрать универсальными, то $L$ называется *универсально аксиоматизируемым* подклассом в $K$.

А. Тарским ([18]) и Ю. Лосем ([5]) получены простые характеристики универсально аксиоматизируемых подклассов. Чтобы представить их в нужной для нас форме, введем следующее определение [см. ([15])].

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель с основными множествами $M_\alpha$, предикатами $P_\gamma$ и фиксированными элементами $a_\delta$. *Описанием* $O(\mathfrak{M})$ модели $\mathfrak{M}$ называется совокупность всех формул вида $P_\gamma(c_1,\ldots,c_n)$, $\neg P_\gamma(c_1,\ldots,c_n)$, $a_\delta = c$, $a_\delta \neq c$, истинных в $\mathfrak{M}$, где $c, c_1,\ldots, c_n$ пробегают всю модель $\mathfrak{M}$. В случае многоосновной модели к этому должны быть еще присоединены все истинные соотношения вида $c \in M_\alpha$.

Фиксируя некоторую конечную совокупность предикатов $P_{\gamma_1},\ldots, P_{\gamma_s}$ и соединяя знаком & члены из $O(\mathfrak{M})$, относящиеся к выбранным предикатам, мы получим финитное *частичное описание* $O_f(\mathfrak{M})$ или $(P_{\gamma_1},\ldots, P_{\gamma_s})$-описание $\mathfrak{M}$. Говорят, что описание $O_f^1(\mathfrak{M})$ *реализуемо* в модели $\mathfrak{N}$, если в мо-

дели $\mathfrak{N}$ выполняется аксиома

$$(\exists c_1)\ldots(\exists c_t)\, O_f(\mathfrak{M}),$$

где $c_1,\ldots,c_t$ — элементы из $\mathfrak{M}$, встречающиеся в $O_f(\mathfrak{M})$.

ТЕОРЕМА 1 [ср. Тарский ([18]), Лось ([5])]. *Для того чтобы подкласс $K^*$ класса многоосновных моделей $K$, тип которого не содержит фиксированных элементов, был универсально аксиоматизируем в $K$, необходимо и достаточно, чтобы классу $K^*$ принадлежала каждая $K$-модель, в которой каждое финитное частичное описание любой конечной подмодели реализуемо в подходящей $K^*$-модели.*

Необходимость непосредственно следует из основной локальной теоремы (см. ниже п. 2.2) Для полноты докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{U}$ — совокупность всех универсальных аксиом, имеющих место на всех $K^*$-моделях, и пусть все они выполняются на $K$-модели $\mathfrak{M}$. Требуется доказать, что $\mathfrak{M} \in K^*$. Пусть это не так. Тогда найдется финитное описание $O_f(c_1,\ldots,c_n)$ конечной системы элементов $c_1,\ldots,c_n$ модели $\mathfrak{M}$, не реализуемое ни в какой $K^*$-модели. Это значит, что во всех $K^*$-моделях выполнена универсальная аксиома

$$(c_1)\ldots(c_n)\overline{O_f(c_1,\ldots,c_n)},$$

которая, таким образом, должна принадлежать $\mathfrak{U}$ и потому иметь место на $\mathfrak{M}$. Но на $\mathfrak{M}$ выполняется отрицание этой аксиомы, что является противоречием, доказывающим теорему.

1.2. Аксиоматизируемые и проективные соответствия. Рассмотрим два класса моделей $K$ и $L$, основные множества и предикаты которых обозначим соответственно через $M_\alpha$, $P_\gamma$ $(\alpha \in \mathrm{A},\ \gamma \in \Gamma)$ и $N_\beta$, $Q_\delta$ $(\beta \in \mathrm{B},\ \delta \in \Delta)$. Мы скажем, что между моделями классов $K$, $L$ установлено соответствие $\sigma$, если каждой паре моделей $\mathfrak{M} \in K$, $\mathfrak{N} \in L$ поставлено в соответствие одно из значений *И* или *Л*. При этом будет предполагаться, что если $\mathfrak{M}\sigma\mathfrak{N} = И$ и $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ соответственно изоморфны $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_1$, то $\mathfrak{M}_1\sigma\mathfrak{N}_1 = И$.

Соответствие $\sigma$ будет называться *аксиоматизируемым* (элементарным), если истинность отношения $\mathfrak{M}\sigma\mathfrak{N}$ равносильна выполнимости на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ фиксированной совокупности $\mathfrak{S}$ аксиом УИП, конструируемой следующим образом. Берется некоторое множество новых предикатных символов $S_\lambda^{i_1\ldots i_k}$ $(i_1,\ldots,i_k \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B},\ \lambda \in \Lambda)$ и пишется система аксиом УИП, содержащих лишь предикатные символы вида $P_\gamma$, $Q_\delta$, $S_\lambda$. При этом выполнимость системы $\mathfrak{S}$ на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ означает, что на множествах $M_\alpha$, $N_\beta$ $(\alpha \in \mathrm{A},\ \beta \in \mathrm{B})$ можно так определить предикаты $S_\lambda$, что при заданных предикатах из $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ на множествах $M_\alpha$, $N_\beta$ все аксиомы из $\mathfrak{S}$ будут истинными.

Если число аксиом в $\mathfrak{S}$ конечно, то выполнимость $\mathfrak{S}$ на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ равносильна истинности подходящей аксиомы 2-й ступени вида

$$(\exists S_{\gamma_1})\ldots(\exists S_{\gamma_k})\,\mathfrak{A}(P, Q, S).$$

Поэтому аксиоматизируемые соответствия этого частного вида можно было бы назвать $\exists$-соответствиями и по аналогии определить $\forall$, $\exists\forall$, $\forall\exists$ и т. д. соответствия. К одному частному случаю мы вернемся в § 3, а сейчас определим еще один класс соответствий, содержащий в себе класс

аксиоматизируемых соответствий и столь же удобный для изучения, как и этот последний класс.

По определению, соответствие $\sigma$ между моделями классов $K$, $L$ будет называться *проективным*, если истинность отношения $\mathfrak{M}\sigma\mathfrak{N}$ $(\mathfrak{M} \in K, \mathfrak{N} \in L)$ равносильна выполнимости на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ фиксированной системы аксиом $\mathfrak{S}$ следующего строения. Берутся вспомогательное множество индексов $C$ и множество предикатных символов вида $S_\lambda^{i_1 \ldots i_k}$ $(i_1, \ldots, i_k \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap C, \lambda \in \Lambda)$ и пишутся аксиомы УИП, содержащие лишь предикатные переменные $P_\gamma$, $Q_\delta$, $S_\lambda$. Система $\mathfrak{S}$ называется выполнимой на $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, если можно найти такие непустые множества $T_\mu$ $(\mu \in C)$ и на множествах $M_\alpha$, $N_\beta$, $T_\mu$ так определить предикаты $S_\lambda$, что все аксиомы из $\mathfrak{S}$ окажутся истинными.

Введенные понятия аксиоматизируемого и проективного соответствий между моделями двух классов очевидным и однозначным образом переносятся и на случай соответствия $\sigma(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s)$ между моделями $s$ классов $K_1, \ldots, K_s$.

Из определений этих соответствий непосредственно вытекают два следствия.

Следствие 1. *Дизъюнкция конечного и конъюнкция любого числа аксиоматизируемых (проективных) отношений между моделями заданных классов $K_1, \ldots, K_s$ являются снова аксиоматизируемыми (проективными) отношениями.*

Следствие 2. *Если $\sigma(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s)$ — проективное отношение между моделями классов $K_1, \ldots, K_s$, из которых класс $K_s$ аксиоматизируем, то отношение*

$$\tau(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{s-1}) = (\exists \mathfrak{M}_s)\, \sigma(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s)$$

*также проективное.*

Формулировка следствия 2 имеет смысл при $s > 2$. При $s = 2$ выражение

$$(\exists \mathfrak{M}_2)\, \sigma(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \doteq \tau(\mathfrak{M}_1)$$

будет давать свойство $\tau$ модели $\mathfrak{M}_1$, которое мы также будем называть *проективным*, а совокупность моделей класса $K_1$, обладающих этим свойством, будем называть *проективным подклассом* в $K_1$. Иными словами, подкласс $K^*$ моделей класса $K$ называется проективным в $K$, если он состоит из тех и только тех $K$-моделей, которые находятся в фиксированном проективном отношении хотя бы с одной моделью заданного аксиоматизируемого класса.

Из следствия 1 вытекает, что *объединение конечного и пересечение любого числа проективных подклассов заданного класса моделей являются снова проективными подклассами этого класса.*

Если основной класс моделей $K$ состоит из всех моделей заданного типа, то его проективные (аксиоматизируемые) подклассы называются просто проективными (аксиоматизируемыми) классами моделей.

Легко видеть, что проективные подклассы проективных классов моделей являются проективными классами. Аналогично, *совокупность $K_1^{**}$ моделей проективного класса $K_1^*$, находящихся в каком-либо проективном соответствии $\sigma$ к моделям проективного класса $K_2^*$, является проективным классом.*

В самом деле, пусть $K_1$, $K_2$ — классы *всех* моделей типа $K_1^*$, $K_2^*$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ — системы аксиом, определяющие проективные соответствия $\rho_1$, $\rho_2$ между моделями классов $K_1$, $K_2$ и моделями вспомогательных аксиоматизируемых классов $L_1$, $L_2$, характеризуемых системами аксиом $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$. При этом пусть $K_i^*$ есть совокупность $K_i$-моделей, связанных $\rho_i$-соответствием с какими-либо $\mathfrak{L}_i$-моделями ($i = 1, 2$). Обозначим через $\mathfrak{S}$ систему аксиом, определяющую проективное соответствие $\sigma$. Каждая из систем аксиом $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{S}$ содержит символы вспомогательных предикатов $S_\lambda^{i_1 \ldots i_k}$. Вводим для них в каждой из указанных систем различные символы и рассматриваем проективное соответствие $\tau$ между моделями классов $K_1$, $K_2$, определяемое системой аксиом $\mathfrak{T} = \{\mathfrak{S}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2\}$. Непосредственно видно, что класс $K_1^{**}$ состоит из $K_1$-моделей, у которых имеются $\tau$-соответствующие $K_2$-модели.

1.3. Некоторые примеры. Пусть $K, L$ — классы одноосновных моделей. Вводим вспомогательный предикат $S(x, y)$ ($x \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{N}$), который рассматриваем как отношение, устанавливающее соответствие между элементами основных множеств моделей $\mathfrak{M} \in K$, $\mathfrak{N} \in L$. Системой аксиом УИП $\mathfrak{S}$, записываемых с помощью предикатного символа $S$ и основных предикатных символов классов $K$, $L$, задаем некоторое свойство соответствия $S$. Модели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ находятся в $\mathfrak{S}$-соответствии, если между элементами $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ можно установить соответствие $S$, обладающее свойством $\mathfrak{S}$.

К этому простейшему типу модельных соответствий принадлежат, например, отношения «модель $\mathfrak{M}$ изоморфна модели $\mathfrak{N}$», «модель $\mathfrak{M}$ есть гомоморфный (сильно гомоморфный) образ модели $\mathfrak{N}$», «модель $\mathfrak{M}$ изоморфна некоторой подмодели модели $\mathfrak{N}$», «модель $\mathfrak{M}$ есть гомоморфный образ некоторой подмодели модели $\mathfrak{N}$» и т. д.

Отсюда следует, например, что *совокупность всех фактор-моделей моделей аксиоматизируемого класса есть проективный класс.*

В изложенной схеме вместо отношения $S$ между элементами двух моделей можно рассматривать отношение между элементами нескольких моделей и получить, в частности, отношение «модель $\mathfrak{M}$ есть прямое проведение моделей $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$».

Рассмотрим более сложный пример. *Финитно полным подпрямым* произведением одноосновных однотипных моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{A}$) условимся называть такую подмодель $\mathfrak{M}$ прямого произведения этих моделей, которая для любого конечного набора различных индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из А и произвольного выбора элементов $y_i \in \mathfrak{M}_{\alpha_i}$ ($i = 1, \ldots, m$) содержит элемент $x$, имеющий $y_1, \ldots, y_m$ своими проекциями номеров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Покажем, что *свойство модели $\mathfrak{M}$ быть финитно полным подпрямым произведением системы моделей фиксированного аксиоматизируемого класса $K$ является проективным.*

Пусть $P_i(z_1, \ldots, z_{n_i})$ ($i \in \Gamma$) — основные предикатные символы класса $K$ и $\mathfrak{K}$ — совокупность аксиом, определяющая этот класс. Рассматриваем следующие три класса моделей:

Класс $K_1$. Предикатов нет. Элементы модели — $\alpha, \alpha_1, \ldots$.

Класс $K_2$. Основные предикаты — $Q_i(x_1, \ldots, x_{n_i})$, элементы — $x, x_1, \ldots$.

Класс $K_3$. Основные предикаты — $R_i(y_1, \ldots, y_{n_i})$, элементы — $y$, $y_1, \ldots$.

Вводим вспомогательный предикат $S(\alpha, x, y)$, читающийся «*$y$ есть проекция номера $\alpha$ элемента $x$*», и обозначаем символом $\mathfrak{S}$ совокупность всех

следующих аксиом (кванторы всеобщности, относящиеся ко всей формуле, для краткости опускаем):

1. $(\exists y) S(\alpha, x, y)$;
2. $S(\alpha, x, y) \& S(\alpha, x, y_1) \to y = y_1$;
3. $(\alpha)(\exists y)(S(\alpha, x, y) \& S(\alpha, x_1, y)) \to x = x_1$;
4. $Q_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \leftrightarrow (\alpha)(y_1)\ldots(y_{n_i})(S(\alpha, x_1, y_1) \& \ldots \& S(\alpha, x_{n_i}, y_{n_i}) \to$
$\to R_i(y_1, \ldots, y_{n_i}))$;
5. $T(\alpha, y) \leftrightarrow (\exists x) S(\alpha, x, y)$;
6. $\alpha_1 \neq \alpha_2 \& \alpha_1 \neq \alpha_3 \& \ldots \& \alpha_{m-1} \neq \alpha_m \& T(\alpha_1, y_1) \& \ldots \& T(\alpha_m, y_m) \to$
$\to (\exists x)(S(\alpha_1, x, y_1) \& \ldots \& S(\alpha_m, x, y_m)) \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$.
7. Записываем в виде аксиом УИП, что каждая аксиома из $\mathfrak{K}$ имеет место на совокупности $T_\alpha$ всех тех элементов $y$, для которых $T(\alpha, y)$ истинно. Эти аксиомы пишем с кванторами всеобщности по $\alpha$ путем специализации кванторов в аксиомах $\mathfrak{K}$ и замены в них символов $P_i$ символами $R_i$.

Ясно, что если для некоторой модели $\mathfrak{M} \in K_2$ можно найти модели $\in K_1$, $\mathfrak{N} \in K_3$ так, что на А, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ будут удовлетворяться аксиомы 1 — 7, то $\mathfrak{M}$ будет финитно полным подпрямым произведением моделей $T_\alpha$, принадлежащих, ввиду аксиом 7, классу $K$, что и требовалось установить.

Если из аксиом 1 — 7 выбросить аксиому 6, то выполнимость оставшейся системы для моделей А, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ будет означать, что $\mathfrak{M}$ есть подмодель прямого произведения $K$-моделей. Поэтому *свойство модели быть подмоделью прямого произведения моделей проективного класса K является проективным.*

Аналогичным путем можно было бы доказать проективность свойств группы быть $RI$-, $RN$- или $Z$-группой, а также быть частично упорядоченной и содержать $RN$-, $RI$- или $Z$-систему выпуклых подгрупп. Фактически именно это доказано в работах ([9]), ([11]). Однако ниже в § 3 будет доказано более сильное утверждение о простой аксиоматизируемости всех указанных свойств групп.

## § 2. Основные свойства проективных соответствий

2.1. Отношения равенства. Унифицирование кванторов. Пусть $K$ — класс многоосновных моделей с основными множествами $M_\alpha$, $\alpha \in$ А, и основными предикатами $P_\gamma (\gamma \in \Gamma)$, характеризующийся системой аксиом УИП $\mathfrak{S}$. Как уже упоминалось, в записях аксиом из $\mathfrak{S}$ наряду с основными предикатными символами $P_\gamma$ могут встречаться и знаки равенства. Хорошо известный прием релятивизации равенств позволяет свести рассмотрение систем с (абсолютным) равенством к изучению систем с предикатом эквивалентности [см. ([3]), ([8])]. В случае многоосновных моделей релятивизация равенств может иногда производиться раздельно следующим образом.

Предположим, что множество А номеров основных множеств можно разбить на взаимно не пересекающиеся непустые части $А_0, А_1, \ldots, А$, так, что в $\mathfrak{S}$ не будет встречаться знак равенства, связывающий элементы множеств, номера которых принадлежат различным частям $А_i$, $А_j$. Вводим в рассмотрение новые отношения $\theta_1, \ldots, \theta_t$, полагая $x\theta_i y$ определенным для

всех $x, y \in \bigcup_i$, где

$$U_i = \bigcup M_\alpha \quad (\alpha \in \mathrm{A}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, t.$$

Связываем новые и старые отношения аксиомами:

$$x\theta_i x, \quad x\theta_i y \to y\theta_i x, \quad x\theta_i y \,\&\, y\theta_i z \to x\theta_i z, \tag{1}$$

$$x_1\theta_{i_1}y_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n\theta_{i_n}y_n \,\&\, P_\gamma(x_1, \ldots, x_n) \to P_\gamma(y_1, \ldots, y_n), \tag{2}$$

где символы $\theta_i, \theta_{i_1}, \ldots, \theta_{i_n}$ принимают всевозможные значения из системы $=$, $\theta_1, \ldots, \theta_t$, а переменные $x, y, z, x_k, y_k$ берутся всевозможных родов, согласующихся с родами предикатов $P_\gamma$, $\theta_i$, $\theta_{i_1}, \ldots, \theta_{i_n}$. Наконец, в каждой $\mathfrak{S}$-аксиоме каждое выражение вида $x = y\,(x, y \in U_i)$ заменяем выражением $x\theta_i y$ и систему полученных таким образом новых аксиом, пополненную аксиомами (1) и (2), обозначим через $\mathfrak{S}_\theta$. Класс моделей с основными множествами $M_\alpha\,(\alpha \in \mathrm{A})$ и основными предикатами $P_\gamma\,(\gamma \in \Gamma)$, $\theta_1, \ldots, \theta_t$, на которых выполняются аксиомы $\mathfrak{S}_\theta$, обозначим через $K_\theta$. Аксиомы из $\mathfrak{S}_\theta$ содержат знак $=$, но лишь для элементов множеств $M_\alpha\,(\alpha \in \mathrm{A}_0)$, тогда как знаки равенств, связывающих элементы остальных множеств, в $\mathfrak{S}_\theta$ отсутствуют и заменены знаками эквивалентностей различных родов.

Каждая $\mathfrak{S}$-модель $\mathfrak{M}$ тривиальным образом обращается в $\mathfrak{S}_\theta$-модель, если, по определению, положить отношения $x\theta_i y$ равносильными равенствам $x = y$.

Обратно, пусть $\mathfrak{M}_\theta$ — некоторая $\mathfrak{S}_\theta$-модель. В силу (1), отношение $\theta_i$ является эквивалентностью на $U_i$ и потому $U_i$ распадается на смежные классы $[x]$, $x \in U_i$ по $\theta_i$ Обозначим через $M_\alpha / \theta_i\,(\alpha \in \mathrm{A}_i)$ совокупность тех смежных классов из $U_i / \theta_i$, представители которых содержатся в $M_\alpha$, и положим

$$P_\gamma([x_1], \ldots, [x_n]) = P_\gamma(x_1, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Аксиома (2) гарантирует, что формулами (3) предикаты $P_\gamma$ на системе множеств $M_\alpha / \theta_i$ определяются однозначно. Тем самым из каждой $\mathfrak{S}_\theta$ модели $\mathfrak{M}_\theta$ получается определенная модель $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\theta / \theta$. Как и в одноосновном случае (3), легко убедиться, что $\mathfrak{M}$ удовлетворяет аксиомам $\mathfrak{S}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее замечание. Предположим, что в $\mathfrak{S}$ нет знаков равенства, связывающих элемент из $M_\alpha$ с каким-либо другим элементом, и допустим, что в некоторой $\mathfrak{S}$-модели $\mathfrak{M}$ на множестве $M_\alpha$ удалось каким-то образом определить эквивалентность $\theta$, удовлетворяющую на $\mathfrak{M}$ аксиомам (1), (2). Из вышеизложенного видно, что тогда аксиомы $\mathfrak{S}$ будут выполняться и на фактор-модели $\mathfrak{M} / \theta$, определенной указанным выше способом на основных множествах $M_\beta\,(\beta \neq \alpha)$.

Более того, фактор-модель $\mathfrak{M} / \theta$ можно просто рассматривать и как подмодель в $\mathfrak{M}$. Для этого из каждого смежного класса $M_\alpha / \theta$ выберем по представителю и обозначим совокупность этих представителей через $M_\alpha$. Пусть $\mathfrak{M}'$ есть подмодель модели $\mathfrak{M}$, имеющая основные множества $M'_\alpha$ и $M'_\beta = M_\beta$ для $\beta \neq \alpha$. Формула (3) показывает, что отображение

$$x \to [x] \quad (x \in M'_\alpha), \quad x \to x \quad (x \in M_\beta, \quad \beta \neq \alpha)$$

является изоморфизмом между $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}' / \theta$.

Уже упоминалось, что рассмотрение аксиоматизируемых классов многоосновных моделей естественно приводится к рассмотрению классов одно-

сновных моделей путем процесса унифицирования кванторов, состоящего в следующем [см. ([16])].

Пусть заданный класс $K$ многоосновных моделей имеет основные множества $M_\alpha$ ($\alpha \in A$) и основные предикаты $P_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$). Обозначим через $K^*$ класс моделей с одним основным множеством $M$ и предикатными символами $V_\alpha$, $P_\gamma^*$ ($\alpha \in A$, $\gamma \in \Gamma$). Предикаты $V_\alpha$ одноместные, а символы $P_\gamma^*$ того же типа, что и $P_\gamma$, лишь аргументы $P_\gamma^*$ относятся все к одному множеству $M$. Каждой формуле УИП $\mathfrak{A}$ типа $K$ ставим в соответствие формулу $\mathfrak{A}^*$ типа $K^*$ следующим путем:

1. Если $\mathfrak{A}$ кванторов не содержит, то $\mathfrak{A}^*$ получается из $\mathfrak{A}$ заменой символов $P_\gamma$ символами $P_\gamma^*$.
2. Если $\mathfrak{A} = (\exists x^\alpha)\mathfrak{A}_1$, то $\mathfrak{A}^* = (\exists x)(V_\alpha(x) \& \mathfrak{A}_1^*)$.
3. Если $\mathfrak{A} = (x^\alpha)\mathfrak{A}_1$, то $\mathfrak{A}^* = (x)(V_\alpha(x) \to \mathfrak{A}_1^*)$.

Имея модель $\mathfrak{M}$ типа $K$, удовлетворяющую аксиоме $\mathfrak{A}$, полагаем $M = \bigcup M_\alpha$, $V_\alpha(x)$ равносильно $x \in M_\alpha$ и

$$P_\gamma^*(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} P_\gamma(x_1, \ldots, x_n), \\ Л, \textit{ если } P_\gamma(x_1, \ldots, x_n) \textit{ не определено.} \end{cases} \quad (4)$$

В результате получим одноосновную модель $\mathfrak{M}^*$, удовлетворяющую аксиоме $\mathfrak{A}^*$. Обратно, если $\mathfrak{M}^*$ есть $K^*$-модель, удовлетворяющая аксиоме $\mathfrak{A}^*$, то, обозначая через $M_\alpha$ совокупность элементов $x \in M$, для которых $V_\alpha(x) = И$, и определяя $P_\gamma$ соотношением (4), получим $K$-модель $\mathfrak{M}$, удовлетворяющую аксиоме $\mathfrak{A}$. Чтобы соответствие между $K$-моделями и $K^*$-моделями было строго однозначным, нужно еще потребовать, чтобы в $\mathfrak{M}^*$ не было «лишних» элементов. Если число основных множеств конечно, например $A = \{1, 2, \ldots, r\}$, то для этого достаточно в определение класса $K^*$ ввести аксиому

$$(x)(V_1(x) \vee V_2(x) \vee \ldots \vee V_r(x)),$$

гарантирующую истинность равенства $M = \bigcup M_\alpha$ в модели $\mathfrak{M}$, получающейся указанным выше образом из модели $\mathfrak{M}^*$.

Процесс *специализации* (или *релятивизации* [см. ([14]), ([15])]) кванторов употребляется в случае, когда нужно записать, что некоторая аксиома $\mathfrak{A}$ с общими кванторами выполняется, если каждое связанное переменное $x_i$ меняется в подмножестве $M_i$, определяемом формулой $\mathfrak{B}_i(x)$, содержащей одно свободное переменное $x$. Для этого достаточно рассматривать аксиому $\mathfrak{A}$ как аксиому со специализированными кванторами. Затем, унифицируя кванторы в $\mathfrak{A}$, мы получим формулу $\mathfrak{A}^*$. Заменяя в $\mathfrak{A}^*$ выражения $V_i(x)$ через $\mathfrak{B}_i(x)$, найдем желаемую формулу.

2.2. Внешняя локальная теорема. Для случая одноосновных моделей хорошо известна следующая

Основная локальная теорема [см. ([8]), ([9])]. *Если совместна каждая конечная подсистема некоторой бесконечной системы $\mathfrak{A}$ аксиом* УИП, *то совместна и вся система $\mathfrak{A}$.*

При этом аксиомы из $\mathfrak{A}$ могут содержать знак равенства, а также любое число (конечное или бесконечное) индивидуальных предикатных и предметных символов.

Допустим теперь, что заданная система аксиом $\mathfrak{A}$ является многоосновной. Совместность ее означает существование многоосновной модели, на

которой все аксиомы из $\mathfrak{A}$ истинны. Применяя процесс унифицирования переменных, построим для $\mathfrak{A}$ соответствующую односновную систему $\mathfrak{A}^*$. Из совместности каждой конечной подсистемы системы $\mathfrak{A}$ следует совместность каждой конечной подсистемы из $\mathfrak{A}^*$, а потому и существование модели $\mathfrak{M}^*$ для $\mathfrak{A}^*$. Переходя, как указано в п. 2.1, от модели $\mathfrak{M}^*$ к модели $\mathfrak{M}$, мы видим, что система $\mathfrak{A}$ совместна. Таким образом, сформулированная выше *основная локальная теорема справедлива и для систем многоосновных аксиом.*

Отсюда непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 2 (внешняя локальная теорема для проективных соответствий). *Пусть задано проективное соответствие $\sigma$ между (многоосновными) моделями проективных классов $K_1, \ldots, K_s$, и пусть $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$ — модели этих классов. Если финитные частичные описания любых конечных подмоделей $\mathfrak{M}_1', \ldots, \mathfrak{M}_s'$ моделей $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$ реализуемы в подходящих моделях $\mathfrak{N}_i' \in K_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, связанных $\sigma$-соответствием, то модели $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$ вложимы в качестве подмоделей в модели $\mathfrak{N}_1 \in K_1, \ldots, \mathfrak{N}_s \in K_s$, связанные $\sigma$-соответствием.*

Совокупности аксиом, определяющие классы $K_1, \ldots, K_s$ и соответствие $\sigma$, обозначим соответственно через $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$, $\mathfrak{A}_0$. Мы можем предполагать, что вспомогательные предикатные и индивидуальные предметные переменные в различных системах имеют различные обозначения. Пусть $O(\mathfrak{M}_1), \ldots$ $\ldots, O(\mathfrak{M}_s)$ — описания заданных моделей и

$$\mathfrak{S} = \{O(\mathfrak{M}_1), \ldots, O(\mathfrak{M}_s), \mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_s\}.$$

Совокупность $\mathfrak{S}$ рассматриваем как систему аксиом, определяющую класс многоосновных моделей. Каждая конечная часть $\mathfrak{S}$ содержит только конечные части систем $O(\mathfrak{M}_1), \ldots, O(\mathfrak{M}_s)$, содержащиеся в подходящих финитных частичных описаниях соответствующих конечных подмоделей моделей $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$, а потому совместна. В силу основной локальной теоремы, отсюда следует совместность и всей системы $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{N}$ — модель для $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_s$ — ее $K_1$-, $\ldots$, $K_s$-проекции, то $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{N}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, ибо $\mathfrak{S}$ содержит описания моделей $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$. Кроме того, модели $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_s$ находятся в $\sigma$-соответствии.

Из теоремы 2 при $s = 1$ получаем

Следствие 1. *Если каждое финитное частичное описание произвольной конечной подмодели некоторой модели $\mathfrak{M}$ реализуемо внутри подходящей модели фиксированного проективного класса $K$, то модель $\mathfrak{M}$ изоморфна подмодели подходящей $K$-модели.*

Согласно ([13]), класс моделей $K$ называется *псевдоаксиоматизируемым*, если из реализуемости в подходящей $K$-модели каждой конечной подсистемы произвольной системы $\mathfrak{S}$ аксиом УИП вытекает реализуемость внутри подходящей $K$-модели системы $\mathfrak{S}$. Повторяя рассуждения, употребленные в доказательстве теоремы 2, легко получить более сильное

Замечание. *Каждый проективный класс моделей является псевдоаксиоматизируемым.*

В качестве примера на применение теоремы 2 рассмотрим сильные гомоморфизмы. Выше упоминалось, что отношение «модель $\mathfrak{M}$ есть сильно гомоморфный образ модели $\mathfrak{N}$» является проективным. Поэтому, если

ждая конечная подмодель некоторой модели $\mathfrak{M}$ является сильно гомо-рфным образом подмодели подходящей модели фиксированного проек-вного класса $K$, то и сама модель $\mathfrak{M}$ является сильно гомоморфным разом подмодели подходящей $K$-модели.

Согласно [9], [11], совокупности $RN$-, $RI$- и $Z$-групп являются оективными классами (см. п. 3.3). Известно также, что подгруппы упп указанных классов принадлежат тем же классам. Поэтому из след-вия 1 получаем такую внешнюю локальную теорему:

*если каждая конечная совокупность $A$ элементов некоторой группы $G$, ссматриваемая как частичная группа, вложима в подходящую $T$-груп- ($T = RN$, $RI$, $Z$), то $G$ есть $T$-группа.*

Напомним, что обычная (внутренняя) локальная теорема для ука-нных групп формулируется следующим образом:

*если каждая подгруппа с конечным числом порождающих некоторой уппы $G$ является $T$-группой, то и $G$ является $T$-группой* [см. [9], [4]].

Сравнивая эти теоремы, мы видим, что первая из них более сильная. ействительно, структура частичной группы $A$ не определяет структуры одгруппы $H$, порожденной элементами $A$ в $G$, и из вложимости $A$ в -группу вообще не следует вложимость в $T$-группу подгруппы $H$.

Наконец, упомянем еще

Следствие 2. *Пусть проективный класс $K$ является подклассом ксиоматизируемого класса моделей $K_0$ и $K_0$-подмодели $K$-моделей явля-тся $K$-моделями. Тогда класс $K$ универсально аксиоматизируем в $K_0$.*

Для доказательства достаточно сравнить теоремы 2 и 1.

Из следствия 2 и проективности классов $RN$-, $RI$-, $Z$-групп следует ростая аксиоматизируемость этих классов. Этот факт будет получен не-осредственно в п. 3.3.

2.3. Ограниченность и расширяемость соответствий. рименяя, как выше, процесс унифицирования кванторов, из известной еоремы Левенгейма — Сколема и теоремы о расширяемости бесконечных оделей [см. [8]] легко получить соответствующие теоремы для многоос-овных моделей, а из них — и теоремы для соответствий и проективных лассов.

ТЕОРЕМА 3 (ограниченности). *Для каждого проективного соответ-ствия $\sigma$ между моделями фиксированных проективных классов $K_1, \ldots, K_s$ уществует бесконечное кардинальное число $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\sigma)$ такое, что если $\mathfrak{M}_1 \in K_1, \ldots, \mathfrak{M}_s \in K_s$ — модели, находящиеся в соответствии $\sigma$, и $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$ — некоторые совокупности их элементов, мощности которых не превос-одят какого-нибудь кардинального числа $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$, то в $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$ айдутся подмодели $\mathfrak{N}_i \in K_i$, находящиеся в $\sigma$-соответствии, содержа-ие соответственно совокупности $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_s$ и мощности которых так-се не превосходят $\mathfrak{n}$.*

Пусть $\mathfrak{S}$ — система аксиом УИП, определяющая соответствие $\sigma$. Мы ключим в $\mathfrak{S}$ и системы аксиом, определяющие классы $K_1, \ldots, K_s$. Пусть $\mathfrak{M}$ — многоосновная $\mathfrak{S}$-модель, проекциями которой являются модели $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$. Унифицируя в $\mathfrak{S}$ переменные, мы получим систему аксиом $\mathfrak{S}^*$, из модели $\mathfrak{M}$ получим $\mathfrak{S}^*$-модель $\mathfrak{M}^*$. Положим

$$\mathfrak{m} = \aleph_0 + \mathfrak{m}_1,$$

где $\mathfrak{m}_1$ — мощность $\mathfrak{S}^*$. Ясно, что число $\mathfrak{m}$, вычисленное для $\mathfrak{S}$, будет тем же, что и для $\mathfrak{S}^*$. Модель $\mathfrak{M}^*$ содержит множество

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{A}_s,$$

мощность которого не превосходит $\mathfrak{n}$. Согласно классической теореме Левенгейма — Сколема, в $\mathfrak{M}^*$ найдется содержащая $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{S}^*$-подмодель $\mathfrak{N}^*$, мощность которой не превзойдет $\mathfrak{n}$. Возвращаясь от $\mathfrak{M}^*$ к $\mathfrak{M}$, мы получим из $\mathfrak{N}^*$ $\mathfrak{S}$-подмодель $\mathfrak{N}$, проекции которой $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_s$ удовлетворяют всем требованиям доказываемой теоремы.

При $s = 1$ получаем

Следствие. *Для каждого проективного класса $K$ существует такая бесконечная мощность $\mathfrak{m}$, что если мощность подмножества $\mathfrak{A}$ некоторой $K$-модели $\mathfrak{M}$ не выше $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$, то в $\mathfrak{M}$ существует $K$-подмодель мощности не выше $\mathfrak{n}$, содержащая $\mathfrak{A}$.*

Для аксиоматизируемых классов число $\mathfrak{m}$, вообще говоря, совпадает с числом основных предикатов класса. В случае проективных классов для нахождения $\mathfrak{m}$ существенны не только основные, но и вспомогательные предикаты. Например, класс $K_\mathfrak{m}$ всех множеств, мощность которых не меньше $\mathfrak{m} \geqslant \aleph$, является проективным. Согласно доказательству теоремы, для характеристики $K_\mathfrak{m}$ необходимо не менее $\mathfrak{m}$ предикатов, хотя сам класс $K_\mathfrak{m}$ основных предикатов не имеет.

ТЕОРЕМА 4 (расширяемости). *Пусть $\sigma$ — проективное соответствие между моделями проективных одноосновных классов $K_1, \ldots, K_s$ и $\mathfrak{n}$ — кардинальное число, указанное в теореме ограниченности. Тогда для любых находящихся в $\sigma$-соответствии бесконечных моделей $\mathfrak{M}_1 \in K_1, \ldots, \mathfrak{M}_s \in K_s$ существуют связанные $\sigma$-соответствием модели $\mathfrak{N}_1 \in K_1, \ldots, \mathfrak{N}_s \in K_s$, мощности которых равны $\mathfrak{n}$ и такие, что $\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{N}_i$, $\mathfrak{M}_i \neq \mathfrak{N}_i$, если мощность $\mathfrak{M}_i$ не выше $\mathfrak{n}$ $(i = 1, \ldots, s)$.*

*Если для каждого натурального $m$ существуют связанные $\sigma$-соответствием модели $\mathfrak{M}_1^{(m)} \in K_1, \ldots, \mathfrak{M}_s^{(m)} \in K_s$, среди которых каждая из моделей $\mathfrak{M}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{M}_t^{(m)}$ ($t$ фиксировано, $t \leqslant s$) имеет не менее $m$ элементов, то в классах $K_1, \ldots, K_s$ найдутся связанные $\sigma$-соответствием модели $\mathfrak{N}_1 \in K_1, \ldots, \mathfrak{N}_s \in K_s$, из которых $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_t$ будут бесконечными.*

В соответствии с работой ([8]), обозначим через $\mathfrak{S}$ систему аксиом, определяющую соответствие $\sigma$ и включающую аксиомы, характеризующие классы $K_1, \ldots, K_s$. Пусть $O(\mathfrak{M}_i)$ — описание $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{A}_i = \{a_{i\alpha}\}$ $(\alpha \in A,\ i = 1, \ldots, s)$ — совокупности символов мощности $\mathfrak{n}$. Эти символы полагаем отличными от всех символов, встречающихся в $\mathfrak{S}$ и в $O(\mathfrak{M}_i)$. Обозначаем через $\mathfrak{R}_i$ систему всевозможных формул вида $a_{i\alpha} \neq a_{i\beta}$, $a_{i\alpha} \neq c_i$, где $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in A$, $c_i \in \mathfrak{M}_i$, и рассматриваем систему аксиом

$$\mathfrak{T} = \{\mathfrak{S}, O(\mathfrak{M}_{i_1}), \ldots, O(\mathfrak{M}_{i_p}), \mathfrak{R}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{R}_{i_p}\},$$

в которой $i_1, \ldots, i_p$ — номера тех $\mathfrak{M}_i$, мощность которых не выше $\mathfrak{n}$. Любая конечная часть $\mathfrak{T}_f \subseteq \mathfrak{T}$ содержит лишь конечное число символов $a_{i\alpha}$, $c_i$ и символов из $\mathfrak{S}$ и поэтому $\mathfrak{T}_f$ можно реализовать в $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$, взяв в качестве $a_{i\alpha}$ произвольные различные элементы этих моделей, отличающиеся от тех, обозначения которых явно содержатся в $\mathfrak{T}_f$. В силу основной локальной теоремы, отсюда следует существование модели $\mathfrak{P}$ у систе-

мы $\mathfrak{T}$. Проекции $\mathfrak{P}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{i_p}$ модели $\mathfrak{P}$ содержат соответственно множества $\mathfrak{A}_{i_k} \cup \mathfrak{M}_{i_k} (k = 1, \ldots, p)$, имеющие мощность $\mathfrak{n}$. Согласно теореме Левенгейма — Сколема, в $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_s$ найдутся связанные σ-соответствием подмодели $\mathfrak{N}_1 \in K_1, \ldots, \mathfrak{N}_s \in K_s$ мощности не выше $\mathfrak{n}$, среди которых $\mathfrak{N}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{N}_{i_p}$ будут содержать множества $\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_p}$ и, следовательно, будут иметь мощность $\mathfrak{n}$, что и требовалось доказать.

Доказательство второй части теоремы такое же, только в качестве $\mathfrak{T}$ следует взять совокупность формул $a_{i\alpha} \neq a_{i\beta}$, где $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

При $s = 1$ доказанная теорема переходит в

Следствие. *Для каждой бесконечной модели $\mathfrak{M}$ проективного одноосновного класса $K$ существует содержащая $\mathfrak{M}$ в качестве подмодели и отличная от нее $K$-модель $\mathfrak{N}$ любой наперед заданной мощности $\mathfrak{n}$, не меньшей мощности $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющей условию $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — фиксированное для класса $K$ кардинальное число, упоминающееся в теореме ограниченности.*

*Если класс $K$ для любого натурального $n$ содержит модель $\mathfrak{M}_n$, число элементов которой больше $n$, то $K$ содержит и бесконечные модели.*

Теорема расширяемости и ее следствие сформулированы лишь для одноосновных классов. Аналогичные утверждения верны и для многоосновных классов, только там вместо мощности модели приходится говорить о мощностях основных множеств модели.

## § 3. Квазиуниверсальные подклассы

3.1. Устойчивость. Рассмотрим какую-нибудь многоосновную формулу пренексного вида 2-й ступени

$$\mathfrak{A} = (Q_1 \mathfrak{a}_1) \ldots (Q_m \mathfrak{a}_m) \mathfrak{B} (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n), \tag{1}$$

где $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — предикатные и предметные переменные фиксированных родов, относящиеся к основным множествам $M_\alpha (\alpha \in \mathrm{A})$ (ср. 1.1). Может случиться, что в этой формуле все кванторы по предметным переменным, принадлежащим множествам $M_\beta (\beta \in \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A})$, будут кванторами всеобщности. В таком случае мы будем говорить, что $\mathfrak{A}$ имеет B-универсальный вид. При этом упомянутые универсальные кванторы в формуле $\mathfrak{A}$ не обязательно должны идти подряд: они могут чередоваться как с кванторами существования и всеобщности по предметным переменным других родов, так и с различными предикатными кванторами.

ТЕОРЕМА 5 [ср. (12), (18)]. *Если многоосновная аксиома $\mathfrak{A}$ исчисления 2-й ступени имеет* B-*универсальный вид и выполняется на какой-либо модели $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{A}$ выполняется и на каждой* B-*подмодели* (см. п. 1.1) *модели $\mathfrak{M}$.*

Для доказательства потребуется несколько новых понятий. Пусть задан некоторый класс $K$ многоосновных моделей с основными множествами $M_\alpha (\alpha \in \mathrm{A})$ и основными предикатами $P_\gamma = P_\gamma^{i_1 \ldots i_k} (\gamma \in \Gamma, i_p = i_p(\gamma) \in \mathrm{A}, k = k(\gamma))$. Мы скажем, что на $K$-моделях задано отношение (предикат) 2-й ступени $Z(x_1, \ldots, x_m, X_1, \ldots, X_n)$, где $x_1, \ldots, x_m$ — предметные, $X_1, \ldots, X_n$ — предикатные переменные 1-й ступени фиксированных родов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \rho_1, \ldots, \rho_n$, если на каждой $K$-модели $\mathfrak{M}$ каждой последовательности ее элементов $x_1, \ldots, x_m$ и каждой последовательности опреде-

ленных на $\mathfrak{M}$ предикатов $X_1, \ldots, X_n$ родов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \rho_1, \ldots, \rho_n$ поставлено в соответствие одно из значений *И*, *Л*.

Отношение $Z$ будет называться *формульным* на $K$, если найдется формула исчисления 2-й ступени $\mathfrak{Z}(x_1, \ldots, x_m, X_1, \ldots, X_n)$, значение которой на каждой $K$-модели $\mathfrak{M}$ для каждой системы значений $x_1, \ldots, x_m, X_1, \ldots, X_n$ на $\mathfrak{M}$ совпадает со значением $Z(x_1, \ldots, x_m, X_1, \ldots, X_n)$. Формула $\mathfrak{Z}(x_1, \ldots, x_m, X_1, \ldots, X_n)$, кроме свободных переменных $x_i, X_j$, может содержать и ряд связанных предметных и предикатных переменных, а также индивидуальные предикатные символы класса $K$.

Отношение $Z$ будет называться В-*устойчивым* ($\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$) на $K$, если из истинности $Z(x_1, \ldots, x_m, X_1, \ldots, X_n)$ в какой-либо $K$-модели $\mathfrak{M}$ с основными множествами $M_\alpha$ ($\alpha \in \mathrm{A}$) для каких-либо ее элементов $x_1, \ldots, x_m$ и определенных на $\mathfrak{M}$ предикатов $X_1, \ldots, X_n$ вытекает истинность $Z(x_1, \ldots, x_m, X_1^0, \ldots, X_n^0)$ в каждой В-подмодели $\mathfrak{M}'$ модели $\mathfrak{M}$ при условии, что $\mathfrak{M}'$ содержит $x_1, \ldots, x_m$, а $X_1^0, \ldots, X_n^0$ — предикаты, определенные на $\mathfrak{M}'$, но значения которых совпадают со значениями $X_1, \ldots, X_n$.

Непосредственно из определения понятия подмодели вытекает, что устойчивыми являются все основные предикаты рассматриваемого класса $K$, а также их отрицания. Устойчивыми являются также конъюнкции и дизъюнкции устойчивых отношений. Поэтому всякое отношение $Z$, определенное на $K$ формулой, не содержащей никаких кванторов, будет устойчивым (А-устойчивым) на $K$.

Легко также проверить, что *если отношение* $Z(x_1, \ldots, x_m, X_1, \ldots, X_n)$ *в классе $K$* В-*устойчиво, то* В-*устойчивы на $K$ и отношения, определяемые на $K$-моделях формулами*

$$(X_i)\,Z, \quad (\exists X_i)\,Z, \quad (x_j)\,Z, \quad (\exists x_k)\,Z,$$

*где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, а род $x_k$ не входит в* В.

В самом деле, пусть на модели $\mathfrak{M} \in K$ заданы элементы $x_1, \ldots, x_m$ и предикаты $X_1, \ldots, X_{n-1}$ так, что истинна формула

$$Y(x_1, \ldots, x_m, X_1, \ldots, X_{n-1}) = (X)\,Z(x_1, \ldots, x_m, X_{n-1}, X).$$

Это значит, что для любого предиката $X$ на $\mathfrak{M}$ истинно выражение

$$Z(x_1, \ldots, x_m, X_1, \ldots, X_{n-1}, X),$$

а потому на $\mathfrak{M}'$ истинно

$$Z(x_1, \ldots, x_m, X_1^0, \ldots, X_{n-1}^0, X^0).$$

Если $X$ пробегает всю совокупность предикатов рода $X$ на $\mathfrak{M}$, то $X^0$ пробежит множество всех предикатов фиксированного рода, определенных на $\mathfrak{M}'$. Поэтому на $\mathfrak{M}'$ истинна формула

$$Y(x_1, \ldots, x_m, X_1^0, \ldots, X_{n-1}^0)$$

и, таким образом, отношение $Y$ устойчиво.

Рассмотрим еще последний случай. Пусть при заданных $x_1, \ldots, x_{m-1}, X_1, \ldots, X_n$ на $\mathfrak{M}$ истинна формула

$$Y(x_1, \ldots, x_{m-1}, X_1, \ldots, X_n) = (\exists x)\,Z(x_1, \ldots, x_{m-1}, x, X_1, \ldots, X_n).$$

Это значит, что для некоторого $x \in \mathfrak{M}$ будет истинным выражение

$$Z(x_1, \ldots, x_{m-1}, x, X_1, \ldots, X_n).$$

Так как род $x$ не входит в В, то $x$ принадлежит любой В-подмодели $\mathfrak{M}'$.

о $Z$ устойчиво, поэтому

$$Z(x_1, \ldots, x_{m-1}, x, X_1^0, \ldots, X_n^0) = И,$$

е. на $\mathfrak{M}'$ истинно выражение

$$Y(x_1, \ldots, x_{m-1}, X_1^0, \ldots, X_n^0),$$

о и требовалось доказать. Пропущенные 2-й и 3-й случаи рассматривают- аналогично.

Из сделанных замечаний доказываемая теорема ытекает непосред- венно. Действительно, пусть аксиома $\mathfrak{A}$ имеет вид (1). Формула $\mathfrak{B}$, как имеющая кванторов, устойчива. По условию, среди присоединяемых анторов $(Q_m \mathfrak{a}_m), \ldots, (Q_1, \mathfrak{a}_1)$ кванторы вида $(\exists x)$, где род $x$ принадле- ит В, отсутствуют. Поэтому аксиома $\mathfrak{A}$ является *устойчивой* формулой, о равносильно утверждению теоремы.

3.2. Внутренняя локальная теорема. Рассмотрим произволь- ый класс $K$ моделей с основными множествами $M_\alpha (\alpha \in \mathrm{A})$ и основными едикатами $P_\gamma (\gamma \in \Gamma)$. Так же как и при определении проективных под- лассов, вводим в рассмотрение дополнительные множества предметов $_\beta (\beta \in \mathrm{B})$ и определенные на $M_\alpha$, $N_\beta$ предикаты $Q_\delta (\delta \in \Delta)$, вообще сме- анного типа, т. е. часть аргументов их будет пробегать некоторые из ножеств $M_\alpha$, а часть аргументов будет пробегать множества $N_\beta$. Пусть $_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ — еще одна система вспомогательных предикатных переменных, торые будут обозначать некоторые предикаты, определенные на мно- ествах $M_\alpha (\alpha \in \mathrm{A})$.

Рассмотрим системы аксиом $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{R}_\lambda$, $\mathfrak{S}$ следующего вида:

1. $\mathfrak{K}$ — система аксиом УИП с основными множествами $M_\alpha$, $_\beta (\alpha \in \mathrm{A}, \beta \in \mathrm{B})$ и основными предикатами $P_\gamma$, $Q_\delta (\gamma \in \Gamma, \delta \in \Delta)$. Кванторы элементам множеств $M_\alpha$ — универсальные, кванторы по элементам $N_\beta$ огут быть обоих рядов.

2. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ система $\mathfrak{R}_\lambda$ состоит из аксиом УИП с основ- ыми множествами $M_\alpha (\alpha \in \mathrm{A})$ и основными предикатами $P_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ и $R_\lambda$. се кванторы универсальные.

3. $\mathfrak{S}$ — система аксиом 2-й ступени с основными множествами $M_\alpha$, $N_\beta$. вободных предметных переменных (как и выше) в $\mathfrak{S}$ нет; свободные редикатные переменные принадлежат системам $\{P_\gamma\}$, $\{Q_\delta\}$, все связанные редикатные переменные принадлежат системе $\{R_\lambda\}$. Кванторы по пере- енным, относящимся к множествам $M_\alpha$, предполагаются универсальны- и, остальные кванторы — произвольные.

Кванторы вида $(R_\lambda)$, $(\exists R_\lambda)$ в аксиомах из $\mathfrak{S}$ предполагаются *специа- изированными* — относящимися к совокупности всех предикатов рода $R_\lambda$, пределенных на $\{M_\alpha\}$ и удовлетворяющих системе аксиом $\mathfrak{R}_\lambda$.

В аксиомах всех трех видов могут содержаться и знаки равенства, о связывающие лишь предметные символы. Множества основных преди- атных символов и аксиом в каждой группе могут быть бесконечными.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ объединение систем аксиом $\mathfrak{K}$, $\langle \{\mathfrak{R}_\lambda\}, \mathfrak{S} \rangle$ и усло- имся говорить, что модель $\mathfrak{M}$ с основными множествами $M_\alpha (\alpha \in \mathrm{A})$ и сновными предикатами $P_\gamma (\gamma \in \Gamma)$, удовлетворяет системе $\mathfrak{L}$, если суще- твуют такие дополнительные множества $N_\beta (\beta \in \mathrm{B})$ и на системе $M_\alpha\} \cup \{N_\beta\}$ так возможно определить дополнительные предикаты $Q_\delta (\delta \in \Delta)$,

чтобы на получившейся расширенной и обогащенной модели $\langle\{M_\alpha\}, \{N_\beta\}, \{P_\gamma\}, Q_\delta\}\rangle$ выполнялись все аксиомы из $\mathfrak{L}$.

Класс всех моделей $L$, удовлетворяющих какой-либо фиксированной системе аксиом $\mathfrak{L}$ указанного вида, будем называть *квазиуниверсальным*, поскольку во всех аксиомах из $\mathfrak{L}$ кванторы по элементам $\mathfrak{M}$ являются универсальными.

Аналогично, подкласс $L$ некоторого класса моделей $K$ будет называться *квазиуниверсальным подклассом в* $K$, если $L$ есть пересечение $K$ с подходящим квазиуниверсальным классом $L_0$, т. е. если $L$ состоит из всех тех $K$-моделей, которые дополнительно удовлетворяют некоторой квазиуниверсальной системе аксиом.

Чтобы получить более ясное представление о квазиуниверсальных классах, рассмотрим несколько примеров.

Докажем, что *каждый класс неодноэлементных моделей, допускающий аксиоматизацию посредством аксиом сколемского вида*

$$(x_1)\ldots(x_m)(\exists y_1)\ldots(\exists y_n)\,\mathfrak{B}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n), \tag{2}$$

*является квазиуниверсальным.*

Именно, покажем, что каждая аксиома (2) равносильна следующей паре квазиуниверсальных аксиом 2-й ступени:

$$(x_1)\ldots(x_m)(y_1)\ldots(y_n)(\mathfrak{B}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)\to R(x_1,\ldots,x_n)), \tag{3}$$

$$(R)(x_1)\ldots(x_m)\,R(x_1,\ldots,x_m), \tag{4}$$

где квантор $(R)$, как указывалось, — специализированный, означающий: «*для всех* $R$, *удовлетворяющих аксиоме* (3)».

В самом деле, если аксиома (2) истинна на некоторой модели $\mathfrak{M}$ и предикат $R$ на $\mathfrak{M}$ удовлетворяет аксиоме (3), то аксиома

$$(x_1)\ldots(x_m)\,R(x_1,\ldots,x_m)$$

на $\mathfrak{M}$, очевидно, истинна. Пусть аксиома (2) ложна. Тогда в $\mathfrak{M}$ существуют элементы $x'_1,\ldots,x'_m$, для которых $\mathfrak{B}(x'_1,\ldots,x'_m,y_1,\ldots,y_n)$ ложно при всех $y_1,\ldots,y_n$ из $\mathfrak{M}$. Берем предикат $R(x_1,\ldots,x_m)$, истинный в точке $x'_1,\ldots,x'_m$ и ложный в остальных точках. Он удовлетворяет аксиоме (3) и не удовлетворяет условию $(x_1)\ldots(x_m)\,R(x_1,\ldots,x_m)$, что и требовалось показать.

В качестве второго примера рассмотрим какой-либо (одноосновной) класс алгебр $K$ с основными операциями $f_i(x_1,\ldots,x_{n_i})$ $(i=1,\ldots,s)$. Добавляем аксиомы:

$$xRx\,\&\,(xRy\to yRx)\,\&\,(xRy\,\&\,yRz\to xRz), \tag{5}$$

$$x_1Ry_1\,\&\ldots\&\,x_{n_i}Ry_{n_i}\,\&\,u=f_i(x_1,\ldots,x_{n_i})\,\&\,v=f_i(y_1,\ldots,y_{n_i})\to uRv, \tag{6}$$

$$(R)\,(x)\,(y)\,(u)\,(v)\,(x\bar{R}y\to(uRv\to u=v)), \tag{7}$$

из которых аксиомы (5), (6) означают, что $R$ есть отношение конгруэнтности, а аксиома (7) утверждает, что каждая неединичная конгруэнтность является нулевой, совпадающей с отношением равенства. Таким образом, аксиомы (5), (6), (7) равносильны утверждению, что алгебра (гомоморфно) простая, и, следовательно, *подкласс* (*гомоморфно*) *простых алгебр в каждом классе алгебр* $K$ *является квазиуниверсальным.*

Аналогичным образом, рассматривая вместо (5), (6), (7) аксиомы

$$R(x_1) \& \ldots \& R(x_{n_i}) \& u = f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \to R(u),$$

$$(R)(x)(y)(z)(R(x) \& R(y) \& x \neq y \to R(z)),$$

приходим к выводу, что *совокупность алгебр. не имеющих неодноэлементных истинных подалгебр, является квазиуниверсальным подклассом класса алгебр.*

В частности, отсюда следует, что квазиуниверсальными будут подкласс всех простых полей и подкласс всех конечных групп простых порядков. Ни тот, ни другой подклассы не будут проективными, так как для любого натурального $n$ и тот и другой содержат модели, число элементов которых больше $n$, и в то же время оба класса не содержат несчетных моделей и потому не удовлетворяют теореме расширения для проективных классов (п. 2.3).

Поскольку простые абелевы группы образуют непроективный класс, то не будет проективным и класс всех простых групп.

Отсюда видно, что квазиуниверсальные подклассы аксиоматизируемых классов моделей глубоко отличаются от аксиоматизируемых и проективных. Квазиуниверсальный подкласс может состоять даже из одной бесконечной модели, как, например, класс простых полей нулевой характеристики. Тем не менее, имеет место следующая основная

ТЕОРЕМА 6 (внутренняя локальная теорема). *Если модель $\mathfrak{M}$ имеет локальную систему подмоделей, принадлежащих квазиуниверсальному классу $L$, то $\mathfrak{M}$ также принадлежит $L$. В частности, объединение возрастающей цепочки моделей квазиуниверсального класса $L$ есть модель того же класса.*

Доказательство будет проведено методом «опредмечивания» предикатов, состоящим в том, что предикаты различных ступеней и типов начинают рассматриваться как элементы новых дополнительных основных множеств, после чего аксиомы высших ступеней переписываются в виде многоосновных аксиом УИП.

Итак, пусть $\mathfrak{M}$ — модель с основными множествами $M_\alpha$ $(\alpha \in A)$ и основными предикатами $P_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$, обладающая локальной системой подмоделей $\mathfrak{M}_\sigma$ $(\sigma \in \Sigma)$, удовлетворяющих квазиуниверсальной системе аксиом $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{K}, \{\mathfrak{R}_\lambda\}, \mathfrak{S}\}$ описанного выше строения. Каждому предикату $R_\lambda^{(\mu)}$, определенному на $\{M_\alpha\}$ и удовлетворяющему на $\mathfrak{M}$ требованиям $\mathfrak{R}_\lambda$, сопоставляем новый символ $r_\lambda^{(\mu)}$ и совокупность всех $r_\lambda^{(\mu)}$ обозначаем через $U_\lambda$. На множествах $\{M_\alpha\}$, $\{U_\lambda\}$ определяем новые предикаты $E_\lambda$ следующим образом: если

$$R_\lambda = R_\lambda(x_1, \ldots, x_p) \quad (x_i \in M_{\alpha_i}),$$

то

$$E_\lambda = E_\lambda(r_\lambda, x_1, \ldots, x_p) \quad (r_\lambda \in U_\lambda, \quad x_i \in M_{\alpha_i})$$

и, по определению, считаем

$$E_\lambda(r_\lambda, x_1, \ldots, x_p) = R_\lambda(x_1, \ldots, x_p) \quad (x_i \in M_{\alpha_i}, \quad p = p(\lambda)). \tag{8}$$

В результате из $\mathfrak{M}$ возникает модель

$$\mathfrak{M}^* = \langle \{M_\alpha\}, \{U_\lambda\}, \{P_\gamma\}, \{E_\lambda\} \rangle$$

с большим числом основных множеств и предикатов. Обозначим через $\mathfrak{R}_\lambda^*$ систему аксиом, получающихся из аксиом $\mathfrak{R}_\lambda$ заменой в них выражений $R_\lambda(x_1, \ldots, x_p)$ выражениями $E_\lambda(r_\lambda, x_1, \ldots, x_p)$. Соответственно через $\mathfrak{S}^*$ обозначим систему аксиом, получающихся из аксиом $\mathfrak{S}$ указанной заменой $R_\lambda(x_1, \ldots, x_p)$ на $E_\lambda(r_\lambda, x_1 \ldots, x_p)$ и заменой кванторов $(R_\lambda)$, $(\exists R_\lambda)$ кванторами $(r_\lambda)$ и $(\exists r_\lambda)$. Аксиомы $\mathfrak{R}_\lambda^*$, $\mathfrak{S}^*$ будут рассматриваться как аксиомы УИП с основными множествами $\{M_\alpha\}$, $\{U_\lambda\}$, основными предикатами $P_\gamma$, $E_\lambda$ и специализированными кванторами, причем во всех аксиомах $\mathfrak{R}_\lambda^*$ предметное переменное $r_\lambda$ предполагается связанным начальным квантором всеобщности, относящимся ко всей аксиоме.

Из построения $\mathfrak{M}^*$ и формулы (8) видно, что на $\mathfrak{M}^*$ все аксиомы системы $\mathfrak{R}_\lambda^*$ заведомо истинны. Более того, если удастся еще построить множества $N_\beta\,(\beta \in B)$ и на системе $\{M_\alpha, N_\beta\}$ определить предикаты $Q_\delta$ так, чтобы на $\{M_\alpha, U_\lambda, N_\beta\}$ выполнялась система $\mathfrak{L}^* = \{\mathfrak{K}, \{\mathfrak{R}_\lambda^*\}, \mathfrak{S}^*\}$, то тогда на $\mathfrak{M}$ заведомо будет выполняться система $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ будет принадлежать классу $K$.

Обозначим через $O(\mathfrak{M}^*)$ описание модели $\mathfrak{M}^*$ и рассмотрим систему аксиом

$$\mathfrak{T}^* = \{O(\mathfrak{M}^*), \mathfrak{K}, \{\mathfrak{R}_\lambda^*\}, \mathfrak{S}^*\}.$$

Покажем, что эта система совместна. Согласно локальной теореме УИП, для этого достаточно доказать совместность каждой конечной части $\mathfrak{T}_f^*$ системы $\mathfrak{T}^*$. Система $\mathfrak{T}_f^*$ содержит лишь конечную систему $T$ членов из $O(\mathfrak{M}^*)$ и потому в записи формул, принадлежащих $T$, участвуют лишь конечная совокупность элементов $a_1, \ldots, a_m$ из $\bigcup M_\alpha$ и конечная совокупность элементов $r_{\lambda_1}^1, \ldots, r_{\lambda_n}^n$ из $\bigcup U_\lambda$. По условию, $a_1, \ldots, a_m$ принадлежат некоторой подмодели $\mathfrak{M}_\sigma$ из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющей аксиомам $\mathfrak{L}$.

Составляем указанным выше способом из $\mathfrak{M}_\sigma$ модель $\mathfrak{M}_\sigma^*$ и пусть $O(\mathfrak{M}_\sigma^*)$ — описание $\mathfrak{M}_\sigma^*$. По условию, предикаты $R_{\lambda_1}^1, \ldots, R_{\lambda_n}^n$, отвечающие элементам $r_{\lambda_1}^1, \ldots, r_{\lambda_n}^n$, удовлетворяют на $\mathfrak{M}$ системам аксиом $\mathfrak{R}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{R}_{\lambda_n}$. Обозначим через $R_{\lambda_i}^{i0}$ предикат, определенный на $\mathfrak{M}_\sigma$ и совпадающий на $\mathfrak{M}$ с предикатом $R_{\lambda_i}^i$. Поскольку аксиомы $\mathfrak{R}_{\lambda_i}$ универсальные, то предикат $R_{\lambda_i}^{i0}$ удовлетворяет аксиомам $\mathfrak{R}_{\lambda_i}$ на $\mathfrak{M}_\sigma$. Поэтому в множестве $U_{\lambda_i}^\sigma$, построенном для $\mathfrak{M}_\sigma$, найдется элемент $r_{\lambda_i}^{i0}$ такой, что

$$E_{\lambda_i}(r_{\lambda_i}^{i0}, x_1, \ldots, x_p) = E_{\lambda_i}(r_{\lambda_i}^i, x_1, \ldots, x_p) \quad (x_1, \ldots, x_p \in \mathfrak{M}_\sigma). \tag{9}$$

Обозначим через $T^*$ совокупность формул, которые получатся, если в формулах из $T$ символы $r_{\lambda_1}^1, \ldots, r_{\lambda_n}^n$ заменить соответственно символами $r_{\lambda_1}^{10}, \ldots, r_{\lambda_n}^{n0}$. Убедимся, что $T^*$ входит в $O(\mathfrak{M}_\sigma^*)$, т. е. что каждая формула из $T$ при указанной замене переходит в формулу, истинную на $\mathfrak{M}_\sigma^*$. В самом деле, формулы из $T$ имеют вид:

$$P_\gamma^\varepsilon(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}), \quad a_i = a_j, \quad a_i \neq a_j,$$

$$E_{\lambda_i}^\varepsilon(r_{\lambda_i}^{(i)}, a_{k_1}, \ldots, a_{k_p}) \quad (\varepsilon = \pm 1,\ P^1 = P,\ P^{-1} = \overline{P}). \tag{10}$$

Так как, по условию, знак равенства в аксиомах $\mathfrak{L}$ предикатных переменных не связывает, то и в описания $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{M}_\sigma^*$ мы не включаем члены вида $r_\lambda = r_\mu$, $r_\lambda \neq r_\mu$ и соответственно $r_\lambda^0 = r_\mu^0$, $r_\lambda^0 \neq r_\mu^0$. Члены же $T$, имеющие вид (10), при замене $r_{\lambda_i}^i$ на $r_{\lambda_i}^{i0}$ остаются истинными в силу (9).

Итак, система $T$ является частью системы

$$\mathfrak{T}_g^* = \{T, \mathfrak{K}, \{\mathfrak{R}_\lambda^*\}, \mathfrak{S}^*\},$$

а система $\mathfrak{T}_g^*$ выполняется на $\mathfrak{M}_\sigma^*$, если для символов $r_{\lambda_1}^1, \ldots, r_{\lambda_n}^n$ взять значения $r_{\lambda_1}^{10}, \ldots, r_{\lambda_n}^{n0}$ из $\mathfrak{M}_\sigma^*$. Следовательно, каждая система $\mathfrak{T}_f^*$ совместна и потому вся система $\mathfrak{T}^*$ имеет некоторую модель $\mathfrak{N}^*$, основные множества которой пусть будут $M'_\alpha$, $N_\beta$, $U'_\lambda$, $\alpha \in \mathrm{A}$, $\beta \in \mathrm{B}$, $\lambda \in \Lambda$. Так как $\mathfrak{T}^*$ содержит описание модели $\mathfrak{M}^*$, то $M'_\alpha \supseteq M_\alpha$, $U'_\lambda \supseteq U_\lambda$ и $\mathfrak{M}^*$ есть подмодель $\{M'_\alpha, U'_\lambda\}$-проекции модели $\mathfrak{N}^*$.

Во всех аксиомах системы $\mathfrak{L}^*$ кванторы, относящиеся к элементам $\{M'_\alpha\}$, универсальные. Поэтому подмодель $\mathfrak{N}_1^*$ модели $\mathfrak{N}^*$, имеющая основные множества $M_\alpha$, $N_\beta$, $U'_\lambda$, также удовлетворяет системе $\mathfrak{L}^*$.

На каждом множестве $U'_\lambda$ вводим отношение эквивалентности $\theta_\lambda$, полагая $r_\lambda \theta r'_\lambda = И$, если

$$E_\lambda(r_\lambda, x_1, \ldots, x_p) = E_\lambda(r'_\lambda, x_1, \ldots, x_p) \quad (r_\lambda, r'_\lambda \in U'_\lambda)$$

для всех $x_1, \ldots, x_p$ из $\bigcup M_\alpha$. В аксиомах $\mathfrak{T}^*$ элементы $U'_\lambda$ знаком равенства не связаны и в качестве аргументов они встречаются только у предикатного символа $E_\lambda$. Поэтому $\theta_\lambda$ можно рассматривать как *релятивизированное равенство* в смысле предыдущего пункта и из модели $\mathfrak{N}_1^*$ получить модель $\mathfrak{N}_1^*/\theta$ с основными множествами $M_\alpha$, $N_\beta$, $U'_\lambda/\theta_\lambda$, на которой все еще выполняется система аксиом $\mathfrak{T}^*$.

Замечаем теперь, что для каждого фиксированного $r'_\lambda \in U'_\lambda$ выражение $E_\lambda(r'_\lambda, x_1, \ldots, x_p)$ является предикатом, определенным на $\mathfrak{M}$ и, в силу аксиом $\mathfrak{R}_\lambda^*$, удовлетворяющим аксиомам $\mathfrak{R}_\lambda$ на $\mathfrak{M}$. Но все такие предикаты уже были представлены элементами $U_\lambda$ при конструировании этого множества. Следовательно, для каждого $r'_\lambda \in U'_\lambda$ найдется эквивалентный ему элемент $r_\lambda \in U_\lambda$ и потому модель $\mathfrak{N}_1^*/\theta$, в силу п. 3.1, будет изоморфна подмодели $\mathfrak{N}_0^*$ модели $\mathfrak{N}_1^*$, имеющей основные множества $M_\alpha$, $N_\beta$, $U_\lambda$. Таким образом, на $\mathfrak{N}_0^*$ выполняются аксиомы $\mathfrak{L}^*$. Модель $\mathfrak{M}_0^*$ получается из $\mathfrak{N}_0^*$ отбрасыванием предикатов $Q_\delta$ и множеств $N_\beta$, т. е. $\mathfrak{N}_0^*$ является искомой моделью, и теорема доказана.

Лишь по форме является более общим, чем теорема 6, ее

Следствие. *Если модель $\mathfrak{M}$ какого-нибудь класса $K$ обладает локальной системой подмоделей, принадлежащих квазиуниверсальному подклассу $L$ класса $K$, то $\mathfrak{M}$ принадлежит $L$.*

Действительно, согласно определению, $L = K \cap L_0$, где $L_0$ — некоторый квазиуниверсальный класс. Модель $\mathfrak{M}$ обладает локальной системой $L$, а потому и $L_0$-подмоделей. Из теоремы 6 следует, что $\mathfrak{M} \in L_0$. По условию, $\mathfrak{M} \in K$, а потому $\mathfrak{M} \in L$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 7. *Если квазиуниверсальный класс моделей $L$ описывается системой аксиом $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{K}, \{\mathfrak{R}_\lambda\}, \mathfrak{S}\}$, в которой аксиомы $\mathfrak{R}_\lambda$ отсутствуют или приводятся к всегда истинным формулам, то $L$ является универсально аксиоматизируемым.*

Согласно теореме 5, каждая подмодель $L$-модели есть $L$-модель. Поэтому чтобы применить теорему 1, остается доказать лишь внешнюю локальную теорему для $L$: *если каждое финитное частичное описание произвольной*

*конечной подмодели некоторой модели $\mathfrak{M}$ реализуемо внутри подходящей $L$-модели, то $\mathfrak{M}$ есть $L$-модель.*

Для доказательства этого утверждения обозначим через $\{\mathfrak{M}_\sigma\}$ систему тех $L$-моделей, внутри которых могут быть реализованы финитные частичные описания всевозможных конечных подмоделей модели $\mathfrak{M}$. Далее дословно повторяем доказательство теоремы 6. Отличие состоит лишь в том, что теперь $\mathfrak{M}_\sigma$ вообще не являются подмоделями модели $\mathfrak{M}$. Но условие, что $\mathfrak{M}_\sigma$ есть подмодель модели $\mathfrak{M}$, было использовано в доказательстве теоремы 6 лишь для того, чтобы найти в $U^\sigma_{\lambda_i}$ предикаты $R^{i0}_{\lambda_i}$, связывающие элементы $a_1, \ldots, a_m$ таким же образом, каким они связаны предикатами $R^i_{\lambda_i}$ в $\mathfrak{M}$, и в то же время связанные в $\mathfrak{M}_\sigma$ условиями $\mathfrak{R}_{\lambda_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Если последних условий нет, то в качестве $R^{i0}_{\lambda_i}$ можно взять произвольные предикаты на $\mathfrak{M}_\sigma$, имеющие на совокупности $\{a_1, \ldots, a_m\}$ значения, совпадающие со значениями предикатов $R^{\lambda_i}{}_i$ на указанной совокупности. Тем самым внешнюю локальную теорему для $L$, а вместе с нею и теорему 7 можно считать доказанными.

Главный частный случай теоремы 7, когда система $\mathfrak{L}$ не содержит аксиом $\mathfrak{K}$ и аксиомы $\mathfrak{S}$ не содержат кванторов по элементам дополнительных множеств $N_\beta$, был известен ранее [см. (7), (8)]. В сущности, теорема 7 утверждает возможность элиминации из системы $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{S}$ связанных предикатов $R_i$, вспомогательных предикатов $Q_\delta$ и элементов $N_\beta$ в смысле Аккермана (1).

3.3. П р и л о ж е н и я. Понятие разрешимости группы сильно ветвится при переходе от конечных групп к бесконечным группам и вместо единого класса конечных разрешимых групп естественно возникают классы $RN$-, $RI$-, $Z$-групп, а также $\overline{RN}$-, $\overline{RI}$-, $\overline{Z}$-, $\overline{N}$-групп и некоторые другие классы [см. (9), (4), (11)]. Для всех указанных классов групп известны локальные теоремы. Для «нижних» классов $RN$-, $RI$-, $Z$-групп, а также для упорядочиваемых групп эти теоремы были впервые получены автором (9), (10) с помощью основной локальной теоремы УИП. Доказательства локальных теорем для $\overline{RI}$- и $\overline{Z}$-групп были получены автором, а для $\widetilde{N}$-групп — Бэром (2), но уже с помощью некоторых специфически групповых методов. Мы теперь покажем, что локальные теоремы для всех «верхних» классов $\overline{RN}$-, $\overline{RI}$-, $\overline{Z}$-, $\hat{N}$-групп являются частными случаями доказанной выше внутренней локальной теоремы, а известные *внутренние* локальные теоремы для нижних классов $RN$-, $RI$-, $Z$-групп могут быть заменены более сильными *внешними* локальными теоремами.

Упорядоченная по включению система $\{M_\alpha\}$ подмножеств множества $M$ называется *полной*, если она содержит пересечения и объединения любой совокупности своих членов и содержит $M$. Для каждой полной упорядоченной системы $S = \{M_\alpha\}$ подмножеств $M$ вводим на $M$ бинарный предикат $R_s = R$, полагая $xRy = И$, если среди множеств системы $M$ существует такое, которое содержит $x$ и не содержит $y$. Ясно, что $R$ удовлетворяет аксиомам:

$$\alpha)\ x\overline{R}x,$$
$$\beta)\ xRy \,\&\, yRz \rightarrow xRz,$$
$$\gamma)\ xRz \,\&\, y\overline{R}z \rightarrow xRy.$$

Обозначая через $Ry$ совокупность всех тех $x \in M$, для которых $xRy = И$, легко убеждаемся в том, что

$$Ry = \bigcup_{y \in M_\alpha} M_\alpha, \quad M_\alpha = \bigcap_{y \overline{\in} M_\alpha} Ry \quad (M_\alpha \neq M),$$

т. е. что $Ry \in S$ и что каждое $M_\alpha \neq M$ представимо в виде пересечения подходящей системы множеств $Ry$.

Обратно, пусть на $M$ задан какой-либо бинарный предикат $R$, удовлетворяющий требованиям $\alpha$) — $\gamma$). Система множеств вида $Ry$ будет упорядоченной по включению. Пополним эту систему множеством $M$ и объединениями и пересечениями любых совокупностей ее членов и обозначим пополненную систему символом $S$. Тогда из $\alpha$) — $\gamma$) легко следует, что $R_S = R$ и, таким образом, *полные упорядоченные системы подмножеств и предикаты со свойствами* $\alpha$) — $\gamma$) *находятся во взаимно однозначном соответствии.*

Заметим, что система $S_1$ есть уплотнение системы $S$, т. е. $S_1 \supseteq S$, тогда и только тогда, когда соответственные предикаты $R_1$, $R$ связаны аксиомой $xSy \to xS_1y$.

Если множество $G$ есть группа и мы хотим рассматривать полные упорядоченные системы подгрупп, содержащие единичную подгруппу, то к условиям $\alpha$) — $\gamma$) добавляем аксиомы:

$\delta$) $xRz \,\&\, yRz \to xy^{-1}Rz$,

$\varepsilon$) $x \neq xx^{-1} \to xx^{-1}Rx$.

Аксиома

$\varkappa$) $xRy \to y^{-1}xyRy$,

очевидно, равносильна требованию, чтобы в любой паре соседних подгрупп системы меньшая подгруппа была нормальным делителем в большей (*нормальность* системы).

Аксиома

$\lambda$) $x \neq xx^{-1} \,\&\, x\overline{R}y \,\&\, y\overline{R}x \to xyx^{-1}y^{-1}Rx$

равносильна требованию, чтобы фактор-группа любых двух соседних подгрупп системы была абелевой; аксиома

$\mu$) $xRy \to z^{-1}xzRy$

равносильна требованию, чтобы все подгруппы системы были инвариантны в $G$ (*инвариантность* системы), а аксиома

$\nu$) $xx^{-1} \neq x \to xyx^{-1}y^{-1}Rx$

равносильна требованию, чтобы подгруппы системы были нормальными делителями в $G$ и чтобы фактор-группа $G_\beta / G_\alpha$ любых двух соседних подгрупп системы лежала в центра $G / G_\alpha$ (*центральность* системы).

До сих пор мы имели дело с предикатами, а не с операциями. Поэтому дальше мы будем предполагать все аксиомы $\alpha$) — $\nu$) записанными в предикатной форме. Например, если $P(x, y, z)$ и $Q(x, y)$ означают $xy = z$, $y = x^{-1}$, то аксиома $\varepsilon$) в предикатной записи будет иметь вид:

$$Q(x, y) \,\&\, P(x, y, z) \,\&\, x \neq z \to zRx.$$

Для дальнейшего важно, что как аксиомы $\alpha$) — $\nu$), так и их предикатные записи содержат только кванторы всеобщности.

Свойство группы $G$ быть $RN$-, $RI$-, $Z$-группой может быть выражено

соответственно аксиомами:

$$(\exists R)(x)(y)(z)((\alpha)\,\&\,(\beta)\,\&\,(\gamma)\,\&\,(\delta)\,\&\,(\varepsilon)\,\&\,(\lambda)), \qquad (RN)$$

$$(\exists R)(x)(y)(z)((\alpha)\,\&\,(\beta)\,\&\,(\gamma)\,\&\,(\delta)\,\&\,(\varepsilon)\,\&\,(\lambda)\,\&\,(\mu)), \qquad (RI)$$

$$(\exists R)(x)(y)(z)((\alpha)\,\&\,(\beta)\,\&\,(\gamma)\,\&\,(\delta)\,\&\,(\varepsilon)\,\&\,(\nu)), \qquad (Z)$$

где квантор $(\exists R)$ не специализирован, а $(\alpha), \ldots, (\nu)$ означают выражения из $\alpha), \ldots, \nu)$.

Вид аксиом $(RN)$, $(RI)$, $(Z)$ удовлетворяет условиям теоремы 7 и потому имеет место

ТЕОРЕМА 8. *$RN$-, $RI$- и $Z$-группы образуют универсально аксиоматизируемые подклассы класса групп и потому для них справедлива внешняя локальная теорема.*

Переходя к рассмотрению $\overline{RN}$-, $\overline{RI}$-, $\overline{Z}$-, $\widetilde{N}$-групп, обозначим через $\mathfrak{S}_1(R)$, $\mathfrak{S}_2(R)$, $\mathfrak{S}_3(R)$ матрицы (бескванторные части) выражений $(RN)$, $(RI)$, $(Z)$. Положим еще

$$\mathfrak{S}(R) = (\alpha)\,\&\,(\beta)\,\&\,(\gamma)\,\&\,(\delta)\,\&\,(\varepsilon)\,\&\,(\varkappa),$$

$$\mathfrak{T}(R) = (\alpha)\,\&\,(\beta)\,\&\,(\gamma)\,\&\,(\delta)\,\&\,(\varepsilon)\,\&\,(\lambda).$$

Тогда свойство группы быть $\overline{RN}$-, $\overline{RI}$- или $\overline{Z}$-группой может быть выражено соответственно аксиомами:

$$(\forall_{\mathfrak{S}} R)(\exists_{\mathfrak{S}_1} R_1)(u)(v)(uRv \to uR_1v),$$

$$(\forall_{\mathfrak{T}} R)(\exists_{\mathfrak{S}_2} R_1)(u)(v)(uRv \to uR_1v),$$

$$(\forall_{\mathfrak{T}} R)(\exists_{\mathfrak{S}_3} R_1)(u)(v)(uRv \to uR_1v).$$

Мы видим, что эти аксиомы имеют форму, указанную в определении квазиуниверсальных подклассов. Таким образом, *$\overline{RN}$-, $\overline{RI}$-, $\overline{Z}$-группы образуют квазиуниверсальные подклассы класса групп.* Согласно теореме 6 отсюда вытекает, что для указанных классов групп имеет место внутренняя локальная теорема.

Для записи определения $\widetilde{N}$-группы надо уметь охарактеризовать $R$-предикаты, отвечающие системам вида $1 \subseteq G_1 \subseteq G$, где $G_1$ — какая-нибудь подгруппа группы $G$. Для этого достаточно, очевидно, к аксиомам $\alpha)$ — $\varepsilon)$ добавить условие

$$\pi)\ x \neq xx^{-1}\,\&\,xRy \to y\bar{R}z.$$

Обозначив конъюнкцию формул $\alpha)$ — $\varepsilon)$, $\pi)$ через $\mathfrak{U}$, мы сможем представить определение $\widetilde{N}$-группы в виде аксиомы

$$(\forall_{\mathfrak{U}} R)(\exists_{\mathfrak{S}_1} R_1)(u)(v)(uRv \to uR_1v).$$

Эта аксиома снова имеет вид, указанный в определении квазиуниверсальных подклассов. Следовательно, *$\widetilde{N}$-группы образуют квазиуниверсальный подкласс в классе групп и потому для них имеет место внутренняя локальная теорема.*

Аналогичные утверждения имеют силу для класса групп, допускающих линейное упорядочение (*упорядочиваемые* группы), и для класса групп, любое частичное упорядочение которых может быть продолжено до линейного упорядочения (*свободно упорядочиваемые* группы) [ср. ([10])].

Пусть $\mathfrak{A}(R)$ есть

$$xRx\,\&\,(xRy\,\&\,yRz \to xRz)\,\&\,(xRy\,\&\,yRx \to x = y)\,\&\,(xRy \to uxvRuyv),$$

а $\mathfrak{B}(R)$ есть конъюнкция $\mathfrak{A}(R)$ и формулы

$$xRy \vee yRx.$$

Тогда свойство группы быть упорядочиваемой можно выразить аксиомой

$$(\exists R)(x)(y)(z)(u)(v)\mathfrak{B}(R),$$

а свойство быть свободно упорядочиваемой можно представить в форме

$$(\forall_{\mathfrak{A}} R)(\exists_{\mathfrak{B}} R_1)(x)(y)(xRy \to xR_1y).$$

Как и выше, отсюда следует, что *упорядочиваемые группы образуют универсально аксиоматизируемый подкласс класса групп, а свободно упорядочиваемые группы образуют квазиуниверсальный подкласс.* Первое утверждение было доказано Лосем ([6]), указавшим в явной форме универсальные аксиомы, характеризующие упорядочиваемые группы. Из второго утверждения вытекает

Следствие. *Для подкласса свободно упорядочиваемых групп справедлива внутренняя локальная теорема.*

Это следствие является, по-видимому, новым. Частный случай его был указан Лосем ([7]), показавшим, что объединение возрастающей цепочки вложенных друг в друга свободно упорядочиваемых групп есть свободно упорядочиваемая группа.

Изложенное указывает на родство, существующее между классами $RN$, $RI$ и т. д. групп и группами, упорядочиваемыми и свободно упорядочиваемыми. Это родство можно было бы еще более подчеркнуть, если вместо предиката $R$ рассматривать его отрицание. Действительно, полагая $P = \overline{R}$, можно аксиомы $\alpha$), $\beta$), $\gamma$) представить в виде

$$xPx, \quad xPy \,\&\, yPz \to xPz, \quad xPy \vee yPx,$$

и предикат $P$ будет определять квазиупорядоченность, а группы типов $RN$, $RI$, $Z$ будут квазиупорядочиваемыми, удовлетворяющими различным дополнительным требованиям, налагаемым на квазипорядок.

Перенося понятия $RN$-, $\overline{RN}$- и т. д. групп на упорядоченные и частично упорядоченные группы, естественно требовать, чтобы участвующие в определениях полные системы подгрупп состояли из выпуклых подгрупп. Предшествующие рассуждения показывают, что получающиеся этим путем классы групп будут снова универсально и, соответственно, квазиуниверсально аксиоматизируемыми. В частности, этим путем из общей внутренней локальной теоремы можно получить ряд новых конкретных локальных теорем для групп [ср. ([11])].

Поступило
27.XI.1958

ЛИТЕРАТУРА

1 Ackermann W., Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik, Math. Ann., 110 (1934), 390—413.

2 Baer R., Nilpotent groups and their generalizations, Trans. Am. Math. Soc., 47 (1940), 393—434.

3 Гильберт Д. и Аккерман В., Основы теоретической логики, Москва, 1947.

4 Курош А. Г. и Черников С. Н., Разрешимые и нильпотентные группы, Успехи матем. наук, 2 : 3 (1947), 18—59.

5 Łoś J., On the extending of models. I, Fund. Math., 42 (1955), 38—54.

[6] Łos J., On the existence of linear order in a group, Bull. de l'Académie Polon. Sci. Cl. III, 2 (1954), 21—23.

[7] Łos J., Quelques remarques, théorèmes et problèmes sur les classes definissables, d'algèbres, Math. Interpr. of Formal Systems, Amsterdam, 1955.

[8] Мальцев А. И., Исследования по математической логике, Матем. сборн., 1(43):3 (1936), 321-335.

[9] Мальцев А. И., Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп, Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1 (1941), 3—9.

[10] Мальцев А. И., О доупорядочении групп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 173—175.

[11] Мальцев А. И., Замечание о частично упорядоченных группах, Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та, 10 (1956), 3—5.

[12] Мальцев А. И., О представлениях моделей, Доклады Ак. наук СССР, 108, № 1 (1956), 27—29.

[13] Мальцев А. И., О классах моделей с операцией порождения, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 5 (1957), 738—741.

[14] Mostowski A., On direct powers of theories, Journ. of Symb. Logic., 17 (1952), 1—31.

[15] Robinson A., Complete theories, Amsterdam, 1956.

[16] Schmidt A., Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen, Math. Ann., 115 (1938), 485—506.

[17] Schmidt A., Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik, Math. Ann., 123 (1951), 187—200.

[18] Tarski A., Contributions to the theory of models. II, Proc. Acad. van Wetensch., 57, № 5 (1954), 582—588.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 337—364

А. В. МАЛЫШЕВ

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ С ЧЕТЫРЬМЯ И БОЛЕЕ ПЕРЕМЕННЫМИ. I

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Исследуется вопрос о представлении целых чисел $m$ целочисленными положительными квадратичными формами $f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_ix_j$ с числом переменных $s \geqslant 4$. Доказана асимптотическая равномерность (и даны остаточные члены) распределения представлений $(x_1, \dots, x_s)$ по поверхности эллипсоида $f(x_1, \dots, x_s) = m$.

## § 1. Основные результаты *

1. Асимптотическое распределение целых точек на эллипсоиде. Пусть

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i,j=1}^{s} a_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

— целочисленная ($a_{ij}$ — целые числа) положительная квадратичная форма. Пусть $m$ — целое положительное число. Рассмотрим эллипсоид $f(x_1, \dots, x_s) = m$. Пусть $\Omega$ — выпуклая область на поверхности эллипсоида т. е. такая область, каждая точка которой удовлетворяет равенству $f(x_1, \dots, x_s) = m$, причем если две точки принадлежат этой области, то и одна из соединяющих их больших эллиптических дуг принадлежит $\Omega$). Эллиптическим (точнее $f$-эллиптическим) телесным углом $\omega$ области $\Omega$ называется обычный $s$-мерный телесный угол области $\Omega'$, получающейся из $\Omega$ с помощью такого линейного преобразования, которое переводит форму $f$ в сумму квадратов $x_1^2 + \dots + x_s^2$ (т. е. просто $(s-1)$-мерная площадь области $\Omega'$, деленная на $m^{\frac{s-1}{2}}$); это определение не зависит от выбора такого линейного преобразования.

Пусть $q$, $g$, $b_1, \dots, b_s$ — целые числа; в работе будут рассматриваться кратные суммы Гаусса — обычные:

$$S(f, q) = \sum_{x_1, \dots, x_s = 0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{f(x_1, \dots, x_s)}{q}} \tag{2}$$

* Предварительный отчет о доказываемых в настоящей работе результатах был опубликован в Докладах Ак. наук СССР [см. ([22])].

и «по модулю $g$»:

$$S_{g;\, b_1, \ldots, b_s}(f, q) = \frac{1}{g^s} \sum_{x_1, \ldots, x_s = 0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{f(gx_1+b_1, \ldots, gx_s+b_s)}{q}} \tag{3}$$

Далее, в работе будут использованы особые (сингулярные) ряды, впервые введенные Харди и Литтлвудом:

$$H(f, m) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s} \sum_{p \,(\mathrm{mod}\, q)}{}' S(pf, q)\, e^{-2\pi i \frac{mp}{q}}, \tag{4}$$

$$H(f, g;\, m) = H(f, g, b_1, \ldots, b_s;\, m) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s} \sum_{p \,(\mathrm{mod}\, q)}{}' S_{g;\, b_1, \ldots, b_s}(pf, q)\, e^{-2\pi i \frac{mp}{q}}, \tag{5}$$

где суммирование $\sum\limits_{p \,(\mathrm{mod}\, q)}{}'$ ведется по приведенной системе вычетов $(\mathrm{mod}\, q)$.

Обозначим через $\rho(f, m;\, g)$ количество решений сравнения

$$f(x_1, \ldots, x_s) \equiv m \,(\mathrm{mod}\, g). \tag{6}$$

Заметим, что $\rho(f, m;\, g)$ можно выразить в конечном виде через $g$, $m$ и инварианты формы $f$.

Основным результатом работы является следующая теорема, обобщающая и уточняющая результат Тартаковского ([1]).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_s)$ — целочисленная положительная квадратичная форма определителя $\Delta$, $s \geqslant 4$, $m$ — целое положительное число, $\Omega$ — выпуклая область эллипсоида $f(x_1, \ldots, x_s) = m$ с $f$-эллиптическим телесным углом $\omega > 0$, $g$, $b_1, \ldots, b_s$ — заданные целые числа, удовлетворяющие сравнению $f(b_1, \ldots, b_s) \equiv m \,(\mathrm{mod}\, g)$. Обозначим через $r(f, \Omega, g;\, m)$ количество целых точек, лежащих в области $\Omega$ и сравнимых с $(b_1, \ldots, b_s)$ по модулю $g$. Тогда при $m \to \infty$*

$$r(f, \Omega, g;\, m) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m^{\frac{s}{2}-1} H(f, g;\, m) + O\left(m^{\frac{s}{2} - 1 - \frac{s-3}{6s+2} + \varepsilon}\right), \tag{7}$$

*где $\omega_0 = \dfrac{2\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ — полный телесный угол $s$-мерного пространства, $H(f, g;\, m)$ — особый ряд* (5); *постоянные, входящие в $O$, зависят только от $\Delta$, $g$ и произвольного $\varepsilon > 0$.*

Заметим, что мы допускаем зависимость $\Omega$ от $m$. Можно получить асимптотическую формулу (7), но без остаточного члена, для произвольной квадрируемой по Жордану области $\Omega$, если считать, что при изменении $m$ область $\Omega$ изменяется подобно.

Данный остаточный член (особенно для больших $s$) может быть, повидимому, значительно усилен. В частности, это можно сделать, пользуясь методом данной статьи, путем замены слабого остаточного члена в формуле (66) (хотя бы для некоторых специальных областей $\Omega$) более точным. Для больших $s$ здесь применим и метод И. М. Виноградова.

Вопросами распределения целых точек на многомерных сферах занимался Райт [см. ([3]), ([4]), ([5])], однако он, как правило, ограничивался лишь доказательством существования целых точек в тех или иных областях.

2. Об особом ряде*. Обычными рассуждениями, применяемыми в теории особых рядов Харди — Литтлвуда [ср. ([1]), ([6])], можно доказать, что если разрешимо сравнение $f(x_1, \ldots, x_s) \equiv m \pmod{8\Delta^2 m}$, то главный член в формуле (7) будет больше остаточного в случаях: 1) $s \leqslant 5$ и 2) $s = 4$ и степени простых делителей $2\Delta$, входящие в $m$, ограничены.

3. Уточнение теоремы Тартаковского. В случае $g = 1$ мы получаем формулу для количества всех целых точек, лежащих в области $\Omega$. С другой стороны, когда $\Omega$ совпадает с эллипсоидом $f(x_1, \ldots, x_s) = m$, мы получаем асимптотическую формулу для количества $r(f, g; m)$ представлений $(x_1, \ldots, x_s)$ числа $m$ формой $f$ при условии

$$(x_1, \ldots, x_s) = (b_1, \ldots, b_s) \pmod{g}.$$

Однако в качестве побочного результата мы из рассуждений § 3 можем получить следующую теорему, уточняющую остаточный член в формуле Тартаковского ([1]).

ТЕОРЕМА 2 **. *В условиях теоремы* 1

$$r(f, g; m) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m^{\frac{s}{2}-1} H(f, g; m) + O\left(m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right), \tag{8}$$

*где постоянные, входящие в $O$, зависят только от $\Delta$, $g$ и $\varepsilon > 0$.*

4. О примитивных точках на эллипсоидах и об одной теореме из арифметики кватернионов. Из теоремы 1 непосредственно выводится следующая теорема о целых примитивных точках (т. е. таких целых точках $(x_1, \ldots, x_s)$, для которых о. н. д. $(x_1, \ldots, x_s) = 1$).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $m = m_1^2 m_2$, где $m_2$ бесквадратно, а $g$ взаимно просто с $m_1$ ***. Пусть $r_0(f, \Omega, g;\ m)$ — количество целых примитивных точек, лежащих в области $\Omega$ и сравнимых с $(b_1, \ldots, b_s)$ по модулю $g$. Тогда при $m \to \infty$ в условиях теоремы* 1

$$r_0(f, \Omega; m) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\rho(f, m, g)} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m^{\frac{s}{2}-1} H_0(f, m) + O\left(m^{\frac{s}{2}-1-\frac{s-3}{6s+2}+\varepsilon}\right), \tag{9}$$

*где*

$$H_0(f, m) = \sum_{d \setminus m_1} \mu(d) H(f, m), \tag{10}$$

*$\mu(d)$ — функция Мебиуса. Если степени простых делителей $2\Delta$, входящие в $m$, ограничены, то*

$$r_0(f, \Omega, g;\ m) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\rho(f, m; g)} r_0(f, m) \left(1 + O\left(m^{-\frac{s-3}{6s+2}+\varepsilon}\right)\right), \tag{11}$$

*где $r_0(f, m)$ — количество примитивных представлений числа $m$ формой $f$.*

Из этой теоремы может быть выведено следующее предложение из арифметики кватернионов, имеющее приложения в теории тернарных квадратичных форм [см., например, ([7]), ([8])].

---

* Особый ряд $H(f, g, m)$ будет вычислен и исследован во второй части работы.

** Для $s = 4$ и $g = 1$ Эйхлер ([21]) уточнил остаточный член в формуле (8) до $O\left(m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$.

*** Это предположение делается лишь ради простоты формулировки.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\Omega$ — *четырехмерная выпуклая коническая область с вершиной в начале координат и телесным углом* $\omega > 0$, $m$ — *положительное нечетное число,* $G_1$ *и* $G_2$ — *примитивные кватернионы норм* $g_1 = N(G_1)$ *и* $g_2 = N(G_2)$, *причем* $g_1 g_2 \setminus m$. *Обозначим через* $\sigma(\omega, G_1, G_2; m)$ *количество примитивных примарных кватернионов* $M$ *нормы* $m$, *лежащих (как четырехмерная точка) в области* $\Omega$ *и делящихся на* $G_1$ *слева и на* $G_2$ *справа. Тогда при* $m \to \infty$

$$\sigma(\omega, G_1, G_2; m) = \frac{\omega}{2\pi^2} \frac{\sigma(m)}{\sigma(g_1)\sigma(g_2)} \left(1 + O\left(m^{-\frac{1}{26}+\varepsilon}\right)\right) =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi^2} \frac{m}{g_1 g_2} \frac{\prod\limits_{p \setminus m}\left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\prod\limits_{p \setminus g_1}\left(1 + \frac{1}{p}\right) \prod\limits_{p \setminus g_2}\left(1 + \frac{1}{p}\right)} \left(1 + O\left(m^{-\frac{1}{26}+\varepsilon}\right)\right), \qquad (12)$$

*где* $\sigma(u)$ — *количество примитивных примарных кватернионов нормы* $u$; *произведения берутся по всем простым числам, подчиненным указанным условиям; постоянные, входящие в* $O$, *зависят только от* $g_1$, $g_2$ *и* $\varepsilon > 0$.

Действительно, делимость $G_1 \setminus M$ и $M / G_2$ означает некоторое конгруэнциальное условие $(\bmod\, g_1 g_2)$. Поэтому из теоремы 3 легко следует, что

$$\sigma(\omega, G_1, G_2; m) = \frac{\omega}{2\pi^2} t(m, g_1, g_2) \left(1 + O\left(m^{-\frac{1}{26}+\varepsilon}\right)\right),$$

где $t(m, g_1, g_2)$ не зависит от $G_1$ и $G_2$. Полагая $\omega = 2\pi^2$ и суммируя по всем $G_1$ и $G_2$ норм $g_1$ и $g_2$, получим, что

$$\sigma(m) = t(m, g_1, g_2)\,\sigma(g_1)\,\sigma(g_2) \left(1 + O\left(m^{-\frac{1}{26}+\varepsilon}\right)\right).$$

Отсюда уже непосредственно следует формула (12).

5. План дальнейшей работы. Итак, нам нужно доказать теорему 1 и теорему 2. Этому посвящен § 3. В § 2 мы докажем важное вспомогательное предложение, обобщающее лемму Клостермана ([9]).

Приношу глубокую благодарность Ю. В. Линнику за его ценные советы.

## § 2. Лемма Клостермана

1. О суммах Гаусса. Рассмотрим суммы Гаусса:

$$S(a, b; q) = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{ax^2+bx}{q}}. \qquad (13)$$

Если $b \equiv 0 \pmod q$, то мы имеем обычную (однородную) сумму Гаусса

$$S(a, q) = S(a, 0; q) = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}}. \qquad (14)$$

Относительно однородных сумм $S(a, q)$ имеет место следующее замечание, принадлежащее, по существу, Гауссу ([10]).

Замечание 1. 1) *Пусть* о. н. д. $(a, q) = d$, $a = a_1 d$, $q = q_1 d$. *Тогда*

$$S(a, q) = dS(a_1, q_1).$$

2) *Пусть* о. н. д. $(a, q) = 1$ *и* $q = 2^r q_1$, *где* $q_1$ — *нечетное число. Тогда*

$$S(a, q) = \begin{cases} \left(\frac{a}{q}\right) i^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2} \sqrt{q}, & \text{если } r = 0, \\ 0, & \text{если } r = 1, \\ \left(\frac{q}{a}\right)(1 + i^a)\sqrt{q}, & \text{если } r > 1. \end{cases} \tag{16}$$

Вывод этих формул см., например, в обзоре А. З. Вальфиша ([11]).)

Неоднородные суммы Гаусса без особого труда выражаются через однородные.

Замечание 2. 1) *Пусть* о.н.д. $(a, q) = d$. *Тогда*

$$S(a, b; q) = \begin{cases} dS\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{q}{d}\right), & \text{если } b \diagdown d, \\ 0 & \text{если } b \times d. \end{cases} \tag{17}$$

2) *Пусть* о.н.д. $(a, q) = 1$. *Тогда:*

а) *если* $b$ *четно*, $b = 2b_1$, *то*

$$S(a, b; q) = e^{-2\pi i \frac{a'b_1^2}{q}} S(a, q), \tag{18а}$$

*где* $a'a \equiv 1 \pmod q$;

б) *если* $b$ *и* $q$ *нечетны, то, обозначая* $b + q = 2b_1$, *имеем:*

$$S(a, b; q) = e^{-2\pi i \frac{a'b_1^2}{q}} S(a, q), \tag{18б}$$

*где* $a'a \equiv 1 \pmod q$;

в) *если* $b$ *нечетно, а* $q$ *четно, то*

$$S(a, b; q) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-2\pi i \frac{a'b^2}{4q}} S(a, 4q), & \text{если } q \equiv 2 \pmod 4, \\ 0, & \text{если } q \equiv 0 \pmod 4, \end{cases} \tag{18в}$$

*где* $a'a \equiv 1 \pmod{4q}$.

Доказательство. 1) Пусть о.н.д. $(a, q) = d$, $q = q_1 d$. Полагая $x = x_1 + tq_1$ $(x_1 = 0, 1, \ldots, q_1 - 1;\ t = 0, 1, \ldots, d - 1)$, будем иметь:

$$S(a, b; q) = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{ax^2+bx}{q}} = \left\{ \sum_{x_1=0}^{q_1-1} e^{2\pi i \frac{ax_1^2+bx_1}{q}} \right\} \left\{ \sum_{t=0}^{d-1} e^{2\pi i \frac{bt}{d}} \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{, если } d \times b, \\ dS\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{q}{d}\right), & \text{если } d \diagdown b. \end{cases}$$

3) Пусть о.н.д. $(a, q) = 1$. Для любого $y$

$$S(a, b; q) = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a(x+y)^2+b(x+y)}{q}} = e^{2\pi i \frac{ay^2+by}{q}} \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{ax^2+(b+2ay)x}{q}}.$$

а) Если $b$ четно, $b = 2b_1$, то для $y \equiv -b_1 a' \pmod q$, где $aa' \equiv 1 \pmod q$, будем иметь:

$$S(a, b; q) = e^{-2\pi i \frac{a'b_1^2}{q}} S(a, q).$$

б) Если $b$ и $q$ нечетны, $b+q=2b_1$, $a'a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ q)$, то, в силу а), имеем:

$$S(a,\ b;\ q)=S(a,\ b+q;\ q)=e^{-2\pi i\frac{a'b_1^2}{q}}S(a,q).$$

в) Если $b$ нечетно, а $q$ четно, то подбираем $y$ так, чтобы

$$2ay+b\equiv a\ (\mathrm{mod}\ 4q).$$

Это возможно, ибо $a$ и $b$ нечетны. Заметим, что при этом

$$2y-1\equiv -ba'\ (\mathrm{mod}\ 4q),$$

где $a'a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4q)$. Имеем:

$$S(a,\ b;\ q)=e^{2\pi i\frac{ay^2+by}{q}}\sum_{x=0}^{q-1}e^{2\pi i\frac{a(x^2+x)}{q}}=$$

$$=e^{2\pi i\frac{ay^2+by}{q}-2\pi i\frac{a}{4q}}\sum_{x=0}^{q-1}e^{2\pi i\frac{a(2x+1)^2}{4q}}=e^{2\pi i\frac{4ay^2+4by-a}{4q}}\left(\frac{1}{2}S(a,\ 4q)-S(a,\ q)\right).$$

Если $q\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$, то, в силу замечания 1,

$$\frac{1}{2}S(a,\ 4q)=S(a,\ q),\quad S(a,\ b;\ q)=0.$$

Если же $q\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$, то $S(a,\ q)=0$ и

$$S(a,\ b;\ q)=\frac{1}{2}e^{2\pi i\frac{4ay^2+2by-a}{4q}}S(a,\ 4q)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2\pi i\frac{(2y-1)a+2by}{4q}}S(a,\ 4q)=\frac{1}{2}e^{2\pi i\frac{(2y-1)b}{4q}}S(a,\ 4q)=\frac{1}{2}e^{-2\pi i\frac{a'b^2}{4q}}S(a,\ 4q).$$

Замечание 2 доказано. Из него вытекает нужное для дальнейшего

Следствие. *Пусть* о.н.д. $(p,\ q)=1$. *Тогда*

$$S(ap,\ b;\ q)=\begin{cases} e^{2\pi i\frac{vp'}{q}}S(ap,\ q), & pp'\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ q),\ \text{если}\ q\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\\ ce^{2\pi i\frac{vp'}{4q}}S(\bar{a}p,\ 4q), & pp'\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4q),\ \text{если}\ q\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2),\end{cases}\tag{19}$$

*где $v$ — целое число, зависящее только от $q$, $a$ и $b$, $c\leqslant 1$ и зависит только от $q$, $a$ и $b$, $\bar{a}=a$ или $4a$ (независимо от $p$).*

2. Оценки обобщенных сумм Клостермана. Пусть $q$ — целое положительное число, $q=2^t q_1$, где $q_1$ нечетно, $u$ и $v$ — заданные целые числа. Рассмотрим две суммы:

$$K_n(u,\ v;\ q)=\sum_x{}'\left(\frac{x}{q_1}\right)^n e^{2\pi i\frac{ux+vx'}{q}}\quad(n=0,\ 1),\tag{20}$$

где $x$ пробегает $\varphi(q)$ приведенных вычетов $(\mathrm{mod}\ q)$, а $x'$ связано с $x$ сравнением

$$xx'\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ q).$$

$K_0(u,\ v;\ q)$ — обычная сумма Клостермана, рассматривавшаяся в работах [9], [12]—[18]. Сумма $K_1(u,\ v;\ q)$ рассматривалась в работах [14] и [16].

Замечание 3. *Имеет место оценка*

$$|K_n(u, v; q)| \leqslant \varkappa_\varepsilon q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \min\{\sqrt{\text{о.н.д.}(u, q)}, \sqrt{\text{о.н.д.}(v, q)}\}, \qquad (21)$$

*где* $\varepsilon > 0$ — *произвольное положительное число, а* $\varkappa_\varepsilon > 0$ — *постоянная, зависящая только от* $\varepsilon$.

Доказательство. Так как, очевидно,

$$K_n(u, v; q) = K_n(v, u; q),$$

достаточно доказать, что

$$|K_n(u, v; q)| \leqslant \varkappa_\varepsilon q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о.н.д.}(u, q)}$$

Используем следующее свойство сумм $K_n(u, v; q)$: если

$$q = p_1^{t_1} \ldots q_k^{t_k}$$

— разложение $q$ на различные простые множители, то найдутся такие целые числа $v_1, \ldots, v_k$, что

$$K_n(u, v; q) = (-1)^{n\left[\frac{l}{2}\right]} \prod_{j=1}^{k} K_n(u, v_j; q_j^{t_j}),$$

где $l$ — количество $j$, для которых $p_j \equiv 3 \pmod 4$, $t_j \equiv 1 \pmod 2$. В силу этого свойства достаточно доказать, что если $p$ — простое число, $t$ — целое положительное число, то

$$|K_n(u, v; p^t)| \leqslant \varkappa \sqrt{p^t \, \text{о.н.д.}(u, p^t)}. \qquad (22)$$

Для $n = 1$ Салье ([14]) получил точные формулы, из которых, в частности, следует оценка (22). Для обычных сумм Клостермана ($n = 0$) в случае, когда о.н.д.$(u, p^t)$ = о.н.д.$(v, p^t) = p^{t-1}$, оценка (22) выводится в работе А. Вейля ([18]); для остальных случаев Салье ([14]) получил точные формулы, из которых, в частности, следует оценка (22).

Замечание 3 доказано *.

Рассмотрим некоторое обобщение сумм $K_n(u, v; q)$, также введенное (для $n = 0$) Клостерманом ([9]). Пусть нам заданы целые положительные числа $q$ и $L$ и целые числа $u$, $v$, $l$. Рассмотрим сумму

$$K_n(u, v; l, L; q) = \sum_{x \equiv l \pmod L}{}' \left(\frac{x}{q_1}\right)^n e^{2\pi i \frac{ux+vx'}{q}}, \qquad (23)$$

где $q = 2^r q_1$ и $q_1$ нечетно; суммирование $\sum'$ опять-таки ведется по всем вычетам $x$ приведенной системы $(\bmod q)$ с дополнительным условием $x \equiv l \pmod L$; $x'$ определяется сравнением $x'x \equiv 1 \pmod q$ **. В случае $L = 1$, $l = 0$ мы имеем обычную сумму $K_n(u, v; q)$. Когда $L \diagdown q$, суммы (23) легко сводятся к суммам (21).

Замечание 4. *Пусть* $L \diagdown q$. *Тогда если* $l$ *не просто с* $L$, *то*

---

* Отметим, что если взамен трудно получаемого результата А. Вейля ([18]) пользоваться более слабой, но элементарной оценкой Салье ([15]), то вместо оценки (21) получается оценка

$$|K_n(u, v; q)| \leqslant \varkappa_\varepsilon q^{\frac{2}{3}+\varepsilon} \min\{[\text{о.н.д.}(u, q)]^{\frac{1}{3}}, [\text{о.н.д.}(v, q)]^{\frac{1}{3}}\}. \qquad (21)$$

** Далее обозначения $x'$ и $\Sigma'$ мы применяем без дополнительных разъяснений.

$K_n(u, v, l, L; q) = 0$. *Если же $l$ просто с $L$, то*

$$K_n(u, v; l, L; q) = \frac{1}{L}\sum_{r=1}^{L} e^{-2\pi i \frac{lr}{L}} K_n\left(u + \frac{rq}{L}, v; q\right) =$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{r=1}^{L} e^{-2\pi i \frac{\tilde{l}r}{L}} K_n\left(u, v + \frac{rq}{L}; q\right), \tag{24}$$

*где* $\tilde{l}l \equiv 1 \pmod L$.

Доказательство. Если $l$ не просто с $L$, то оно не просто с $q$, и нет чисел $x$, простых с $q$ и сравнимых с $l$ по модулю $L$. Итак, первое утверждение очевидно.

Пусть $l$ просто с $L$. Тогда

$$\frac{1}{L}\sum_{r=1}^{L} e^{-2\pi i \frac{lr}{L}} K_n\left(u + \frac{rq}{L}, v; q\right) = \frac{1}{L}\sum_{r=1}^{L} e^{-2\pi i \frac{lr}{L}} \sum_{x}{}' \left(\frac{x}{q_1}\right)^n e^{2\pi i\left(\frac{ux+vx'}{q} + \frac{rx}{L}\right)} =$$

$$= \sum_{x}{}' \left(\frac{x}{q_1}\right)^n e^{2\pi i \frac{ux+xv'}{q}} \left\{\frac{1}{L}\sum_{r=1}^{L} e^{2\pi i \frac{(x-l)r}{L}}\right\} =$$

$$= \sum_{x \equiv L \pmod L}{}' \left(\frac{x}{q_1}\right)^n e^{2\pi i \frac{ux+vx'}{q}} = K_n(u, v; l, L; q).$$

Второе тождество доказывается аналогично (и выводится из первого).

Замечание 4 доказано.

Следствие. *Если $L \setminus q$, то имеет место оценка:*

$$|K_n(u, v; l, L; q)| \leqslant \varkappa_\varepsilon q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \cdot \min\{\sqrt{\text{о.н.д.}\,(u, q)}, \sqrt{\text{о.н.д.}\,(v, q)}\}, \tag{25}$$

*где $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, а $\varkappa_\varepsilon > 0$ — постоянная, зависящая только от $\varepsilon$.*

Наконец, рассмотрим неполные суммы Клостермана.

Замечание 5. *Пусть $L \setminus q$, $0 \leqslant Q_1 < Q_2 < q$. Тогда*

$$\left|\sum_{\substack{x \equiv l \pmod L \\ Q_1 \leqslant x \leqslant Q_2}}{}' \left(\frac{x}{q_1}\right)^n e^{2\pi i \frac{ux+vx'}{q}}\right| \leqslant \varkappa_\varepsilon q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \min\{\sqrt{\text{о.н.д.}\,(u, q)}, \sqrt{\text{о.н.д.}\,(v, q)}\}, \tag{26а}$$

$$\left|\sum_{\substack{x \equiv l \pmod L \\ Q_1 \leqslant x' \leqslant Q_2}}{}' \left(\frac{x}{q_1}\right)^n e^{2\pi i \frac{ux+vx'}{q}}\right| \leqslant \varkappa_\varepsilon q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \min\{\sqrt{\text{о.н.д.}\,(u, q)}, \sqrt{\text{о.н.д.}\,(v, q)}\}, \tag{26б}$$

*где $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, а $\varkappa_\varepsilon > 0$ — постоянная, зависящая только от $\varepsilon$.*

Оценка (26а) непосредственно содержится в формуле «вопроса 12а» гл. V книги И. М. Виноградова ([19]). Оценка же (26б) сводится к оценке (26а).

3. Основная лемма. В заключение этого параграфа мы сформулируем и докажем лемму, которая для $n = 0$ (и с более слабыми оценками) впервые была доказана Клостерманом ([9]). На этой лемме будет базироваться (§ 3) доказательство асимптотической формулы для количества представлений.

ЛЕММА. *Пусть заданы целые числа* $a_1, \ldots, a_s$, $b_1, \ldots, b_s$, $l_1, \ldots, l_s$, $g$, $m$, $q$, $Q_1$, $Q_2$ *с условием* $0 \leqslant Q_1 < Q_2 < q$. *Тогда*

$$\left|\sum_{Q_1 \leqslant p' \leqslant Q_2}' \left\{\prod_{j=1}^{s} S(a_j g^2 p, l_j + b_j g p; q)\right\} e^{-2\pi i \frac{mp}{q}}\right| < \varkappa_\varepsilon q^{\frac{s+1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о.н.д.}(4\Delta m - c, q)}, \quad (27)$$

*где суммирование слева ведется по всем вычетам приведенной системы* $(\mathrm{mod}\, q)$, *удовлетворяющим условиям* $Q_1 \leqslant p' \leqslant Q_2$, *причем* $p'p \equiv 1 \pmod q$, $0 \leqslant p' < q$; $\varepsilon > 0$ — *произвольное положительное число*, $\varkappa_\varepsilon > 0$ *зависит лишь от* $\varepsilon$ *и* $a_1, \ldots, a_s, g$; $\Delta = \prod_{j=1}^{s} a_j$; $c$ — *целое число, зависящее только от* $\Delta$, $g$ *и* $b_1, \ldots, b_s$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи $q \equiv 0 \pmod 2$ и $q \equiv 1 \pmod 2$. Пусть $q$ четно. Обозначим для краткости

$$\sum_{Q_1 \leqslant p' \leqslant Q_2}' \left\{\prod_{j=1}^{s} S(a_j g^2 p,\ l_j + b_j g p;\ q)\right\} e^{-2\pi i \frac{mp}{q}} = \sigma_1.$$

Тогда, в силу следствия из замечания 2, мы независимо от $p$ можем подобрать такие числа $\bar{a}_i = a_i$ или $4a_i$ и $v_i$, что

$$\sigma_1 = C \sum_{Q_1 \leqslant p' \leqslant Q_2} \left\{\prod_{j=1}^{s} S(\bar{a}_j g^2 p;\ 4q)\right\} e^{2\pi i \frac{-4(m-c_1)p + (v_1 + \cdots + v_s)\bar{p}'}{4q}}$$

где $\bar{p}'p \equiv (\mathrm{mod}\, 4q)$, $0 < \bar{p}' < 4q$, $c_1$ — целое число, причем $\Delta c_1 = c$ зависит только от $\Delta$, $g$, $b_1, \ldots, b_s$. Обозначим $v_1 + \cdots + v_s = v$ и пусть

$$\sigma_2^{(k)} = \sum_{Q_1 + kq \leqslant \bar{p}' \leqslant Q_2 + kq} \left\{\prod_{j=1}^{s} S(\bar{a}_j g^2 p;\ 4q)\right\} e^{2\pi i \frac{-4(m-c_1)p + v\bar{p}'}{4q}}$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Тогда

$$\sigma_1 = C(\sigma_2^{(0)} + \sigma_2^{(1)} + \sigma_2^{(2)} + \sigma_2^{(3)}). \quad (28)$$

Все $\sigma_2^{(k)}$ оцениваются аналогично. Рассмотрим, например, $\sigma_2^{(0)}$. Тогда, полагая $L = 8g^{2s} \prod_{j=1}^{s} \bar{a}_j$, из замечания 1 без труда выведем, что

$$S(\bar{a}_j g^2 p;\ 4q) = \zeta_j(p,\ q)\left(\frac{p}{q_1}\right)\sqrt{q},$$

где $q_1$ — нечетная часть числа $q$, $\zeta_j(p, q)$ ограничена постоянной, зависящей только от $a_j$ и $g$, причем если $p_1 \equiv p_2 \pmod L$, то

$$\zeta_j(p_1,\ q) = \zeta_j(p_2,\ q).$$

Поэтому, обозначая

$$\sum_{\substack{Q_1 \leqslant \bar{p}' \leqslant Q_2 \\ p \equiv l \ (\mathrm{mod}\ L)}}' \left(\frac{p}{q_1}\right) e^{2\pi i \frac{-4(m-c_1)\ p + v\bar{p}'}{4q}} = \sigma_3^{(0)}(l),$$

будем иметь:

$$|\sigma_2^{(0)}| \leqslant \varkappa q^{\frac{s}{2}} \sum_{l=0}^{L-1} |\sigma_3^{(0)}(l)|,$$

где $\varkappa > 0$ зависит лишь от $a_1, \ldots, a_s$ и $g$. Отсюда, в силу замечания 5, получаем:

$$|\sigma_2^{(0)}| \leqslant \varkappa_\varepsilon q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о.н.д.}\,(4\Delta m - c,\ q)}.$$

Аналогично,

$$|\sigma_2^{(k)}| \leqslant \varkappa_\varepsilon q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о.н.д.}\,(4\Delta\ m - c,\ q)} \quad (k = 0, 1, 2, 3). \tag{29}$$

Равенство (28) и оценка (29) и дают нам оценку (27). Случай нечетного $q$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

## § 3. Доказательство асимптотической формулы

1. Предварительная асимптотическая формула. В этом пункте мы докажем следующую асимптотическую формулу.

Замечание 6. *Пусть $a_1, \ldots, a_s, g$ — целые положительные, $b_1, \ldots, b_s$ — целые числа, $\prod_{j=1}^{s} a_j = \Delta$ и $\mu_1, \ldots, \mu_s$ — вещественные числа с условием*

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{s} \mu_j^2} \leqslant m^{-\left(\frac{1}{2}-\eta\right)}, \tag{30}$$

*где $0 < \eta < \frac{1}{2}$. Пусть $m$ — целое положительное число. Обозначим*

$$r(f;\ \mu_1, \ldots, \mu_s;\ g;\ m) = \sum_{\substack{a_1x_1^2+\ldots+a_sx_s^2=m \\ x_1 \equiv b_1, \ldots, x_s \equiv b_s \pmod g}} e^{2\pi i(\mu_1x_1+\ldots+\mu_sx_s)}, \tag{31}$$

*где суммирование ведется по всем представлениям $(x_1, \ldots, x_s)$ числа $m$ формой $f = a_1x_1^2 + \ldots + a_sx_s^2$, сравнимым с $(b_1, \ldots, b_s)$ по модулю $g$. Тогда при $m \to \infty$*

$$r(f;\ \mu_1, \ldots, \mu_s;\ g;\ m) =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m^{\frac{s}{2}-1} J\left(\pi^2 m \sum_{j=1}^{s} \frac{\mu_j^2}{a_j}\right) H(f,\ g;\ m) + O\left(m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\frac{\eta(s+1)}{2}+\varepsilon}\right), \tag{32}$$

*где постоянные, входящие в $O$, зависят только от $s$, $\Delta$ и $g$ (и не зависят от $m$ и $\mu_1, \ldots, \mu_s$); здесь $J(0) = 1$, а для $z \neq 0$*

$$J(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) z^\nu}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\nu+\frac{s}{2}\right)} = \frac{J_{\frac{s}{2}-1}(2\sqrt{z})}{z^{\frac{s}{4}-\frac{1}{2}}}, \tag{33}$$

*где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя; $H(f,\ g;\ m)$ — особый ряд.*

$$H(f;\ g;\ m) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s} \sum_{p \pmod q}' \prod_{j=1}^{s} S_{g,\,b_j}(a_jp,\ q)\ e^{-2\pi i\frac{mp}{q}}, \tag{34}$$

*$S_{g,\,b_j}(a_jp,\ q)$ — сумма Гаусса по модулю $g$:*

$$S_{g,\,b_j}(a_jp,\ q) = \frac{1}{g} \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i\frac{a_jp(gx+b)^2}{q}},$$

(Как и в § 2, здесь и в дальнейшем $\sum\limits_{p(\mathrm{mod}\, q)}'$ обозначает суммирование по приведенной системе вычетов $(\mathrm{mod}\, q)$.)

Доказательство. 1°. Пусть $w$ — комплексное число, $|w| < 1$, и

$$\vartheta(w; \mu, g, b) = \sum_{\substack{x=-\infty \\ xb \equiv (\mathrm{mod}\, g)}}^{+\infty} w^{x^2} e^{2\pi i \mu x}. \tag{35}$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$\prod_{j=1}^{s} \vartheta(w^{a_j}; \mu_j, g, b_j) = \sum_{m=0}^{\infty} r(f; \mu_1, \ldots, \mu_s; g; m) w^m \tag{36}$$

и, следовательно,

$$r(f; \mu_1, \ldots, \mu_s, g, m) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left\{ \prod_{j=1} \vartheta(w^{a_j}; \mu_j, g, b_j) \right\} w^{-m-1} dw, \tag{37}$$

где $\Gamma$ — замкнутый контур, охватывающий начало и лежащий в круге $|w| < 1$. Будем считать $\Gamma$ окружностью радиуса $e^{-\frac{1}{m}}$ с центром в начале координат: $|w| = e^{-\frac{1}{m}}$.

2°. Пусть $M = [\sqrt{m}]$. Рассмотрим $M$-ряд Фарея, т. е. совокупность всех правильных несократимых дробей $\frac{p}{q}$ со знаменателями, не превышающими $M$:

$$1 \leqslant q \leqslant M, \quad 0 \leqslant p < q, \quad \text{о. н. д. } (p, q) = 1.$$

Каждому члену $\frac{p}{q}$ этого ряда сопоставим дугу $\gamma_{p,q}$ окружности $\Gamma$ следующим образом: $\gamma_{p,}$ есть совокупность точек $w = e^{-\frac{1}{m}} e^{\left(\frac{p}{q} + \theta\right)}$; здесь в случае $\frac{p}{q} \neq \frac{0}{1}$ и $\neq \frac{M-1}{M}$ переменная $\theta$ пробегает промежуток

$$-\frac{1}{q(q+q_2)} < \theta \leqslant \frac{1}{q(q+q_1)},$$

где $\frac{p_2}{q_2} < \frac{p}{q} < \frac{p_1}{q_1}$ — соседние члены $M$-ряда Фарея; если $\frac{p}{q} = \frac{M-1}{M}$, то $\theta$ пробегает промежуток

$$-\frac{1}{M(M+q_2)} < \theta \leqslant \frac{M}{M+1};$$

если же $\frac{p}{q} = \frac{0}{1}$, то $\theta$ пробегает промежуток, состоящий из двух кусков

$$\frac{M}{M+1} < \theta \leqslant 1 \text{ и } 0 < \theta \leqslant \frac{1}{M+1} = \frac{1}{q(q+q_1)}.$$

Иначе говоря, $\frac{p}{q} + \theta$ пробегает промежуток между соседними медиантами $M$-ряда Фарея, заключающими точку $\frac{p}{q}$ (при этом ряд Фарея рассматривается циклически $(\mathrm{mod}\, 1)$, так что точка $\frac{1}{1}$ отождествляется с точкой $\frac{0}{1}$).

Дуги $\gamma_{p,q}$ разбивают окружность $\Gamma$ на попарно не пересекающиеся

части:

$$\Gamma = \bigcup_{q=1}^{M} \bigcup_{p}{}' \gamma_{p,q}, \tag{38}$$

где теоретико-множественная сумма $\bigcup\limits_{p}{}'$ берется по числам $p$ от 0 до $q-1$, взаимно простым с $q$. При этом ясно, что

$$\frac{1}{2M^2} \leqslant \frac{1}{2qM} \leqslant \frac{1}{q(M+q)} \leqslant \frac{1}{q(q+q_1)} \leqslant \frac{1}{qM} \leqslant \frac{1}{M}, \quad \frac{1}{q(M+q)} \leqslant \frac{1}{q(q+q_2)} \leqslant \frac{1}{qM}. \tag{39}$$

Ввиду (37) и (38), мы получаем:

$$r(f; \mu_1, \ldots, \mu_s; g; m) = \sum_{q=1}^{M} \sum_{p(\mathrm{mod}\, q)}{}' \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{p,q}} \left\{ \prod_{j=1}^{s} \vartheta(w^{a_j}; \mu_j, g, b_j) \right\} w^{-m-1} dw. \tag{40}$$

3°. Докажем, что если $w = e^{-\frac{1}{m}} e^{2\pi i \left(\frac{p}{q} + \theta\right)}$, то

$$\vartheta(w^a; \mu, g, b) = \frac{1}{gq} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{2\pi i \frac{ap}{q} b^2} \sum_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 \left(\frac{z}{gq} - \mu\right)^2}{a\left(\frac{1}{m} - 2\pi i\theta\right)} + 2\pi i \frac{bz}{gq}} S(ag^2p, z + 2agpb; q). \tag{41}$$

Имеем:

$$\vartheta(w^a; \mu, g, b) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} w^{a(gt+b)^2} e^{2\pi i \mu (gt+b)} =$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a(gt+b)^2}{m} + 2\pi i \frac{p}{q} a(gt+b)^2 + 2\pi i\theta (gt+b)^2 + 2\pi i \mu (qt+b)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{ap}{q}(gk+b)^2} \sum_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-ag^2q^2\left(\frac{1}{m} - 2\pi i\theta\right)\left(z + \frac{kq+b}{gq}\right)^2 + 2\pi i \mu g q \left(z + \frac{kq+b}{gq}\right)}.$$

К внутренней сумме применим формулу обращения для $\vartheta$-рядов (ее доказательство см., например, у Вальфиша ([11])):

$$\sum_{z=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(z+\lambda)^2 + 2\beta(z+\lambda)} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{\alpha}} \sum_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 z^2}{\alpha} + 2\pi i z \left(\lambda - \frac{\beta}{\alpha}\right)}, \tag{42}$$

полагая

$$\alpha = ag^2q^2\left(\frac{1}{m} - 2\pi i\theta\right), \quad \beta = \pi i \mu g q, \quad \lambda = \frac{kg+b}{gq}.$$

Мы получим:

$$\vartheta(w^a; \mu, g, b) = \sum_{k=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{ap}{q}(gk+b)^2} \frac{1}{gq} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\pi^2\mu^2}{a\left(\frac{1}{m} - 2\pi\theta\right)}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 z^2}{ag^2q^2\left(\frac{1}{m} - 2\pi i\theta\right)} + 2\pi i z \frac{kg+b}{gq} + \frac{2\pi^2 \mu z}{agq\left(\frac{1}{m} - 2\pi i\theta\right)}} =$$

$$= \frac{1}{gq} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2\left(\frac{z}{gq} - \mu\right)^2}{a\left(\frac{1}{m} - 2\pi\theta\right)}} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2\pi i \left\{\frac{ap(gk+b)^2}{q} + \frac{z(gk+b)}{gq}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{gq}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{2\pi i \frac{ap}{q} b^2} \sum_{z=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2\left(\frac{z}{gq}-\mu\right)^2}{a\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)} + 2\pi i \frac{br}{gq}} S(ag^2p, z+2agpb, q).$$

Таким образом, формула (41) доказана.

4°. Используя (41), мы из формулы (40) получаем:

$$r(f; \mu_1, \ldots, \mu_s; g; m) = I_1 + I_2, \tag{43}$$

где

$$I_1 = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{g^s\sqrt{\Delta}} \sum_{g=1}^{M} \sum_p{}' q^{-s} e^{2\pi i \frac{p\sum_{j=1}^{s} a_j b_j^2}{q}} \left\{\prod_{j=1}^{s} S(a_j g^2 p, 2a_j gpb_j; q)\right\} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{p,q}} \frac{e^{-\frac{\pi^2 \sum_{j=1}^{s}\frac{\mu_j^2}{a_j}}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}} w^{-m-1}\, dw,$$

$$I_2 = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{g^s\sqrt{\Delta}} \sum_{q=1}^{M} \sum_p{}' q^{-s} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{p,q}} \frac{e^{2\pi i \frac{p\sum_{j=1}^{s} a_j b_j^2}{q}}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}} \times$$

$$\times \sum_{(z_1,\ldots,z_s)\neq(0,\ldots,0)} \left\{\prod_{j=1}^{s} S(a_j g^2 p, z_j + 2a_j gpb_j; q)\right\} \times$$

$$\times e^{-\frac{\pi^2\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j}\left(\frac{z_j}{gq}-\mu_j\right)^2}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta} + 2\pi i \frac{\sum_{j=1}^{s} b_j z_j}{gq}} w^{-m-1}\, dw.$$

5°. Обозначим для краткости

$$e^{2\pi i \frac{p\sum_{j=1}^{s} a_j b_j^2}{q}} \prod_{j=1}^{s} S(a_j g^2 p, 2a_j gpb_j; q) = \prod(p, g; q), \qquad \pi^2 \sum_{j=1}^{s} \frac{\mu_j^2}{a_j} = \gamma.$$

Тогда мы будем иметь:

$$I_1 = I_{11} - I_{12} - I_{13}, \tag{44}$$

где

$$I_{11} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{g^s\sqrt{\Delta}} \sum_{q=1}^{M} \sum_p{}' q^{-s} \prod(p, g, q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}} e^{-2\pi i \frac{mp}{q}+1-2\pi i m\theta}\, d\theta,$$

$$I_{12} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{g^s\sqrt{\Delta}} \sum_{q=1}^{M} \sum_p{}' q^{-s} \prod(p, g; q) \int_{\frac{1}{q(q+q_1)}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}} e^{-2\pi i \frac{mp}{q}+1-2\pi i m\theta}\, d\theta,$$

$$I_{13}=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{g^s\sqrt{\Delta}}\sum_{q=1}^{M}\sum_{p}{}'q^{-s}\prod(p,g;q)\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{q(q+q_1)}}\frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}}e^{-2\pi i\frac{mp}{q}+1-2\pi im\theta}\,d\theta.$$

6°. Разлагая $e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}}$ в ряд Тейлора и заменяя переменную интегрирования $\theta$ на $\eta$ так, чтобы

$$\frac{1}{m}-2\pi i\theta=\frac{\eta}{m},$$

будем иметь:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}}e^{1-2\pi im\theta}\,d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\gamma^k}{k!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{-\frac{s}{2}-k}e^{1-2\pi im\theta}\,d\theta=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\gamma^k}{k!}m^{\frac{s}{2}+k-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\infty i}^{1+\infty i}\eta^{-k-\frac{s}{2}}e^{\eta}\,d\eta=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\gamma^k m^{\frac{s}{2}+k-1}}{k!\,\Gamma\left(\frac{s}{2}+k\right)}=\frac{m^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}J(\gamma m),$$

где

$$J(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^k\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(k+\frac{s}{2}\right)}=\frac{J_{\frac{s}{2}-1}(2\sqrt{z})}{z^{\frac{s}{4}-\frac{1}{2}}}.$$

Поэтому

$$I_{11}=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{g^s\sqrt{\Delta}}\frac{m^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}J(\gamma m)\sum_{q=1}^{M}q^{-s}\sum_{p}{}'\prod(p,g;q)\,e^{-2\pi i\frac{mp}{q}}. \tag{45}$$

7°. Оценим $I_{12}$ и $I_{13}$. Так как обе оценки выводятся аналогично, то рассмотрим, например, $I_{12}$. Имеем:

$$\sum_{p}{}'\prod(p,g;\,q)\,e^{-2\pi i\frac{mp}{q}}\int\limits_{\frac{1}{q(q+q_1)}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}-2\pi im\theta}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}}\,d\theta=$$

$$=\sum_{p}{}'\prod(p,g;q)\,e^{-2\pi i\frac{mp}{q}}\left\{\int\limits_{\frac{1}{q(M+q)}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}-2\pi im\theta}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}}\,d\theta-\right.$$

$$-\sum_{\mu=q+q_1-M}^{q-1}\int\limits_{\frac{1}{q(M+\mu+1)}}^{\frac{1}{q(M+\mu)}}\frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}-2\pi i m\theta}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}}\,d\theta\Bigg\}=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{q(q+M)}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}-2\pi i m\theta}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}}\,d\theta\sum_{p}{}'\prod(p,g;q)\,e^{-2\pi i\frac{mp}{q}}-$$

$$-\sum_{\mu=1}^{q-1}\int\limits_{\frac{1}{q(M+\mu+1)}}^{\frac{1}{q(M+\mu)}}\frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}-2\pi i m\theta}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}}\,d\theta\sum_{q+q_1-M\leqslant\mu}{}'\prod(p,g;q)\,e^{-2\pi\frac{mp}{q}}.$$

(Суммирование $\sum\limits_{q+q_1-M\leqslant\mu}{}'$ ведется по всем $p$ от 0 до $q-1$, взаимно простым с $q$, для которых $q+q_1-M\leqslant\mu$. Но так как $\frac{p_1}{q_1}$ — соседняя с $\frac{p}{q}$ справа дробь Фарея, то

$$p_1q-pq_1=1,\quad q_1\equiv -p'\,(\mathrm{mod}\,q),\quad 0\leqslant q_1<q.$$

Поэтому по основной лемме (§ 2)*

$$\sum_{p}{}'\prod(p,g;q)\,e^{-2\pi i\frac{mp}{q}}\ll q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{\text{о. н. д.}\,(4\Delta m-c,q)},$$

$$\sum_{q+q_1-M\leqslant\mu}{}'\prod(p,g,q)\,e^{-2\pi i\frac{mp}{q}}\ll q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{\text{о. н. д.}\,(4\Delta m-c,q)},\qquad(46)$$

где $c$ не зависит от $q$, а постоянные, входящие в $\ll$, не зависят от $\mu$.

Используя эти оценки, получаем:

$$I_{12}\ll\sum_{q=1}^{M}q^{-s}\Bigg\{\int\limits_{\frac{1}{q(M+q)}}^{\infty}\left|\frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}}\right|d\theta\cdot q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{\text{о. н. д.}\,(4\Delta m-c,q)}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{q-1}\int\limits_{\frac{1}{q(M+\mu+1)}}^{\frac{1}{q(M+\mu)}}\left|\frac{e^{-\frac{\gamma}{\frac{1}{m}-2\pi i\theta}}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}}\right|d\theta\cdot q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{\text{о. н. д}\,(4\Delta m-c,q)}\Bigg\}\ll$$

---

* Мы говорим, что $f(x)\ll g(x)$, если $|f(x)|<\varkappa g(x)$, т. е. это обозначение И. М. Виноградова равнозначно с обозначением $f(x)=O(g(x))$.

$$< \sum_{q=1}^{M} q^{-s} q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о. н. д. } (4\Delta m - c, q)} \left\{ \int_{\frac{1}{q(M+q)}}^{\frac{1}{q(M+1)}} \theta^{-\frac{s}{2}} d\theta + \int_{\frac{1}{q(M+q)}}^{\infty} \theta^{-\frac{s}{2}} d\theta \right\} \ll$$

$$\ll \sum_{q=1}^{M} q^{-s} q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о. н. д. } (4\Delta m - c, q)}\, M^{\frac{s}{2}-1} q^{\frac{s}{2}-1} =$$

$$= M^{\frac{s}{2}-1} \sum_{q=1}^{M} q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о. н. д. } (4\Delta m - c, q)} \ll$$

$$\ll M^{\frac{s}{2}-1} \sum_{\delta \setminus (4\Delta m - c)} \delta^{-\frac{1}{2}+\varepsilon+\frac{1}{2}} \sum_{q_1 \leqslant \frac{M}{\delta}} q_1^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll M^{\frac{s}{2}-1} \sum_{\delta \setminus (4\Delta m - c)} \delta^{\varepsilon} \left(\frac{M}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} =$$

$$= M^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{\delta \setminus (4\Delta m - c)} \delta^{-\frac{1}{2}} \ll M^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} m^{\varepsilon} \ll m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}.$$

Аналогично оценивается $I_{13}$. Итак, мы получаем:

$$I_{12} \ll m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}, \quad I_{13} \ll m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}. \tag{47}$$

8°. Равенства (44), (45) и оценки (47) приводят к следующей формуле для $I_1$:

$$I_1 = \frac{\pi^{\frac{s}{2}} m^{\frac{s}{2}-1}}{g^s \sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} J(\gamma m) \sum_{q=1}^{M} q^{-s} \sum_{p}{}' \prod (p, g; q) e^{-2\pi i \frac{mp}{q}} + O\left(m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right). \tag{48}$$

Пользуясь простейшими свойствами функции Бесселя, без труда получаем, что

$$J(\gamma m) \ll 1. \tag{49}$$

Учитывая эту оценку и снова используя основную лемму, будем иметь:

$$\frac{\pi^{\frac{s}{2}} m^{\frac{s}{2}-1}}{g^s \sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} J(\gamma m) \sum_{q=M+1}^{\infty} q^{-s} \sum_{p}{}' \prod (p, g; q) e^{-2\pi i \frac{mp}{q}} \ll$$

$$\ll m^{\frac{s}{2}-1} \sum_{q=M+1}^{\infty} q^{-s} q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о. н. д. } (4\Delta m - c, q)} \ll$$

$$\ll m^{\frac{s}{2}-1} \sum_{\delta \setminus (4\Delta m - c)} \delta^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \delta^{\frac{1}{2}} \sum_{q_1 > \frac{M+1}{\delta}} q_1^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll$$

$$\ll M^{\frac{s}{2}-1} \sum_{\delta \setminus (4\Delta m - c)} \delta^{-\frac{s}{2}+1+\varepsilon} \left(\frac{M}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}+\varepsilon} =$$

$$= m^{\frac{s}{2}-1} M^{-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}+\varepsilon} \sum_{\delta \setminus (4\Delta m - c)} \delta^{-\frac{1}{2}} \ll m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}.$$

Поэтому формулу (48) можно заменить следующей:

$$I_1 = \frac{\pi^{\frac{s}{2}} m^{\frac{s}{2}-1}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} J(\gamma m) H(f, g; m) + O\left(m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right), \tag{50}$$

где $H(f, g; m)$ — особый ряд (34).

9°. Докажем, что

$$I_2 < m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\frac{\eta(s+1)}{2}+\varepsilon}. \tag{51}$$

Мы имеем:

$$I_2 < \sum_{q=1}^{M} q^{-s} \sum_p{}' \int\limits_{-\frac{1}{q(q+q_2)}}^{\frac{1}{q(q+q_1)}} \sum_{(z_1,\ldots,z_s)\neq(0,\ldots,0)} \left| \left\{ \prod_{j=1}^{s} S(a_j g^2 p, z_j + 2a_j g p b_j; q) \right\} \times \right.$$

$$\left. \times\, e^{-2\pi i \frac{\left(m - \sum\limits_{j=1}^{s} a_j b_j^2\right) p}{q}} \right| \left| \frac{e^{-\frac{\pi^2 \sum\limits_{j=1}^{s} \frac{1}{a_j}(z_j - gq\mu_j)^2}{g^2 q^2 \left(\frac{1}{m} - 2\pi i\theta\right)}}}{\left(\frac{1}{m} - 2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}} \right| d\theta =$$

$$= \sum_{q=1}^{M} q^{-s} \left\{ \sum_p{}' \sum_{\mu=q+q_1-M}^{q-1} \int\limits_{\frac{1}{q(M+\mu+1)}}^{\frac{1}{q(M+\mu)}} |\ldots| \, d\theta + \right.$$

$$\left. + \sum_p{}' \int\limits_{-\frac{1}{q(M+q)}}^{\frac{1}{q(M+q)}} |\ldots| \, d\theta + \sum_p{}' \sum_{\mu=q+q_2-M}^{q-1} \int\limits_{-\frac{1}{q(M+\mu)}}^{-\frac{1}{q(M+\mu+1)}} |\ldots| \, d\theta \right\} =$$

$$= \sum_{q=1}^{M} q^{-s} \left\{ \sum_{\mu=1}^{q-1} \int\limits_{\frac{1}{q(M+\mu+1)}}^{\frac{1}{q(M+\mu)}} \sum_{q+q_1-M\leqslant\mu}{}' |\ldots| \, d\theta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-\frac{1}{q(M+q)}}^{\frac{1}{q(M+q)}} \sum_p{}' |\ldots| \, d\theta + \sum_{\mu=1}^{q-1} \int\limits_{-\frac{1}{q(M+\mu)}}^{-\frac{1}{q(M+\mu+1)}} \sum_{q+q_2-M\leqslant\mu}{}' |\ldots| \, d\theta \right\}.$$

Применяя рассуждения, аналогичные проведенным в $n^\circ$ 7, и используя основную лемму, получим:

$$I_2 < \sum_{q=1}^{M} q^{-s} \int\limits_{-\frac{1}{q(M+1)}}^{\frac{1}{q(M+1)}} q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о. н. д.}\,(4\Delta m - c, q)} \times$$

$$\times \sum_{(z_1,\ldots,z_s)\neq(0,\ldots,0)} \left| \frac{e^{-\frac{\pi^2\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j}(z_j-gq\mu_j)^2}{g^2q^2\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)}}}{\left(\frac{1}{m}-2\pi i\theta\right)^{\frac{s}{2}}} \right| d\theta \ll$$

$$\ll \sum_{q=1}^{M} q^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о. н. д.}\,(4\Delta m-c,q)}\ \times$$

$$\times \int_0^{\frac{1}{qM}} \left\{ \left(\frac{m^2}{1+4\pi^2m^2\theta^2}\right)^{\frac{s}{4}} \sum_{(z_1,\ldots,z_s)\neq(0,\ldots,0)} e^{-\frac{\pi^2 m\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j}(z_j-gq\mu_j)^2}{g^2q^2(1+4\pi^2m^2\theta^2)}} \right\} d\theta = I_{21}+I_{22},$$

где

$$I_{21} = \sum_{q\leq\frac{1}{2g}m^{\frac{1}{2}-\eta}} q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{\text{о.н.д.}(4\Delta m-c,q)}\, m^{\frac{s}{4}}\ \times$$

$$\times \int_0^{\frac{1}{qM}} \left\{ \left(\frac{m}{q^2(1+4\pi^2m^2\theta^2)}\right)^{\frac{s}{4}} \sum_{(z_1,\ldots,z_s)\neq(0,\ldots,0)} e^{-\frac{\pi^2 m\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j}(z_j-gq\mu_j)^2}{g^2q^2(1+4\pi^2m^2\theta^2)}} \right\} d\theta,$$

$$I_{22} = \sum_{\frac{1}{2g}m^{\frac{1}{2}-\eta}<q\leq M} q^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{\text{о.н.д.}(4\Delta m-c,q)}\ \times$$

$$\times \int_0^{\frac{1}{qM}} \left\{ \left(\frac{m^2}{1+4\pi^2m^2\theta^2}\right)^{\frac{s}{4}} \sum_{(z_1,\ldots,z_s)\neq(0,\ldots,0)} e^{-\frac{\pi^2 m\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j}(z_j-gq\mu_j)^2}{g^2q^2(1+4\pi^2m^2\theta^2)}} \right\} d\theta.$$

Заметим, что при $0\leq\theta\leq\frac{1}{qM}$

$$\frac{m}{q^2(1+4\pi^2m^2\theta^2)} \geq \frac{m}{q^2+4\pi^2m^2\frac{1}{q^2M^2}q^2} \geq \frac{m}{m+4\pi^2m} = \frac{1}{1+4\pi^2},$$

откуда следует:

$$\sum_{(z_1,\ldots,z_s)\neq(0,\ldots,0)} e^{-\frac{\pi^2 m\sum\limits_{j=1}^{s}\frac{1}{a_j}(z_j-gq\mu_j)^2}{g^2q^2(1+4\pi^2m^2\theta^2)}} \ll 1;$$

причем если $q \leqslant \frac{1}{2g} m^{\frac{1}{2}-\eta}$, то

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{1}{a_j} (z_j - gq\mu_j)^2 \geqslant \frac{1}{4a},$$

где $a = \max_j a_j$ и

$$\sum_{(z_1,\ldots,z_s)\neq(0,\ldots,0)} e^{-\frac{\pi^2 m \sum\limits_{j=1}^{s} \frac{1}{a_j}(z_j - gq\mu_j)^2}{g^2q^2(1+4\pi^2m^2\theta^2)}} < e^{-\frac{\pi^2 m}{4ag^2q^2(1+4\pi^2m^2\theta^2)}},$$

$$\left(\frac{m}{q^2(1+4\pi^2 m^2\theta^2)}\right)^{\frac{s}{4}} \left\{ \sum_{(z_1,\ldots,z_s)\neq(0,\ldots,0)} e^{-\frac{\pi^2 m \sum\limits_{j=1}^{s} \frac{1}{a_j}(z_j - gq\mu_j)^2}{g^2q^2(1+4\pi^2m^2\theta^2)}} \right\} \leqslant 1.$$

Поэтому

$$I_{21} \leqslant m^{\frac{s}{4}} \sum_{q \leqslant \frac{1}{2g} m^{\frac{1}{2}-\eta}} q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о. н. д.}\,(4\Delta m - c, q)}\, \frac{1}{qM} \leqslant$$

$$\leqslant m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{2}} \sum_{q=1}^{M} q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о. н. д.}\,(4\Delta m - c, q)} \leqslant m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon},$$

$$I_{22} \leqslant \sum_{q > \frac{1}{2g} m^{\frac{1}{2}-\eta}} q^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{о. н. д.}\,(4\Delta m - c, q)}\, m^{\frac{s}{2}} \frac{1}{qM} \leqslant$$

$$\leqslant m^{\frac{s}{2}+\varepsilon} \left(m^{\frac{1}{2}-\eta}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \leqslant m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\frac{\eta(s+1)}{2}+\varepsilon}$$

Оценка (51) доказана.

10°. Равенство (43), формула (50) и оценка (51) приводят нас к искомой асимптотической формуле (32).

Замечание доказано.

2. Вспомогательное предложение о кратных рядах Фурье. Мы используем следующее предложение, которое аналогично одной из лемм, содержащихся в монографии И. М. Виноградова [2].

Замечание 7. Пусть $r$ — целое неотрицательное число, $\mathfrak{E}$ — $n$-мерное квадрируемое по Жордану множество, лежащее в единичном кубе $\mathfrak{W}: 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1$, и пусть $\delta > 0$ — вещественное число. Тогда найдется вещественная функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ с периодом $\mathfrak{W}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Пусть $\mathfrak{E}_\delta$ — $\delta$-окрестность* границы множества $\mathfrak{E}$; рассмотрим множества $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} \cup \mathfrak{E}_\delta$ ($\delta$-окрестность множества $\mathfrak{E}$) и $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E} / \mathfrak{E}_\delta$ ($\delta$-внутренность множества $\mathfrak{E}$); ясно, что $\mathfrak{E}_2 \subset \mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}_1$. Тогда

* $\delta$-окрестность рассматривается (mod 1).

$$\left.\begin{aligned} \psi(x_1,\ldots,x_n)&=1, \quad \text{если } (x_1,\ldots,x_n)\in\mathfrak{E}_2. \\ \psi(x_1,\ldots,x_n)&=0, \quad \text{если } (x_1,\ldots,x_n)\notin\mathfrak{E}_1, \\ 0\leqslant\psi(x_1,\ldots,x_n)&\leqslant 1, \quad \text{если } (x_1,\ldots,x_n)\in\mathfrak{E}/\mathfrak{E}_2. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

2) Функция $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ разлагается в $n$-кратный ряд Фурье:

$$\psi(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{l_1,\ldots,l_n=-\infty}^{+\infty} c_{l_1,\ldots,l_n} e^{2\pi i(l_1x_1+\ldots+l_nx_n)}, \tag{53}$$

$$c_{l_1,\ldots,l_n}=\int_0^1\cdots\int_0^1\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\,e^{-2\pi i(l_1\xi_1+\ldots+l_n\xi_n)}\,d\xi_1\ldots d\xi_n,$$

причем

$$|c_{l_1\ldots l_n}|\leqslant\frac{1}{(\lambda_1\ldots\lambda_n)^r}, \quad \lambda_i=\left\{\begin{array}{ll}\frac{r\pi}{\sqrt{n}}\,\delta\,|l_i|, & \text{если } l_i\neq 0, \\ 1, & \text{если } l_i=0.\end{array}\right\} \quad (i=1,\ldots,n) \tag{54}$$

Доказательство. Пусть $\psi_0(x_1,\ldots,x_n)$ — характеристическая функция области $\mathfrak{E}$. Для $r=0$ замечание очевидно: за функцию $\psi$ можно взять $\psi_0$. Пусть $r>0$. Обозначим $\delta_1=\frac{1}{2r\sqrt{n}}\,\delta$ и построим последовательно $r$ функций

$$\psi_k(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\delta_1)^n}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\cdots\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\psi_{k-1}(x_1+z_1,\ldots,x_n+z_n)\,dz_1\ldots dz_n.$$

Ясно, что все $\psi_k\,(k=0,1,\ldots,r)$ удовлетворяют условиям (52). Пусть $c^{(k)}_{l_1\ldots l_n}$ — коэффициент Фурье для функции

$$\psi_k(x_1,\ldots,x_n) \quad (k=1,\ldots,r).$$

Найдем связь между $c^{(k)}_{l_1\ldots l_n}$ и $c^{(k-1)}_{l_1\ldots l_n}$. Имеем:

$$c^{(k)}_{l_1\ldots l_n}=\int_0^1\cdots\int_0^1\psi_k(x_1,\ldots,x_n)\,e^{-2\pi i(l_1x_1+\ldots+l_nx_n)}\,dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\int_0^1\cdots\int_0^1\left\{\frac{1}{(2\delta_1)^n}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\cdots\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\psi_{k-1}(x_1+z_1,\ldots,x_n+z_n)\,dz_1\ldots dz_n\right\}\times$$

$$\times\, e^{-2\pi i(l_1x_1+\ldots+l_nx_n)}\,dx_1\ldots dx_n=\frac{1}{(2\delta_1)^n}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\cdots\int_{-\delta_1}^{\delta_1}dz_1\ldots dz_n\,\times$$

$$\times\int_0^1\cdots\int_0^1\psi_{k-1}(x_1+z_1,\ldots,x_n+z_n)e^{-2\pi i(l_1x_1+\ldots+l_nx_n)}\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\frac{1}{(2\delta_1)^n}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\cdots\int_{-\delta_1}^{\delta_1}dz_1\ldots dz_n\,e^{2\pi i(l_1z_1+\ldots+l_nz_n)}\times$$

$$\times\int_0^1\cdots\int_0^1\psi_{k-1}(y_1,\ldots,y_n)\,e^{2\pi i(l_1y_1+\ldots+l_ny_n)}\,dy_1\ldots dy_n=$$

$$=\frac{c^{(k-1)}_{l_1\ldots l_n}}{(2\delta_1)^n}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\cdots\int_{-\delta_1}^{\delta_1}e^{2\pi i(l_1z_1+\ldots+l_nz_n)}\,dz_1\ldots dz_n=c^{(k-1)}_{l_1\ldots l_n}\Lambda_1\ldots\Lambda_n,$$

где

$$\Lambda_j = \begin{cases} 1, & \text{если } l_j = 0, \\ \dfrac{e^{2\pi\delta_1 l_j} - e^{2\pi i\delta_1 l_j}}{4\pi i\delta_1 l_j}, & \text{если } l_j \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда мы уже без труда получаем неравенства (54) для $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \psi_r(x_1, \ldots, x_n)$.

Замечание доказано.

В случае выпуклой области $\mathfrak{E}$ мы при помощи этого замечания можем построить две функции, используемые в дальнейшем.

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{E}$ — *выпуклая область. Тогда в условиях и обозначениях замечания* 7 *найдутся функции* $\psi_1(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\psi_2(x_1, \ldots, x_n)$ *с периодом* $\mathfrak{W}$, *удовлетворяющие условиям* (53) *и* (54) *и такие, что*

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x_1, \ldots, x_n) &= 1, \quad \textit{если} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{E}, \\ \psi_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \quad \textit{если} \quad (x_1, \ldots, x_n) \notin \mathfrak{E}_1, \\ 0 \leqslant \psi_1(x_1, \ldots, x_n) &\leqslant 1, \quad \textit{если} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{E}_1/\mathfrak{E}; \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_2(x_1, \ldots, x_n) &= 1, \quad \textit{если} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{E}_2, \\ \psi_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \quad \textit{если} \quad (x_1, \ldots, x_n) \notin \mathfrak{E}, \\ 0 \leqslant \psi_2(x_1, \ldots, x_n) &\leqslant 1, \quad \textit{если} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{E}/\mathfrak{E}_2. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

3. Доказательство асимптотической формулы в случае $Q = \sum_{j=1}^{s} a_j x_j^2$. Докажем для этого случая теорему 1.

1°. Не нарушая общности, будем считать, что область $\Omega$ целиком лежит в первом квадранте $x_1 \geqslant 0, \ldots, x_s \geqslant 0$. В противном случае $\Omega$ можно разбить координатными плоскостями на части, каждая из которых лежит в одном квадранте. Точно так же можно считать, что область $\Omega$ не касается своей границей плоскости $x_s = 0$. В противном случае можно опять-таки разбить область $\Omega$ на дополнительные куски, а проектирование $n^\circ$ 2 вести не на плоскость $x_s = 0$, а на подходяще выбранную другую координатную плоскость.

2°. Пусть $\Omega_1$ — центральная (относительно начала координат) проекция области $\Omega$ на единичный эллипсоид $\sum_{j=1}^{s} a_j x_j^2 = 1$, а $\mathfrak{E}$ — проекция $\Omega_1$ на плоскость $x_s = 0$. $\mathfrak{E}$ — выпуклая $(s-1)$-мерная область, целиком лежащая в $(s-1)$-мерном кубе $\mathfrak{W}: 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant x_{s-1} \leqslant 1$. Ясно, что $(x_1, \ldots, x_s) \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $a_1 x_1^2 + \ldots + a_s x_s^2 = m$ и $\left(\frac{x_1}{\sqrt{m}}, \ldots, \frac{x_{s-1}}{\sqrt{m}}\right) \in \mathfrak{E}$.

3°. Пусть $m_1$ — целое число с условием $m_1 \geqslant m$. Фиксируем вещественное число $\eta$, $0 < \eta < \frac{1}{2}$, вещественное число $\theta$, $0 < \theta < 1$ и целое положительное число $r$, не зависящее от $m$. Конкретные значения для $m_1$, $\eta$, $\theta$ и $r$ мы выберем в дальнейшем.

Положим

$$\delta = \frac{1}{m_1^{(1-\theta)\eta}}$$

и построим в соответствии со следствием из замечания 7 функцию $\psi_1(x_1, \ldots, x_{s-1})$, удовлетворяющую условиям:

а)

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x_1, \ldots, x_{s-1}) = 1, \quad &\text{если} \quad (x_1, \ldots, x_{s-1}) \in \mathfrak{E}, \\ \psi_1(x_1, \ldots, x_{s-1}) = 0, \quad &\text{если} \quad (x_1, \ldots, x_{s-1}) \notin \mathfrak{E}_1, \\ 0 \leqslant \psi_1(x_1, \ldots, x_{s-1}) \leqslant 1, \quad &\text{если} \quad (x_1, \ldots, x_{s-1}) \in \mathfrak{E}_1/\mathfrak{E}, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

где $\mathfrak{E}_1$ — $\delta$-окрестность (mod 1) множества $\mathfrak{E}$;

б) $\psi_1(x_1, \ldots, x_{s-1})$ разлагается в ряд Фурье

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_{s-1}) = \sum_{l_1, \ldots, l_{s-1}=-\infty}^{+\infty} c_{l_1 \ldots l_{s-1}} e^{2\pi i (l_1 x_1 + \ldots + l_{s-1} x_{s-1})}, \tag{58}$$

коэффициенты которого удовлетворяют оценкам:

$$| c_{l_1 \ldots l_{s-1}} \leqslant | \frac{1}{(\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{s-1})^r}, \quad \lambda_j = \begin{cases} \frac{\pi}{r(s-1)} \delta |l_j|, & \text{если } l_j \neq 0, \\ 1 & , \text{если } l_j = 0. \end{cases} \tag{59}$$

4°. Пусть

$$r_1(f, \Omega, g; m) = \sum_{l_1, \ldots, l_{s-1}=-\infty}^{+\infty} c_{l_1 \ldots l_{s-1}} r\left(f;\ \frac{l_1}{\sqrt{m}}, \ldots, \frac{l_{s-1}}{\sqrt{m}}, 0; g, m\right). \tag{60}$$

Ряд сходится в силу оценок (59) и того очевидного факта, что

$$r(f; \mu_1, \ldots, \mu_s; g; m) \leqslant r(f, m), \tag{61}$$

где $r(f, m)$ — общее количество целых точек на эллипсоиде $a_1 x_1^2 + \ldots$ $\ldots + a_s x_s^2 = m$. По определению $r(f; \mu_1, \ldots, \mu_s;\ g;\ m)$ имеем:

$$r_1(f, \Omega, g; m) = \sum_{l_1, \ldots, l_{s-1}=-\infty}^{+\infty} c_{l_1 \ldots l_{s-1}} \sum_{\substack{a_1 x_1^2 + \ldots + a_s x_s^2 = m \\ x_1 \equiv b_1, \ldots, x_s \equiv b_s \pmod{g}}} e^{2\pi i \left(\frac{x_1}{\sqrt{m}} l_1 + \ldots + \frac{x_{s-1}}{\sqrt{m}} l_{s-1}\right)} =$$

$$= \sum_{\substack{a_1 x_1^2 + \ldots + a_s x_s^2 = m \\ x_1 \equiv b_1, \ldots, x_s \equiv b_s \pmod{g}}} \sum_{l_1, \ldots, l_{s-1}=-\infty}^{+\infty} c_{l_1 \ldots l_{s-1}} e^{2\pi \left(\frac{x_1}{\sqrt{m}} l_1 + \ldots + \frac{x_{s-1}}{\sqrt{m}} l_{s-1}\right)} =$$

$$= \sum_{\substack{a_1 x_1^2 + \ldots + a_s x_s^2 = m \\ x_1 \equiv b_1, \ldots, x_s \equiv b_s \pmod{g}}} \psi_1\left(\frac{x_1}{\sqrt{m}}, \ldots, \frac{x_{s-1}}{\sqrt{m}}\right).$$

Следовательно,

$$r(f, \Omega, g; m) \leqslant r_1(f, \Omega, g; m). \tag{62}$$

5°. Докажем, что для достаточно больших $r$

$$r_1(f, \Omega, g; m) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m^{\frac{s}{2}-1} H(f, g;\ m) R(\psi_1) + O\left(m_1^{\frac{s}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\eta(3s-1)}{2} + \varepsilon}\right), \tag{63}$$

где

$$R(\psi_1) = \sum_{l_1, \ldots, l_{s-1} = -\infty}^{+\infty} c_{l_1 \ldots l_{s-1}} J\left(\pi^2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{l_j^2}{a_j}\right). \tag{64}$$

Действительно, по замечанию 6, для $\sqrt{l_1^2 + \ldots + l_{s-1}^2} < m^\eta$ имеет место асимптотическая формула:

$$r\left(f; \frac{l_1}{\sqrt{m}}, \ldots, \frac{l_{s-1}}{\sqrt{m}}, 0; g; m\right) =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{s}{2}} m^{\frac{s}{2}-1}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} J\left(\pi^2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{l_j^2}{a_j}\right) H(f, g;\ m) + O\left(m^{\frac{s}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\eta(s+1)}{2} + \varepsilon}\right). \tag{65}$$

Поэтому

$$\sum_{\sqrt{l_1^2 + \ldots + l_{s-1}^2} < m^\eta} c_{l_1 \ldots l_{s-1}} r\left(f; \frac{l_1}{\sqrt{m}}, \ldots, \frac{l_{s-1}}{\sqrt{m}}, 0; g;\ m\right) =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{s}{2}} m^{\frac{s}{2}-1}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} H(f, g; m) \sum_{\sqrt{l_1^2 + \ldots + l_{s-1}^2} < m^\eta} c_{l_1 \ldots l_{s-1}} J\left(\pi^2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{l_j^2}{a_j}\right) +$$

$$+ O\left(m^{\frac{s}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\eta(s+1)}{2} + \varepsilon} \sum_{\sqrt{l_1^2 + \ldots + l_{s-1}^2} < m^\eta} |c_{l_1 \ldots l_{s-1}}|\right) =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{s}{2}} m^{\frac{s}{2}-1}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} H(f, g;\ m) \sum_{\sqrt{l_1^2 + \ldots + l_{s+1}^2} < m^\eta} c_{l_1 \ldots l_{s-1}} J\left(\pi^2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{l_j^2}{a_j}\right) +$$

$$+ O\left(m^{\frac{s}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\eta(3s-1)}{2} + \varepsilon}\right).$$

Далее, так как $J(z) \ll 1$ и (например, в силу замечания 6)

$$r(f; \mu_1, \ldots, \mu_s; g; m) \leqslant r(f, m) \ll m^{\frac{s}{2} - 1 + \varepsilon},$$

то, используя оценки (59), получаем:

$$\sum_{\sqrt{l_1^2 + \ldots + l_{s-1}^2} \geqslant m^\eta} c_{l_1 \ldots l_{s-1}} \left\{ r\left(f; \frac{l_1}{\sqrt{m}}, \ldots, \frac{l_{s-1}}{\sqrt{m}}, 0; g;\ m\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi^{\frac{s}{2}} m^{\frac{s}{2}-1}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} H(f, g;\ m) J\left(\pi^2 \sum_{j=1}^{s-1} \frac{l_j^2}{a_j}\right) \right\} \ll$$

$$\ll m^{\frac{s}{2} - 1 + \varepsilon} \sum_{\sqrt{l_1^2 + \ldots + l_{s-1}^2} \geqslant m^\eta} |c_{l_1 \ldots l_{s-1}}| \ll m^{\frac{s}{2} - 1 + \varepsilon} \sum_{l \geqslant m^\eta} \frac{1}{(l\delta)^r} \ll$$

$$\ll m^{\frac{s}{2} - 1 + \varepsilon - (r-1)\eta} \delta^r \ll m_1^{\frac{s}{2} - 1 - \eta(r\theta - 1) + \varepsilon}$$

При любых фиксированных $\eta > 0$ и $\theta > 0$ мы можем подобрать $r$ столь

большим, что

$$\frac{s}{2} - 1 - \eta(r\theta - 1) < \frac{s}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\eta(3s-1)}{2}.$$

Отсюда мы получаем оценку (63).

6°. Для вычисления $R(\psi_1)$ применим прием И. М. Виноградова (2). Пусть $\Omega_1$ — эллиптическая область, отвечающая в соответствии, установленном в $n^\circ 2$, области $\mathfrak{E}_1$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_1$ части эллипсоида

$$f = a_1 x_1^2 + \ldots + a_s x_s^2 \leqslant m_1,$$

лежащие соответственно в конусах с вершиной в начале координат и направляющими $\Omega$ и $\Omega_1$. Известно [см., например, (20)], что количество $v(f, \mathfrak{S}, g; m_1)$ целых точек, лежащих в $\mathfrak{S}$ и сравнимых с $(b_1, \ldots, b_s)$ по модулю $g$, при $m_1 \to \infty$ равно

$$v(f, \mathfrak{S}, g; m_1) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{g^s} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m_1^{\frac{s}{2}} + O\left(m^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right), \tag{66а}$$

где $\omega$ есть $f$-эллиптический телесный угол области $\Omega$, а $\omega_0 = \dfrac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ — полный телесный угол $s$-мерного пространства. При этом постоянные, входящие в $O$, зависят от $\omega$ (и не зависят от $\Omega$). Заменяя $\Omega$ на $\Omega_1$ и на весь эллипсоид, получим следующие формулы:

$$v(f, \mathfrak{S}_1, g; m_1) = \frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{1}{g^s} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m_1^{\frac{s}{2}} + O\left(m_1^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right), \tag{66б}$$

$$v(f, g; m_1) = \frac{1}{g^s} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m_1^{\frac{s}{2}} + O\left(m_1^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right), \tag{66в}$$

где $\omega_1$ — $f$-эллиптический телесный угол области $\Omega_1$, а $v(f, g; m)$ — количество целых точек, лежащих в эллипсоиде $f(x_1, \ldots, x_s) \leqslant m$ и сравнимых с $(b_1, \ldots, b_s)$ по модулю $g$.

Пусть $r(f, g; m)$ — количество целых примитивных точек $(x_1, \ldots, x_s)$, лежащих на поверхности эллипсоида $a_1 x_1^2 + \ldots + a_s x_s^2 = m$ и сравнимых с $(b_1, \ldots, b_s)$ по модулю $g$. Тогда замечание 6 дает:

$$r(f; g; m) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{m}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m^{\frac{s}{2}-1} H(f, g; m) + O\left(m_1^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\varepsilon}\right),$$

и так как

$$\sum_{m=1}^{m_1} r(f, g; m) = v(f, g; m_1),$$

то

$$\sum_{m=1}^{m_1} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m^{\frac{s}{2}-1} H(f, g;\, m) = \frac{1}{g^s} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m_1^{\frac{s}{2}} + $$

$$+ O\left(m_1^{\frac{s}{4}+\frac{3}{4}+\varepsilon} + m_1^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right). \tag{67}$$

Далее мы имеем:

$$v(f, \Omega, g;\, m_1) \leqslant \sum_{m=1}^{m_1} r_1(f, \Omega, g;\, m) \leqslant v(f, \Omega_1, g, m_1),$$

а потому, учитывая, что $\omega_1 = \omega + O(\delta)$, и используя формулы (66а) и (66б), будем иметь:

$$\sum_{m=1}^{m_1} r_1(f, \Omega, g;\, m) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{g^s} \frac{\pi^{\frac{s}{2}} m_1^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + O\left(m_1^{\frac{s}{2}-(1-\theta)\eta} + m_1^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right). \tag{68}$$

С другой стороны, по формулам (63) и (67),

$$\sum_{m=1}^{m_1} r_1(f, \Omega, g;\, m) = R(\psi_1) \frac{1}{g^s} \frac{\pi^{\frac{s}{2}} m_1^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} + O\left(m_1^{\frac{s}{4}+\frac{3}{4}+\frac{\eta(3s-1)}{2}+\varepsilon} + m_1^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right). \tag{69}$$

Приравнивая (68) и (69), получим:

$$R(\psi_1) = \frac{\omega}{\omega_0} + O\left(m_1^{-\frac{s}{4}+\frac{3}{4}+\frac{\eta(3s-1)}{2}+\varepsilon} + m_1^{-(1-\theta)\eta} + m_1^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{70}$$

Подставляя это выражение в (63) и полагая $m_1 = m$, получаем формулу для $r_1(f, \Omega, g;\, m)$:

$$r_1(f, \Omega, g;\, m) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m^{\frac{s}{2}-1} H(f, g;\, m) + $$

$$+ O\left(m^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\frac{\eta(3s-1)}{2}+\varepsilon} + m^{\frac{s}{2}-1-(1-\theta)\eta+\varepsilon} + m^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}+\varepsilon}\right).$$

Полагая $\theta = \varepsilon$, $\eta = \frac{s-3}{2(3s+1)}$, окончательно будем иметь:

$$r_1(f, \Omega, g;\, m) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m^{\frac{s}{2}-1} H(f, g;\, m) + O\left(m^{\frac{s}{2}-1-\frac{s-3}{6s+2}+\varepsilon}\right). \tag{71}$$

7°. Повторяя рассуждения $n^\circ$ 3—6 и заменяя $\psi_1$ на $\psi_2$, мы придем к такой же асимптотической формуле для величины

$$r_2(f, \Omega, g;\, m) \leqslant r(f, \Omega, g;\, m).$$

Поэтому

$$r(f, \Omega, g;\, m) = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{\Delta}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} m^{\frac{s}{2}-1} H(f, g;\, m) + O\left(m^{\frac{s}{2}-1-\frac{s-3}{6s+2}+\varepsilon}\right). \tag{72}$$

Итак, теорема 1 в случае формы $f = a_1 x_1^2 + \ldots + a_s x_s^2$ доказана.

4. Сведéние общего случая к предыдущему. В общих чертах мы будем следовать тому же пути, что и В. А. Тартаковский (1).

1°. По теореме Якоби, найдутся такие целые числа $c_{ij}\ (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant s)$, $c_i\ (i = 1, \ldots, s)$ и $c$, что

$$cf(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{j=1}^{s} c_j y_j^2 = \widetilde{f}(y_1, \ldots, y_s), \tag{73}$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots && + c_{1s}x_s, \\ y_2 &= \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots && + c_{2s}x_s, \\ y_{s-1} &= \qquad\qquad\qquad c_{s-1,\,s-1}x_{s-1} && + c_{s-1,\,s}\, x_s \\ y_s &= && \quad c_{ss}x_s. \end{aligned} \tag{74}$$

При этом

$$\begin{gathered} [c_{00} = 1],\ c_{11} = a_{11},\ c_{22} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ldots, c_{ss} = \det(a_{ij}) = \Delta, \\ c = c_{11}c_{22}\ldots c_{ss}, \quad c_j = \frac{c}{c_{j-1,\, j-1}c_{jj}}. \end{gathered} \tag{75}$$

Когда $(x_1, \ldots, x_s)$ пробегает все целые точки, сравнимые с $(b_1, \ldots, b_s)$ по модулю $g$, $(y_1, \ldots, y_s)$ пробегает определенные $\sigma = c^{s-1}$ классов вычетов $(\operatorname{mod} gc)$. Пусть это будут классы вычетов с представителями

$$(y_1^{(1)}, \ldots, y_s^{(1)}), \ldots, (y_1^{(\sigma)}, \ldots, y_s^{(\sigma)}) \pmod{gc}. \tag{76}$$

2°. Подстановка (74) переводит область $\Omega$ эллипсоида $f(x_1, \ldots, x_s) = m$ с $f$-эллиптическим телесным углом $\omega$ в область $\widetilde{\Omega}$ эллипсоида

$$\widetilde{f}(y_1, \ldots, y_s) = \sum_{j=1}^{s} c_j y_j^2 = cm,$$

$\widetilde{f}$-эллиптический угол которой также равен $\omega$. Ясно, что *

$$r(f;\ \Omega;\ g, b_1, \ldots, b_s;\ m) = \sum_{\nu=1}^{\sigma} r(\widetilde{f};\ \widetilde{\Omega};\ gc,\ y_1^{(\nu)}, \ldots, y_s^{(\nu)};\ cm). \tag{77}$$

Поэтому, если учесть, что $c_1 \cdots c_s = c^{s-2}\Delta$, то формула (72) дает асимптотическое равенство:

$$r(f;\ \Omega;\ g, b_1, \ldots, b_1;\ m) =$$

$$= \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\pi^{\frac{s}{2}} m^{\frac{s}{2}-1}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{\nu=1}^{\sigma} H(\widetilde{f};\ gc,\ y_1^{(\nu)}, \ldots, y_s^{(\nu)};\ cm) + O\left(m^{\frac{s}{2} - 1 - \frac{s-3}{6s+2} + \varepsilon}\right). \tag{78}$$

3°. Таким образом, для доказательства теоремы 1 нам достаточно доказать, что

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} H(\widetilde{f};\ gc, y_1^{(\nu)}, \ldots, y_s^{(\nu)};\ m) = H(f;\ g,\ b_1, \ldots, b_s;\ m). \tag{79}$$

---

* $r(f;\ \Omega;\ g;\ b_1, \ldots, b_s;\ m) = r(f,\ \Omega,\ g;\ m)$ — количество целых примитивных точек области $\Omega$, сравнимых с $(b_1, \ldots, b_s) \pmod g$.

ы имеем [ср. ([1])]:

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} S_{gc;\, y_1^{(\nu)}, \ldots, y_s^{(\nu)}} (\widetilde{f}, q) = \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{1}{(gc)^s} \sum_{y_1, \ldots, y_s=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{\widetilde{f}(gcy_1+y_1^{(\nu)}, \ldots, gcy_s+y_s^{(\nu)})}{q}} =$$

$$= \frac{1}{(gc)^s} \sum_{y_1, \ldots, y_s=0}^{q-1} \sum_{\nu=1}^{\sigma} e^{\frac{2\pi i \widetilde{f}(gcy_1+y_1^{(\nu)}, \ldots, gcy_s+y_s^{(\nu)})}{q}} =$$

$$= \frac{\sigma}{(gc)^s} \sum_{x_1, \ldots, x_s=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{cf(gx_1+b_1, \ldots, gx_s+b_s)}{q}} = \frac{1}{c} S_{g;\, b_1, \ldots, b_s}(cf;\ q).$$

ссюда получаем, что

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} H(\widetilde{f};\, gc,\ y_1^{(\nu)}, \ldots, y_s^{(\nu)};\ cm) = \frac{1}{c} H(cf;\ g,\ b_1, \ldots, b_s;\ cm). \qquad (80)$$

Далее, проводя непосредственно выкладки, аналогичные выкладкам 3 статьи ([1]), получаем:

$$H(cf;\ g,\ b_1, \ldots, b_s;\ cm) = cH(f;\ g,\ b_1, \ldots, b_s;\ m).$$

так,

$$H(cf;\ g,\ b_1, \ldots, b_s;\ cm) = cH(f;\ g,\ b_1, \ldots, b_s;\ m). \qquad (81)$$

Равенства (80) и (81) дают нам равенство (79), и асимптотическая рмула (78) превращается в искомую формулу (7). Тем самым теорема 1 казана в общем случае.

5. Доказательство теоремы 2. В случае формы $f = a_1x_1^2 + \ldots + a_sx_s^2$ теорема 2 содержится в замечании 6, если положить $\mu_1 = \ldots = \mu_s = 0$, $= 0$. Общий случай сводится к этому по методу В. А. Тартаковского ([1]) ким же путем, как для теоремы 1 в п. 4. Заметим, что доказательство мечания 6 в случае $\mu_1 = \ldots = \mu_s = 0$ можно заметно упростить.

Ленингр. отделение Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР

Поступило 25. XII. 1958

ЛИТЕРАТУРА

Тартаковский В. А., Die Gesammtheit der Zahlen, die durch eine positive quadratische Form $F(x_1, \ldots, x_s)$ $(s \geqslant 4)$ darstellbar sind, Известия Ак. наук СССР, отд. физ.-матем. (1929), 111—122, 165—196.

Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. института им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXIII, 1947.

Wright E. M., The representation of a number as a sum of five or more squares, Quart. J. Math., 4 (1933), 37—51, 228—232.

Wright E. M., The representation of a number as a sum of four almost proportional squares, Quart. J. Math., 7 (1936), 230—240.

Wright E. M., The representation of a number as a sum of three or four squares, Proc. London Math. Soc., (2), 42 (1937), 481—500.

Siegel C. L., Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, Ann. of Math., (2), 36 (1935), 527—606; 37 (1936), 230—263; 38 (1937), 212—291.

Линник Ю. В., Асимптотическое распределение целых точек на сфере, Доклады Ак. наук СССР, 96 (1954), 909—912.

Малышев А. В., Асимптотическое распределение целых точек на некоторых эллипсоидах, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 21 (1957), 457—500.

[9] Kloosterman H. D., On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$, Acta Math., 49 (1926), 407—464.
[10] Gauss K. F., Summatio quarumdam serierum singularium, 1808.
[11] Вальфиш А. З., О представлении чисел суммами квадратов. Асимптотические формулы, Успехи матем. наук, VII, № 6 (1952), 97—178.
[12] Kloosterman H. D., Asymptotische Formeln für die Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen, Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ., 5 (1927), 337—352.
[13] Estermann T., Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman, Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ., 7 (1930), 82—98.
[14] Salié H., Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$, Math. Z., 34 (1931), 91—109.
[15] Salié H., Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen, Math. Z., 36 (1932), 263—278.
[16] Davenport H., On certain exponential sums, J. reine angew. Math., 169 (1933), 158—176.
[17] Rademacher H., Trends in research: the analytic number theory, Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1942), 379—401.
[18] Weil A., On some exponential sums, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34 (1948), 204—207.
[19] Виноградов И. М., Основы теории чисел, М.— Л., 1952.
[20] Steinhaus H., Sur un théorème de M. V. Jarnik, Colloquium Math., 1 (1948), 1—5.
[21] Eichler M., Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion, Arch. Math., 5 (1954), 355—366.
[22] Малышев А. В., О распределении целых точек на четырехмерной сфере, Доклады Ак. наук СССР, 114 (1957), 25—28.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 365—386

Б. Н. ДЕЛОНЕ

# ТЕОРИЯ ПЛАНИГОНОВ

В работе изучаются разбиения плоскости на фундаментальные области для двумерных федоровских групп и определяются все возможные символы смежности, задающие те движения, при помощи которых данная фундаментальная область переходит в смежные с ней. Показано, что весь вопрос является комбинаторно-топологическим, и таким образом получен новый чисто топологический вывод двумерных федоровских групп.

Е. С. Федоров называл многоугольник планигоном, если равными или вными и симметричными ему многоугольниками можно покрыть плоость так, чтобы никакие два из них не имели общих внутренних точек разбиение это было правильным (в смысле Федорова), т. е. чтобы всяй из этих многоугольников был окружен всеми другими до бесконечсти ровно так же, как всякий другой из них. Аналогичные многогранки трехмерного пространства Федоров называл стереоэдрами. Насколько знаю, до настоящего времени не построено удовлетворительной теории же для разбиения плоскости Эвклида на планигоны *. Что же касается збиения пространства на стереоэдры, то, несмотря на многочисленные пытки кристаллографов, теорию таких разбиений пока еще очень мало лось сдвинуть с места. Очевидно, что вопрос о планигонах и стереорах тесно связан с вопросом о фундаментальных областях двух- и трехрных федоровских групп. Мы будем называть эту теорию теорией бщих» планигонов и стереоэдров, причем теорию таких областей для -мерного пространства также будем называть теорией общих, $n$-мерных, тереоэдров.

Рассмотрим некоторую двух-, трех- или $n$-мерную федоровскую группу и некоторую точку $A$ пространства, не неподвижную по отношению к той группе, т. е. такую, что она не совмещается с собою никаким пребразованием группы $F$, кроме тождественного. Если мы преобразуем очку $A$ всеми преобразованиями группы $F$, то получится некоторая равильная в смысле Зонке — Федорова система точек. Области Дирихле очек такой системы, очевидно, дадут некоторое разбиение $n$-мерного протранства на выпуклые фундаментальные области группы $F$. Так полуенное разбиение на выпуклые стереоэдры мы будем называть разбиением а стереоэдры Дирихле или, кратко, разбиением Дирихле. Оно будет, чевидно, зависеть как от выбранной группы $F$ и ее метрических пара-

* В знаменитом мемуаре Пуанкаре о фуксовых группах дано решение аналоичного метрического вопроса для плоскости Лобачевского и лишь для групп, остоящих только из движений Лобачевского, не меняющих ориентации.

метров, так, вообще говоря, и от выбора точки $A$. Вороной в своей основополагающей работе ([1]) до конца решил вопрос о разбиениях Дирихле для того случая, когда $F = T$, т. е. когда $F$ есть просто группа параллельных переносов. А именно, он дал алгорифм, позволяющий для всякого данного числа измерений $n$ найти в конечном числе действий топологические типы всех возможных разбиений Дирихле и их метрику для групп $T$. Если кристаллографа или физика и могут интересовать разбиения на фундаментальные области для федоровских групп, то, конечно, в первую очередь должны интересовать как раз разбиения Дирихле.

В настоящей работе я, основываясь на одной, по существу собственно топологической лемме А. В. Шубникова ([2]) и Laves'а ([3]), даю полную теорию общих планигонов, а также планигонов Дирихле эвклидовой плоскости, причем попутно получается принципиально новый вывод федоровских групп — чисто топологический. Вопрос о том, как построить теорию общих стереоэдров для трехмерного эвклидова пространства, пока совсем неясен, так как для трехмерного пространства пока не удается найти теорему, аналогичную теореме Шубникова — Laves'а.

Полная же теория разбиений Дирихле, и не только для трехмерного, но и для $n$-мерного эвклидова пространства для любых федоровских групп, как я это недавно заметил, может быть построена при помощи моего метода пустого шара [см. ([4]), ([5])]. Ей будет посвящена работа Н. Н. Сандаковой, подготовляемая сейчас к печати.

## § 1. Топологическая теорема Шубникова — Laves'а

Первыми эту теорему заметили кристаллографы А. В Шубников и Laves. Я даю здесь подробное доказательство этой прекрасной теоремы по следующей причине. В статье ([2]) А. В. Шубникова, где о ней идет речь, во-первых, рассматривается лишь дуальный к ней случай, во-вторых, доказательств не приводится вовсе и, в-третьих, во всей статье рассматривается лишь метрическая задача о разбиениях Дирихле, но a priori не ясно, будет ли всякий топологический тип разбиения, даже на выпуклые планигоны, осуществляться в виде разбиения Дирихле. Правда, в § 5 я доказываю, что это так, но a priori это не ясно. В статье Laves'а ([3]) хотя и рассматривается как раз интересующая нас задача и подчеркивается, что теорема собственно топологическая, и даже отмечается роль требования, которое я ниже называю основной леммой интегрального исчисления, но доказательство не проводится чисто топологически и опускаются некоторые принципиальные детали.

Определение 1. Многоугольником называется совокупность $k$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и циклически соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ $\ldots, A_{k-1}A_k, A_kA_1$. Точки эти мы будем называть вершинами, а отрезки — сторонами.

Определение 2. Сеткой мы будем называть совокупность многоугольников такую, что:

1) во всех многоугольниках $k \geqslant 3$;

2) всякая сторона одного из рассматриваемых многоугольников является одновременно стороной одного и только одного другого из них,

который мы будем называть смежным с первым по рассматриваемой стороне;

3) рассматриваемая совокупность многоугольников связана по таким смежностям через стороны;

4) в любой вершине сходится, по крайней мере, три рассматриваемых многоугольника, причем все многоугольники сетки, сходящиеся в одной вершине, образуют «цикл»;

5) любые два многоугольника сетки либо вовсе не имеют общих элементов, либо имеют одну общую вершину, либо имеют одну общую сторону и тогда имеют две общие вершины — концы этой стороны;

6) сетка ориентируема.

Рассмотренные многоугольники сетки мы везде дальше будем называть клетками сетки.

Определение 3. Конечным односвязным комплексом клеток сетки мы будем называть такой конечный комплекс $M$ ее клеток, у которого все стороны, принадлежащие только одной (а не двум) его клетке (его граница), образуют один самонепересекающийся многоугольник, и эйлерова характеристика которого Г—Р+В равна 1.

Определение 4. Сеткой, удовлетворяющей основной лемме интегрального исчисления, мы будем называть такую, в которой можно выделить последовательность $M_1$, $M_2$, $M_3$... конечных односвязных комплексов, в которых отношение числа клеток, примыкающих к границе комплекса, к числу его внутренних клеток стремится к нулю. Такова обычная сетка квадратов на эвклидовой плоскости, но не таковы, например, как мы это покажем в дальнейшем, правильные сетки, соответствующие покрытиям плоскости Лобачевского одинаковыми многоугольниками.

Определение 5. Изоморфным отображением или просто отображением сетки на другую сетку мы будем называть такое ее отображение, при котором совокупности ее клеток, сторон и вершин каждая взаимно однозначно отображается на соответствующую совокупность образа и сохраняются все инцидентности в обе стороны.

Определение 6. Две сетки называются изоморфными или топологически тождественными, если они изоморфно отображаются друг на друга.

Определение 7. Правильной сеткой мы будем называть сетку, которая обладает такой группой изоморфных отображений на себя, что, какие бы две ее клетки $A$ и $B$ ни взять, в этой группе существует хоть одно отображение, отображающее клетку $A$ на клетку $B$.

ТЕОРЕМА. *Топологически разных правильных сеток, для которых удовлетворяется основная лемма интегрального исчисления, существует только 11, изображенных на таблице* II.

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь комплекс $M_i$ из какой-нибудь рассматриваемой в определении 4 последовательности $M_1$, $M_2$... комплексов клеток такой сетки. Для него будет:

$$\text{Г} - \text{Р} + \text{В} = 1. \tag{1}$$

В силу правильности сетки, все ее клетки имеют по одному и тому же числу $k$ сторон. В силу той же правильности, если в вершинах одной из клеток сходятся по $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ клеток (все $\alpha_i \geqslant 3$), то и в соответственных вершинах любой из клеток также сходится по столько же клеток. Если учесть, что

при увеличении номера $i$ комплекса $M_i$ рассматриваемой последовательности, в силу сделанного об этой последовательности предположения, число клеток, прилегающих к границе комплекса $M_i$, становится во сколько угодно раз меньше, чем число его внутренних клеток, то из формулы (1) получается равенство:

$$\Gamma - \Gamma \cdot \frac{k}{2} + \Gamma \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_k}\right) = \beta,$$

где $\beta$ во сколько угодно раз меньше, чем $\Gamma$, так как каждое ребро принадлежит двум клеткам, каждая вершина — стольким клеткам, сколько в ней сходится клеток. Устремляя $i$ к бесконечности, мы получаем отсюда формулу:

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_k} = \frac{k}{2} - 1, \qquad (2)$$

из которой сразу видно, что $k \leqslant 6$, так как предположение $k \geqslant 7$, даже если взять все $\alpha_i = 3$, уже дает

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_k} = \frac{k}{3} < \frac{k}{2} - 1.$$

Придавая же $k$ значения $6, 5, 4, 3$, мы найдем, что уравнение (2) имеет лишь 16 решений в натуральных числах $\alpha_i \geqslant 3$, которые имеют следующий вид:

| $k$ | $\alpha_i$ |
|---|---|
| 6 | (3, 3, 3, 3, 3, 3) |
| 5 | (3, 3, 3, 3, 6) (3, 3, 3, 4, 4) |
| 4 | (3, 3, 6, 6) (3, 3, 4, 12) (3, 4, 4, 6) (4, 4, 4, 4) |
| 3 | (3, 12, 12) (3, 8, 24) (3, 9, 18) (3, 7, 42) (4, 5, 20) (4, 6, 12) (4, 8, 8) (5, 5, 10) (6, 6, 6) |

Покажем, во-первых, что шесть подчеркнутых случаев вообще не могут иметь места. С этой целью для каждого случая будем строить последовательные клетки, сходящиеся в вершине, и убедимся, что последняя из них

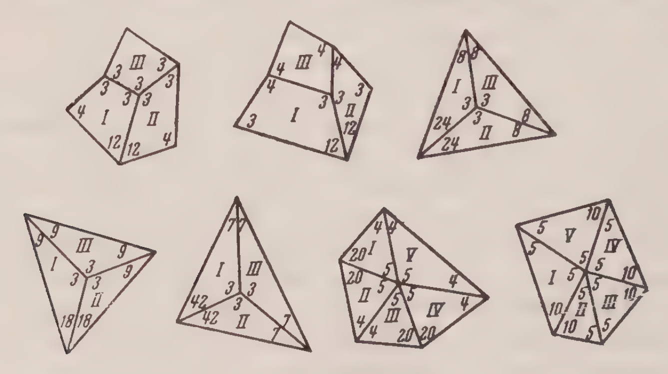


Рис. 1

получит другой, чем остальные, ряд $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ (рис. 1). При этом для случая $(3, 3, 4, 12)$ надо будет испытать и тот случай, когда тройные вершины — соседние, и тот случай, когда они несоседние.

Покажем далее, что в случае $(3, 3, 6, 6)$ тройные, а в случае $(3, 4, 4, 6)$ четверные вершины не могут быть соседними (рис. 2). В результате от-

расывания рассмотренных сейчас восьми случаев остается всего 11 озможностей (см. таблицу I).

Покажем, что каждый из этих случаев ведет к одной и притом только дной из топологически вполне определенных сеток, которые оказыва- ются правильными, и простейшие ме- рические осуществления которых на вклидовой плоскости даны в таблице II.

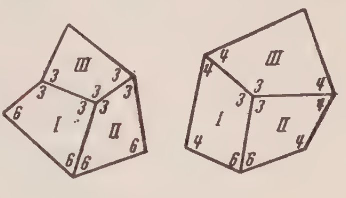


Рис. 2

По фигурам таблицы II вся сетка осстанавливается следующим образом. сли фигура — шестиугольник, то стро- тся обычное разбиение плоскости на динаковые правильные шестиугольники указанное на фигуре подразделение шестиугольника на клетки сетки ереносится во все эти шестиугольники в параллельном положении. Анало-

Таблица I

Таблица II

ичное построение делается и для квадратов. Например, случаи 2, 3 и 4 ают сетки с пятиугольными клетками (см. рис. 3, 4, 5 на стр. 370).

Эти 11 сеток я буду называть сетками Laves'a, причем в самое понятие сетка Laves'a» я буду вкладывать только ее топологический тип. Таблицу II егко запомнить. Номера в таблице II соответствуют номерам в таблице I. aves'овские сетки я буду дальше везде обозначать так:

$$\underbrace{L_6}_{1}\quad \underbrace{L_{5A}L_{5B}L_{5C}}_{2\ \ 3\ \ 4}\quad \underbrace{L_{4A}L_{4B}L_{4C}}_{5\ \ 6\ \ 7}\quad \underbrace{L_{3A}}_{8}\underbrace{L_{3B}}_{9}\underbrace{L_{3C}}_{10}\underbrace{L_{3D}}_{11},$$

придерживаясь указанной выше нумерации. Здесь первый индекс при букве $L$ обозначает число $k$ сторон клетки сетки, а стоящая после него буква указывает, какая это из сеток с клетками с данным числом сторон.

Докажем высказанное выше утверждение, что каждый из случаев таблицы I дает одну и только одну сетку, а именно соответствующую

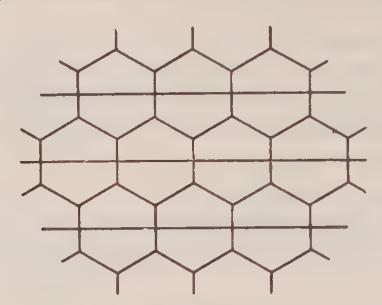


Рис. 3

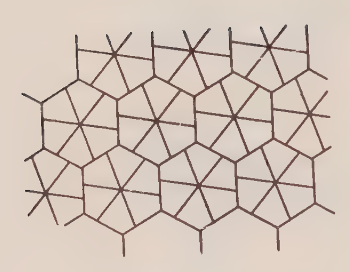


Рис. 4

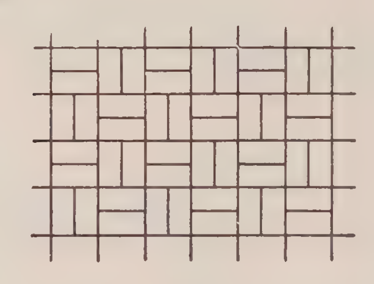


Рис. 5

сетку таблицы II. Для этого рассмотрим отдельно все 11 клеток таблицы I, учитывая, сколько клеток сходится и в каких вершинах клетки. Мы покажем сейчас, что каждая из клеток таблицы I неизбежно ведет к соответствующей фигуре таблицы II и что эти фигуры неизбежно складываются в соответствующую этой фугуре сетку.

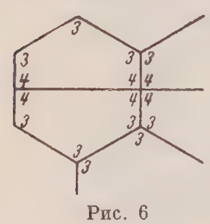



Рис. 6

Для клетки № 1 табл. I очевидно, что из нее можно построить одну и только одну сетку, гомеоморфную той, которая дает разбиение плоскости на одинаковые правильные шестиугольники. Для клетки № 2 по стороне 44, соединяющей две четверные вершины, непременно смежна другая клетка такою же стороною 44, и получается (рис. 6) фигура 2 таблицы II. Учитывая, что по сторонам 33 должны быть смежны стороны 33, а по сторонам 34, 43 — такие же стороны, мы получаем, что эти фигуры смежны друг с другом «в параллельном положении». В случае клетки № 3 по стороне 33 с ней непременно смежна другая клетка то же своей стороной 33. Далее, образовавшийся угол 43, 34 непременно должен заполняться углом 434 третьей клетки, к которой по оставшейся непокрытой ее стороне 33 прилегает своей стороной 33 клетка 4. Продолжая дальше эти два рассуждения, мы приходим (рис. 7) к фигуре 3 таблицы II.

Учитывая далее все эти же два обстоятельства, мы убеждаемся, что сами эти фигуры 3 прилегают друг к другу нужным образом «в параллельном положении». Перейдем теперь к клетке № 4. Она дает шестерку клеток, сходящихся в шестерной вершине, т. е. фигуру 4 таблицы II (см. рис. 8). Клетка № 4 имеет четыре тройные вершины, но только из двух средних $A$ и $B$ не исходит стороны 36. Взяв конец 3 какой-нибудь стороны 63 получившейся шестерки, мы видим, что во внешний угол этой шестерки, при нем образуемый, входит некоторая 7-я клетка № 4 одной из своих вершин $A$ или $B$, так как обе стороны, из него исходящие, суть 33. Если эта 7-я клетка уже построена, то, как легко видеть, все дальнейшее построение уже предопределено и получается сетка 4.

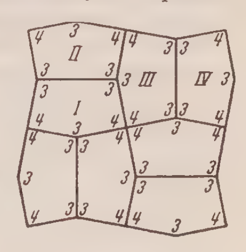


Рис. 7

Клетка № 5 дает сетку, получаемую при разбиении плоскости на квадраты, т. е. сетку 5. Клетка № 6 (рис. 9) — шестерку клеток, сходящихся в 6-й вершине, т. е. фигуру 6 таблицы II; учитывая затем, что по сторонам 34, 43 должны прилегать такие же стороны, мы убеждаемся, что эти фигуры непременно смежны «в параллельном положении», и получа-

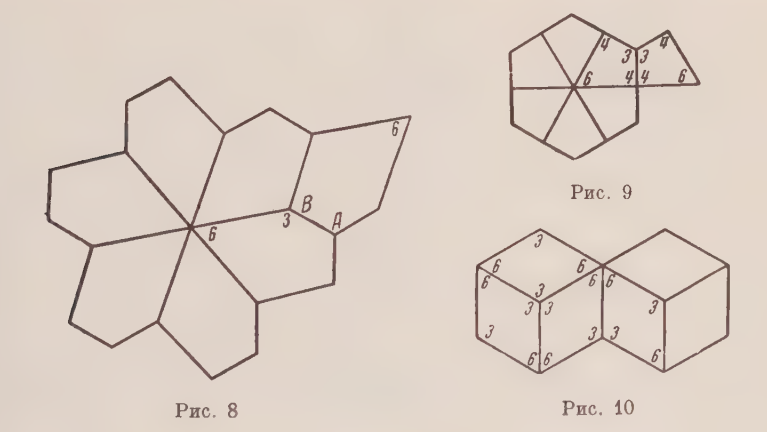


Рис. 8

Рис. 9

Рис. 10

ется сетка 6. Тройка клеток № 7, сходящихся в 3-й вершине, дает фигуру 7 таблицы II и затем сетку 7 (рис. 10). Так же, и даже еще проще, показываем, что клетки 8, 9, 10 и 11 дают сетки 8, 9, 10 и 11.

Этими соображениями утверждение доказано.

Сделаем еще два замечания.

A) Существование метрических осуществлений сеток Laves'а на эвклидовой плоскости, указанных в таблице II, показывает, что на эвклидовой плоскости существуют также 11, и только 11, топологически различных метрически правильных сеток, так как легко заметить, что в осуществлении таблицы II всякое топологическое отображение сетки на себя можно осуществить метрическим отображением (движением), переводящим ее в себя.

В) Непосредственный подсчет показывает, что для сеток Laves'а верна основная лемма интегрального исчисления. В этом же нас убеждает их метрическое осуществление.

Иначе обстоит дело на плоскости Лобачевского. Как известно, существует сколько угодно топологически различных метрически правильных (в смысле Лобачевского) сеток на плоскости Лобачевского. Таковы, например, сетки, состоящие из одинаковых правильных многоугольников с любым числом $k$ сторон и с любым данным числом $\alpha$ таких многоугольников, сходящихся в каждой вершине (где при $k = 3, 4, 5, 6$ $\alpha \geqslant 7$, $\geqslant 5$, $\geqslant 4$, $\geqslant 4$, а при $k > 6$ $\alpha \geqslant 3$), стоит только взять эти многоугольники для таких $k$ и $\alpha$ нужной величины. Но ни для какой метрически правильной сетки многоугольников плоскости Лобачевского уже не верна основная лемма интегрального исчисления.

Действительно, если бы это было так, то, в силу установленного утверждения, топологический тип сетки был бы одним из 11-ти типов Laves'а, а, как легко видеть, в силу существования на плоскости Лобачевского дефекта суммы углов многоугольника, ни один из этих 11-ти типов, как метрически (в смысле Лобачевского) правильный, существовать не может.

## § 2. Основные группы правильных сеток и их символы смежности

Пусть дана некоторая правильная сетка, безразлично — Laves'овская или нет, т. е. удовлетворяющая или не удовлетворяющая основной лемме интегрального исчисления. По самому определению ее правильности, группа $G$ всех возможных ее изоморфных отображений на себя такова, что, какие бы две ее клетки $A$ и $B$ ни взять, в ней существует отображение, отображающее клетку $A$ на клетку $B$. Если клетка $A$ переходит в $B$ несколькими отображениями группы $G$, то клетка $A$ столькими же ее отображениями отображается на себя. Эти отображения группы $G$ образуют некоторую конечную ее подгруппу $\Psi$, порядок которой есть, очевидно, делитель числа $2k$, где $k$ — число сторон клетки, так как отображения клетки на себя возможны не только «поворотами», но и «поворотами с отражениями». Существует ли в любой группе $G$ всегда такая подгруппа $F$, которая тоже, какие бы две клетки $A$ и $B$ ни задать, отображает $A$ на $B$, но в которой такое отображение только одно, т. е. подгруппа $\Psi$ которой сводится к одному тождественному отображению, я не знаю. Если такая группа у данной правильной сетки существует, то она называется основной группой отображений этой правильной сетки на себя. Мы будем считать две основные группы одинаковыми, если они относятся к топологически одинаковым сеткам и если существует такое отображение сетки на себя, которое преобразует одну группу в другую. Мы покажем, что у всякой сетки Laves'а хотя бы одна основная группа существует, а у некоторых из них их несколько; например, у сетки $L_{3D}$ основная группа только одна, у сетки $L_6$ их 7, а у сетки $L_{4A}$ — 16. Всего всех таких групп сеток Laves'а 46.

Перейдем теперь к выяснению того существенного понятия, которое

позволит найти все возможные основные группы любой заданной правильной сетки (хотя бы и не Laves'овской), если они у нее существуют.

Если обозначить буквами $a$, $b$, $c$, ... последовательные стороны какой-нибудь клетки $P_0$ рассматриваемой правильной сетки, то при каждом отображении из основной группы $F$ этой сетки клетка $P_0$ переходит в некоторую вполне определенную ее клетку $P_j$, а ее стороны $a$, $b$, $c$, ... — во вполне определенные стороны клетки $P_j$, причем никакое другое отображение из $F$ уже не переводит клетку $P_0$ в клетку $P_j$, и, какую бы клетку сетки ни взять, существует отображение в $F$, переводящее $P_0$ в эту клетку. Поэтому если дана сетка и дана ее основная группа $F$, то получается одна вполне определенная расстановка букв на сторонах внутри всех клеток сетки. Пусть имеется, например, расстановка букв, изображенная на рис. 11. Тогда символ:

$$(\underline{a\bar{b}}_3\ \underline{b\bar{a}}_3\ \underline{cf}_3\ \underline{dd}_3\ \underline{ee}_3\ \underline{fc}_3)$$

будет обозначать, что по стороне $a$ клетки $P_0$ прилегает некоторая клетка своею стороною $b$, причем переход от клетки $P_0$ к этой клетке совершается отображением 2-го рода, т. е. отображением, обращающим ориентацию клетки, в знак чего над $b$ стоит знак —, а, например, на стороне $c$ клетки $P_0$ с ней смежна некоторая клетка своею стороною $f$, причем без обращения ориентации, и т. д. Отдельные пары, такие как $\underline{a\bar{b}}$, $\underline{b\bar{a}}$, $\underline{cf}$ и т. д., мы будем называть элементами символа, или просто элементами. Индексы, в данном случае тройки, поставленные между соседними элементами, также относятся к символу и указывают, сколько всего сходится клеток в той вершине клетки, по которой смежны стороны (первые в соответственных элементах), между которыми стоит индекс.

Рис. 11

В силу самого понятия основной группы правильной сетки, введенный нами символ имеет следующие очевидные свойства:

1) число элементов символа равно $k$, где $k$ – число сторон клетки сетки;

2) на первых местах в парах, образующих его элементы, стоят все $k$ букв, которыми обозначены последовательные стороны клетки $P_0$;

3) на вторых местах также стоят все эти же $k$ букв, но, вообще говоря, в некотором другом порядке;

4) если в символе есть некоторый элемент, то в нем есть и элемент, получаемый из него написанием его двух букв в обратном порядке с сохранением знака —, если он есть; например, если в символе есть элемент $\underline{a\bar{b}}$, то есть и элемент $\underline{b\bar{a}}$, если есть элемент $\underline{cf}$, то есть и элемент $\underline{fc}$ и т. д.

Символ этот мы будем называть *символом смежности основной группы* $F$ рассматриваемой правильной сетки.

ЛЕММА. *Если во всех клетках заданной правильной сетки буквы, обозначающие стороны этих клеток, расставлены соответственно неко-*

*торой рассматриваемой основной группе $F$ отображений этой сетки на себя, то символы смежности для всех клеток будут одинаковы и поэтому во всей сетке каждая сторона покрыта везде одной и той же стороной и одним и тем же способом (т. е. прямо или обратно); обратно, если во всех клетках данной правильной сетки буквы, обозначающие стороны клеток, расставлены так, что для всех клеток получается один и тот же символ смежности, то эта расстановка определяет некоторую основную группу $F$ отображений сетки на себя, которая абстрактно вполне задана этим символом.*

Все утверждения леммы, очевидно, следуют из самих определений основной группы правильной сетки и символа смежности. Поясним только последнее утверждение леммы.

Всякое отдельное отображение сетки на себя из группы $F$ вполне характеризуется тем, в какую клетку $P_j$ перешла клетка $P_0$. Но в силу связности сетки по сторонам всегда есть такая последовательность ее клеток $P_0P_1P_2 \ldots P_{j-1}P_j$, которая соединяет клетку $P_0$ с клеткой $P_j$ в том смысле, что любые две соседние клетки этой последовательности смежны по стороне. Такую последовательность мы будем называть цепочкой клеток, соединяющей клетку $P_0$ с клеткой $P_j$. Тогда переход от $P_0$ к $P_j$ можно задать как последовательность переходов от $P_0$ к $P_1$, затем от $P_1$ к $P_2$ и т. д., каждый из которых характеризуется каким-нибудь элементом символа (мы предполагаем, что буквы на сторонах в клетках расставлены так, что символы смежности для всех клеток одни и те же). Поэтому рассматриваемое отображение группы можно записать как некоторую последовательность (слово), составленную из элементов символа.

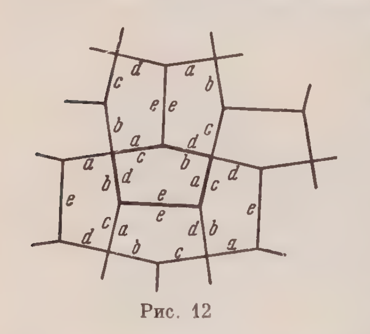


Рис. 12

Если умножение отображений группы $F$ записывать исходя из дальнейшей судьбы уже преобразованной клетки, то оно сводится к приписыванию слова к уже написанному слову. Таким образом, мы видим, что элементы символа смежности суть образующие элементы группы. Любое соотношение между какими-либо элементами группы $F$ можно, перенося все в одну часть, записать как слово, составленное из элементов символа, равное 1. Этому геометрически соответствует замкнутая цепочка клеток. Но если рассмотреть сетку, дуальную рассматриваемой правильной сетке (т. е. такую, что совокупности ее вершин, сторон и клеток каждая взаимно однозначно отображается на совокупности клеток, сторон и вершин заданной сетки с сохранением всех инцидентностей в обе стороны), то цепочке в ней будет соответствовать ломаная, составленная из сторон ее клеток, а замкнутой цепочке — замкнутая ломаная. Но, в силу леммы Ампера, любую такую замкнутую ломаную можно рассматривать как сумму замкнутых ломаных, каждая из которых является одним обходом некоторой клетки дуальной сетки. Это в данной сетке дает цепочку, составленную из циклической последовательности ее клеток, сходящихся в одной вершине. Поэтому любое соотношение между элементами

группы $F$ сводится к тем $k$ соотношениям, которые получаются, если рассмотреть все $k$ вершин клетки $P_0$. Это — определяющие группу соотношения. Например, для случая рис. 11 такими соотношениями будут:

$$\underline{a\bar{b}}\cdot\underline{cf}\cdot\underline{a\bar{b}}=1,\quad \underline{b\bar{a}}\cdot\underline{b\bar{a}}\cdot\underline{fc}=1,\quad \underline{cf}\cdot\underline{ee}\cdot\underline{dd}=1,$$

$$\underline{dd}\cdot\underline{cf}\cdot\underline{ee}=1,\quad \underline{ee}\cdot\underline{dd}\cdot\underline{cf}=1,\quad fc\cdot\underline{ba}\cdot\underline{b\bar{a}}=1.$$

Для случая рис. 12 символ смежности есть $(\underline{a\bar{c}}_4\,\underline{b\bar{d}}_3\,\underline{c\bar{a}}_4\,\underline{d\bar{b}}_3\,\underline{ee}_3)$, а определяющие соотношения имеют вид:

$$\underline{a\bar{c}}\cdot\underline{d\bar{b}}\cdot\underline{ca}\cdot\underline{d\bar{b}}=1,\quad \underline{b\bar{d}}\cdot\underline{ee}\cdot\underline{a\bar{c}}=1,$$

$$\underline{c\bar{a}}\cdot\underline{b\bar{d}}\cdot\underline{ca}\cdot\underline{b\bar{d}}=1,\quad \underline{d\bar{b}}\cdot\underline{c\bar{a}}\cdot\underline{ee}=1,\quad \underline{ee}\cdot\underline{d\bar{b}}\cdot\underline{c\bar{a}}=1.$$

Таким образом, символ смежности задает как образующие элементы группы $F$, так и наложенные на них определенные соотношения.

## § 3. Разыскание всех возможных основных групп сеток Laves'а

Два символа смежности, которые получаются друг из друга в силу того, что мы за первую сторону клетки $P_0$ принимаем какую-либо другую или берем стороны в обратном направлении, мы, конечно, не считаем различными. Если дана правильная сетка, хотя бы и не Laves'овская, то число различных возможных для нее символов смежности всегда конечно и уже никак не больше, чем $k!\cdot 2^k$, где множитель $k!$ входит потому, что последовательность вторых букв элементов символа может быть взята, при зафиксированных первых, никак не больше, чем в $k!$ перестановках, а множитель $2^k$ входит потому, что a priori над вторыми буквами в элементах может быть или не быть знак —. Отсюда, в частности, следует, что абстрактно различных основных групп у каждой заданной правильной сетки и подавно конечное число. Однако оказывается, что различных символов смежности, т. е. различных основных групп у данной правильной сетки несравненно меньше. Так, например, для сетки $L_6$ a priori имеется $6!\ 2^6 = 46080$ возможностей, а в действительности существует только семь различных символов смежности. В таблице III мы даем все возможные символы смежности для всех одиннадцати сеток Laves'а *. Их оказывается 46. Этот результат был проверен Д. К. Фаддеевым, за что я ему приношу глубокую благодарность.

Самый способ разыскания символов смежности состоит в том, что из a priori возможных символов постепенно отметаются целые группы символов, как дающие противоречия. Противоречия эти состоят в том, что при последовательной расстановке букв в клетках на их сторонах соответственно элементам смежности, начиная от некоторой исходной клетки и доходя до некоторой другой клетки по разным цепочкам, получаются несовпадающие расстановки. То, что некоторый символ, не дающий в ближайших клетках таких противоречий, нигде дальше их не даст, т. е. является символом смежности, соответствующим некоторой основной группе исследуемой сетки Laves'а, практически во всех случаях мы обнаруживали из того, что получали некоторую группу клеток с некоторой расстановкой букв,

* Таблицы III — VI и объяснение к ним помещены в конце работы.

которая, очевидно, периодически повторяется. Впрочем, этого же можно достигнуть, используя отсутствие противоречий только вокруг вершин исходной клетки.

## § 4. Метрические характеристики выпуклых фундаментальных областей двумерных федоровских групп

Пусть задана двумерная федоровская группа и пусть ее фундаментальная область выбрана так, чтобы она была лишь связной; тогда *даже если она невыпукла и криволинейно ограничена*, если она такова, что границы фундаментальных областей образуют сетку, эта сетка, очевидно, является правильной и удовлетворяет основной лемме интегрального исчисления, т. е. является одной из сеток Laves'a. Рассматриваемая федоровская группа будет ее основной группой, и ей соответствует один вполне определенный из найденных нами 46 символов смежности.

Как легко видеть, для такой сетки любое изоморфное отображение на себя каждого из метрически простейших осуществлений сеток Laves'a, данного в таблице II, можно осуществить эвклидовым движением 1-го или 2-го рода той эвклидовой плоскости, на которой они даны. Поэтому каждый из 46 найденных символов смежности есть символ смежности для некоторой двумерной федоровской группы и некоторого разбиения плоскости на выпуклые фундаментальные области этой группы.

На таблице IV мы даем метрические условия, необходимые и достаточные для того, чтобы выпуклый многоугольник эвклидовой плоскости был фундаментальной областью двумерной федоровской группы с данным символом смежности.

Для каждого из 46 символов смежности самые тривиальные необходимые метрические условия, которые он накладывает на многоугольник, являются и достаточными. Все они приведены в таблице IV, в которой даны чертежи самых общих разбиений плоскости на выпуклые фундаментальные области федоровских групп для всех 46 случаев. В каждом случае дан условный символ соответствующей федоровской группы, принятый в интернациональных таблицах этих групп.

## § 5. Метрические характеристики разбиений Дирихле для двумерных федоровских групп

Замечательно, что всякое из выпуклых разбиений на фундаментальные области для всех двумерных федоровских групп с любым из 46 возможных символов смежности, если наложить на него еще небольшие дальнейшие необходимые и достаточные метрические условия, является разбиением Дирихле. На таблице V даны эти области и дополнительные метрические условия для всех 46 случаев и указано, где лежит точка $A$ для каждого из них.

Замечание. Что касается распределения символов смежности по 17 двумерным федоровским группам, данного в таблице IV, то в настоящей работе я привожу только таблицу VI, поясняющую, какие основные группы сеток Laves'a абстрактно изоморфны и, следовательно, относятся к одной и той же федоровской группе.

Поступило
26. VI. 1958

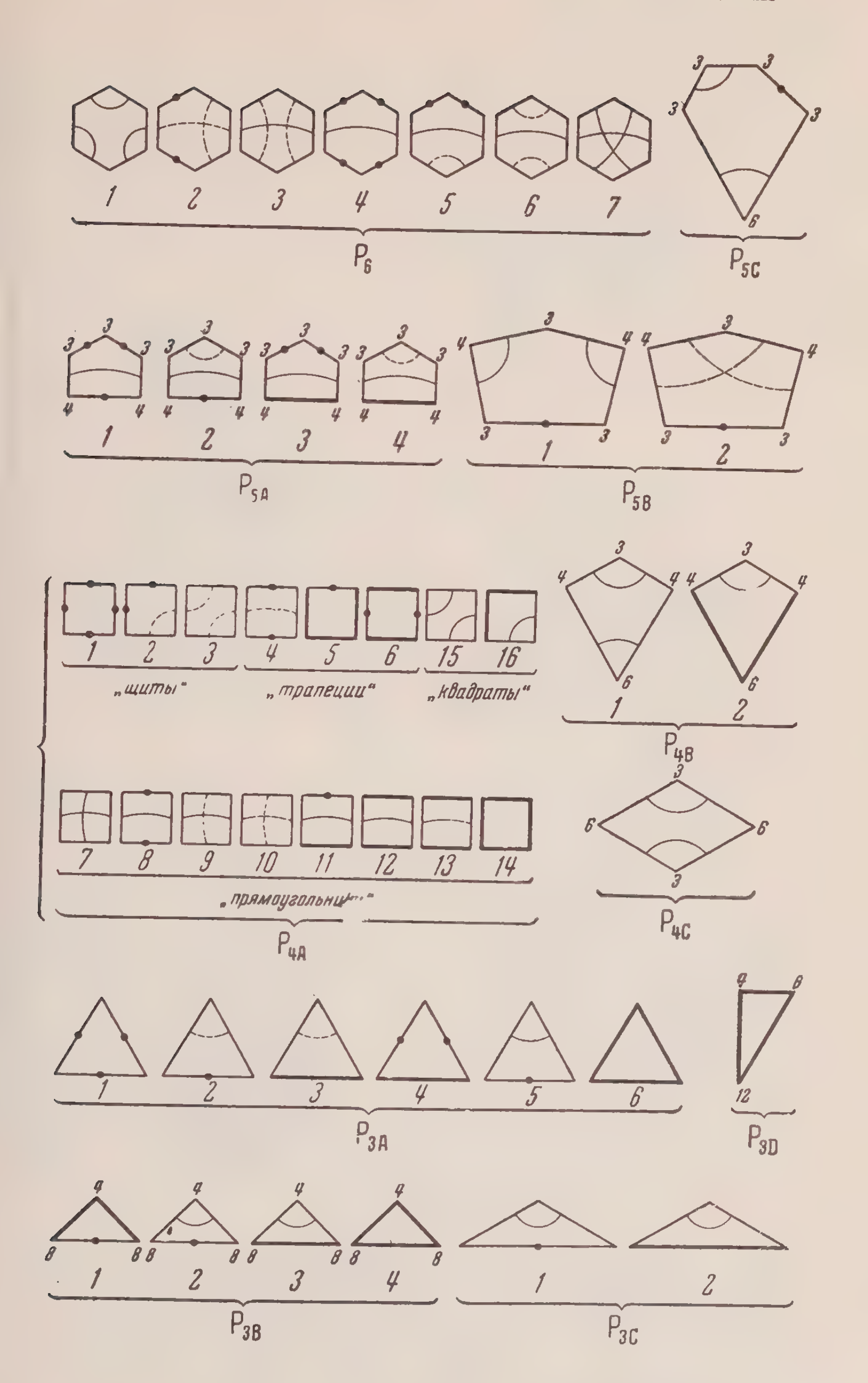

1
2
3
4
5
6
7
$P_6$
$P_{5C}$
$P_{5A}$
$P_{5B}$
„щиты"
„трапеции"
„квадраты"
$P_{4B}$
„прямоугольники"
$P_{4A}$
$P_{4C}$
$P_{3A}$
$P_{3D}$
$P_{3B}$
$P_{3C}$

Таблица IV

$P_{6,1}$ $[ab\ cd\ ef]$ $a=b$ $c=d$ $e=f$

$<ab=<cd=<ef=120°$

$F=p3$

$P_{6,2}$ $[a\bar{c}\ b\bar{e}\ dd\ ff]$ $a=c$ $b=e$ $<a\delta=-<c\delta$

$F=pgg$

$P_{6,3}$ $[ad\ b\bar{f}\ c\bar{e}]$ $a=\shortparallel d$ $b=f$ $c=e$

$F=pg$

$P_{6,5}$ $[ad\ b\bar{c}\ ee\ ff]$ $a=\shortparallel d$ $b=c$

$P_{6,4}$ $[ad\ bb\ cc\ ee\ ff]$ $a=\shortparallel d$

$F=p2$

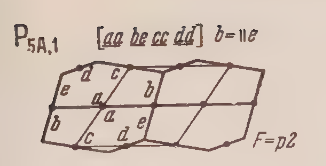
$F=pgg$

$P_{6,6}$ $[ad\ b\bar{c}\ e\bar{f}]$ $a=\shortparallel d$ $b=c$ $e=f$

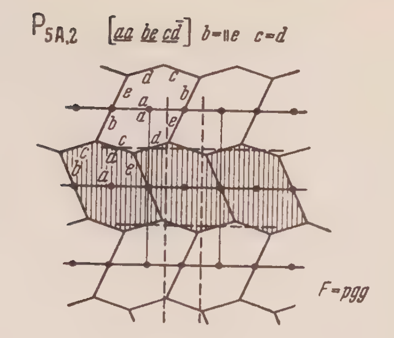
$F=pg$

$P_{6,7}$ $[ad\ be\ cf]$ $a=\shortparallel d$ $b=\shortparallel e$

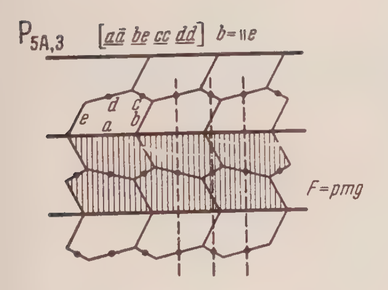
$F=p1$



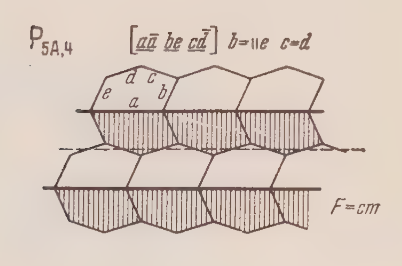
$P_{5A,1}$
[aa be cc dd] b=∥e
F=p2

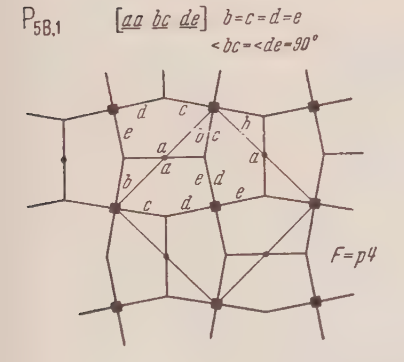
$P_{5A,2}$
[aa be $c\bar{d}$] b=∥e c=d
F=pgg

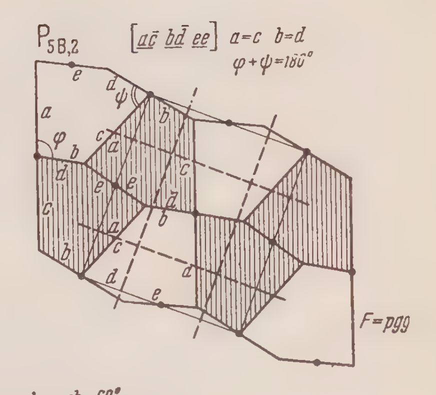
$P_{5A,3}$
[$a\bar{a}$ be cc dd] b=∥e
F=pmg

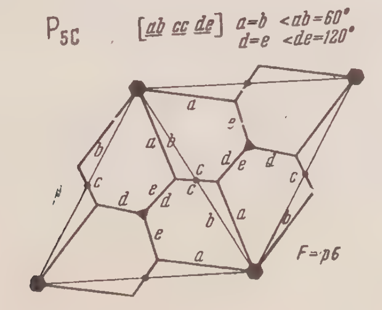
$P_{5A,4}$
[$a\bar{a}$ be $c\bar{d}$] b=∥e c=d
F=cm

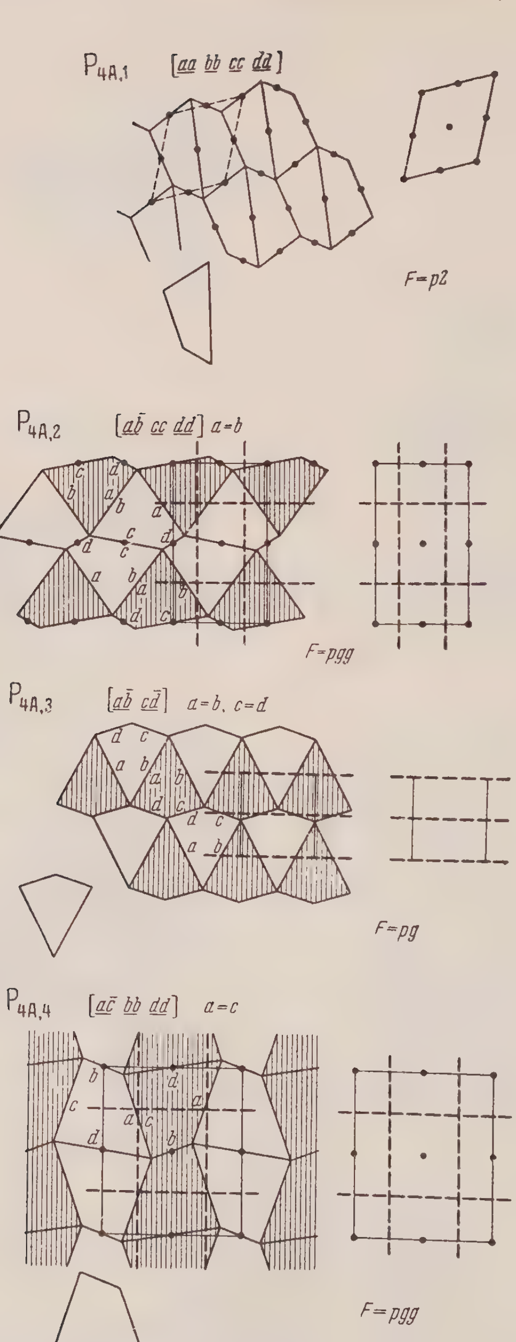
$P_{5B,1}$
[aa bc de] b=c=d=e
<bc=<de=90°
F=p4

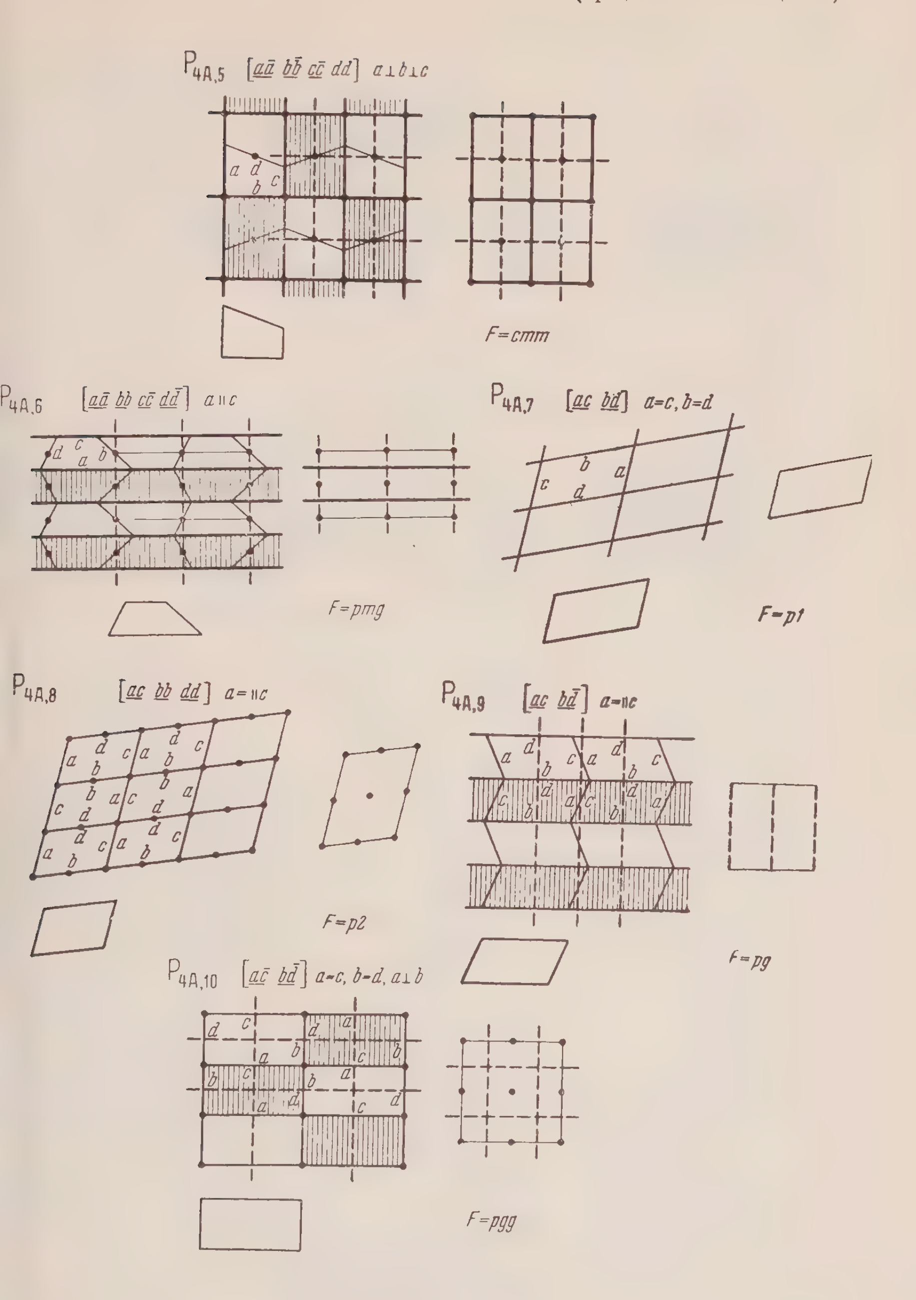
$P_{5B,2}$
[$a\bar{c}$ $b\bar{d}$ ee] a=c b=d
φ+ψ=180°
F=pgg

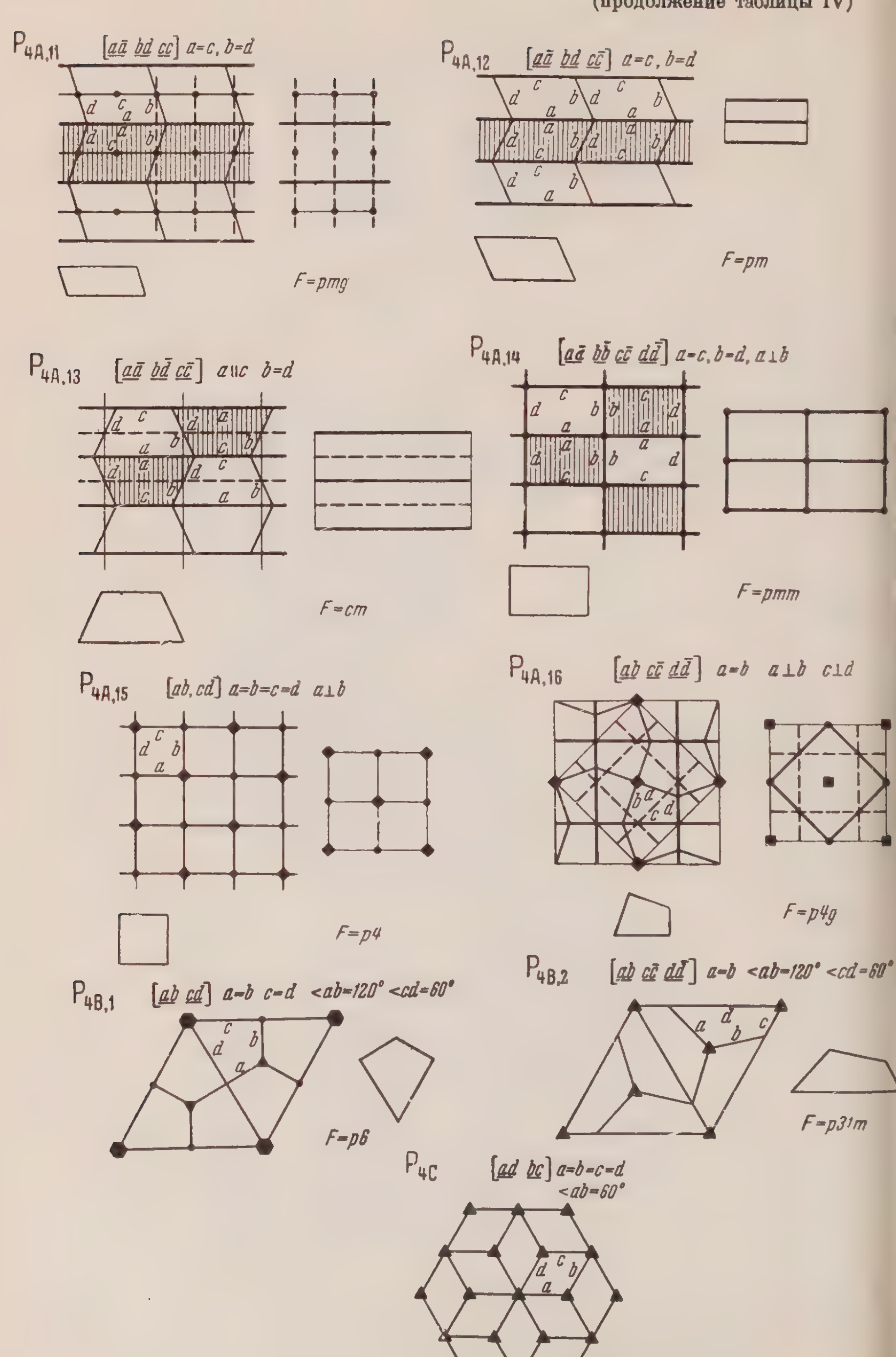



$P_{5C}$
[ab cc de] a=b <ab=60°
d=e <de=120°
F=p6

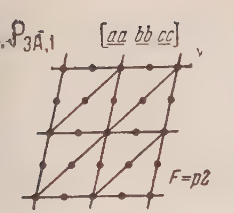

P4A,1 [aa bb cc dd]
F=p2
P4A,2 [ab̄ cc dd] a=b
F=pgg
P4A,3 [ab̄ cd̄] a=b, c=d
F=pg
P4A,4 [ac̄ bb dd] a=c
F=pgg

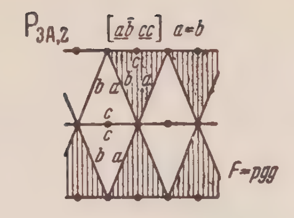
(продолжение таблицы IV)

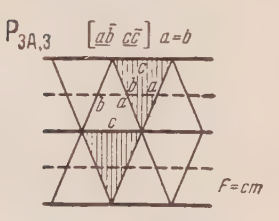


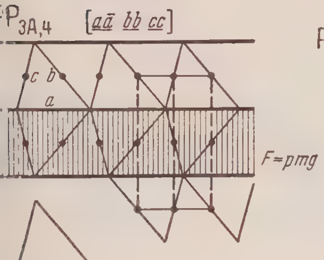


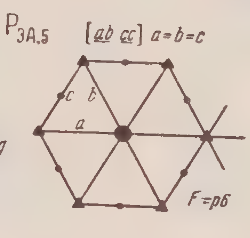
P4A,11 [aā bd cc] a=c, b=d
F=pmg
P4A,12 [aā bd cc̄] a=c, b=d
F=pm
P4A,13 [aā bd̄ cc̄] a∥c b=d
F=cm
P4A,14 [aā bb̄ cc̄ dd̄] a=c, b=d, a⊥b
F=pmm
P4A,15 [ab, cd] a=b=c=d a⊥b
F=p4
P4A,16 [ab cc̄ dd̄] a=b a⊥b c⊥d
F=p4g
P4B,1 [ab cd] a=b c=d <ab=120° <cd=60°
F=p6
P4B,2 [ab cc̄ dd̄] a=b <ab=120° <cd=60°
F=p31m
P4C [ad bc] a=b=c=d
<ab=60°
F=p3

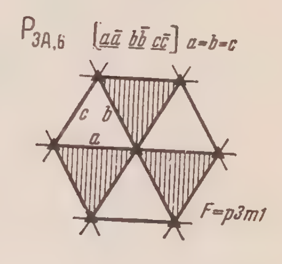

P3A,1 [aa bb cc]
F=p2

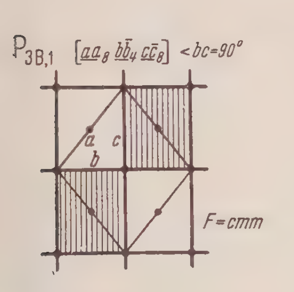

P3A,2 [ab̄ cc] a=b
F=pgg

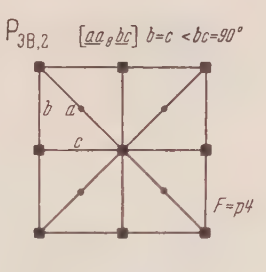

P3A,3 [ab̄ cc̄] a=b
F=cm

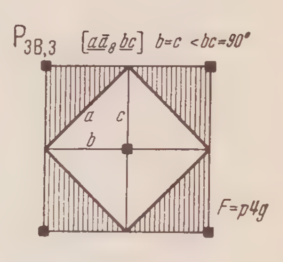

P3A,4 [aā bb cc]
F=pmg

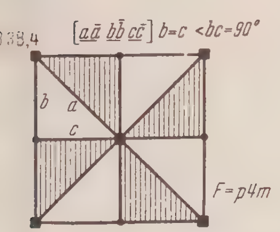

P3A,5 [ab cc] a=b=c
F=p6

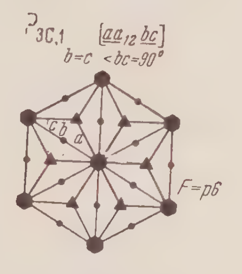

P3A,6 [aā bb̄ cc̄] a=b=c
F=p3m1

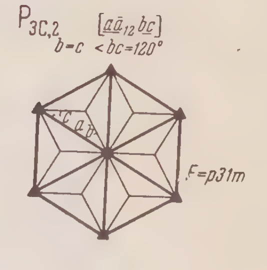

P3B,1 [aa8 bb̄4 cc̄8] <bc=90°
F=cmm


P3B,2 [aa8 bc] b=c <bc=90°
F=p4


P3B,3 [aā8 bc] b=c <bc=90°
F=p4g


P3B,4 [aā bb̄ cc̄] b=c <bc=90°
F=p4m


P3C,1 [aa12 bc]
b=c <bc=90°
F=p6


P3C,2 [aā12 bc]
b=c <bc=120°
F=p31m

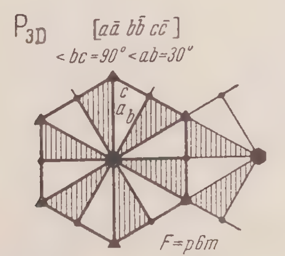
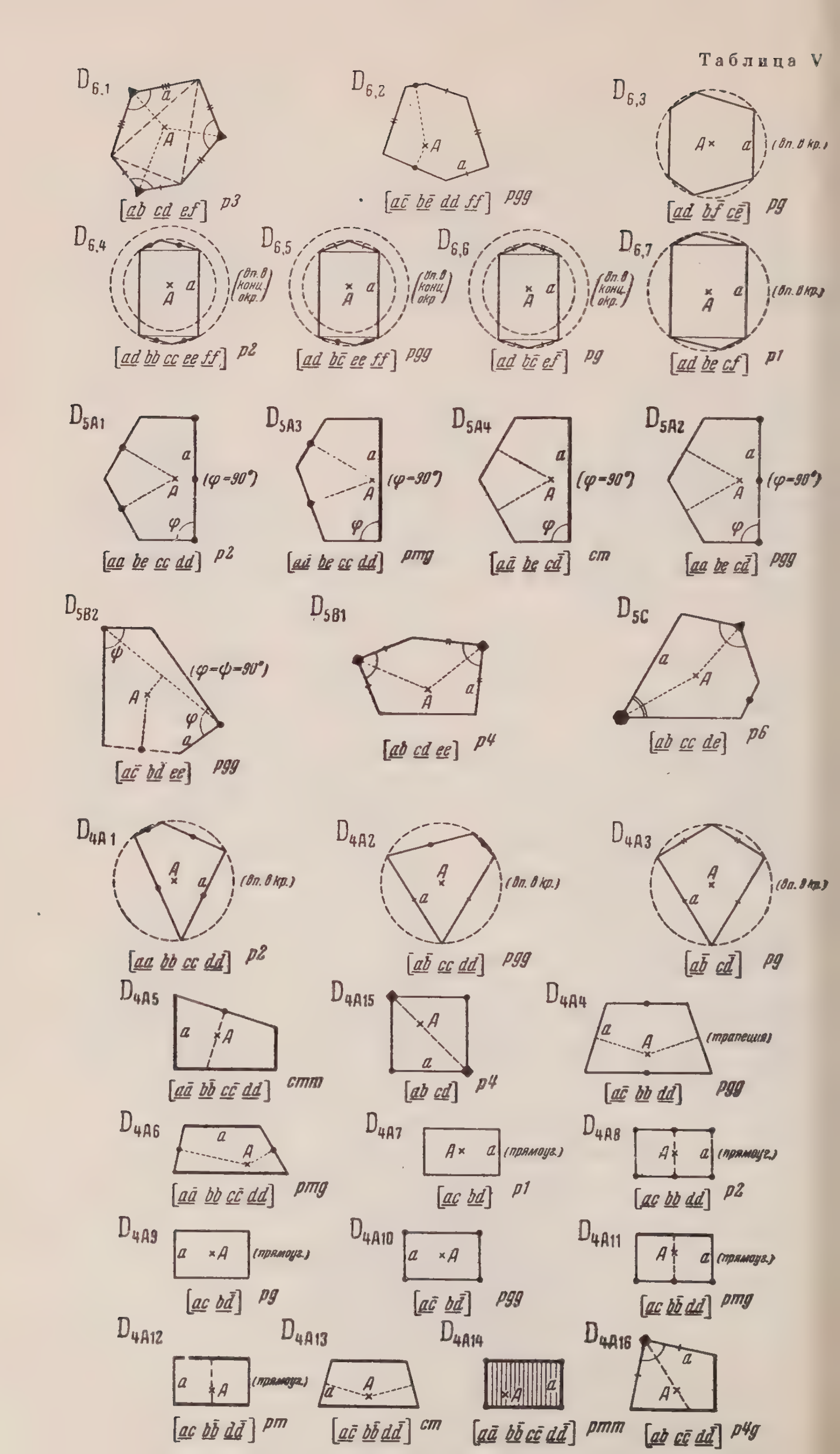
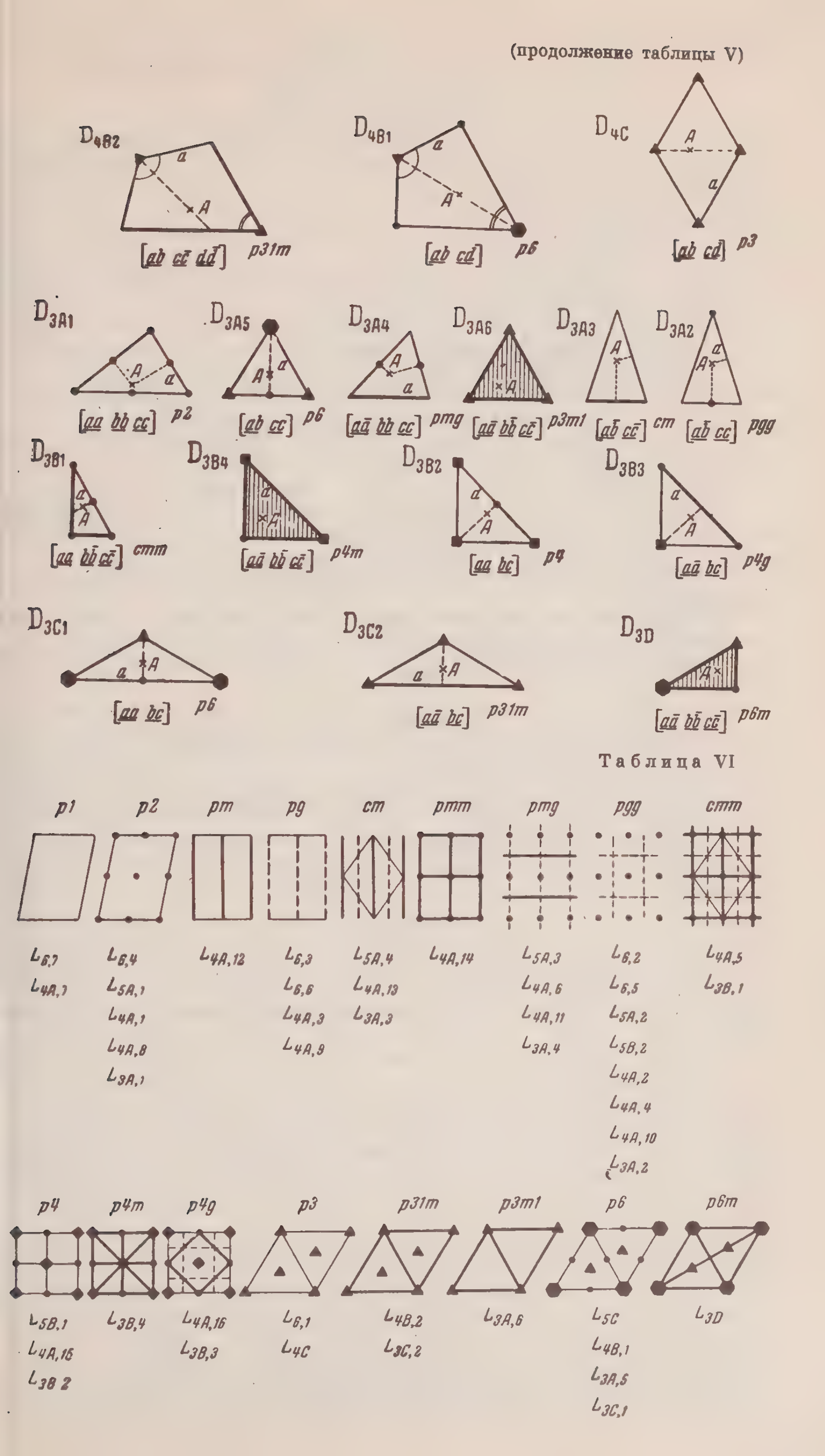

P3D [aā bb̄ cc̄]
<bc=90° <ab=30°
F=p6m

Таблица V



$D_{6,1}$
[ab cd ef] p3
$D_{6,2}$
[ac̄ bē dd ff] pgg
$D_{6,3}$
(вп. в кр.)
[ad bf̄ cē] pg
$D_{6,4}$
(вп. в конц. окр.)
[ad bb cc ee ff] p2
$D_{6,5}$
(вп. в конц. окр)
[ad bc̄ ee ff] pgg
$D_{6,6}$
(вп. в конц. окр.)
[ad bc̄ ef̄] pg
$D_{6,7}$
(вп. в кр.)
[ad be cf] p1
$D_{5A1}$
(φ=90°)
[aa be cc dd] p2
$D_{5A3}$
(φ=90°)
[aā be cc dd] pmg
$D_{5A4}$
(φ=90°)
[aā be cd̄] cm
$D_{5A2}$
(φ=90°)
[aa be cd̄] pgg
$D_{5B2}$
(φ=ψ=90°)
[ac̄ bd̄ ee] pgg
$D_{5B1}$
[ab cd ee] p4
$D_{5C}$
[ab cc de] p6
$D_{4A1}$
(вп. в кр.)
[aa bb cc dd] p2
$D_{4A2}$
(вп. в кр.)
[ab̄ cc dd] pgg
$D_{4A3}$
(вп. в кр.)
[ab̄ cd̄] pg
$D_{4A5}$
[aā bb̄ cc̄ dd] cmm
$D_{4A15}$
[ab cd] p4
$D_{4A4}$
(трапеция)
[ac̄ bb dd] pgg
$D_{4A6}$
[aā bb cc̄ dd] pmg
$D_{4A7}$
(прямоуг.)
[ac bd] p1
$D_{4A8}$
(прямоуг.)
[ac bb dd] p2
$D_{4A9}$
(прямоуг.)
[ac bd̄] pg
$D_{4A10}$
[ac̄ bd̄] pgg
$D_{4A11}$
(прямоуг.)
[ac bb̄ dd] pmg
$D_{4A12}$
(прямоуг.)
[ac bb̄ dd̄] pm
$D_{4A13}$
[ac̄ bb̄ dd̄] cm
$D_{4A14}$
[aā bb̄ cc̄ dd̄] pmm
$D_{4A16}$
[ab cc̄ dd̄] p4g

(продолжение таблицы V)



## Объяснение к таблицам

На таблице III изображены графически все 46 возможных различных видов смежности (символы смежности) фундаментальных односвязных областей двумерных федоровских групп. При этом:

1) точка в середине стороны указывает, что сторона накрывается сама собою при помощи движения 1-го рода;

2) жирной чертой вычерчены те стороны, которые покрываются сами собою при помощи движений 2-го рода;

3) если некоторая сторона накрывается другой стороной при помощи движения 1-го рода, то эти стороны соединены сплошной черточкой, а если при помощи движения 2-го рода, то — пунктирной черточкой.

На таблице IV даны все 46 различных сортов разбиений плоскости на выпуклые фундаментальные области для двумерных федоровских групп. При этом:

1) буквой $P$ обозначается планигон;

2) первый индекс при букве $P$ обозначает число $k$ сторон этого планигона;

3) буквы $A$, $B$, $C$, $D$ после него (где они есть) указывают, какую именно из сеток Laves'а таблицы II, состоящую из $k$-угольных клеток, образует разбиение;

4) последний индекс, отделенный запятой, обозначает номер основной группы $F$ этой сетки, которую задает символ смежности, причем нумерация этих групп поневоле довольно условная.

Далее, в таблице IV:

5) дан символ смежности, причем индексы между его элементами, показывающие, сколько клеток сходится в соответствующей вершине, опущены, но зато отмечена расстановка букв на сторонах планигонов;

6) на некоторых планигонах указаны элементы симметрии группы;

7) те планигоны, которые получаются из исходного движениями 2-го рода, заштрихованы *;

8) рядом с символом смежности выписаны необходимые и достаточные условия, налагаемые им на метрику планигона;

9) в большом числе случаев дано изображение соответствующей федоровской группы, принятое в международных таблицах.

На таблице V:

1) даны планигоны $D$ разбиений Дирихле для всех 46 символов смежности;

2) в круглых скобках приведены те необходимые и достаточные метрические условия, каждое из которых надо прибавить к условиям таблицы IV для того, чтобы ее планигон был планигоном Дирихле;

3) даны положения точки $A$, изображенные крестиками в планигонах Дирихле;

4) если точка $A$ в $D$ может быть любой точкой некоторого отрезка, то это отмечено на таблице V пунктирным отрезком;

5) если любая точка $D$ может быть точкой A, то $D$ заштриховано.

На таблице VI даны общепринятые символы и чертежи 17 двумерных федоровских групп и соответствующие им значки символов смежности.

### ЛИТЕРАТУРА

[1] Voronoi G., Recherches sur les paralleloèdres primitivs, J. f. reine und angew. Math., Bd. 134 (1908), 198—287, Bd. 136 (1909), 67—179. Русск. перевод, Собр. соч., т. II, Киев, 1952.

[2] Шубников А. В., К вопросу о строении кристаллов, Известия Ак. наук (1916), 755—778.

[3] Laves F., Ebenenteilung und Koordinationszahl, Zeitschr. für Kristallogr., Bd. 78 (1930), 208—241.

[4] Delaunay B., Sur la sphère vide, Proc. Int. Math. Congress of Toronto, vol. I (1924), 695—700.

[5] Delaunay B., Sur la sphère vide, Известия Ак. наук СССР (1934), 793—800.

* По недосмотру эта штриховка пропущена на рис. $P_{4A,16}$, $P_{4B,2}$, $P_{3C,2}$ таблицы IV.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 387—420

П. И. ПЕТРОВ

# ИНВАРИАНТЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ОТ ЧЕТЫРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

(*Представлено академиком* **А. И. Мальцевым**)

В работе построен в конечном виде наипростейший базис полной системы дифференциальных инвариантов римановых многообразий $V_4$, метризованных неособенной квадратичной дифференциальной формой $ds^2 = g_{ij}(x)\,dx^i dx^j$ сигнатуры $s = 4,\ 0, -2$. Кроме того, с помощью арифметических инвариантов неприводимых частей тензора кривизны $R_{hijk}$ фундаментального тензора пространства $g_{ij}$ дана классификация самих пространств Римана четырех измерений. Отсюда путем специализации получены инварианты и классификация конформно-плоских эйнштейновских четырехмерных пространств для любого из возможных значений сигнатуры $s$.

## Введение

Проблема разыскания скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка риманова пространства четырех измерений давно привлекала внимание математиков. Э. Картан занимался этой проблемой для случая, когда сигнатура $s$ метрической формы $ds^2$ многообразия $V_4$ равна $-2$, и свел ее к задаче нахождения совокупных алгебраических инвариантов нескольких форм особого вида [см. ([1])]. Решения таким образом преобразованной задачи он не давал, хотя в классической теории алгебраических инвариантов и не существует регулярного способа решения подобной задачи. Поэтому задача об отыскании инвариантов кватернарной дифференциальной квадратичной формы с сигнатурой $s = -2$ рассуждением Картана еще не исчерпывается. Статья Н. А. Розенсон ([2]) несостоятельна: например, ошибочно доказательство инвариантности функций $M_8$ [см. ([2]), стр. 76].

Настоящая работа представляет собой подробное изложение краткого сообщения автора ([3]) *. Кроме решения проблемы разыскания скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка римановых многообразий

* Заметка автора ([3]) была сдана в редакцию журнала «Известий Ак. наук СССР», серия математическая, 6 декабря 1955 года, а затем, по рекомендации редколлегии названного журнала, была передана в редакцию журнала «Доклады Ак. наук СССР». В начале 1957 года мне стала известна совместная работа J. Géhéniau и R. Debever'a ([4]), в которой авторы задались целью дать в ортонормальном репере выражения 14 инвариантов кривизны $V_4$ с положительно-определенным мероопределением [см. резюме и $n^o$ 3 работы ([4])]. Однако решить эту задачу в цитированной работе им не удалось: выражения $C^{\pm}_{(i)}$, $D_{(i)}$, $E^{\pm}_{(i)}$ были определены авторами из характеристических полиномов числовых матриц [см. ([4]), формулы (26), (36), (42), (48)].

$V_4$ при всевозможных гипотезах относительно сигнатуры $s$ фундаментальной метрической формы последних $ds^2$, в предлагаемой работе дана классификация римановых пространств $V_4$ по их дифференциальным инвариантам. Обе упомянутые проблемы решены путем последовательного применения метода бесконечно малых преобразований. Насколько этот инфинитезимальный метод соответствует самой природе разбираемых здесь математических задач, лежащих на грани чистой дифференциальной геометрии и алгебры, предоставляется судить читателю.

1. В общей теории дифференциальных инвариантов обобщенных пространств [см. ([5])] под тензорно-дифференциальным инвариантом невырожденной дифференциальной квадратичной формы

$$ds^2 = g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j \tag{1}$$

разумеют тензор с компонентами

$$T^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\beta_1\ldots\beta_m}\left(g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^r g_{\alpha\beta}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_r}}\right), \tag{2}$$

которые при обратимых преобразованиях координат $x \to \bar{x}$ изменяются по следующему закону:

$$\bar{T}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_m} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N T^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\beta_1\ldots\beta_m}\,\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_k}}{\partial x^{\alpha_k}}\,\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial \bar{x}^{j_m}}. \tag{3}$$

Натуральное число $r$ называется порядком дифференциального инварианта, а $N$ — весом инварианта. Если $N=0$, то тензорно-дифференциальный инвариант (2) называется *абсолютным*. Тензорно-дифференциальный инвариант (2) имеет $k$ контравариантных и $m$ ковариантных индексов. Его полная валентность равна $m+k$. Инвариант, валентность которого равна нулю, называется *скалярным*.

В настоящей работе речь будет идти исключительно о дифференциальных инвариантах второго порядка кватернарной формы вида (1). В первую очередь мы задаемся целью найти совокупность ее функционально независимых абсолютных скалярных дифференциальных инвариантов. Эта проблема на основании теоремы приведения [см. ([6]), стр. 133] сводится к вопросу отыскания совокупных алгебраических инвариантов основного тензора $g_{ik}$ и его тензора кривизны:

$$g_{ik}, \quad R_{hijk}. \tag{4}$$

Задачу разыскания совокупных инвариантов метрического тензора $g_{ik}$ и так называемого нормального тензора $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$, эквивалентных тензорам ряда (4), геометр Т. И. Томас представил как задачу интегрирования полной системы из 16 линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка от 30 независимых переменных:

$$Y^\mu_\gamma(2)\,f \equiv \left[{\mu \atop \alpha\beta\nu}\right]\frac{\partial f}{\partial g_{\alpha\beta}} + \left[{\mu \atop \alpha\beta\gamma\delta\nu}\right]\frac{\partial f}{\partial g_{\alpha\beta,\gamma\delta}} = 0, \tag{5}$$

где

$$\left[{\mu \atop \alpha\beta\gamma}\right] = g_{\nu\beta}\,\delta^\mu_\alpha + g_{\alpha\nu}\,\delta^\mu_\beta, \quad \left[{\mu \atop \alpha\beta\gamma\delta\nu}\right] = g_{\nu\beta,\gamma\delta}\,\delta^\mu_\alpha + \ldots + g_{\alpha\beta,\gamma\nu}\,\delta^\mu_\delta.$$

Символы $Y^\mu_\nu(2)\,f$ суть инфинитезимальные операторы группы преобразо-

заний величин $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}$:

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} u^{\mu}_{\alpha} u^{\nu}_{\beta}, \tag{6}$$

$$\overline{g}_{\alpha\beta,\gamma_1\gamma_2} = g_{\mu\nu,\eta_1\eta_2} u^{\mu}_{\alpha} u^{\nu}_{\beta} u^{\eta_1}_{\gamma_1} u^{\eta_2}_{\gamma_2}.$$

Такая постановка вопроса при всей своей элегантности и теоретической безупречности дает очень мало средств для практического нахождения инвариантов в конкретно взятых случаях. Поэтому ниже нами применяется совершенно иной метод, который также опирается на теорию бесконечно малых преобразований С. Ли и пригоден при любом числе измерений пространства.

2. Метод, который я собираюсь применять, основывается на трех фактах:

1) Если в римановом пространстве $V_n$ задан тензор $a_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ $(m \leqslant n)$, то величины

$$c_{h_1 h_2 \ldots h_r} = a_{r_1 r_2 \ldots r_m} \overset{r_1}{\underset{h_1}{\lambda}} \cdots \overset{r_m}{\underset{h_m}{\lambda}}, \tag{7}$$

где $\overset{i}{\underset{h}{\lambda}}$ — компоненты единичных векторов местного ортогонального $n$-эдра, инвариантны относительно замены переменных $x \to \overline{x}$ [см. ([7])].

2) Под влиянием линейного преобразования

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} e_i^k \overline{x}_k \tag{8}$$

с матрицей $E = \| e_i^k \|$ коэффициенты алгебраической формы степени $p$

$$f = \sum a_{ikl} \ldots x_i x_k x_l \ldots, \tag{9}$$

как известно, подвергаются линейному преобразованию

$$\overline{a}_{rst\ldots} = \sum a_{ikl} \ldots e_i^r e_k^s e_l^t \ldots. \tag{10}$$

Если $a_{ikl} \ldots$ разложить на символические множители $a_i a_k a_l \ldots$, то формулу (10) можно переписать в таком виде:

$$\overline{a}_{rst} \ldots = \sum_i (a_i e_i^r) \cdot \sum_k (a_k e_k^s) \ldots. \tag{11}$$

Каждая скобка правой части (11) есть преобразованный коэффициент $\overline{a}_i$ линейной формы

$$L = (ax) = \sum a_i x_i$$

при замене переменных (8). Отсюда вытекает, что

$$\overline{a}_{rst\ldots l} = \overline{a}_r \cdot \overline{a}_s \ldots \overline{a}_l \tag{12}$$

или

$$(\overline{a})_r \cdot (\overline{a})_s \cdot (\overline{a})_t \ldots = (\overline{a}_r) \cdot (\overline{a}_s) \cdot (\overline{a}_t) \ldots. \tag{13}$$

Формула (13) является аналитическим выражением следующего результата: символическое разложение и преобразование суть две перестановочные операции [см. ([8]), § 11, гл. I].

3) В теории инвариантов алгебраических и дифференциальных форм различают ковариантные и контравариантные векторы, как векторы в двух различных двойственных пространствах. Преобразование коорди-

нат в одном из них автоматически вызывает контраградиентное преобразование координат в другом. В специальном случае, когда матрица $E$ линейного преобразования (8) ортогональна, различие между законами преобразований контравариантных и ковариантных векторов пространства исчезает, ибо $E = E_c^{-1}$.

Из перечисленных нами сведений о тензорах, преобразованиях и группах мы можем немедленно вывести два важных заключения. Первое из них касается редукции проблемы разыскания инвариантов формы (1) относительно всех, с не равным нулю якобианом, преобразований координат $x \to \bar{x}$ к нахождению ортогональных алгебраических инвариантов тензора кривизны многообразия $V_4$. Если в рассматриваемой точке $M \subset V_4$ ввести ортонормальный $n$-эдр, то, на основании замечания 1) величины

$$R_{h_1h_2h_3h_4} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} \underset{h_1}{\overset{\alpha}{\lambda}} \underset{h_2}{\overset{\beta}{\lambda}} \underset{h_3}{\overset{\gamma}{\lambda}} \underset{h_4}{\overset{\delta}{\lambda}} \tag{14}$$

остаются неизменными при преобразованиях $x \to \bar{x}$. Значит, всевозможные изменения $R_{h_1h_2h_3h_4}$ обуславливаются лишь выбором местного репера, т. е. преобразованиями коэффициентов формы

$$\Phi \equiv R_{\alpha\beta\gamma\delta} \underset{1}{\bar{u}^\alpha} \underset{2}{\bar{u}^\beta} \underset{3}{\bar{u}^\gamma} \underset{4}{\bar{u}^\delta}, \tag{15}$$

индуцированными линейно-однородными невырожденными подстановками переменных $\underset{i}{\bar{u}^\alpha}$, оставляющими инвариантной квадрику

$$\varepsilon_1(\underset{i}{u^1})^2 + \varepsilon_2(\underset{i}{u^2})^2 + \varepsilon_3(\underset{i}{u^3})^2 + \varepsilon_4(\underset{i}{u^4})^2, \quad (\varepsilon_i = \pm 1). \tag{16}$$

Совокупность матриц $\{A\}$ линейных преобразований, сохраняющих квадрику (16), очевидно, образует группу. Она называется ортогональной и обозначается через $O(4)$, если

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1.$$

В случае

$$-\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$$

она называется группой Лоренца и обозначается через $L_6$. Наконец, когда сигнатура $s$ квадрики (16) равна нулю, условимся обозначать эту группу символом $G_6$. Более краткая формулировка только что описанного результата такова:

ТЕОРЕМА 1. *Скалярные инварианты второго порядка кватернарных дифференциальных квадратичных форм, имеющих сигнатуры 4, —2, 0, суть алгебраические инварианты тензора Римана — Христоффеля этих форм относительно групп $O(4)$, $L_6$, $G_6$ соответственно.*

Второе заключение получается путем комбинирования замечаний 2) и 3). Оно доставляет метод для регулярного нахождения инфинитезимальных операторов преобразований коэффициентов алгебраической формы, индуцированных подстановками ортогональной группы над переменными. Вот его подробная формулировка:

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы найти бесконечно малое преобразование какого-либо коэффициента алгебраической формы, которое индуцируется бесконечно малыми преобразованиями переменных, отвечающими выбранному инфинитезимальному оператору ортогональной группы, достаточно*

*подвергнуть каждый из символических векторов этого коэффициента соответствующему бесконечно малому преобразованию данного оператора, ограничиваясь при этом членами первого порядка малости.*

Приложение теорем 1, 2 к вопросу разыскания инвариантов дифференциальных квадратичных форм от четырех переменных осуществляется по следующему плану: в зависимости от значения сигнатуры $s$ фундаментальной квадрики $ds^2$ многообразия $V_4$ возьмем одну из трех групп $O(4)$, $L_6, G_6$, заданных с помощью их инфинитезимальных операторов. Для каждого оператора рассматриваемой группы находим инфинитезимальный оператор преобразований компонент тензора кривизны $R_{hijk}$, индуцированных бесконечно малой трансформацией, порожденной выбранным символом рассматриваемой группы. Собрание инфинитезимальных операторов преобразований $R_{hijk}$, отвечающих всем символам группы, образует замкнутую систему, имеющую корнями искомые инварианты.

3. Пусть $s=4$. Посмотрим, какие приращения получают переменные

$$\begin{aligned} &R_{1212}=x_1, \quad R_{1313}=x_2, \quad R_{1414}=x_3,\\ &R_{2323}=x_4, \quad R_{2424}=x_5, \quad R_{3434}=x_6, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &R_{1213}=y_1, \quad R_{1214}=y_2, \quad R_{1223}=y_3,\\ &R_{1224}=y_4, \quad R_{1314}=y_5, \quad R_{1323}=y_6,\\ &R_{1334}=y_7, \quad R_{1424}=y_8, \quad R_{1434}=y_9,\\ &R_{2324}=y_{10}, \quad R_{2334}=y_{11}, \quad R_{2434}=y_{12}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$R_{1234}=z_1, \quad R_{1324}=z_2, \quad R_{1423}=z_3, \tag{19}$$

где

$$z_1-z_2+z_3=0, \tag{20}$$

под влиянием бесконечно малых преобразований, порожденных символами группы $O(4)$:

$$\begin{aligned} &Z_1F\equiv u_1p_2-u_2p_1,\\ &Z_2F\equiv u_1p_3-u_3p_1,\\ &Z_3F\equiv u_1p_4-u_4p_1,\\ &Z_4F\equiv u_2p_3-u_3p_2,\\ &Z_5F\equiv u_2p_4-u_4p_2,\\ &Z_6F\equiv u_3p_4-u_4p_3. \end{aligned} \tag{21}$$

Чтобы найти эти приращения, соответствующие бесконечно малому преобразованию одного из операторов, представим $R_{hljk}$ как произведение символических векторов:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}=X_\alpha Y_\beta Z_\gamma U_\delta \tag{22}$$

и подвергнем каждый из последних этому бесконечно малому преобразованию, а затем раскроем скобки, пренебрегая при этом бесконечно малыми высших порядков. Выполнив подсчет, связанный с реализацией намеченной программы действий для всех независимых переменных и операторов группы $O(4)$, получаем явные выражения приращений переменных $x_i$, $y_j$, $z_k$. Символы преобразований коэффициентов формы $\Phi$, индуцированных бесконечно малыми преобразованиями, отвечающими операторам $Z_iF$, выпишем в хорошо обозримой форме — в виде нижеследующей таблицы (см. таблицу 1).

Таблица 1

| Опер. | $\frac{\partial J}{\partial x_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_7}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_8}$ | $\frac{\partial l}{\partial y_9}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_{10}}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_{11}}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_{12}}$ | $\frac{\partial J}{\partial z_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial z_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial \delta_0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z_1$ | 0 | $-2y_6$ | $-2y_8$ | $2y_6$ | $2y_8$ | 0 | $-y_3$ | $-y_4$ | $y_1$ | $y_2$ | $-z_2-z_3$ | $x_2-x_4$ | $-y_{11}$ | $x_3-x_5$ | $-y_{12}$ | $z_2+z_3$ | $y_7$ | $y_9$ | 0 | $y_5-y_{10}$ | $y_5-y_{10}$ |
| $Z_2$ | $2y_3$ | 0 | $-2y_3$ | $-2y_3$ | 0 | $2y_9$ | $y_6$ | $z_3-z_1$ | $x_4-x_1$ | $y_{10}$ | $-y_7$ | $-y_1$ | $y_5$ | $-y_{12}$ | $x_3-x_6$ | $-y_4$ | $z_3-z_1$ | $y_8$ | $y_2+y_{11}$ | 0 | $-y_2-y_{11}$ |
| $Z_3$ | $2y_4$ | $2y_7$ | 0 | 0 | $-2y_4$ | $-2y_7$ | $z_1+z_2$ | $y_8$ | $y_{10}$ | $x_5-x_1$ | $y_9$ | $y_{11}$ | $x_6-x_2$ | $-y_2$ | $-y_5$ | $-y_3$ | $-y_6$ | $-z_1-z_2$ | $y_{12}-y_1$ | $y_{12}-y_1$ | 0 |
| $Z_4$ | $-2y_1$ | $2y_1$ | 0 | 0 | $-2y_{12}$ | $2y_{12}$ | $x_1-x_2$ | $-y_5$ | $-y_6$ | $-z_1-z_2$ | $y_2$ | $y_3$ | $z_1+z_2$ | $-y_9$ | $y_8$ | $-y_{11}$ | $y_{10}$ | $x_5-x_6$ | $y_4-y_7$ | $y_4-y_7$ | 0 |
| $Z_5$ | $-2y_2$ | 0 | $2y_2$ | $2y_{11}$ | 0 | $-2y_{11}$ | $-y_5$ | $x_1-x_8$ | $z_1-z_3$ | $-y_8$ | $y_1$ | $y_7$ | $-y_6$ | $y_4$ | $z_1-z_3$ | $y_{12}$ | $x_6-x_4$ | $-y_{10}$ | $-y_3-y_9$ | 0 | $y_3+y_9$ |
| $Z_6$ | 0 | $-2y_5$ | $2y_5$ | $-2y_{10}$ | $2y_{10}$ | 0 | $-y_2$ | $y_1$ | $-y_4$ | $y_3$ | $x_2-x_8$ | $-z_2-z_3$ | $-y_9$ | $z_2+z_3$ | $y_7$ | $x_4-x_5$ | $-y_{12}$ | $y_{11}$ | 0 | $y_6-y_8$ | $y_6-y_8$ |

Таблица 2

| Опер. | $\frac{\partial J}{\partial a_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial b_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial b_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial b_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial b_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial b_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial b_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_4}$ | $\frac{\partial c}{\partial c_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_7}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_8}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_9}$ | $\frac{\partial J}{\partial \sigma_0}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z_1$ | $2a_4$ | $-2a_4$ | 0 | $a_2-a_1$ | $a_6$ | $-a_5$ | $2b_4$ | $-2b_4$ | 0 | $b_2-b_1$ | $b_6$ | $-b_5$ | $c_2+c_4$ | $c_5-c_1$ | $c_6$ | $c_5-c_1$ | $-c_2-c_4$ | $-c_3$ | $c_8$ | $-c_7$ | 0 | 0 |
| $Z_2$ | $-2a_5$ | 0 | $2a_5$ | $-a_6$ | $a_1-a_3$ | $a_4$ | $-2b_5$ | 0 | $2b_5$ | $-b_6$ | $b_1-b_3$ | $b_4$ | $-c_3-c_7$ | $-c_8$ | $c_1-c_9$ | $-c_6$ | 0 | $c_4$ | $c_1-c_9$ | $c_2$ | $c_3+c_7$ | 0 |
| $Z_3$ | 0 | $2a_6$ | $-2a_6$ | $a_5$ | $-a_4$ | $a_3-a_2$ | 0 | $-2b_6$ | $2b_6$ | $-b_5$ | $b_4$ | $b_2-b_3$ | 0 | $-c_3$ | $c_2$ | $c_7$ | $c_8-c_6$ | $c_5+c_9$ | $-c_4$ | $-c_5-c_9$ | $c_8-c_6$ | 0 |
| $Z_4$ | 0 | $2a_6$ | $-2a_6$ | $a_5$ | $-a_4$ | $a_3-a_2$ | 0 | $2b_6$ | $-2b_6$ | $b_0$ | $-b_4$ | $b_3-b_2$ | 0 | $c_3$ | $-c_2$ | $c_7$ | $c_6+c_8$ | $c_9-c_5$ | $-c_4$ | $c_9-c_5$ | $-c_6-c_8$ | 0 |
| $Z_5$ | $2a_5$ | 0 | $-2a_5$ | $a_6$ | $a_3-a_1$ | $-a_4$ | $-2b_5$ | 0 | $2b_5$ | $-b_6$ | $b_1-b_3$ | $b_4$ | $c_7-c_3$ | $c_8$ | $c_1+c_9$ | $-c_6$ | 0 | $c_4$ | $-c_1-c_9$ | $-c_2$ | $c_7-c_3$ | 0 |
| $Z_6$ | $2a_4$ | $-2a_4$ | 0 | $a_2-a_1$ | $a_6$ | $-a_5$ | $-2b_4$ | $2b_4$ | 0 | $b_1-b_2$ | $-b_6$ | $b_5$ | $c_4-c_2$ | $c_1+c_5$ | $c_6$ | $-c_1-c_5$ | $c_4-c_2$ | $-c_3$ | $-c_8$ | $c_7$ | 0 | 0 |

Скобка Пуассона любых двух из символов $Z_iJ$ линейно выражается с постоянными коэффициентами через операторы той же системы:

$$
\begin{array}{llll}
(Z_1Z_2) = -Z_4, & (Z_2Z_3) = -Z_6, & (Z_3Z_4) = 0, & (Z_4Z_5) = -Z_6,\\
(Z_1Z_3) = -Z_5, & (Z_2Z_4) = -Z_1, & (Z_3Z_5) = -Z_1, & (Z_4Z_6) = Z_5,\\
(Z_1Z_4) = Z_2, & (Z_2Z_5) = 0, & (Z_3Z_6) = -Z_2, & (Z_5Z_6) = -Z_4.\\
(Z_1Z_5) = Z_3, & (Z_2Z_6) = Z_3, & & \\
(Z_1Z_6) = 0, & & &
\end{array}
$$

Докажем, что система, данная таблицей 1, содержит шесть независимых уравнений. Для этого рассмотрим минор 6-го порядка, составленный из коэффициентов при производных $\frac{\partial J}{\partial x_1}$, $\frac{\partial J}{\partial y_2}$, $\frac{\partial J}{\partial y_5}$, $\frac{\partial J}{\partial z_1}$, $\frac{\partial J}{\partial y_6}$, $\frac{\partial J}{\partial y_3}$ интересующей нас системы. Если положить

$$y_1^0 = 1, \quad x_i^0 = 0, \quad y_j^0 = 0 \quad (j \neq 1), \quad z_h^0 = 0,$$

то этот минор будет задаваться таблицей:

$$(\Delta_6)_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Выписанный определитель $(\Delta_6)_0 \neq 0$. Значит, на основании теории полных систем дифференциальных уравнений в частных производных [см. ([9]), § 14, стр. 70—71], имеет место

ТЕОРЕМА 3. *В пространстве $V_4$ с определенно положительным мероопределением $ds^2 > 0$ тензор кривизны $R_{hijk}$ имеет $20 - 6 = 14$ алгебраических инвариантов относительно группы $O(4)$.*

4. Попытка непосредственно применить к решению системы $Z_iJ = 0$ классические методы Якоби привела бы нас к серьезным техническим затруднениям. Поэтому мы хотим подойти к ее интегрированию обходным путем, предварительно преобразовав эту систему при помощи введения новых независимых переменных:

$$\sigma_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6; \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 - 6z_1 + 6z_2,\\
a_2 &= -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 - 6z_2,\\
a_3 &= 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 + 6z_1,\\
a_4 &= 3(y_5 + y_6 - y_8 - y_{10}),\\
a_5 &= 3(y_2 + y_3 + y_9 + y_{11}),\\
a_6 &= 3(y_1 - y_4 + y_7 - y_{12});
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 + 6z_1 - 6z_2,\\
b_2 &= -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 + 6z_2,\\
b_3 &= 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 - 6z_1,\\
b_4 &= 3(-y_5 + y_6 - y_8 + y_{10}),\\
b_5 &= 3(-y_2 + y_3 + y_9 - y_{11}),\\
b_6 &= 3(y_1 + y_4 - y_7 - y_{12});
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= x_4 - x_3, \\ c_2 &= y_5 + y_6 + y_8 + y_{10}, \\ c_3 &= y_2 + y_3 - y_9 - y_{11}, \\ c_4 &= -y_5 + y_6 + y_8 - y_{10}, \\ c_5 &= x_2 - x_5, \\ c_6 &= y_1 - y_4 - y_7 + y_{12}, \\ c_7 &= -y_2 + y_3 - y_9 + y_{11}, \\ c_8 &= y_1 + y_4 + y_7 + y_{12}, \\ c_9 &= x_1 - x_6. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Покажем, что указанная замена переменных неособенная, т. е., кроме двух очевидных соотношений

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$
$$b_1 + b_2 + b_3 = 0,$$

между $a_i, b_i, c_k$ нет линейных зависимостей с постоянными коэффициентами. Действительно, совокупность подстановок (23) — (26) можно разбить на четыре группы без общих переменных:

$$\sigma_0,\ a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_5,\ c_9 \tag{27}$$
$$a_4,\quad b_4,\quad c_2,\quad c_4, \tag{28}$$
$$a_5,\quad b_5,\quad c_3,\quad c_7, \tag{29}$$
$$a_6,\quad b_6,\quad c_6,\quad c_8. \tag{30}$$

Переменные ряда (27) суть линейные однородные функции $x_i$, $z_k$. Определитель, составленный из коэффициентов последних,

$$\Delta_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & -6 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

равен $-2^7 \cdot 3^4$. Переменные группы (28) выражаются через $y_5, y_6, y_8, y_{10}$ линейно с определителем

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Как легко видеть, $\Delta_4 = -2^4 3^2$. Простым вычислением находим, что определители систем (29), (30) $\Delta_4'$, $\Delta_4''$ оба равны $-2^4 3^2$. Утверждение, таким образом, обосновано.

Известно, что если в данном линейном однородном операторе

$$Xf = a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

произвести замену $x^i = \varphi^i(y^1, \ldots, y^n)$, то

$$Xf = X(y^\nu)\frac{\partial f}{\partial y^\nu}.$$

Пользуясь последней формулой, получаем таблицу 2 (см. стр. 392).

Таблица 2 обнаруживает, что $\sigma_0$ — интеграл системы $Z_i f = 0$.

Введем три системы операторов: $A_i f$, $B_i f$, $C_k f$. Первую из них определим формулами:

$$A_1 f \equiv 2a_4 p_1 - 2a_4 p_2 + (a_2 - a_1)p_4 + a_6 p_5 - a_5 p_6,$$
$$A_2 f \equiv -2a_5 p_1 + 2a_5 p_3 - a_6 p_4 + (a_1 - a_3)p_5 + a_4 p_6,$$
$$A_3 f \equiv 2a_6 p_2 - 2a_6 p_3 + a_5 p_4 - a_4 p_5 + (a_3 - a_2)p_6 \qquad \left(p_i = \frac{\partial f}{\partial a_i}\right).$$

Система $A_i f$ замкнутая, ибо

$$(A_1 A_2) = -A_3, \quad (A_1 A_3) = A_2, \quad (A_2 A_3) = -A_1.$$

Кроме того, $A_i f$ независимы, так как, например, определитель

$$\begin{vmatrix} 2a_4 & -2a_4 & -a_5 \\ -2a_5 & 0 & a_4 \\ 0 & 2a_6 & a_3 - a_2 \end{vmatrix}$$

для $a_5^0 = 1$, $a_6^0 = 1$, $a_1^0 = a_2^0 = a_4^0 = 0$ отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Система $B_i f$ получается из $A_i f$ путем замены $a_i$ на $b_i$:

$$B_1 f \equiv 2b_4 \bar{p}_1 - 2b_4 \bar{p}_2 + (b_2 - b_1)\bar{p}_4 + b_6 \bar{p}_5 - b_5 \bar{p}_6,$$
$$B_2 f \equiv -2b_5 \bar{p}_1 + 2b_5 \bar{p}_3 - b_6 \bar{p}_4 + (b_1 - b_3)\bar{p}_5 + b_4 \bar{p}_6,$$
$$B_3 f \equiv 2b_6 \bar{p}_2 - 2b_6 \bar{p}_3 - b_5 \bar{p}_4 - b_4 \bar{p}_5 + (b_3 - b_2)\bar{p}_6 \qquad \left(\bar{p}_i = \frac{\partial f}{\partial b_i}\right).$$

Следовательно, имеют место соотношения:

$$(B_1 B_2) = -B_3, \quad (B_1 B_3) = B_2, \quad (B_2 B_3) = -B_1,$$

и операторы $B_i f$ независимы.

Дифференциальные операторы $C_i f$ определим следующими формулами:

$$C_1 f \equiv (c_2 + c_4)q_1 + (c_5 - c_1)q_2 + c_6 q_3 + (c_5 - c_1)q_4 -$$
$$-(c_2 + c_4)q_5 - c_3 q_6 + c_8 q_7 - c_7 q_8,$$
$$C_2 f \equiv -(c_3 + c_7)q_1 - c_8 q_2 + (c_1 - c_9)q_3 - c_6 q_4 + c_4 q_6 +$$
$$+(c_1 - c_9)q_7 + c_2 q_8 + (c_3 + c_7)q_9,$$
$$C_3 f \equiv -c_3 q_2 + c_2 q_3 + c_7 q_4 + (c_8 - c_6)q_5 + (c_5 + c_9)q_6 -$$
$$-c_4 q_7 - (c_5 + c_9)q_8 + (c_8 - c_6)q_9,$$
$$C_4 f \equiv c_3 q_2 - c_2 q_3 + c_7 q_4 + (c_6 + c_8)q_5 + (c_9 - c_5)q_6 -$$
$$-c_4 q_7 + (c_9 - c_5)q_8 - (c_6 + c_8)q_9,$$
$$C_5 f \equiv (c_7 - c_3)q_1 + c_8 q_2 + (c_1 + c_9)q_3 - c_6 q_4 + c_4 q_6 -$$
$$-(c_1 + c_9)q_7 - c_2 q_8 + (c_7 - c_3)q_9,$$
$$C_6 f \equiv (c_4 - c_2)q_1 + (c_1 + c_5)q_2 + c_6 q_3 - (c_1 + c_5)q_4 +$$
$$+(c_4 - c_2)q_5 - c_3 q_6 - c_8 q_7 + c_7 q_8$$
$$\left(q_i = \frac{\partial f}{\partial c_i}, \quad i = 1, \ldots, 9\right)$$

Структурные соотношения для $C_i f$ имеют вид:

$$\begin{array}{lll} (C_1C_2) = -C_4, & (C_2C_3) = -C_6, & (C_3C_5) = -C_1, \\ (C_1C_3) = -C_5, & (C_2C_4) = -C_1, & (C_3C_6) = -C_2, \\ (C_1C_4) = C_2, & (C_2C_5) = 0, & (C_4C_5) = -C_6, \\ (C_1C_5) = C_3, & (C_2C_6) = C_3, & (C_4C_6) = C_5, \\ (C_1C_6) = 0, & (C_3C_4) = 0, & (C_5C_6) = -C_4. \end{array}$$

Минор матрицы коэффициентов системы $C_i f$, отвечающий производным $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$,

$$D_6 = \begin{vmatrix} c_2 + c_4 & c_5 - c_1 & c_6 & c_5 - c_1 & -c_2 - c_4 & -c_3 \\ -c_3 - c_7 & -c_8 & c_1 - c_9 & -c_6 & 0 & c_4 \\ 0 & -c_3 & c_2 & c_7 & c_8 - c_6 & c_5 + c_9 \\ 0 & c_3 & -c_2 & c_7 & c_8 + c_6 & c_9 - c_5 \\ c_7 - c_3 & c_8 & c_1 + c_9 & -c_6 & 0 & c_4 \\ c_4 - c_2 & c_1 + c_5 & c_6 & -c_1 - c_5 & c_4 - c_2 & -c_3 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, например, для

$$c_3^0 = c_7^0 = c_8^0 = 0, \quad c_1^0 = c_2^0 = c_4^0 = c_5^0 = c_6^0 = c_9^0 = 1.$$

Следовательно, символы $C_i f$ также независимы.

С помощью введенных обозначений операторы таблицы 2 символически можно изобразить следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_1 f &= A_1 f + B_1 f + C_1 f, \\ Z_2 f &= A_2 f + B_2 f + C_2 f, \\ Z_3 f &= A_3 f - B_3 f + C_3 f, \\ Z_4 f &= A_3 f + B_3 f + C_4 f, \\ Z_5 f &= -A_2 f + B_2 f + C_5 f, \\ Z_6 f &= A_1 f - B_1 f + C_6 f. \end{aligned}$$

Исходя из структурных соотношений для $A_i f$, $B_i f$, $C_k f$, легко видеть, что

$$\begin{array}{lll} (Z_1Z_2) = -Z_4 & (Z_2Z_3) = -Z_6, & (Z_3Z_5) = -Z_1, \\ (Z_1Z_3) = -Z_5, & (Z_2Z_4) = -Z_1, & (Z_3Z_6) = -Z_2, \\ (Z_1Z_4) = Z_2, & (Z_2Z_5) = 0, & (Z_4Z_5) = -Z_6, \\ (Z_1Z_5) = Z_3, & (Z_2Z_6) = Z_3, & (Z_4Z_6) = Z_5, \\ (Z_1Z_6) = 0, & (Z_3Z_4) = 0, & (Z_5Z_6) = -Z_4. \end{array}$$

5. Искомые скалярные инварианты второго порядка многообразия $V_4$ суть корни операторов $Z_i f$. Задачу отыскания этих инвариантов можно расчленить на несколько более простых задач:

I. $A_i f = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Эта система — полная, содержит пять независимых переменных и поэтому допускает два функционально независимых интеграла:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - a_4^2 - a_5^2 - a_6^2, \\ \sigma_2 &= a_1a_2a_3 + 2a_4a_5a_6 - a_2a_5^2 - a_1a_6^2 - a_3a_4^2. \end{aligned}$$

II. $B_i f = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Отсюда находим два других инварианта:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - b_4^2 - b_5^2 - b_6^2, \\ \varkappa_2 &= b_1b_2b_3 + 2b_4b_5b_6 - b_2b_5^2 - b_1b_6^2 - b_3b_4^2. \end{aligned}$$

III. $C_i f = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$. Система — полная, содержит шесть независимых уравнений от девяти независимых переменных, и ее независимые интегралы суть следующие:

$$\theta_1 = \sum_{i=1}^{9} c_i^2,$$

$$\theta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \theta_3 = (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(c_4^2 + c_5^2 + c_6^2) + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(c_7^2 + c_8^2 + c_9^2) + \\ + (c_4^2 + c_5^2 + c_6^2)(c_7^2 + c_8^2 + c_9^2) - (c_1c_4 + c_2c_5 + c_3c_6)^2 - \\ - (c_1c_7 + c_2c_8 + c_3c_9)^2 - (c_4c_7 + c_5c_8 + c_6c_9)^2. \end{aligned}$$

IV. Система

$$\begin{array}{lll} (A_1 + C_1) f = 0, & (A_3 + C_3) f = 0, & (-A_2 + C_5) f = 0, \\ (A_2 + C_2) f = 0, & (A_3 + C_4) f = 0, & (A_1 + C_6) f = 0 \end{array}$$

— полная, уравнения ее независимые. Поэтому она допускает $9 + 5 - 6 = 8$ функционально независимых интегралов. Но пять из них нам уже известны (см. решения систем I и III). Три интеграла, зависящие от обоих рядов переменных, суть следующие:

$$\begin{aligned} \omega_1 = a_1(c_4^2 + c_5^2 + c_6^2 + c_7^2 + c_8^2 + c_9^2) + a_2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_7^2 + c_8^2 + c_9^2) + \\ + a_3(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 + c_6^2) - 2a_4(c_1c_4 + c_2c_5 + c_3c_6) - \\ - 2a_5(c_1c_7 + c_2c_8 + c_3c_9) - 2a_6(c_4c_7 + c_5c_8 + c_6c_9), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_2 = (a_2a_3 - a_6^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + (a_1a_3 - a_5^2)(c_4^2 + c_5^2 + c_6^2) + \\ + (a_1a_2 - a_4^2)(c_7^2 + c_8^2 + c_9^2) + 2(a_5a_6 - a_3a_4)(c_1c_4 + c_2c_5 + c_3c_6) + \\ + 2(a_4a_6 - a_2a_5)(c_1c_7 + c_2c_8 + c_3c_9) + 2(a_4a_5 - a_1a_6)(c_4c_7 + c_5c_8 + c_6c_9), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_3 = a_1[(c_4^2 + c_5^2 + c_6^2)(c_7^2 + c_8^2 + c_9^2) - (c_4c_7 + c_5c_8 + c_6c_9)^2] + \\ + a_2[(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(c_7^2 + c_8^2 + c_9^2) - (c_1c_7 + c_2c_8 + c_3c_9)^2] + \\ + a_3[(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(c_4^2 + c_5^2 + c_6^2) - (c_1c_4 + c_2c_5 + c_3c_6)^2] + \\ + 2a_4[(c_1c_7 + c_2c_8 + c_3c_9)(c_4c_7 + c_5c_8 + c_6c_9) - \\ - (c_7^2 + c_8^2 + c_9^2)(c_1c_4 + c_2c_5 + c_3c_6)] + \\ + 2a_5[(c_1c_4 + c_2c_5 + c_3c_6)(c_4c_7 + c_5c_8 + c_6c_9) - \\ - (c_4^2 + c_5^2 + c_6^2)(c_1c_7 + c_2c_8 + c_3c_9)] + \\ + 2a_6[(c_1c_4 + c_2c_5 + c_3c_6)(c_1c_7 + c_2c_8 + c_3c_9) - \\ - (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(c_4c_7 + c_5c_8 + c_6c_9)]. \end{aligned}$$

V. Система

$$\begin{array}{ll} (B_1 + C_1) f = 0, & (B_3 + C_4) f = 0, \\ (B_2 + C_2) f = 0, & (B_2 + C_5) f = 0, \\ (-B_3 + C_3) f = 0, & (-B_1 + C_6) f = 0 \end{array}$$

— полная и содержит шесть независимых уравнений от 14 независимых переменных. Значит, она допускает $14 - 6 = 8$ интегралов. Но пять из

них мы уже нашли (см. системы II, III). Три смешанных инварианта суть следующие:

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_1 = {} & b_1(c_2^2+c_5^2+c_8^2+c_3^2+c_6^2+c_9^2)+b_2(c_1^2+c_4^2+c_7^2+c_3^2+c_6^2+c_9^2)+\\ & +b_3(c_1^2+c_4^2+c_7^2+c_2^2+c_5^2+c_8^2)-2b_4(c_1c_2+c_4c_5+c_7c_8)-\\ & -2b_5(c_1c_3+c_4c_6+c_7c_9)-2b_6(c_2c_3+c_5c_6+c_8c_9),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_2 = {} & (b_2b_3-b_6^2)(c_1^2+c_4^2+c_7^2)+(b_1b_3-b_5^2)(c_2^2+c_5^2+c_8^2)+\\ & +(b_1b_2-b_4^2)(c_3^2+c_6^2+c_9^2)+2(b_5b_6-b_3b_4)(c_1c_2+c_4c_5+c_7c_8)+\\ & +2(b_4b_6-b_2b_5)(c_1c_3+c_4c_6+c_7c_9)+2(b_4b_5-b_1b_6)(c_2c_3+c_5c_6+c_8c_9),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_3 = {} & b_1[(c_2^2+c_5^2+c_8^2)(c_3^2+c_6^2+c_9^2)-(c_2c_3+c_5c_6+c_8c_9)^2]+\\ & +b_2[(c_1^2+c_4^2+c_7^2)(c_3^2+c_6^2+c_9^2)-(c_1c_3+c_4c_6+c_7c_9)^2]+\\ & +b_3[(c_1^2+c_4^2+c_7^2)(c_2^2+c_5^2+c_8^2)-(c_1c_2+c_4c_5+c_7c_8)^2]+\\ & +2b_4[(c_1c_3+c_4c_6+c_7c_9)(c_2c_3+c_5c_6+c_8c_9)-\\ & -(c_3^2+c_6^2+c_9^2)(c_1c_2+c_4c_5+c_7c_8)]+\\ & +2b_5[(c_1c_2+c_4c_5+c_7c_8)(c_2c_3+c_5c_6+c_8c_9)-\\ & -(c_2^2+c_5^2+c_8^2)(c_1c_3+c_4c_6+c_7c_9)]+\\ & +2b_6[(c_1c_2+c_4c_5+c_7c_8)(c_1c_3+c_4c_6+c_7c_9)-\\ & -(c_1^2+c_4^2+c_7^2)(c_2c_3+c_5c_6+c_8c_9)].\end{aligned}$$

6. Доказательство функциональной независимости построенных инвариантов. Чтобы убедиться в независимости функций

$$\sigma_0,\quad \sigma_i,\quad \varkappa_i,\quad \theta_k,\quad \omega_k,\quad \overline{\omega}_k, \tag{31}$$

очевидно, достаточно обнаружить, что якобиан

$$J_{13} = \frac{\partial(\theta_k\sigma_i\omega_k\varkappa_i\overline{\omega}_k)}{\partial(c_1c_5c_9a_1a_2a_4a_5a_6b_1b_2b_4b_5b_6)} \tag{32}$$

для каких-нибудь частных значений $a_i^0$, $b_i^0$, $c_k^0$ отличен от нуля. Прежде всего замечаем, что

$$J_{13} = \begin{vmatrix} \Delta_3 & 0 & 0 \\ * & \Delta_5 & 0 \\ * & * & \Delta_5^* \end{vmatrix},$$

где $\Delta_3$ — функциональный определитель от $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ по $c_1, c_5, c_9$, а $\Delta_5$, $\Delta_i^*$ — от $\sigma_i, \omega_k, \varkappa_i, \overline{\omega}_k$, соответственно, по $a_i$, $b_i$.

Положим

$$\begin{gathered} a_1^0=0,\quad a_2^0=0,\quad a_4^0=1,\quad a_5^0=-1,\quad a_6^0=0,\\ b_1^0=0,\quad b_2^0=0,\quad b_4^0=1,\quad b_5^0=-1,\quad b_6^0=0,\\ c_1^0=c_2^0=c_3^0=c_4^0=0,\quad c_5^0=c_6^0=1,\quad c_7^0=0,\quad c_8^0=1,\quad c_9^0=0.\end{gathered}$$

Легко видеть, что

$$(\Delta_3)_{M^0} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$(\Delta_5)_{M^\circ} = (\overset{*}{\Delta}_5)_{M^\circ} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, $(J_{13})_{M^\circ} \neq 0$.

Резюмируя вышеприведенные исследования, можно формулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Инварианты $\sigma_0$, $\sigma_i$, $\varkappa_i$, $\theta_k$, $\omega_k$, $\overline{\omega}_k$ образуют наипростейший базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка квадратичной дифференциальной формы $ds^2 > 0$ от четырех переменных.*

7. Чтобы конкретизировать теорему о базисе для конформно-плоских римановых пространств, изучим аналитическое условие конформности $V_n (n > 3)$:

$$R_{hijk} = \frac{1}{n-2}(g_{hk}R_{ij} + g_{ij}R_{hk} - g_{hj}R_{ik} - g_{ik}R_{hj}) + \\ + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{hj} - g_{ij}g_{hk}). \tag{33}$$

Мы рассматриваем случай, когда $n = 4$ и когда $g$ в местном ортонормальном репере приводится к виду:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Расписывая формулу (33) подробно, находим:

$$R_{1212} = -\frac{1}{2}(R_{11} + R_{22}) + \frac{R}{6}, \quad R_{1213} = -\frac{1}{2}R_{23}, \quad R_{1334} = \frac{1}{2}R_{14},$$

$$R_{1313} = -\frac{1}{2}(R_{11} + R_{33}) + \frac{R}{6}, \quad R_{1214} = -\frac{1}{2}R_{24}, \quad R_{1424} = -\frac{1}{2}R_{12},$$

$$R_{1414} = -\frac{1}{2}(R_{11} + R_{44}) + \frac{R}{6}, \quad R_{1223} = \frac{1}{2}R_{13}, \quad R_{1434} = -\frac{1}{2}R_{13},$$

$$R_{2323} = -\frac{1}{2}(R_{22} + R_{33}) + \frac{R}{6}, \quad R_{1224} = \frac{1}{2}R_{14}, \quad R_{2324} = -\frac{1}{2}R_{34},$$

$$R_{2424} = -\frac{1}{2}(R_{22} + R_{44}) + \frac{R}{6}, \quad R_{1413} = -\frac{1}{2}R_{34}, \quad R_{2334} = \frac{1}{2}R_{24},$$

$$R_{3434} = -\frac{1}{2}(R_{33} + R_{44}) + \frac{R}{6}, \quad R_{1323} = -\frac{1}{2}R_{12}, \quad R_{2434} = -\frac{1}{2}R_{23},$$

$$R_{1234} = 0, \quad R_{1324} = 0, \quad R_{1423} = 0.$$

Пользуясь формулами

$$R = -2\sigma_0 = -2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6),$$

$$R_{11} = -x_1 - x_2 - x_3, \quad R_{12} = -y_6 - y_8, \quad R_{23} = -y_1 - y_{12},$$

$$R_{22} = -x_1 - x_4 - x_5, \quad R_{13} = y_3 - y_9, \quad R_{24} = -y_2 + y_{11},$$

$$R_{33} = -x_2 - x_4 - x_6, \quad R_{14} = y_4 + y_7, \quad R_{34} = -y_5 - y_{10},$$

$$R_{44} = -x_3 - x_5 - x_6,$$

совокупность предыдущих формул можно свести к нижеследующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_6 = x_2 + x_5 = x_3 + x_4, \\ y_1 - y_{12} = y_4 - y_7 = y_5 - y_{10} = y_6 - y_8 = 0, \\ y_2 + y_{11} = y_3 + y_9 = 0, \\ z_1 = z_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Сравнивая формулы (24), (25) и (34), легко усмотреть, что если условия (34) выполняются, то

$$a_i = 0, \quad b_i = 0. \quad (35)$$

Обратное заключение тоже справедливо. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 5. *$V_4$ с определенно-положительным мероопределением тогда и только тогда конформно-плоское, если*

$$a_i = 0, \quad b_i = 0.$$

Комбинируя теоремы 4 и 5, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Инварианты $\sigma_0$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ образуют базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка конформно-плоского $V_4$ с $ds^2 > 0$.*

8. Как известно, пространство, для которого

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij},$$

называется пространством Эйнштейна. Требование, которое определяет пространство Эйнштейна $V_4$, можно выразить через переменные $c_i$. Действительно, если положить

$$B_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{R}{4} g_{\alpha\beta},$$

то будем иметь:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{2}(c_1 - c_5 - c_9), & B_{12} &= -\frac{1}{2}(c_2 + c_4), & B_{24} &= \frac{1}{2}(c_7 - c_3), \\ B_{22} &= \frac{1}{2}(-c_1 + c_5 - c_9), & B_{13} &= \frac{1}{2}(c_3 + c_7), & B_{34} &= \frac{1}{2}(c_4 - c_2). \\ B_{33} &= \frac{1}{2}(-c_1 - c_5 + c_9), & B_{14} &= \frac{1}{2}(c_8 - c_6), \\ B_{44} &= \frac{1}{2}(c_1 + c_5 + c_9), & B_{23} &= -\frac{1}{2}(c_8 + c_6), \end{aligned}$$

Из выписанных формул легко усмотреть, что если $B_{ij} = 0$, то $c_i = 0$, и наоборот. Значит, имеет место

ТЕОРЕМА 7. *$V_4$ тогда и только тогда есть пространство Эйнштейна, если $c_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$.*

Из теорем 4 и 7 немедленно следует, поскольку для пространства Эйнштейна $\sigma_0 = \text{const}$ при $n > 2$,

ТЕОРЕМА 8. *Инварианты $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ образуют базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка пространств Эйнштейна четырех измерений $(ds^2 > 0)$.*

9. В процессе преобразования дифференциальных уравнений для инвариантов мы видели, что, когда координаты $u^i$ подвергаются подстановкам группы $O(4)$, коэффициенты формы $\Phi$ определенным образом трансформируются. Более того, независимые однородные линейные комбинации $a_i$,

$b_i$, $c_k$ от коэффициентов этой формы преобразуются сами по себе, образуя при этом группу. Такого рода объекты по Картану называются тензорами. Чтобы изучить более детально тензоры $a_i$, $b_i$, $c_k$, нам потребуется несколько подготовительных формул, к выводу которых мы сейчас и переходим.

Пусть переменные $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ подвергаются подстановке

$$\left.\begin{aligned} \xi_1' &= (1+\alpha_{11})\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3, \\ \xi_2' &= \alpha_{21}\xi_1 + (1+\alpha_{22})\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3, \\ \xi_3' &= \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + (1+\alpha_{33})\xi_3, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

причем матрица этого преобразования

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & 1+\alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1+\alpha_{33} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию

$$AA_c = E,$$

где $A_c$ — транспонированная матрица. Более подробно это последнее равенство означает следующее:

$$\left.\begin{aligned} &(1+\alpha_{11})^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \quad \alpha_{21}(1+\alpha_{11}) + \alpha_{12}(1+\alpha_{22}) + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0, \\ &\alpha_{12}^2 + (1+\alpha_{22})^2 + \alpha_{23}^2 = 1, \quad \alpha_{31}(1+\alpha_{11}) + \alpha_{12}\alpha_{32} + \alpha_{13}(1+\alpha_{33}) = 0, \\ &\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + (1+\alpha_{33})^2 = 1, \quad \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{32}(1+\alpha_{22}) + \alpha_{23}(1+\alpha_{33}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Пусть, далее, вторая серия переменных $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ преобразуется по формуле:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1' &= (1+\bar\alpha_{11})\eta_1 + \bar\alpha_{21}\eta_2 + \bar\alpha_{31}\eta_3, \\ \eta_2' &= \bar\alpha_{12}\eta_1 + (1+\bar\alpha_{22})\eta_2 + \bar\alpha_{32}\eta_3, \\ \eta_3' &= \bar\alpha_{13}\eta_1 + \bar\alpha_{23}\eta_2 + (1+\bar\alpha_{33})\eta_3. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Найдем инфинитезимальные операторы преобразований переменных $\xi_i$, $\eta_k$. С этой целью величины $\alpha_{ik}$ будем считать весьма малыми и величинами более высоких порядков малости будем пренебрегать. Тогда условия (37) примут вид:

$$\begin{gathered} \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0, \\ \alpha_{12} + \alpha_{21} = 0, \quad \alpha_{13} + \alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{23} + \alpha_{32} = 0. \end{gathered} \tag{39}$$

Положим

$$\alpha_{jk} = \beta_{jk} + i\gamma_{jk} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Инфинитезимальными операторами преобразований (36), (38) будут:

$$\Gamma_6: \quad \begin{aligned} Y_1F &\equiv \xi_2 q_1 - \xi_1 q_2 - \eta_2 r_1 + \eta_1 r_2, \\ Y_2F &\equiv i\xi_2 q_1 - i\xi_1 q_2 + i\eta_2 r_1 - i\eta_1 r_2, \\ Y_3F &\equiv \xi_3 q_1 - \xi_1 q_3 - \eta_3 r_1 + \eta_1 r_3, \\ Y_4F &\equiv i\xi_3 q_1 - i\xi_1 q_3 + i\eta_3 r_1 - i\eta_1 r_3, \\ Y_5F &\equiv \xi_3 q_2 - \xi_2 q_3 - \eta_3 r_2 + \eta_2 r_3, \\ Y_6F &\equiv i\xi_3 q_2 - i\xi_2 q_3 + i\eta_3 r_2 - i\eta_2 r_3. \end{aligned} \qquad \left(q_i = \frac{\partial F}{\partial \xi_i}, \quad r_i = \frac{\partial F}{\partial \eta_i}\right)$$

| Опер. | $\frac{\partial J}{\partial T_{11}}$ | $\frac{\partial J}{\partial T_{22}}$ | $\frac{\partial J}{\partial T_{33}}$ | $\frac{\partial J}{\partial T_{12}}$ | $\frac{\partial J}{\partial T_{13}}$ | $\frac{\partial J}{\partial T_{23}}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar T_{\bar1\bar1}}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar T_{\bar2\bar2}}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar T_{\bar3\bar3}}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar T_{\bar1\bar2}}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar T_{\bar1\bar3}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_1'$ | $2T_{12}$ | $-2T_{12}$ | 0 | $T_{22}-T_{11}$ | $T_{23}$ | $-T_{13}$ | $2\bar T_{\bar1\bar2}$ | $-2\bar T_{\bar1\bar2}$ | 0 | $\bar T_{\bar2\bar2}-\bar T_{\bar1\bar1}$ | $T_{\bar2\bar3}$ |
| $Y_2'$ | $-2T_{13}$ | 0 | $2T_{13}$ | $-T_{23}$ | $T_{11}-T_{33}$ | $T_{12}$ | $-2\bar T_{\bar1\bar3}$ | 0 | $2\bar T_{\bar1\bar3}$ | $-\bar T_{\bar2\bar3}$ | $\bar T_{\bar1\bar1}-\bar T_{\bar3\bar3}$ |
| $Y_3'$ | 0 | $2T_{23}$ | $-2T_{23}$ | $T_{13}$ | $-T_{12}$ | $T_{33}-T_{22}$ | 0 | $-2\bar T_{\bar2\bar3}$ | $2\bar T_{\bar2\bar3}$ | $-\bar T_{\bar1\bar3}$ | $\bar T_{\bar1\bar2}$ |
| $Y_4'$ | 0 | $2T_{23}$ | $-2T_{23}$ | $T_{13}$ | $-T_{12}$ | $T_{33}-T_{22}$ | 0 | $2\bar T_{\bar2\bar3}$ | $-2\bar T_{\bar2\bar3}$ | $\bar T_{\bar1\bar3}$ | $-\bar T_{\bar1\bar2}$ |
| $Y_5'$ | $2T_{13}$ | 0 | $-2T_{13}$ | $T_{23}$ | $T_{33}-T_{11}$ | $-T_{12}$ | $-2\bar T_{\bar1\bar3}$ | 0 | $2\bar T_{\bar1\bar3}$ | $-\bar T_{\bar2\bar3}$ | $\bar T_{\bar1\bar1}-\bar T_{\bar3\bar3}$ |
| $Y_6'$ | $2T_{12}$ | $-2T_{12}$ | 0 | $T_{22}-T_{11}$ | $T_{23}$ | $-T_{13}$ | $-2\bar T_{\bar1\bar2}$ | $2\bar T_{\bar1\bar2}$ | 0 | $\bar T_{\bar1\bar1}-\bar T_{\bar2\bar2}$ | $-\bar T_{\bar2\bar3}$ |

Структурные соотношения для операторов $Y_iF$ даются равенствами:

$$
\begin{aligned}
&(Y_1Y_2)=0, && (Y_2Y_3)=iY_5, && (Y_3Y_5)=-iY_2,\\
&(Y_1Y_3)=-iY_6, && (Y_2Y_4)=iY_6, && (Y_3Y_6)=iY_1,\\
&(Y_1Y_4)=iY_4, && (Y_2Y_5)=-iY_3, && (Y_4Y_5)=iY_1,\\
&(Y_1Y_5)=iY_5, && (Y_2Y_6)=iY_4, && (Y_4Y_6)=iY_2,\\
&(Y_1Y_6)=-iY_3, && (Y_3Y_4)=0, && (Y_5Y_6)=0.
\end{aligned}
$$

Возьмем следующие комбинации операторов $Y_iF$:

$$
\begin{aligned}
&Y_1'F=-iY_2F, && Y_2'F=iY_4F, && Y_3'F=Y_5F,\\
&Y_4'F=-iY_6F, && Y_5'F=Y_3F, && Y_6'F=Y_1F
\end{aligned}
$$

и проследим, как преобразуются коэффициенты форм

$$\varphi=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} T_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta, \quad \sum T_{ii}=0, \quad T_{\alpha\beta}=T_{\beta\alpha},$$

$$\phi=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \bar T_{\bar\alpha\bar\beta}\eta_{\bar\alpha}\eta_{\bar\beta}, \quad \sum \bar T_{\bar i\bar i}=0, \quad \bar T_{\bar\alpha\bar\beta}=\bar T_{\bar\beta\bar\alpha},$$

$$f=\sum a_{\alpha\bar\beta}\xi_\alpha\eta_{\bar\beta},$$

когда $\xi$, $\eta$ подвергаются бесконечно малым преобразованиям, порожденным символами $Y_i'F$. Результат этих вычислений выпишем в форме таблицы 3.

Положим в таблице 3

$$
\begin{aligned}
&T_{11}=a_1, && \bar T_{\bar1\bar1}=b_1, && a_{1\bar1}=c_1, && a_{2\bar3}=c_6,\\
&T_{22}=a_2, && \bar T_{\bar2\bar2}=b_2, && a_{1\bar2}=c_2, && a_{3\bar1}=c_7,\\
&T_{33}=a_3, && \bar T_{\bar3\bar3}=b_3, && a_{1\bar3}=c_3, && a_{3\bar2}=c_8,\\
&T_{12}=a_4, && \bar T_{\bar1\bar2}=b_4, && a_{2\bar1}=c_4, && a_{3\bar3}=c_9.\\
&T_{13}=a_5, && \bar T_{\bar1\bar3}=b_5, && a_{2\bar2}=c_5,\\
&T_{23}=a_6, && \bar T_{\bar2\bar3}=b_6,
\end{aligned}
$$

Тогда полученная таблица будет полностью совпадать с таблицей 2. Это означает, что неприводимые части тензора кривизны [см. ([10])] четырехмерного пространства Римана $a_i$, $b_i$, $c_k$, имеющие, соответственно, 5, 5, 9 существенных определяющих, под действием преобразований группы $O(4)$ испытывают такие же линейные подстановки, что и коэффициенты тернарных форм $\varphi$, $\phi$, $f$, когда $\xi_i$, $\eta_i$ подвергаются соответственно

Таблица 3

| $\frac{\partial J}{\partial \bar T_{\bar 2\bar 3}}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_{1\bar 1}}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_{1\bar 2}}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_{1\bar 3}}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_{2\bar 1}}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_{2\bar 2}}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_{2\bar 3}}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_{3\bar 1}}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_{3\bar 2}}$ | $\frac{\partial J}{\partial a_{3\bar 3}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\bar T_{\bar 1\bar 3}$ | $a_{1\bar 2}+a_{2\bar 1}$ | $a_{2\bar 2}-a_{1\bar 1}$ | $a_{2\bar 3}$ | $a_{2\bar 2}-a_{1\bar 1}$ | $a_{1\bar 2}-a_{2\bar 1}$ | $-a_{1\bar 3}$ | $a_{3\bar 2}$ | $-a_{3\bar 1}$ | 0 |
| $\bar T_{\bar 1\bar 2}$ | $-a_{1\bar 3}-a_{3\bar 1}$ | $-a_{3\bar 2}$ | $a_{1\bar 1}-a_{3\bar 3}$ | $-a_{2\bar 3}$ | 0 | $a_{2\bar 1}$ | $a_{1\bar 1}-a_{3\bar 3}$ | $a_{1\bar 2}$ | $a_{1\bar 3}+a_{3\bar 1}$ |
| $\bar T_{\bar 2\bar 2}-\bar T_{\bar 3\bar 3}$ | 0 | $-a_{1\bar 3}$ | $a_{1\bar 2}$ | $a_{3\bar 1}$ | $a_{3\bar 2}-a_{2\bar 3}$ | $a_{2\bar 2}+a_{3\bar 3}$ | $-a_{2\bar 1}$ | $-a_{2\bar 2}-a_{3\bar 3}$ | $a_{3\bar 2}-a_{2\bar 3}$ |
| $\bar T_{\bar 3\bar 3}-\bar T_{\bar 2\bar 2}$ | 0 | $-a_{1\bar 3}$ | $-a_{1\bar 2}$ | $a_{3\bar 1}$ | $a_{2\bar 3}+a_{3\bar 2}$ | $a_{3\bar 3}-a_{2\bar 2}$ | $-a_{2\bar 1}$ | $a_{3\bar 3}-a_{2\bar 2}$ | $-a_{2\bar 3}-a_{3\bar 2}$ |
| $\bar T_{\bar 1\bar 2}$ | $a_{3\bar 1}-a_{1\bar 3}$ | $a_{3\bar 2}$ | $a_{1\bar 1}+a_{3\bar 3}$ | $-a_{2\bar 3}$ | 0 | $a_{2\bar 1}$ | $-a_{1\bar 1}-a_{3\bar 3}$ | $-a_{1\bar 2}$ | $a_{3\bar 1}-a_{1\bar 3}$ |
| $\bar T_{\bar 1\bar 3}$ | $a_{2\bar 1}-a_{1\bar 2}$ | $a_{1\bar 1}+a_{2\bar 2}$ | $a_{2\bar 3}$ | $-a_{1\bar 1}-a_{2\bar 2}$ | $a_{2\bar 1}-a_{1\bar 2}$ | $-a_{1\bar 3}$ | $-a_{3\bar 2}$ | $a_{3\bar 1}$ | 0 |

ортогональной, комплексно сопряженной и транспонированной подстановкам. Иными словами $a_i$, $b_i$, $c_k$ суть эвклидовы тензоры в трехмерном пространстве Эвклида. Неприводимая часть $a_i$ ведет себя как симметрический тензор валентности два с равным нулю следом $T_{\alpha\beta}$, в классическом смысле этого слова, относительно группы вращений в пространстве Эвклида трех измерений. Тензор $T_{\alpha\beta}$ — первого класса по обоим своим индексам.

Что касается $b_i$, то они суть компоненты эвклидова тензора $\bar T_{\bar\alpha\bar\beta}$ в трехмерном пространстве Эвклида. Тензор $\bar T_{\bar\alpha\bar\beta}$ — второго класса по обоим индексам. Эвклидов тензор $a_{\alpha\bar\beta}$, отвечающий неприводимой части тензора $R_{hijk}$ с 9 определяющими, — первого класса относительно первого индекса и второго класса относительно второго индекса. Эта новая интерпретация неприводимых частей тензора Римана — Христоффеля, полученная мною с помощью метода бесконечно малых преобразований, сводит проблему разыскания инвариантов к задаче нахождения инвариантов трех тензоров $T_{\alpha\beta}$, $\bar T_{\bar\alpha\bar\beta}$, $a_{\alpha\bar\beta}$ в трехмерном пространстве Эвклида, а задачу классификации римановых многообразий четырех измерений приводит к задаче классификации указанных тензоров.

10. В качестве первого применения неприводимых тензоров $T_{\alpha\beta}$, $\bar T_{\bar\alpha\bar\beta}$, $a_{\alpha\bar\beta}$ укажем, как выражаются построенные выше скалярные инварианты через составляющие этих тензоров.

а) Инварианты тензора $T_{\alpha\beta}$. Этот тензор есть эвклидов тензор, т. е. он определен относительно группы вращений с комплексными параметрами. Но при вращениях, т. е. при преобразованиях $A$, удовлетворяющих условию $AA_c = E$, остается инвариантной квадрика

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2. \tag{40}$$

Значит, мы имеем право рассматривать пару квадратичных форм трех переменных:

$$T_{\alpha\beta}, \quad \delta_{\alpha\beta} \quad \left(\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta. \end{cases}\right)$$

Коэффициенты их $\lambda$-уравнения

$$\varphi(\lambda) = | T_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta} |$$

дадут нам инварианты. Так как след тензора $T_{\alpha\beta}$ равен нулю, то мы

будем иметь лишь два инварианта:

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{23} & T_{23} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix}.$$

b) Инварианты тензора $\overline{T}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$. Этот тензор определен относительно преобразований, сохраняющих квадрику

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2. \tag{41}$$

Поэтому из λ-уравнения

$$\left|\overline{T}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - \lambda\bar{\delta}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\right| = 0$$

легко находим:

$$\varkappa_1 = \begin{vmatrix} \overline{T}_{\bar{1}\bar{1}} & \overline{T}_{\bar{1}\bar{2}} \\ \overline{T}_{\bar{1}\bar{2}} & \overline{T}_{\bar{2}\bar{2}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{T}_{\bar{1}\bar{1}} & \overline{T}_{\bar{1}\bar{3}} \\ \overline{T}_{\bar{1}\bar{3}} & \overline{T}_{\bar{3}\bar{3}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{T}_{\bar{2}\bar{2}} & \overline{T}_{\bar{2}\bar{3}} \\ \overline{T}_{\bar{2}\bar{3}} & \overline{T}_{\bar{3}\bar{3}} \end{vmatrix},$$

$$\varkappa_2 = \begin{vmatrix} \overline{T}_{\bar{1}\bar{1}} & \overline{T}_{\bar{1}\bar{2}} & \overline{T}_{\bar{1}\bar{3}} \\ \overline{T}_{\bar{1}\bar{2}} & \overline{T}_{\bar{2}\bar{2}} & \overline{T}_{\bar{2}\bar{3}} \\ \overline{T}_{\bar{1}\bar{3}} & \overline{T}_{\bar{2}\bar{3}} & \overline{T}_{\bar{3}\bar{3}} \end{vmatrix}.$$

c) Инварианты тензора $a_{\alpha\bar{\beta}}$. Здесь уже нет единичной вектор-функции, стало быть, для $a_{\alpha\bar{\beta}}$ не существует характеристического уравнения. Для нахождения его инвариантов мы должны будем привлекать метрические тензоры $g_{\alpha\beta}$, $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ форм (40), (41), соответственно. Возьмем комитант

$$A_{ik} = a_{i\bar{\sigma}} a_{k\bar{\tau}} g^{\bar{\sigma}\bar{\tau}}.$$

Совокупные инварианты пары квадратичных форм от трех переменных $A_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$) суть следующие:

$$\theta_1 = g^{\lambda\mu} A_{\lambda\mu},$$

$$\theta_3 = \begin{vmatrix} g_{11} & A_{12} & A_{13} \\ g_{21} & A_{22} & A_{23} \\ g_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & g_{12} & A_{13} \\ A_{21} & g_{22} & A_{23} \\ A_{31} & g_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & g_{13} \\ A_{21} & A_{22} & g_{23} \\ A_{31} & A_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

Кроме того, дискриминант тензора $a_{\alpha\bar{\beta}}$ — инвариант преобразований:

$$\theta_2 = \begin{vmatrix} a_{1\bar{1}} & a_{1\bar{2}} & a_{1\bar{3}} \\ a_{2\bar{1}} & a_{2\bar{2}} & a_{2\bar{3}} \\ a_{3\bar{1}} & a_{3\bar{2}} & a_{3\bar{3}} \end{vmatrix}.$$

d) Совокупные инварианты тензоров $T_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\bar{\beta}}$, $g_{\alpha\beta}$, $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$. Здесь мы воспользуемся основной теоремой теории инвариантов [см. ([11]), стр. 131]:

*Всякий инвариант системы любых тензоров есть линейная комбинация слагаемых, каждое из которых получается из этих тензоров с помощью действий умножения тензоров, полных альтернирований и последующего полного свертывания.*

Согласно этой теореме, искомые инварианты мы получим путем свер-

тываний и полных альтернирований следующей серии тензоров:

$$T_{\alpha\beta}a_{i\bar{k}},\quad T_{\alpha\beta}a_{\lambda\bar{\mu}}a_{\sigma\bar{\tau}},\quad T_{\alpha\beta}T_{\gamma\delta}a_{\sigma\bar{\tau}},\quad T_{\alpha\beta}T_{\gamma\delta}a_{\lambda\bar{\mu}}a_{\sigma\bar{\tau}},\ \dots .$$

Для свертываний мы располагаем эвклидовыми тензорами $g_{\alpha\beta}$, $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ ($\alpha$, $\beta =$ $= 1, 2, 3$). Инварианта второй степени не имеется. Существует единственный инвариант третьей степени:

$$\omega_1 = \begin{vmatrix} g_{11} & T_{12} & A_{13} \\ g_{21} & T_{22} & A_{23} \\ g_{31} & T_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & g_{12} & A_{13} \\ T_{12} & g_{22} & A_{23} \\ T_{13} & g_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & A_{21} & g_{13} \\ T_{21} & A_{22} & g_{23} \\ T_{31} & A_{32} & g_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} A_{11} & T_{12} & g_{13} \\ A_{21} & T_{22} & g_{23} \\ A_{31} & T_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & g_{12} & T_{13} \\ A_{21} & g_{22} & T_{23} \\ A_{31} & g_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & A_{12} & T_{13} \\ g_{21} & A_{22} & T_{23} \\ g_{31} & A_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

и единственный смешанный инвариант четвертой степени:

$$\omega_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & A_{13} \\ T_{21} & T_{22} & A_{23} \\ T_{31} & T_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & A_{12} & T_{13} \\ T_{21} & A_{22} & T_{23} \\ T_{31} & A_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & T_{12} & T_{13} \\ A_{21} & T_{22} & T_{23} \\ A_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}.$$

За недостающий смешанный инвариант примем

$$\omega_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & A_{12} & A_{13} \\ T_{21} & A_{22} & A_{23} \\ T_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & T_{12} & A_{13} \\ A_{21} & T_{22} & A_{23} \\ A_{31} & T_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & T_{13} \\ A_{21} & A_{22} & T_{23} \\ A_{31} & A_{32} & T_{33} \end{vmatrix}.$$

е) Совокупные инварианты тензоров $\overline{T}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$, $a_{\alpha\bar{\beta}}$ мы находим таким же путем. Полагаем

$$\overline{A}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = g^{\sigma\tau}a_{\sigma\bar{\alpha}}a_{\tau\bar{\beta}}.$$

Инвариант третьей степени

$$\bar{\omega}_1 = \begin{vmatrix} g_{\bar1\bar1} & \overline{T}_{\bar1\bar2} & \overline{A}_{\bar1\bar3} \\ g_{\bar2\bar1} & \overline{T}_{\bar2\bar2} & \overline{A}_{\bar2\bar3} \\ g_{\bar3\bar1} & \overline{T}_{\bar3\bar2} & \overline{A}_{\bar3\bar3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{\bar1\bar1} & \overline{A}_{\bar1\bar2} & \overline{T}_{\bar1\bar3} \\ g_{\bar2\bar1} & \overline{A}_{\bar2\bar2} & \overline{T}_{\bar2\bar3} \\ g_{\bar3\bar1} & \overline{A}_{\bar3\bar2} & \overline{T}_{\bar3\bar3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{T}_{\bar1\bar1} & g_{\bar1\bar2} & \overline{A}_{\bar1\bar3} \\ \overline{T}_{\bar2\bar1} & g_{\bar2\bar2} & \overline{A}_{\bar2\bar3} \\ \overline{T}_{\bar3\bar1} & g_{\bar3\bar2} & \overline{A}_{\bar3\bar3} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \overline{A}_{\bar1\bar1} & g_{\bar1\bar2} & \overline{T}_{\bar1\bar3} \\ \overline{A}_{\bar2\bar1} & g_{\bar2\bar2} & \overline{T}_{\bar2\bar3} \\ \overline{A}_{\bar3\bar1} & g_{\bar3\bar2} & \overline{T}_{\bar3\bar3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{T}_{\bar1\bar1} & \overline{A}_{\bar1\bar2} & g_{\bar1\bar3} \\ \overline{T}_{\bar2\bar1} & \overline{A}_{\bar2\bar2} & g_{\bar2\bar3} \\ \overline{T}_{\bar3\bar1} & \overline{A}_{\bar3\bar2} & g_{\bar3\bar3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{A}_{\bar1\bar1} & \overline{T}_{\bar1\bar2} & g_{\bar1\bar3} \\ \overline{A}_{\bar2\bar1} & \overline{T}_{\bar2\bar2} & g_{\bar2\bar3} \\ \overline{A}_{\bar3\bar1} & \overline{T}_{\bar3\bar2} & g_{\bar3\bar3} \end{vmatrix}.$$

Инвариант четвертой степени относительно $R_{hijk}$

$$\bar{\omega}_2 = \begin{vmatrix} \overline{T}_{\bar1\bar1} & \overline{T}_{\bar1\bar2} & \overline{A}_{\bar1\bar3} \\ \overline{T}_{\bar2\bar1} & \overline{T}_{\bar2\bar2} & \overline{A}_{\bar2\bar3} \\ \overline{T}_{\bar3\bar1} & \overline{T}_{\bar3\bar2} & \overline{A}_{\bar3\bar3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{T}_{\bar1\bar1} & \overline{A}_{\bar1\bar2} & \overline{T}_{\bar1\bar3} \\ \overline{T}_{\bar2\bar1} & \overline{A}_{\bar2\bar2} & \overline{T}_{\bar2\bar3} \\ \overline{T}_{\bar3\bar1} & \overline{A}_{\bar3\bar2} & \overline{T}_{\bar3\bar3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{A}_{\bar1\bar1} & \overline{T}_{\bar1\bar2} & \overline{T}_{\bar1\bar3} \\ \overline{A}_{\bar2\bar1} & \overline{T}_{\bar2\bar2} & \overline{T}_{\bar2\bar3} \\ \overline{A}_{\bar3\bar1} & \overline{T}_{\bar3\bar2} & \overline{T}_{\bar3\bar3} \end{vmatrix}.$$

Наконец, необходимо брать инвариант пятой степени:

$$\bar{\omega}_3 = \begin{vmatrix} \overline{T}_{\bar1\bar1} & \overline{A}_{\bar1\bar2} & \overline{A}_{\bar1\bar3} \\ \overline{T}_{\bar2\bar1} & \overline{A}_{\bar2\bar2} & \overline{A}_{\bar2\bar3} \\ \overline{T}_{\bar3\bar1} & \overline{A}_{\bar3\bar2} & \overline{A}_{\bar3\bar3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{A}_{\bar1\bar1} & \overline{T}_{\bar1\bar2} & \overline{A}_{\bar1\bar3} \\ \overline{A}_{\bar2\bar1} & \overline{T}_{\bar2\bar2} & \overline{A}_{\bar2\bar3} \\ \overline{A}_{\bar3\bar1} & \overline{T}_{\bar3\bar2} & \overline{A}_{\bar3\bar3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{A}_{\bar1\bar1} & \overline{A}_{\bar1\bar2} & \overline{T}_{\bar1\bar3} \\ \overline{A}_{\bar2\bar1} & \overline{A}_{\bar2\bar2} & \overline{T}_{\bar2\bar3} \\ A_{\bar3\bar1} & \overline{A}_{\bar3\bar2} & \overline{T}_{\bar3\bar3} \end{vmatrix}.$$

11. В качестве второго применения неприводимых тензоров $T_{\alpha\beta}$, $\overline{T}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$, $B_{ij}$ дадим классификацию римановых пространств $V_4$ по их дифференциальным

| Опер. | $\frac{\partial J}{\partial x_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overset{*}{Z}_1$ | 0 | $2y_6$ | $2y_3$ | $-2y_6$ | $2y_3$ | 0 | $y_3$ | $y_4$ | $-y_1$ | $-y_2$ |
| $\overset{*}{Z}_2$ | $-2y_3$ | 0 | $2y_9$ | $-2y_3$ | 0 | $2y_9$ | $-y_6$ | $z_1-z_3$ | $-x_1-x_4$ | $-y_{10}$ |
| $\overset{*}{Z}_3$ | $2y_1$ | $2y_1$ | 0 | 0 | $2y_{12}$ | $2y_{12}$ | $x_1+x_2$ | $y_5$ | $y_6$ | $z_1+z_2$ |
| $\overset{*}{Z}_4$ | $-2y_4$ | $-2y_7$ | 0 | 0 | $-2y_4$ | $-2y_7$ | $-z_1-z_2$ | $-y_3$ | $-y_{10}$ | $-x_1-x_5$ |
| $\overset{*}{Z}_5$ | $2y_2$ | 0 | $2y_2$ | $-2y_{11}$ | 0 | $-2y_{11}$ | $y_5$ | $x_1+x_3$ | $z_3-z_1$ | $y_3$ |
| $\overset{*}{Z}_6$ | 0 | $2y_5$ | $-2y_6$ | $2y_{10}$ | $-2y_{10}$ | 0 | $y_2$ | $-y_1$ | $y_4$ | $-y_3$ |

инвариантам. Принцип классификации пространств $V_n$ по их дифференциальным инвариантам опирается на следующий факт. По данной основной форме $ds^2$ риманова пространства $V_n$ определяется тензор кривизны $R_{hijk}$. Последний в пространстве $\frac{n(n-1)}{2}$ измерений с метрическим тензором

$$g_{hijk} = g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij} \tag{42}$$

определяет симметрическую линейную вектор-функцию. Пусть $[e_1 \ldots e_k]$ — ее характеристика. У двух эквивалентных неособенных $ds^2$, $ds'^2$ эти арифметические инварианты (характеристики) совпадают, хотя обратное утверждение не всегда справедливо. Относя к одному классу все $ds^2$ с одинаковыми указанными характеристиками, мы получим разбиение всех $V_n$ на конечное число классов без эквивалентных пространств (форм $ds^2$). Классы римановых $V_n$, выделенных по только что описанному способу, непустые, ибо, как доказал Т. И. Томас [см. ([5]), гл. X], при достаточно общих предположениях об аналитической природе тензора $R_{hijk}$, можно найти форму $ds^2$, имеющую этот тензор в качестве своего тензора кривизны. Существование пространств с предписанными характеристиками в точке следует из формулы Римана [см. ([14])]. Приложение этого принципа к задаче классификации $V_4$ удобно осуществить, используя неприводимые части тензора кривизны четырехмерного пространства $T_{\alpha\beta}$, $\overline{T}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$, $B_{ij}$. Типы перечисленных тензоров мы выделим с помощью характеристик $[e_1e_2e_3]$, $[\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3]$, $[e_1e_2e_3e_4]$ $\lambda$-матриц:

$$\| T_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta} \|, \quad \| \overline{T}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} - \lambda\delta_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} \|$$

в пространстве трех измерений,

$$\| B_{ij} - \lambda g_{ij} \|$$

— в пространстве четырех измерений.

В случае $ds^2 = g_{ij}dx^idx^j > 0$ симметрические тензоры $T_{\alpha\beta}$, $\overline{T}_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$ — вещественные и являются тензорами простого типа. $B_{ij}$ — тоже тензор простого типа. Отсюда получаются нижеследующие теоремы о классификации $V_4$:

ТЕОРЕМА 9. *Характеристики определенно-положительных кватернарных дифференциальных квадратичных форм состоят исключительно из единиц:*

$$[1111], \quad [111], \quad [\overline{1}\overline{1}\overline{1}].$$

Таблица 4

| $\frac{\partial J}{\partial y_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_7}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_8}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_9}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_{10}}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_{11}}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_{12}}$ | $\frac{\partial J}{\partial z_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial z_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial z_3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_2+z_3$ | $x_4-x_2$ | $y_{11}$ | $x_5-x_3$ | $y_{12}$ | $-z_2-z_3$ | $-y_7$ | $-y_9$ | 0 | $y_{10}-y_5$ | $y_{10}-y_5$ |
| $y_7$ | $-y_1$ | $y_5$ | $y_{12}$ | $x_3+x_6$ | $-y_4$ | $z_3-z_1$ | $y_8$ | $y_2-y_{11}$ | 0 | $y_{11}-y_2$ |
| $y_2$ | $y_3$ | $z_1+z_2$ | $y_9$ | $y_8$ | $y_{11}$ | $y_{10}$ | $x_5+x_6$ | $y_4+y_7$ | $y_4+y_7$ | 0 |
| $-y_9$ | $-y_{11}$ | $-x_2-x_6$ | $-y_2$ | $-y_5$ | $-y_3$ | $-y_6$ | $-z_1-z_2$ | $-y_1-y_{12}$ | $-y_1-y_{12}$ | 0 |
| $y_1$ | $-y_7$ | $-y_6$ | $y_4$ | $z_1-z_3$ | $-y_{12}$ | $-x_4-x_6$ | $-y_{10}$ | $y_9-y_3$ | 0 | $y_3-y_9$ |
| $x_3-x_2$ | $z_2+z_3$ | $y_9$ | $-z_2-z_3$ | $-y_7$ | $x_5-x_4$ | $y_{12}$ | $-y_{11}$ | 0 | $y_8-y_6$ | $y_8-y_6$ |

ТЕОРЕМА 10. *Арифметический инвариант конформно-плоских* $V_4$ *с определенно-положительным мероопределением выражается символом* [1111].

ТЕОРЕМА 11. *Четырехмерные пространства Эйнштейна с определенно-положительными мероопределениями характеризуются двумя арифметическими инвариантами*: [111], $[\overline{1}\overline{1}\overline{1}]$.

12. Обращаясь к рассмотрению вопросов об инвариантах и классификации римановых многообразий $V_4$, фундаментальные формы $ds^2$ которых в каждой точке приводимы к сумме двух положительных и двух отрицательных квадратов, мы ограничимся указанием результатов. Прежде всего, опуская промежуточные выкладки, отметим, что инфинитезимальные операторы преобразований коэффициентов формы Ф, индуцированных подстановками группы $G_6$ над переменными $u_i^\alpha$, даются таблицей 4.

Эта таблица получается, если мы по методу, основанному на теореме 2, найдем приращения переменных $R_{hijk}$, приобретаемые под влиянием инфинитезимальных преобразований, отвечающих операторам группы $G_6$:

$$\left.\begin{aligned} Z_1^*F &\equiv u_2p_1 - u_1p_2, \\ Z_2^*F &\equiv u_1p_3 + u_3p_1, \\ Z_3^*F &\equiv u_2p_3 + u_3p_2, \\ Z_4^*F &\equiv u_1p_4 + u_4p_1, \\ Z_5^*F &\equiv u_2p_4 + u_4p_2, \\ Z_6^*F &\equiv u_4p_3 - u_3p_4. \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

В операторах $Z_i^*J$, данных таблицей 4, произведем замену независимых переменных, полагая

$$\begin{aligned} \sigma_0^* &= -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6, \\ a_1^* &= i(x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 + 6z_1 - 6z_2), \\ a_2^* &= i(x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 + 6z_2), \\ a_3^* &= i(-2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - 2x_6 - 6z_1), \end{aligned}$$

$$\overset{*}{a}_4 = 3i\,(y_6 - y_8 + y_{10} - y_5),$$
$$\overset{*}{a}_5 = 3\,(y_9 - y_3 + y_2 - y_{11}),$$
$$\overset{*}{a}_6 = -3\,(y_1 + y_4 + y_7 + y_{12}),$$
$$\overset{*}{b}_1 = i\,(x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 + x_6 - 6z_1 + 6z_2),$$
$$\overset{*}{b}_2 = i\,(x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 - 6z_2),$$
$$\overset{*}{b}_3 = i\,(-2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - 2x_6 + 6z_1),$$
$$\overset{*}{b}_4 = 3i\,(y_5 + y_6 - y_8 - y_{10}),$$
$$\overset{*}{b}_5 = 3\,(-y_2 - y_3 + y_9 + y_{11}),$$
$$\overset{*}{b}_6 = 3\,(-y_1 + y_4 + y_7 - y_{12}),$$
$$\overset{*}{c}_1 = i\,(x_4 - x_3),$$
$$\overset{*}{c}_2 = i\,(-y_5 + y_6 + y_8 - y_{10}),$$
$$\overset{*}{c}_3 = y_2 - y_3 - y_9 + y_{11},$$
$$\overset{*}{c}_4 = i\,(y_5 + y_6 + y_8 + y_{10}),$$
$$\overset{*}{c}_5 = i\,(x_2 - x_5),$$
$$\overset{*}{c}_6 = -y_1 - y_4 + y_7 + y_{12},$$
$$\overset{*}{c}_7 = -y_2 - y_3 - y_9 - y_{11},$$
$$\overset{*}{y}_8 = -y_1 + y_4 - y_7 + y_{12},$$
$$\overset{*}{y}_9 = i\,(x_6 - x_1).$$

Кроме двух очевидных соотношений

$$\overset{*}{a}_1 + \overset{*}{a}_2 + \overset{*}{a}_3 = 0, \tag{44}$$

$$\overset{*}{b}_1 + \overset{*}{b}_2 + \overset{*}{b}_3 = 0 \tag{45}$$

между переменными $\overset{*}{a}_i$, $\overset{*}{b}_i$, $\overset{*}{c}_k$, линейных зависимостей с постоянными коэффициентами не существует. В новых переменных операторы $\overset{*}{Z}_i J$ изображаются таблицей 5 (см. стр. 410—411).

Введем операторы $\overset{*}{A}_i f$, $\overset{*}{B}_i f$, $\overset{*}{C}_k f$ относительно переменных данного пункта $\overset{*}{a}_i$, $\overset{*}{b}_i$, $\overset{*}{c}_k$, определив их по тому же закону, что и в п. 4. Операторы $\overset{*}{Z}_i f$ из таблицы 5 можно расписать как линейную комбинацию символов $\overset{*}{A}_i f$, $\overset{*}{B}_i f$, $\overset{*}{C}_k f$. Рассуждение, аналогичное тому, которое было приведено в п. 5, показывает, что интегрирование системы $\overset{*}{Z}_i f = 0$ эквивалентно решению цепочки более простых систем I — V, отличающихся от соответствующих систем п. 5 только обозначениями независимых переменных. Поэтому решения этих систем мы можем перечислить непосредственно:

$$\overset{*}{\sigma}_0, \quad \overset{*}{\sigma}_1, \quad \overset{*}{\varkappa}_1, \quad \overset{*}{\theta}_k, \quad \overset{*}{\omega}_k, \quad \overset{*}{\bar{\omega}}_k. \tag{46}$$

Инварианты ряда (46) формально выражаются через $\overset{*}{a}_i$, $\overset{*}{b}_i$, $\overset{*}{c}_k$ так же, как $\sigma_0$, $\sigma_i$, $\varkappa_i$, $\theta$ , $\omega_k$, $\bar{\omega}_k$ — через $a_i$, $b_i$, $c_k$. С целью проверить независимость инвариантов (46) вычислим якобиан

$$J_{13} = \frac{\partial\,(\overset{*}{\theta}_k, \overset{*}{\sigma}_i \overset{*}{\omega}_k, \overset{*}{\varkappa}_i \overset{*}{\bar{\omega}}_k)}{\partial\,(\overset{*}{c}_1 \overset{*}{c}_5 \overset{*}{c}_9 \overset{*}{a}_1 \overset{*}{a}_2 \overset{*}{a}_4 \overset{*}{a}_5 \overset{*}{a}_6 \overset{*}{b}_1 \overset{*}{b}_2 \overset{*}{b}_4 \overset{*}{b}_5 \overset{*}{b}_6)}$$

при нижеследующих значениях переменных:

$$a_1^* = 0, \quad a_2^* = 0, \quad a_4^* = i, \quad a_5^* = -1, \quad a_6^* = 0,$$
$$b_1^* = 0, \quad b_2^* = 0, \quad b_4^* = i, \quad b_5^* = -1, \quad b_6^* = 0,$$
$$c_1^* = c_2^* = c_3^* = c_4^* = 0, \quad c_5^* = i, \quad c_6^* = 1, \quad c_7^* = 0, \quad c_8^* = 1, \quad c_9^* = 0.$$

Очевидно, что $J_{13}^*$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \overline{\Delta}_3 & 0 & 0 \\ * & \overline{\Delta}_5 & 0 \\ * & * & \overline{\Delta}_5^* \end{vmatrix},$$

где

$$\overline{\Delta}_3 = \frac{\partial(\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^*)}{\partial(c_1^* c_5^* c_9^*)}, \quad \overline{\Delta}_5 = \frac{\partial(\omega_1^*\omega_2^*\omega_3^*\sigma_1^*\sigma_2^*)}{\partial(a_1^*a_2^*a_4^*a_5^*a_6^*)}$$

$$\overline{\Delta}_5^* = \frac{\partial(\overline{\omega}_1^*\overline{\omega}_2^*\overline{\omega}_3^*\varkappa_1^*\varkappa_2^*)}{\partial(b_1^*b_2^*b_4^*b_5^*b_6^*)}.$$

Подсчет показывает, что

$$(\overline{\Delta}_3)_0 = \begin{vmatrix} 0 & 2i & 0 \\ -1 & 0 & 2i \\ 0 & -2i & -2i \end{vmatrix},$$

$$(\overline{\Delta}_5)_0 = (\overline{\Delta}_5^*)_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & -4i & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -2i \end{vmatrix}.$$

Значит, $(J_{13}^*)_0 \neq 0$ и, следовательно, инварианты (46) независимы. Полученный результат можно выразить в виде следующего утверждения:

ТЕОРЕМА 12. *Инварианты* $\overset{*}{\sigma}_0, \overset{*}{\sigma}_i, \overset{*}{\varkappa}_i, \overset{*}{\theta}_k, \overset{*}{\omega}_k, \overset{-*}{\omega}_k \quad (i = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3)$ *образуют наипростейший базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка квадратичной дифференциальной формы*

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta, \quad g \neq 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4),$$

*приводимой в точке к сумме двух положительных и двух отрицательных квадратов.*

13. Аналитические условия конформности римановых многообразий $V_4$, метризованных с помощью неособенной дифференциальной квадратичной формы, имеющей равную нулю сигнатуру $s$, в местном ортонормальном репере сводится, как нетрудно проверить, к следующей системе соотношений:

$$-(x_1 + x_6) = x_2 + x_5 = x_3 + x_4, \quad z_1 = z_2 = 0,$$
$$y_1 + y_{12} = y_4 + y_7 = y_2 - y_{11} = y_3 - y_9 = y_5 - y_{10} = y_6 - y_8 = 0. \tag{47}$$

Если выполняются условия (47), то линейные формы $\overset{*}{a}_i$, $\overset{*}{b}_i$, которые мы

| Опер. | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{a}_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{a}_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{a}_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{a}_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{a}_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{a}_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{b}_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{b}_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{b}_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{b}_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial \overset{*}{b}_5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overset{*}{Z}_1$ | $-2\overset{*}{a}_4$ | $2\overset{*}{a}_4$ | $0$ | $\overset{*}{a}_1-\overset{*}{a}_2$ | $-\overset{*}{a}_6$ | $\overset{*}{a}_5$ | $-2\overset{*}{b}_4$ | $2\overset{*}{b}_4$ | $0$ | $\overset{*}{b}_1-\overset{*}{b}_2$ | $-\overset{*}{b}_6$ |
| $\overset{*}{Z}_2$ | $2i\overset{*}{a}_5$ | $0$ | $-2i\overset{*}{a}_5$ | $i\overset{*}{a}_6$ | $i(\overset{*}{a}_3-\overset{*}{a}_1)$ | $-i\overset{*}{a}_4$ | $2i\overset{*}{b}_5$ | $0$ | $-2i\overset{*}{b}_5$ | $i\overset{*}{b}_6$ | $i(\overset{*}{b}_3-\overset{*}{b}_1)$ |
| $\overset{*}{Z}_3$ | $0$ | $-2i\overset{*}{a}_6$ | $2i\overset{*}{a}_6$ | $-i\overset{*}{a}_5$ | $i\overset{*}{a}_4$ | $i(\overset{*}{a}_2-\overset{*}{a}_3)$ | $0$ | $-2i\overset{*}{b}_6$ | $2i\overset{*}{b}_6$ | $-i\overset{*}{b}_5$ | $i\overset{*}{b}_4$ |
| $\overset{*}{Z}_4$ | $0$ | $2i\overset{*}{a}_6$ | $-2i\overset{*}{a}_6$ | $i\overset{*}{a}_5$ | $-i\overset{*}{a}_4$ | $i(\overset{*}{a}_3-\overset{*}{a}_2)$ | $0$ | $-2i\overset{*}{b}_6$ | $2i\overset{*}{b}_6$ | $-i\overset{*}{b}_5$ | $i\overset{*}{b}_4$ |
| $\overset{*}{Z}_5$ | $2i\overset{*}{a}_5$ | $0$ | $-2i\overset{*}{a}_5$ | $i\overset{*}{a}_6$ | $i(\overset{*}{a}_3-\overset{*}{a}_1)$ | $-i\overset{*}{a}_4$ | $-2ib_5$ | $0$ | $2i\overset{*}{b}_5$ | $-i\overset{*}{b}_6$ | $i(\overset{*}{b}_1-\overset{*}{b}_3)$ |
| $\overset{*}{Z}_6$ | $2\overset{*}{a}_4$ | $-2\overset{*}{a}_4$ | $0$ | $\overset{*}{a}_2-\overset{*}{a}_1$ | $\overset{*}{a}_6$ | $-\overset{*}{a}_5$ | $-2\overset{*}{b}_4$ | $2\overset{*}{b}_4$ | $0$ | $\overset{*}{b}_1-\overset{*}{b}_2$ | $-\overset{*}{b}_6$ |

| Опер. | $\frac{\partial F}{\partial T_{11}}$ | $\frac{\partial F}{\partial T_{22}}$ | $\frac{\partial F}{\partial T_{33}}$ | $\frac{\partial F}{\partial T_{12}}$ | $\frac{\partial F}{\partial T_{13}}$ | $\frac{\partial F}{\partial T_{23}}$ | $\frac{\partial F}{\partial \bar T_{\bar1\bar1}}$ | $\frac{\partial F}{\partial \bar T_{\bar2\bar2}}$ | $\frac{\partial F}{\partial \bar T_{\bar3\bar3}}$ | $\frac{\partial F}{\partial \bar T_{\bar1\bar2}}$ | $\frac{\partial F}{\partial \bar T_{\bar1\bar3}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overset{*}{Y}_1$ | $-2T_{12}$ | $2T_{12}$ | $0$ | $T_{11}-T_{22}$ | $-T_{23}$ | $T_{13}$ | $-2\bar T_{\bar1\bar2}$ | $2\bar T_{\bar1\bar2}$ | $0$ | $\bar T_{\bar1\bar1}-\bar T_{\bar2\bar2}$ | $-\bar T_{\bar2\bar3}$ |
| $\overset{*}{Y}_2$ | $2iT_{13}$ | $0$ | $-2iT_{13}$ | $iT_{23}$ | $i(T_{33}-T_{11})$ | $-iT_{12}$ | $2i\bar T_{\bar1\bar3}$ | $0$ | $-2i\bar T_{\bar1\bar3}$ | $i\bar T_{\bar2\bar3}$ | $i(\bar T_{\bar3\bar3}-\bar T_{\bar1\bar1})$ |
| $\overset{*}{Y}_3$ | $0$ | $-2iT_{23}$ | $2iT_{23}$ | $-iT_{13}$ | $iT_{12}$ | $(iT_{22}-T_{33})$ | $0$ | $-2i\bar T_{\bar2\bar3}$ | $2i\bar T_{\bar2\bar3}$ | $-i\bar T_{\bar1\bar3}$ | $i\bar T_{\bar1\bar2}$ |
| $\overset{*}{Y}_4$ | $0$ | $2iT_{23}$ | $-2iT_{23}$ | $-iT_{13}$ | $-iT_{12}$ | $(iT_{33}-T_{22})$ | $0$ | $-2i\bar T_{\bar2\bar3}$ | $2i\bar T_{\bar2\bar3}$ | $-i\bar T_{\bar1\bar3}$ | $i\bar T_{\bar1\bar2}$ |
| $\overset{*}{Y}_5$ | $2iT_{13}$ | $0$ | $-2iT_{13}$ | $iT_{23}$ | $i(T_{33}-T_{11})$ | $-iT_{12}$ | $-2i\bar T_{\bar1\bar3}$ | $0$ | $2i\bar T_{\bar1\bar3}$ | $-i\bar T_{\bar2\bar3}$ | $i(\bar T_{\bar1\bar1}-\bar T_{\bar3\bar3})$ |
| $\overset{*}{Y}_6$ | $2T_{12}$ | $-2T_{12}$ | $0$ | $T_{22}-T_{11}$ | $T_{23}$ | $-T_{13}$ | $-2\bar T_{\bar1\bar2}$ | $2\bar T_{\bar1\bar2}$ | $0$ | $\bar T_{\bar1\bar1}-\bar T_{\bar2\bar2}$ | $-\bar T_{\bar2\bar3}$ |

определили в п. 12, обращаются в нуль. Обратное заключение тоже справедливо. Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 13. *Форма*

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4),$$

*сигнатура которой* $s = 0$, *тогда и только тогда может быть преобразована путем замены переменных* $x \to \bar x$ *к виду*

$$ds^2 = e^{2\sigma}(-dx^{1^2} - dx^{2^2} + dx^{3^2} + dx^{4^2}),$$

*если* $\overset{*}{a}_i = 0$, $\overset{*}{b}_i = 0$.

Из теорем 12 и 13 вытекает

ТЕОРЕМА 14. *Базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка конформно-плоских* $V_4$, *метрические формы которых имеют сигнатуру* $s = 0$, *дается инвариантами* $\overset{*}{\sigma}_0$, $\overset{*}{\theta}_1$, $\overset{*}{\theta}_2$, $\overset{*}{\theta}_3$.

14. Конкретизируем теперь формулу

$$B_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{R}{4} g_{\alpha\beta},$$

полагая

$$-g_{11} = -g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Таблица 5

| | $\frac{\partial J}{\partial c_1^*}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_2^*}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_3^*}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_4^*}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_5^*}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_6^*}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_7^*}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_8^*}$ | $\frac{\partial J}{\partial c_9^*}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-c_2^*-c_4^*$ | $c_1^*-c_5^*$ | $-c_6^*$ | $c_1^*-c_5^*$ | $c_2^*+c_4^*$ | $c_3^*$ | $-c_8^*$ | $c_7^*$ | 0 |
| [illegible] | $i(c_3^*+c_7^*)$ | $ic_8^*$ | $i(c_9^*-c_1^*)$ | $ic_6^*$ | 0 | $-ic_4^*$ | $i(c_9^*-c_1^*)$ | $-ic_2^*$ | $-i(c_3^*+c_7^*)$ |
| [illegible] | 0 | $-ic_3^*$ | $ic_2^*$ | $-ic_7^*$ | $-i(c_6^*+c_8^*)$ | $i(c_5^*-c_9^*)$ | $ic_4^*$ | $i(c_5^*-c_9^*)$ | $i(c_6^*+c_8^*)$ |
| [illegible] | 0 | $-ic_3^*$ | $ic_2^*$ | $ic_7^*$ | $i(c_8^*-c_6^*)$ | $i(c_5^*+c_9^*)$ | $-ic_4^*$ | $-i(c_5^*+c_9^*)$ | $i(c_8^*-c_6^*)$ |
| | $i(c_7^*-c_3^*)$ | $ic_8^*$ | $i(\bar{c}_1^*+\bar{c}_9^*)$ | $-ic_6^*$ | 0 | $ic_4^*$ | $-i(c_1^*+c_9^*)$ | $-ic_2^*$ | $i(c_7^*-c_3^*)$ |
| | $c_4^*-c_2^*$ | $c_1^*+c_5^*$ | $c_6^*$ | $-c_1^*-c_5^*$ | $c_4^*-c_2^*$ | $-c_3^*$ | $-c_8^*$ | $c_7^*$ | 0 |

Таблица 6

| | $\frac{\partial F}{\partial a_{1\bar1}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{1\bar2}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{1\bar3}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{3\bar1}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{2\bar2}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{2\bar3}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{3\bar1}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{3\bar2}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{3\bar3}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $-a_{1\bar2}-a_{2\bar1}$ | $a_{1\bar1}-a_{2\bar2}$ | $-a_{2\bar3}$ | $a_{1\bar1}-a_{2\bar2}$ | $a_{1\bar2}+a_{2\bar1}$ | $a_{1\bar3}$ | $-a_{3\bar2}$ | $a_{3\bar1}$ | 0 |
| [illegible] | $i(a_{1\bar3}+a_{3\bar1})$ | $ia_{3\bar2}$ | $i(a_{3\bar3}-a_{1\bar1})$ | $ia_{2\bar3}$ | 0 | $-ia_{2\bar1}$ | $i(a_{3\bar3}-a_{1\bar1})$ | $-a_{1\bar2}$ | $-i(a_{1\bar3}+a_{3\bar1})$ |
| [illegible] | 0 | $-ia_{1\bar3}$ | $ia_{1\bar2}$ | $-ia_{3\bar1}$ | $-i(a_{2\bar3}+a_{3\bar2})$ | $i(a_{2\bar2}-a_{3\bar3})$ | $ia_{3\bar1}$ | $i(a_{2\bar2}-a_{3\bar3})$ | $i(a_{2\bar3}+a_{3\bar2})$ |
| [illegible] | 0 | $-ia_{1\bar3}$ | $ia_{1\bar2}$ | $ia_{3\bar1}$ | $i(a_{3\bar2}-a_{2\bar3})$ | $i(a_{3\bar3}+a_{3\bar2})$ | $-ia_{2\bar1}$ | $-i(a_{2\bar2}+a_{3\bar3})$ | $i(a_{3\bar2}-a_{2\bar3})$ |
| | $i(a_{3\bar1}-a_{1\bar3})$ | $ia_{3\bar2}$ | $i(a_{1\bar1}+a_{3\bar3})$ | $-ia_{3\bar3}$ | 0 | $ia_{2\bar1}$ | $-i(a_{1\bar1}+a_{3\bar3})$ | $-ia_{1\bar2}$ | $i(a_{3\bar1}-a_{1\bar3})$ |
| | $a_{2\bar1}-a_{1\bar2}$ | $a_{1\bar1}+a_{2\bar2}$ | $a_{2\bar3}$ | $-a_{1\bar1}-a_{2\bar2}$ | $a_{2\bar1}-a_{1\bar2}$ | $-a_{1\bar3}$ | $-a_{3\bar2}$ | $a_{3\bar1}$ | 0 |

Будем иметь:

$$B_{11}=\frac{i}{2}(-\overset{*}{c}_1+\overset{*}{c}_5+\overset{*}{c}_9),\quad B_{12}=\frac{i}{2}(\overset{*}{c}_2+\overset{*}{c}_4),\quad B_{14}=\frac{1}{2}(\overset{*}{c}_6-\overset{*}{c}_8),$$

$$B_{22}=\frac{i}{2}(\overset{*}{c}_1-\overset{*}{c}_5+\overset{*}{c}_9),\quad B_{34}=\frac{i}{2}(\overset{*}{c}_2-\overset{*}{c}_4),\quad B_{23}=-\frac{1}{2}(\overset{*}{c}_6+\overset{*}{c}_8).$$

$$B_{33}=\frac{i}{2}(-\overset{*}{c}_1-\overset{*}{c}_5+\overset{*}{c}_9),\quad B_{13}=\frac{1}{2}(\overset{*}{c}_3+\overset{*}{c}_7),$$

$$B_{44}=\frac{i}{2}(\overset{*}{c}_1+\overset{*}{c}_5+\overset{*}{c}_9),\quad B_{24}=\frac{1}{2}(\overset{*}{c}_3-\overset{*}{c}_7),$$

Если $V_4$ есть некоторое пространство Эйнштейна, т. е. если $B_{\alpha\beta}=0$, то $\overset{*}{c}_i=0$. Обратно, если $\overset{*}{c}_i=0$, то $B_{\alpha\beta}=0$. Отсюда следует

ТЕОРЕМА 15. *Пространство $V_4$, фундаментальная форма $ds^2$ которого имеет сигнатуру $s=0$, тогда и только тогда есть пространство Эйнштейна, если $c_i^*=0$ $(i=1, 2, \ldots, 9)$.*

Из теорем 12 и 15 вытекает

ТЕОРЕМА 16. *Инварианты $\sigma_i^*$, $\varkappa_i^*$ $(i=1, 2)$ образуют наипростейший базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка пространства Эйнштейна $V_4$, фундаментальная форма которого имеет равную нулю сигнатуру.*

15. Возьмем следующие комбинации операторов группы $\Gamma_6$:

$$
\begin{aligned}
\overset{*}{Y}_1 F &\equiv \xi_1 q_2 - \xi_2 q_1 - \eta_2 r_1 + \eta_1 r_2,\\
\overset{*}{Y}_2 F &\equiv i\xi_3 q_1 - i\xi_1 q_3 + i\eta_3 r_1 - i\eta_1 r_3,\\
\overset{*}{Y}_3 F &\equiv i\xi_2 q_3 - i\xi_3 q_2 - i\eta_3 r_2 + i\eta_2 r_3,\\
\overset{*}{Y}_4 F &\equiv i\xi_3 q_2 - i\xi_2 q_3 - i\eta_3 r_2 + i\eta_2 r_3,\\
\overset{*}{Y}_5 F &\equiv i\xi_3 q_1 - i\xi_1 q_3 - i\eta_3 r_1 + i\eta_1 r_3,\\
\overset{*}{Y}_6 F &\equiv \xi_2 q_1 - \xi_1 q_2 - \eta_2 q_1 + \eta_1 r_2
\end{aligned}
$$

и проследим, какие преобразования индуцируются над коэффициентами форм

$$
\varphi = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{*}{T}_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta, \qquad \psi = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{*}{\overline{T}}_{\bar\alpha\bar\beta}\eta_{\bar\alpha}\eta_{\bar\beta}, \qquad f = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{*}{\alpha}_{\alpha\bar\beta}\xi_\alpha\eta_{\bar\beta},
$$

когда переменные $\xi_\alpha$, $\eta_{\bar\beta}$ подвергаются бесконечно малым преобразованиям, порожденным символами $\overset{*}{Y}_i F$. Операторы бесконечно малых преобразований величин $\overset{*}{T}_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{\overline{T}}_{\bar\alpha\bar\beta}$, $\overset{*}{a}_{\alpha\bar\beta}$ запишем в форме таблицы 6 (см. стр. 410—411), временно опуская при этом звездочки $^*$.

Если в операторах $Y_i{}^*F$ из таблицы 6 произвести формальную замену переменных, полагая

$$
\begin{array}{llll}
\overset{*}{T}_{11} = \overset{*}{a}_1, & \overset{*}{\overline{T}}_{\bar1\bar1} = \overset{*}{b}_1, & \overset{*}{a}_{1\bar1} = \overset{*}{c}_1, & \overset{*}{a}_{2\bar3} = \overset{*}{c}_6,\\
\overset{*}{T}_{22} = \overset{*}{a}_2, & \overset{*}{\overline{T}}_{\bar2\bar2} = \overset{*}{b}_2, & \overset{*}{a}_{1\bar2} = \overset{*}{c}_2, & \overset{*}{a}_{3\bar1} = \overset{*}{c}_7,\\
\overset{*}{T}_{33} = \overset{*}{a}_3, & \overset{*}{\overline{T}}_{\bar3\bar3} = \overset{*}{b}_3, & \overset{*}{a}_{1\bar3} = \overset{*}{c}_3, & \overset{*}{a}_{3\bar2} = \overset{*}{c}_8,\\
\overset{*}{T}_{12} = \overset{*}{a}_4, & \overset{*}{\overline{T}}_{\bar1\bar2} = \overset{*}{b}_4, & \overset{*}{a}_{2\bar1} = \overset{*}{c}_4, & \overset{*}{a}_{3\bar3} = \overset{*}{c}_9,\\
\overset{*}{T}_{13} = \overset{*}{a}_5, & \overset{*}{\overline{T}}_{\bar1\bar3} = \overset{*}{b}_5, & \overset{*}{a}_{2\bar2} = \overset{*}{c}_5, & \\
\overset{*}{T}_{23} = \overset{*}{a}_6, & \overset{*}{\overline{T}}_{\bar2\bar3} = \overset{*}{b}_6, & &
\end{array}
$$

то получатся $\overset{*}{Z}_i F$ из таблицы 5. Это значит, что неприводимые части $\overset{*}{a}_i$, $\overset{*}{b}_i$, $\overset{*}{c}_k$ тензора кривизны многообразия $V_4$, фундаментальная форма которого приводима к сумме двух положительных и двух отрицательных квадратов, являются эвклидовыми тензорами

$$
\overset{*}{T}_{\alpha\beta}, \quad \overline{T}_{\bar\alpha\bar\beta}, \quad \overset{*}{a}_{\alpha\bar\beta}, \tag{48}
$$

где

$$
\sum_{i=1}^{3} \overset{*}{T}_{ii} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} \overset{*}{\overline{T}}_{\bar i\bar i} = 0,
$$

в пространстве трех измерений. Этим фактом можно воспользоваться, как и в случае $s = 4$, для алгебраического вывода инвариантов $\overset{*}{\sigma}_i$, $\overset{*}{\varkappa}_i$, $\overset{*}{\theta}_k$, $\overset{*}{\omega}_k$, $\overset{*}{\overline{\omega}}_k$ и в целях классификации многообразий $V_4$ по их дифференциальным инвариантам. Инварианты выражаются через $\overset{*}{T}_{\beta\alpha}$, $\overset{*}{\overline{T}}_{\bar\alpha\bar\beta}$, $\overset{*}{a}_{\alpha\bar\beta}$ по схеме п. 10. В вопросе о классификации $V_4$ с сигнатурой $s = 0$ появляется некоторая особенность, заключающаяся в том, что тензоры

$$
\overset{*}{T}_{\alpha\beta}, \quad \overset{*}{\overline{T}}_{\bar\alpha\bar\beta}, \quad B_{ij} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad i, j = 1, 2, 3, 4)
$$

с равными нулю следами в данном случае могут быть не простого типа. В соответствии с этим теоремы классификации $V_4$ формулируются так:

ТЕОРЕМА 17. *Существуют* $5 \times 3 \times 3 = 45$ *непустых, неэквивалентных классов* $V_4$ *без общих элементов, фундаментальные формы которых имеют сигнатуру* $s = 0$. *Класс характеризуется набором трех арифметических инвариантов*

$$[\overset{*}{e}_1 \overset{*}{e}_2 \overset{*}{e}_3], \quad [\overline{\overset{*}{e}}_1 \overline{\overset{*}{e}}_2 \overline{\overset{*}{e}}_3], \quad [e_1 e_2 e_3 e_4],$$

*отвечающих, соответственно, тензорам*

$$\overset{*}{T}_{\alpha\beta}, \quad \overline{T}^{*}_{\bar\alpha \bar\beta}, \quad B_{ij}.$$

ТЕОРЕМА 18. *Имеются пять классов конформно-плоских* $V_4$, *сигнатура метрических форм* $ds^2$ *которых равна нулю. Каждый из этих классов характеризуется одним из следующих арифметических инвариантов:*

$$[1111], \quad [211], \quad [22], \quad [31], \quad [4].$$

ТЕОРЕМА 19. *Существуют девять классов пространств* $V_4$ *Эйнштейна нулевой сигнатуры. Класс характеризуется парой арифметических инвариантов*

$$[\overset{*}{e}_1 \overset{*}{e}_2 \overset{*}{e}_3], \quad [\overline{\overset{*}{e}}_1 \overline{\overset{*}{e}}_2 \overline{\overset{*}{e}}_3],$$

*отвечающих, соответственно, тензорно-дифференциальным инвариантам* $T^{*}_{\alpha\beta}$, $\overline{T}^{*}_{\bar\alpha\bar\beta}$.

16. Проблема разыскания базиса полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка формы

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4), \quad g \neq 0,$$

приводимой к сумме трех отрицательных квадратов и одного положительного, эквивалентна задаче нахождения функционально независимых алгебраических инвариантов тензора кривизны $R_{hijk}$ этой формы относительно группы Лоренца $L_6$. Преобразования, сохраняющие квадрику

$$u_2^1 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2,$$

индуцируют над компонентами тензора кривизны (над коэффициентами формы Ф) однородные линейные преобразования. Скалярные функции от величин $R_{hijk}$, которые не изменяются при этих индуцированных преобразованиях, суть корни инфинитезимальных операторов последних. Но прежде чем приступать к отысканию корней инфинитезимальных операторов индуцированных преобразований, необходимо построить сначала сами операторы. Их можно построить общим методом, проиллюстрированным на примерах исследований случаев $s=4$, $s=0$. А именно, достаточно для этого взять инфинитезимальные операторы группы $L_6$:

$$\begin{aligned}
\overline{Z}_1 F &\equiv u_2 p_1 - u_1 p_2,\\
\overline{Z}_2 F &\equiv u_3 p_1 - u_1 p_3,\\
\overline{Z}_3 F &\equiv u_3 p_2 - u_2 p_3,\\
\overline{Z}_4 F &\equiv u_1 p_4 + u_4 p_1,\\
\overline{Z}_5 F &\equiv u_2 p_4 + u_4 p_2,\\
\overline{Z}_6 F &\equiv u_3 p_4 + u_4 p_3
\end{aligned}$$

и шаг за шагом найти приращения, получаемые величинами $R_{hijk}$ под влиянием бесконечно малых преобразований, определенных каждым из перечисленных операторов. Если воспользоваться ранее введенными обозначениями существенных компонент тензора кривизны, то наш окончательный результат — интересующие нас операторы — можно представить с помощью таблицы 7 (см. стр. 415).

Преобразуем операторы $\overline{Z}_k J$ из таблицы 7 с помощью следующей подстановки:

$$\overline{\sigma}_0 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6,$$

$$\begin{aligned}
\overline{a}_1 &= -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 - 6iz_1 + 6iz_2,\\
\overline{a}_2 &= -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 + x_6 - 6iz_2,\\
\overline{a}_3 &= 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 + 6iz_1,\\
\overline{a}_4 &= -3(y_6 + y_8) + 3i(y_{10} - y_5),\\
\overline{a}_5 &= 3(y_3 - y_9) + 3i(y_2 + y_{11}),\\
\overline{a}_6 &= -3(y_1 + y_{12}) + 3i(y_4 - y_7),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{b}_1 &= -x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 6iz_1 - 6iz_2,\\
\overline{b}_2 &= -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 + x_6 + 6iz_2,\\
\overline{b}_3 &= 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 - 6iz_1,\\
\overline{b}_4 &= -3(y_6 + y_8) + 3i(y_5 - y_{10}),\\
\overline{b}_5 &= 3(y_3 - y_9) - 3i(y_2 + y_{11}),\\
\overline{b}_6 &= -3(y_1 + y_{12}) + 3i(y_7 - y_4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{c}_1 &= x_3 + x_4,\\
\overline{c}_2 &= y_8 - y_6 - i(y_5 + y_{10}),\\
\overline{c}_3 &= y_3 + y_9 + i(y_2 - y_{11}),\\
\overline{c}_4 &= y_8 - y_6 + i(y_5 + y_{10}),\\
\overline{c}_5 &= x_2 + x_5,\\
\overline{c}_6 &= y_{12} - y_1 + i(y_4 + y_7),\\
\overline{c}_7 &= y_3 + y_9 + i(y_{11} - y_2),\\
\overline{c}_8 &= y_{12} - y_1 - i(y_4 + y_7),\\
\overline{c}_9 &= x_1 + x_6.
\end{aligned}$$

В новых переменных операторы $\overline{\overline{Z}}_i J$ изображаются таблицей 8 (см. стр. 415).

Обозначим через $\overline{A}_i f$, $\overline{B}_i f$, $\overline{C}_k f$ однородные линейные дифференциальные операторы первого порядка, полученные, соответственно, из $A_i f$, $B_i f$, $C_k f$ путем простой замены $a_i \to \overline{a}_i$, $b_i \to \overline{b}_i$, $c_k \to \overline{c}_k$. Операторы таблицы 8 $\overline{\overline{Z}}_i J = 0$ линейно выражаются через $\overline{A}_i$, $\overline{B}_i f$, $\overline{C}_k f$, и задача разыскания скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка кватернарной дифференциальной квадратичной формы с сигнатурой $s = -2$ снова приводится к решению известных нам из п. 5 полных систем. Поэтому искомые инварианты

$$\overline{\sigma}_0, \quad \overline{\sigma}_i, \quad \overline{\varkappa}_i, \quad \overline{\theta}_k, \quad \overline{\omega}_k, \quad \overline{\overline{\omega}}_k, \tag{49}$$

Таблица 7

| Опер. | $\frac{\partial J}{\partial x_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial x_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_7}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_8}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_9}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_{10}}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_{11}}$ | $\frac{\partial J}{\partial y_{12}}$ | $\frac{\partial J}{\partial z_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial z_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial z_3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{Z}_1$ | 0 | $2y_6$ | $2y_3$ | $-2y_6$ | $-2y_8$ | 0 | $y_3$ | $y_4$ | $-y_1$ | $-y_2$ | $z_2+z_3$ | $x_4-x_2$ | $y_{11}$ | $x_5-x_3$ | $y_{12}$ | $-z_2-z_3$ | $-y_7$ | $-y_9$ | 0 | $y_{10}-y_5$ | $y_{10}-y_5$ |
| $\bar{Z}_2$ | $-2y_3$ | 0 | $2y_9$ | $2y_3$ | 0 | $-2y_9$ | $-y_6$ | $z_1-z_3$ | $x_1-x_4$ | $-y_{10}$ | $y_7$ | $y_1$ | $-y_5$ | $y_{12}$ | $x_6-x_3$ | $y_4$ | $z_1-z_3$ | $-y_8$ | $-y_2-y_{11}$ | 0 | $y_2+y_{11}$ |
| $Z_3$ | $2y_1$ | $-2y_1$ | 0 | 0 | $2y_{12}$ | $-2y_{12}$ | $x_2-x_1$ | $y_5$ | $y_6$ | $z_1+z_2$ | $-y_2$ | $-y_3$ | $-z_1-z_2$ | $y_9$ | $-y_8$ | $y_{11}$ | $-y_{10}$ | $x_6-x_5$ | $y_7-y_4$ | $y_7-y_4$ | 0 |
| $\bar{Z}_4$ | $-2y_4$ | $-2y_7$ | 0 | 0 | $-2y_4$ | $-2y_7$ | $-z_1-z_2$ | $-y_8$ | $-y_{10}$ | $-x_1\ x_5$ | $-y_9$ | $-y_{11}$ | $-x_2-x_6$ | $-y_2$ | $-y_5$ | $-y_3$ | $-y_6$ | $-z_1-z_2$ | $-y_1-y_{12}$ | $-y_1-y_{12}$ | 0 |
| $\bar{Z}_5$ | $2y_2$ | 0 | $2y_2$ | $-2y_{11}$ | 0 | $-2y_{11}$ | $y_5$ | $x_1+x_3$ | $z_3-z_1$ | $y_8$ | $y_1$ | $-y_7$ | $-y_6$ | $y_4$ | $z_1-z_3$ | $-y_{12}$ | $-x_4-x_6$ | $-y_{10}$ | $y_9-y_3$ | 0 | $y_3-y_9$ |
| $\bar{Z}_6$ | 0 | $2y_5$ | $2y_5$ | $2y_{10}$ | $2y_{10}$ | 0 | $y_2$ | $y_1$ | $y_4$ | $y_3$ | $x_2+x_3$ | $z_2+z_3$ | $y_9$ | $z_2+z_3$ | $y_7$ | $x_1+x_5$ | $y_{12}$ | $y_{11}$ | 0 | $y_6+y_8$ | $y_6+y_8$ |

Таблица 8

| Опер. | $\frac{\partial J}{\partial \bar{a}_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{a}_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{a}_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{a}_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{a}_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{a}_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{b}_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{b}_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{b}_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{b}_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{b}_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{b}_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{c}_1}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{c}_2}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{c}_3}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{c}_4}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{c}_5}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{c}_6}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{c}_7}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{c}_8}$ | $\frac{\partial J}{\partial \bar{c}_9}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{Z}_1$ | $2\bar{a}_4$ | $-2\bar{a}_4$ | 0 | $\bar{a}_2-\bar{a}_1$ | $\bar{a}_6$ | $-\bar{a}_5$ | $2\bar{b}_4$ | $-2\bar{b}_4$ | 0 | $\bar{b}_2-\bar{b}_1$ | $\bar{b}_6$ | $-\bar{b}_5$ | $\bar{c}_2+\bar{c}_4$ | $\bar{c}_5-\bar{c}_1$ | $\bar{c}_6$ | $c_5-\bar{c}_1$ | $-\bar{c}_2-\bar{c}_4$ | $-\bar{c}_3$ | $\bar{c}_8$ | $-c_7$ | 0 |
| $\bar{Z}_2$ | $2\bar{a}_5$ | 0 | $-2\bar{a}_5$ | $\bar{a}_6$ | $\bar{a}_3-\bar{a}_1$ | $-\bar{a}_4$ | $2\bar{b}_5$ | 0 | $-2\bar{b}^9$ | $\bar{b}_6$ | $\bar{b}_3-\bar{b}_1$ | $-\bar{b}_4$ | $\bar{c}_3+\bar{c}_7$ | $\bar{c}_8$ | $\bar{c}_9-\bar{c}_1$ | $\bar{c}_6$ | 0 | $-\bar{c}_4$ | $\bar{c}_9-\bar{c}_1$ | $-\bar{c}_2$ | $-\bar{c}_3-\bar{c}$ |
| $\bar{Z}_3$ | 0 | $2\bar{a}_6$ | $-2\bar{a}_6$ | $\bar{a}_5$ | $-\bar{a}_4$ | $\bar{a}_3-\bar{a}_2$ | 0 | $2\bar{b}_6$ | $-2\bar{b}_6$ | $\bar{b}_5$ | $-\bar{b}_4$ | $\bar{b}_3-\bar{b}_1$ | 0 | $\bar{c}_3$ | $-\bar{c}_2$ | $\bar{c}_7$ | $\bar{c}_6+\bar{c}_8$ | $\bar{c}_9-\bar{c}_5$ | $-\bar{c}_4$ | $\bar{c}_9-\bar{c}_5$ | $-\bar{c}_6-\bar{c}_8$ |
| $\bar{Z}_4$ | 0 | $-2i\bar{a}_6$ | $2i\bar{a}_6$ | $-i\bar{a}_5$ | $i\bar{a}_4$ | $i(\bar{a}_2-\bar{a}_3)$ | 0 | $2i\bar{b}_6$ | $-2ib_6$ | $i\bar{b}_5$ | $-i\bar{b}_4$ | $i(\bar{b}_3-\bar{b}_2)$ | 0 | $i\bar{c}_3$ | $-i\bar{c}_2$ | $-i\bar{c}_7$ | $i(\bar{c}_6-\bar{c}_8)$ | $-i(\bar{c}_5+\bar{c}_9)$ | $i\bar{c}_4$ | $i(\bar{c}_5+\bar{c}_9)$ | $i(\bar{c}_6-\bar{c}_8)$ |
| $\bar{Z}_5$ | $2i\bar{a}_5$ | 0 | $-2i\bar{a}_5$ | $i\bar{a}_6$ | $i(\bar{a}_3-\bar{a}_1)$ | $-i\bar{a}_4$ | $-2i\bar{b}_5$ | 0 | $2i\bar{b}_5$ | $-i\bar{b}_6$ | $i(\bar{b}_1-\bar{b}_3)$ | $i\bar{b}_4$ | $i(\bar{c}_7-\bar{c}_3)$ | $i\bar{c}_8$ | $i(\bar{c}_1+\bar{c}_9)$ | $-i\bar{c}_6$ | 0 | $i\bar{c}_4$ | $-i(\bar{c}_1+\bar{c}_9)$ | $-i\bar{c}_2$ | $i(\bar{c}_7-\bar{c}_3)$ |
| $\bar{Z}_6$ | $-2i\bar{a}_4$ | $2i\bar{a}_4$ | 0 | $i(\bar{a}_1-\bar{a}_2)$ | $-i\bar{a}_6$ | $i\bar{a}_5$ | $2i\bar{b}_4$ | $-2i\bar{b}_4$ | 0 | $(\bar{b}_2-\bar{b}_1)$ | $i\bar{b}_6$ | $-i\bar{b}_5$ | $i(\bar{c}_2-\bar{c}_4)$ | $-i(\bar{c}_1+\bar{c}_5)$ | $-i\bar{c}_6$ | $i(\bar{c}_1+\bar{c}_5)$ | $i(\bar{c}_2-\bar{c}_4)$ | $i\bar{c}_3$ | $i\bar{c}_8$ | $-i\bar{c}_7$ | 0 |

мы получим из соответствующих формул п. 5 путем замены в них $a_i$ на $\bar{a}_i$, $b_i$ на $\bar{b}_i$, $c_k$ на $\bar{c}_k$. Инварианты (49) независимы. Мы получили, таким образом, следующий результат.

ТЕОРЕМА 20. *Инварианты $\bar{\sigma}_0$, $\bar{\sigma}_i$, $\bar{\varkappa}_i$, $\bar{\theta}_k$, $\bar{\omega}_k$, $\tilde{\bar{\omega}}_k$ образуют наипростейший базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка римановых многообразий $V_4$, метрические формы которых имеют сигнатуры $s = -2$.*

17. Проделаем одно упражнение: выпишем условия конформности (33), полагая

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = -1, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Они сводятся к следующим 10 соотношениям, отмеченным впервые Картаном:

$$\begin{gathered} x_1 - x_6 = x_2 - x_5 = x_4 - x_3, \\ y_1 + y_{12} = y_2 + y_{11} = y_6 + y_8 = 0, \\ y_3 - y_9 = y_4 - y_7 = y_5 - y_{10} = 0, \\ z_1 = z_2 = 0. \end{gathered} \tag{50}$$

Если условия (50) выполняются, то $\bar{a}_i = 0$. Вместе с тем и $\bar{b}_i = 0$, как комплексно-сопряженные количества. Обратно, если $\bar{a}_i = 0$, то имеют место равенства (50). Наш результат допускает такую формулировку.

ТЕОРЕМА 21. *Риманово пространство $V_4$, основная форма $ds^2$ которого имеет сигнатуру $s = -2$, тогда и только тогда конформно-плоское, если его эвклидов тензорно-дифференциальный инвариант $\bar{a}_i$ обращается в нуль: $\bar{a}_i = 0$.*

Критерий конформности, доставляемый теоремой 21, позволяет очень простым образом извлечь из общей теоремы 20 следствие, представляющее самостоятельный интерес:

ТЕОРЕМА 22. *Инварианты $\bar{\sigma}_0$, $\bar{\theta}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ образуют базис полной системы скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка конформно-плоских $V_4$ с сигнатурой $s = -2$.*

18. Обратим внимание на связь между компонентами тензора

$$B_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{R}{4} g_{\alpha\beta}$$

и эвклидова тензора с девятью определяющими $\bar{c}_i$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} &B_{11} = \frac{1}{2}(-\bar{c}_1 + \bar{c}_5 + \bar{c}_9), && B_{12} = -\frac{1}{2}(\bar{c}_2 + \bar{c}_4), && B_{14} = \frac{i}{2}(\bar{c}_6 - \bar{c}_8), \\ &B_{22} = \frac{1}{2}(\bar{c}_1 - \bar{c}_5 + \bar{c}_9), && B_{34} = \frac{i}{2}(\bar{c}_2 - \bar{c}_4), && B_{23} = -\frac{1}{2}(\bar{c}_6 + \bar{c}_8). \\ &B_{33} = \frac{1}{2}(\bar{c}_1 + \bar{c}_5 - \bar{c}_9), && B_{13} = -\frac{1}{2}(\bar{c}_3 + \bar{c}_7), && \\ &B_{44} = \frac{1}{2}(\bar{c}_1 + \bar{c}_5 + \bar{c}_9), && B_{24} = -\frac{i}{2}(\bar{c}_3 - \bar{c}_7), && \end{aligned} \tag{51}$$

Из равенств (51) можно извлечь полезное для дальнейшего следствие.

ТЕОРЕМА 23. *Риманово пространство $V_4$, фундаментальная метрическая форма $ds^2$ которого имеет сигнатуру $s = -2$, тогда и только тогда является пространством Эйнштейна, если $\bar{c}_i = 0$.*

Мы используем эту теорему для выделения из совокупности инвариантов (49) инвариантов пространства Эйнштейна. Согласно теореме 23, в инвариантах ряда (49) мы должны положить $\bar{c}_i = 0$. Тогда останутся лишь инварианты $\bar{\sigma}_0$, $\bar{\sigma}_i$, $\bar{\varkappa}_i$. С другой стороны, известно, что скалярная кривизна пространств Эйнштейна при числе измерений пространства $n > 2$ постоянна. Мы получаем, таким образом, следующую теорему.

ТЕОРЕМА 24. *Полная система скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка пространства Эйнштейна четырех измерений, основная форма которого имеет сигнатуру $s = -2$, состоит из четырех инвариантов $\bar{\sigma}_i$, $\bar{\varkappa}_i$.*

19. Желая получить конкретную интерпретацию эвклидовых тензоров $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_k$, рассмотрим, как трансформируются коэффициенты форм

$$\varphi = \sum_{\alpha, \beta=1}^{3} \widetilde{T}_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \qquad (\widetilde{T}_{\alpha\beta} = \widetilde{T}_{\beta\alpha}),$$

$$\psi = \sum_{\alpha, \beta=1}^{3} \widetilde{\widetilde{T}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\eta_{\bar{\alpha}}\eta_{\bar{\beta}} \qquad (\widetilde{\widetilde{T}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \widetilde{\widetilde{T}}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}),$$

$$f = \sum_{\alpha, \beta=1}^{3} \widetilde{a}_{\alpha\bar{\beta}}\xi_\alpha\eta_{\bar{\beta}},$$

когда над переменными $\xi_\alpha$, $\eta_\alpha$ производятся бесконечно малые подстановки группы $\Gamma_6$. Пусть за инфинитезимальный базис группы $\Gamma_6$ приняты символы:

$$\bar{Y}_1F \equiv \xi_2q_1 - \xi_1q_2 + \eta_2r_1 - \eta_1r_2,$$

$$\bar{Y}_2F \equiv \xi_3q_1 - \xi_1q_3 + \eta_3r_1 - \eta_1r_3,$$

$$\bar{Y}_3F \equiv \xi_3q_2 - \xi_2q_3 + \eta_3r_2 - \eta_2r_3,$$

$$\bar{Y}_4F \equiv i\xi_2q_3 - i\xi_3q_2 + i\eta_3r_2 - i\eta_2r_3,$$

$$\bar{Y}_5F \equiv i\xi_3q_1 - i\xi_1q_3 - i\eta_3r_1 + i\eta_1r_3,$$

$$\bar{Y}_6F \equiv i\xi_1q_2 - i\xi_2q_1 + i\eta_2r_1 - i\eta_1r_2.$$

Прилагая уже неоднократно применявшийся прием, находим, что операторы бесконечно малых индуцированных над коэффициентами преобразований даются таблицей 9 (см. стр. 418—419); при выписывании этой таблицы мы временно опускаем тильду над буквами.

Полагая формально

$$\begin{aligned}
&\widetilde{T}_{11} = \bar{a}_1, &&\widetilde{\widetilde{T}}_{\bar{1}\bar{1}} = \bar{b}_1, &&a_{1\bar{1}} = \bar{c}_1, &&a_{3\bar{1}} = \bar{c}_7,\\
&\widetilde{T}_{22} = \bar{a}_2, &&\widetilde{\widetilde{T}}_{\bar{2}\bar{2}} = \bar{b}_2, &&a_{1\bar{2}} = \bar{c}_2, &&a_{3\bar{2}} = \bar{c}_8,\\
&\widetilde{T}_{33} = \bar{a}_3, &&\widetilde{\widetilde{T}}_{\bar{3}\bar{3}} = \bar{b}_3, &&a_{1\bar{3}} = \bar{c}_3, &&a_{3\bar{3}} = \bar{c}_9,\\
&\widetilde{T}_{12} = \bar{a}_4, &&\widetilde{\widetilde{T}}_{\bar{1}\bar{2}} = \bar{b}_4, &&a_{2\bar{1}} = \bar{c}_4,\\
&\widetilde{T}_{13} = \bar{a}_5, &&\widetilde{\widetilde{T}}_{\bar{1}\bar{3}} = \bar{b}_5, &&a_{2\bar{2}} = \bar{c}_5,\\
&\widetilde{T}_{23} = \bar{a}_6, &&\widetilde{\widetilde{T}}_{\bar{2}\bar{3}} = \bar{b}_6, &&a_{2\bar{3}} = \bar{c}_6,
\end{aligned}$$

| Опер. | $\frac{\partial F}{\partial T_{11}}$ | $\frac{\partial F}{\partial T_{22}}$ | $\frac{\partial F}{\partial T_{33}}$ | $\frac{\partial F}{\partial T_{12}}$ | $\frac{\partial F}{\partial T_{13}}$ | $\frac{\partial F}{\partial T_{23}}$ | $\frac{\partial F}{\partial \bar{T}_{\bar{1}\bar{1}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial \bar{T}_{\bar{2}\bar{2}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial \bar{T}_{\bar{3}\bar{3}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial \bar{T}_{\bar{1}\bar{2}}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{Y}_1$ | $2T_{12}$ | $-2T_{12}$ | $0$ | $T_{22}-T_{11}$ | $T_{23}$ | $-T_{13}$ | $2\bar{T}_{\bar{1}\bar{2}}$ | $-2\bar{T}_{\bar{1}\bar{2}}$ | $0$ | $\bar{T}_{\bar{2}\bar{2}}-\bar{T}_{\bar{1}\bar{1}}$ | |
| $\bar{Y}_2$ | $2T_{13}$ | $0$ | $-2T_{13}$ | $T_{23}$ | $T_{33}-T_{11}$ | $-T_{12}$ | $2\bar{T}_{\bar{1}\bar{3}}$ | $0$ | $-2\bar{T}_{\bar{1}\bar{3}}$ | $\bar{T}_{\bar{2}\bar{3}}$ | $\bar{T}_{\bar{3}\bar{3}}$ |
| $\bar{Y}_3$ | $0$ | $2T_{23}$ | $-2T_{23}$ | $T_{13}$ | $-T_{12}$ | $T_{33}-T_{22}$ | $0$ | $2\bar{T}_{\bar{2}\bar{3}}$ | $-2\bar{T}_{\bar{2}\bar{3}}$ | $\bar{T}_{\bar{1}\bar{3}}$ | — |
| $\bar{Y}_4$ | $0$ | $-2iT_{23}$ | $2iT_{23}$ | $-iT_{13}$ | $iT_{12}$ | $i(T_{22}-T_{33})$ | $0$ | $2i\bar{T}_{\bar{2}\bar{3}}$ | $-2i\bar{T}_{\bar{2}\bar{3}}$ | $i\bar{T}_{\bar{1}\bar{3}}$ | — |
| $\bar{Y}_5$ | $2iT_{13}$ | $0$ | $-2iT_{13}$ | $iT_{23}$ | $i(T_{33}-T_{11})$ | $-iT_{12}$ | $-2i\bar{T}_{\bar{1}\bar{3}}$ | $0$ | $2i\bar{T}_{\bar{1}\bar{3}}$ | $-i\bar{T}_{\bar{2}\bar{3}}$ | $i(\bar{T}$ |
| $\bar{Y}_6$ | $-2iT_{12}$ | $2iT_{12}$ | $0$ | $i(T_{11}-T_{22})$ | $-iT_{23}$ | $-iT_{13}$ | $-2i\bar{T}_{\bar{1}\bar{2}}$ | $-2i\bar{T}_{\bar{1}\bar{2}}$ | $0$ | $i(\bar{T}_{\bar{2}\bar{2}}-\bar{T}_{\bar{1}\bar{1}})$ | |

мы переводим операторы таблицы 9 в операторы таблицы 8. Следовательно, и в случае $s=-2$ тензоры $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_k$ можно рассматривать как эвклидовы тензоры трехмерного пространства $\widetilde{T}_{\alpha\beta}$, $\widetilde{\bar{T}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$, $\widetilde{a}_{i\bar{k}}$ где

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\widetilde{T}_{\alpha\alpha}=0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{3}\widetilde{\bar{T}}_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}=0.$$

Приложение полученной интерпретации неприводимых частей тензора кривизны к задаче определения базисных инвариантов $\bar{\sigma}_i$, $\bar{\varkappa}_i$, $\bar{\theta}_k$, $\bar{\omega}_k$, $\widetilde{\bar{\omega}}_k$ проводится совершенно так же, как и в случае $s=4$ (см. п. 10). Поэтому мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе. Перейдем к вопросу классификации $V_4$ с сигнатурой $s=-2$. Здесь появляется особенность, так как симметрические эвклидовы тензоры $\widetilde{T}_{\alpha\beta}$, $\widetilde{\bar{T}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ — комплексно-сопряженные. Ввиду этого, характеристики у двух $\lambda$-матриц

$$\|\widetilde{T}_{\alpha\beta}-\lambda\delta_{\alpha\beta}\|, \qquad \|\widetilde{\bar{T}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}-\lambda\delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\|$$

всегда должны быть одинаковыми. С учетом этого факта теоремы о классификации формулируются следующим образом.

ТЕОРЕМА 25. *Множество всех неособенных кватернарных дифференциальных квадратичных форм с сигнатурой* $s=-2$ *разбивается на* 15 *непустых классов без общих форм. Каждый класс характеризуется парой арифметических инвариантов формы* $ds^2$:

$$[e_1\, e_2\, e_3], \qquad [e_1\, e_2\, c_3\, e_4],$$

*отвечающих, соответственно, неприводимым частям* $\widetilde{T}_{\alpha\beta}$, $B_{ij}$ *ее тензора кривизны.*

ТЕОРЕМА 26. *В зависимости от типа тензора* $B_{ij}$, *т. е. характеристики* $\lambda$-*матрицы* $\|B_{ij}-\lambda g_{ij}\|$ $(i, j=1, 2, 3, 4)$, *можно различить пять классов конформно-плоских* $V_4$, *метризованных с помощью* $ds^2$ *сигнатуры* $s=-2$.

В случае $s=-2$ билинейная форма $f$ является эрмитовой. Этот факт, указанный впервые Картаном, может быть с успехом использован для классификации конформно-плоских $V_4$. В самом деле, как только дана

Таблица 9

| …$_{\bar{2}3}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{1\bar{1}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{1\bar{2}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{1\bar{3}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{2\bar{1}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{2\bar{2}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{2\bar{3}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{3\bar{1}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{3\bar{2}}}$ | $\frac{\partial F}{\partial a_{3\bar{3}}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [illegible] | $a_{1\bar{2}}+a_{2\bar{1}}$ | $a_{2\bar{2}}-a_{1\bar{1}}$ | $a_{2\bar{3}}$ | $a_{2\bar{2}}-a_{1\bar{1}}$ | $a_{1\bar{2}}-a_{2\bar{1}}$ | $-a_{1\bar{3}}$ | $a_{3\bar{2}}$ | $-a_{3\bar{1}}$ | 0 |
| [illegible] | $a_{1\bar{3}}+a_{3\bar{1}}$ | $a_{3\bar{2}}$ | $a_{3\bar{3}}-a_{1\bar{1}}$ | $a_{3\bar{3}}$ | 0 | $-a_{2\bar{1}}$ | $a_{3\bar{3}}-a_{1\bar{1}}$ | $-a_{1\bar{2}}$ | $-a_{1\bar{3}}-a_{3\bar{1}}$ |
| $\tilde{T}_{2\bar{3}}$ | 0 | $a_{1\bar{3}}$ | $-a_{1\bar{2}}$ | $a_{3\bar{1}}$ | $a_{3\bar{2}}+a_{2\bar{3}}$ | $a_{3\bar{3}}-a_{3\bar{2}}$ | $-a_{2\bar{1}}$ | $a_{3\bar{3}}-a_{2\bar{2}}$ | $-a_{2\bar{3}}-a_{3\bar{2}}$ |
| …$-\tilde{T}_{2\bar{2}})$ | 0 | $ia_{1\bar{3}}$ | $-ia_{1\bar{2}}$ | $-ia_{3\bar{1}}$ | $i(a_{2\bar{3}}-a_{3\bar{2}})$ | $-i(a_{2\bar{2}}+a_{3\bar{3}})$ | $ia_{2\bar{1}}$ | $i(a_{2\bar{2}}+a_{3\bar{3}})$ | $i(a_{2\bar{3}}-a_{3\bar{2}})$ |
| [illegible] | $i(a_{3\bar{1}}-a_{1\bar{3}})$ | $ia_{3\bar{2}}$ | $i(a_{1\bar{1}}+a_{3\bar{3}})$ | $-ia_{2\bar{3}}$ | 0 | $ia_{3\bar{1}}$ | $-i(a_{1\bar{1}}+a_{3\bar{3}})$ | $-ia_{1\bar{2}}$ | $i(a_{3\bar{1}}-a_{1\bar{3}})$ |
| [illegible] | $i(a_{1\bar{2}}-a_{2\bar{1}})$ | $i(a_{1\bar{1}}+a_{2\bar{2}})$ | $-ia_{2\bar{3}}$ | $i(a_{1\bar{1}}+a_{2\bar{2}})$ | $i(a_{1\bar{2}}-a_{2\bar{1}})$ | $ia_{1\bar{3}}$ | $ia_{3\bar{2}}$ | $-ia_{3\bar{1}}$ | 0 |

основная дифференциальная квадратичная форма $ds^2$, ею однозначно определяется матрица Эрмита

$$H = \begin{pmatrix} a_{1\bar{1}} & a_{1\bar{2}} & a_{1\bar{3}} \\ a_{2\bar{1}} & a_{2\bar{2}} & a_{2\bar{3}} \\ a_{3\bar{1}} & a_{3\bar{2}} & a_{3\bar{3}} \end{pmatrix}.$$

С эрмитовой матрицей или формой инвариантно связаны два натуральных числа — ранг $r$ и индекс $p$, которые определяются без приведения ее к каноническому виду [см. ([12]), гл. IV, $n^\circ$ 40]. Две эквивалентные формы Эрмита имеют одни и те же арифметические инварианты $r$, $p$. Это значит, что всевозможные значения двух целых положительных чисел $r$, $p$ в пространстве трех измерений выделяют неэквивалентные классы тензорно-дифференциальных инвариантов $a_{i\bar{k}}$ квадратичной дифференциальной формы от четырех переменных, следовательно, и неэквивалентные классы конформно-плоских пространств $V_4$ с сигнатурой $s = -2$. Мы можем, таким образом, формулировать теорему.

ТЕОРЕМА 27. *Совокупность конформно-плоских* $V_4$ *с сигнатурой* $s = -2$ *может быть разбита на* 10 *неэквивалентных классов. Класс определяется значениями арифметических инвариантов* $r$, $p$ *неприводимой части* $a_{i\bar{k}}$ *тензора кривизны* $R_{hijk}$:

$$\begin{aligned} &r = 3: \quad p = 3, \quad p = 2, \quad p = 1, \quad p = 0, \\ &r = 2: \quad p = 2, \quad p = 1, \quad p = 0, \\ &r = 1: \quad p = 1, \quad p = 0, \\ &r = 0: \quad p = 0. \end{aligned}$$

Для пространства Эйнштейна тензор $B_{ij}$ обращается в нуль, а тензорно-дифференциальные инварианты $\tilde{T}_{\alpha\beta}$, $\tilde{\tilde{T}}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ имеют комплексно-сопряженные компоненты. Отсюда вытекает следующая

ТЕОРЕМА 28. *Четырехмерные пространства Эйнштейна, основные формы которых* $ds^2$ *имеют сигнатуру* $s = -2$, *разбиваются на три*

*класса. Класс пространства определяется типом тензорно-дифференциального инварианта $\widetilde{T}_{\alpha\beta}$, т. е. характеристикой $[e_1e_2e_3]$ λ-матрицы*

$$\| \widetilde{T}_{\alpha\beta} - \lambda\delta_{\alpha\beta} \| \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Другая классификация пространств Эйнштейна $V_4$ с сигнатурой $s = -2$ дана в работе ([13]).

Поступило
19. II. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cartan É., Sur les équations de la gravitations d'Einstein, J. de Mathém. pures et appl., 9-me Série, 1 (1922), 144—203.

[2] Розенсон Н. А., Дифференциальные инварианты риманова пространства, Труды Ленингр. индустр. ин-та, разд. физ.-матем., № 4, вып. 4 (1937), 59—84.

[3] Петров П. И., Инварианты второго порядка кватернарной дифференциальной квадратичной формы, Доклады Ак. наук СССР, 113, № 6 (1957), 1214—1217. Поправку к ней см. Доклады Ак. наук СССР, 119, № 5 (1958), 846.

[4] Géhénian J. et Debever R., Les invariants de courbure de l'espace de Riemann à quatre dimensions, Bull. Acad. Belg. Cl. des Sc., 42 (1956), 114.

[5] Thomas T. Y., The Differential Invariants of Generalized Spaces, Cambridge, 1934.

[6] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. I, 1939.

[7] Ricci G. et Levi-Civita T., Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann., 54 (1901), 125—201.

[8] Weitzenböck R., Invariantentheorie, Groningen, 1923.

[9] Goursat E., Leçons sur l'intégrations des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1921.

[10] Cartan É., La géométrie des espaces de Riemann, Mémorial des Sci. Math., 9 (1925), 32.

[11] Гуревич Г. Б., Основы теории алгебраических инвариантов, Москва, 1948.

[12] Dickson L. E., Modern algebraic theories, Chicago, 1926.

[13] Петров А. З., Классификация пространств, определяющих поля тяготения, Учен. зап. Казанск. университета, 114, кн. 8 (1954), 60.

[14] Cartan É., Leçons sur le géométrie des espaces de Riemann, Paris, 1928.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 421—454

А. А. ВАШАРИН

# ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ КЛАССА $W_2^1(\alpha)$ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе изучаются граничные свойства функций класса $W_2^1(\alpha)$, заданных на некоторой ограниченной области $\Omega$.

Рассматриваются также вопросы продолжения функций с границы на область.

## Введение

Настоящая работа посвящена изучению граничных свойств функций, заданных на некоторой ограниченной области $\Omega$ пространства $R$ точек $(x_1, \ldots, x_n)$ и имеющих на $\Omega$ обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные первого порядка, суммируемые с квадратом на $\Omega$ с некоторым положительным весом; порядок убывания веса к нулю при подходе точки $(x_1, \ldots, x_n)$ к границе $\Gamma$ области $\Omega$ равен расстоянию точки $(x_1, \ldots, x_n)$ до $\Gamma$, возведенному в степень $\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$.

Класс таких функций обозначается через $W_2^1(\alpha)$.

Как сказано в § 1, мы рассматриваем область $\Omega \subset R$, ограниченную границей $\Gamma$, обладающей следующими свойствами.

В достаточно малой окрестности каждой точки $Q \in \Gamma$ на $\Gamma$ можно ввести определяющие $\Gamma$ криволинейные координаты $(u_1, \ldots, u_{n-1})$.

Поверхность $\Gamma$ предполагается настолько гладкой, что нормали к ней на достаточно малом расстоянии от $\Gamma$ не пересекаются. Это обстоятельство дает возможность в достаточно малой окрестности $V$ некоторого куска $S$ границы $\Gamma$, где введены координаты $(u_1, \ldots, u_{n-1})$, определить положение точки $P \in V$ координатами $(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)$, где $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ суть криволинейные координаты точки $Q \in S$, на нормали к которой находится точка $P$, а число $h > 0$ равно расстоянию от $P$ до $Q$.

По определению, функция $\varphi$, заданная на $\Gamma$, принадлежит классу $A_0^\alpha(\Gamma)$, если она принадлежит классу $L_2(\Gamma)$ $\left(\text{т. е.} \int\limits_\Gamma |\varphi|^2 d\Gamma < \infty\right)$ и если на каждом из указанных выше кусков границы $\Gamma$ она в некоторой локальной системе координат $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ удовлетворяет условию:

$$J_{hu_i}(\varphi) = \int\limits_0^\delta \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{|\varphi(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + h, u_{i+1}, \ldots, u_{n-1}) - \varphi(u_1, \ldots, u_{n-1})|^2}{h^{2-\alpha}} \, du \, dh < \infty$$

$$(du = du_1 \ldots du_{n-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где $S_\varepsilon$ — совокупность тех точек куска $S$, расстояние которых до границы куска $S$ не меньше $\varepsilon$*, а $\delta$ — достаточно малое положительное число, зависящее от $\varepsilon$ и такое, что для всех $h$, удовлетворяющих неравенству $0 < h < \delta$, точки $(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + h, u_{i+1}, \ldots, u_{n-1}) \in S$, если $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_\varepsilon$.

Подобные классы в некоторых частных случаях рассматривались Ульяновым ([7]), Бабичем и Слободецким ([8]).

В § 5 устанавливается следующая теорема.

*Если функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *определенная на* $\Omega$, *принадлежит классу* $W_2^1(\alpha)$, *то функция* $f|_\Gamma = \varphi$, *понимаемая в смысле равенства* (1.8), *принадлежит классу* $A_0^\alpha(\Gamma)$.

Верна и обратная теорема:

*Если функция, определенная на* $\Gamma$, *принадлежит классу* $A_0^\alpha(\Gamma)$, *то функцию* $\varphi$ *можно продолжить с* $\Gamma$ *на* $\Omega$ *так, что продолженная функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *будет обладать свойствами*:

1) $f \in W_2^1(\alpha)$,

2) $f|_\Gamma = \varphi$ *в смысле равенства* (1.8).

При $\alpha = 0$ это есть результат В. М. Бабича и Л. Н. Слободецкого ([8]) (при $p = 2$); при $\alpha > 0$ — усиление соответствующего результата Л. Д. Кудрявцева ([5]).

Доказательство сформулированных теорем существенно основано на применении вариационного принципа **. Именно, появляется необходимость в рассмотрении задачи на минимум функционала

$$D_\alpha(\psi) = \int \cdots \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2\right] \sigma^\alpha(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega,$$

где $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ — положительная весовая функция, порядок убывания которой при приближении точки $(x_1, \ldots, x_n)$ к $\Gamma$ равен расстоянию точки $(x_1, \ldots, x_n)$ до $\Gamma$. Минимум рассматривается в классе $W_2^1(\alpha)$ функций $\{\psi\}$, принимающих то же граничное значение, что и заданная функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in W_2^1(\alpha)$. Мы доказываем существование и единственность функции, для которой достигается минимум. Эта функция внутри $\Omega$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0. \tag{1}$$

Как следствие сформулированных выше прямой и обратной теорем, мы получаем следующую теорему.

*Если на достаточно гладкой границе* $\Gamma$ *области* $\Omega$, *удовлетворяющей условиям гладкости, сформулированным в* § 1, *задана функция* $\varphi \in A_0^\alpha(\Gamma)$, *то в классе* $W_2^1(\alpha)$ *существует, и притом единственное, решение* $u(x_1, \ldots, x_n)$ *дифференциального уравнения* (1), *удовлетворяющее граничному условию* $u|_\Gamma = \varphi$ *в смысле равенства* (1.8).

---

* В случае, если $S = \Gamma$, то, по определению, считаем $S_\varepsilon = \Gamma$.

** Основные результаты в обосновании вариационного принципа для функционала $D_\alpha(\psi)$ принадлежат Л. Д. Кудрявцеву ([5]).

Эта теорема, являющаяся окончательной для заданного класса функций, усиливает соответствующий результат Л. Д. Кудрявцева [см. ([5]), теоремы 6,7], который рассматривал граничные функции $\varphi$ в других функциональных классах. Отметим еще, что уравнениями, подобными уравнению (I), в более ранний период занимались М. В. Келдыш ([12]), М. И. Вишик ([13]), В. К. Захаров ([14]).

Метод доказательства прямой и обратной теорем основан на том, что эти теоремы доказываются сначала для специальной неограниченной области и специального класса функций, дающих возможность применить аппарат кратных рядов Фурье.

Переход к произвольной ограниченной области осуществляется методами, разработанными С. М. Никольским в работе ([2]).

## § 1. Класс $W_2^1(\alpha)$

Пусть $R$ — пространство точек $(x_1, \ldots, x_n)$ и $\Omega$ — принадлежащая ему ограниченная конечно-связная область с границей $\Gamma$. Под $\Omega_\delta$ будем понимать совокупность точек $\Omega$, расстояние которых до $\Gamma$ не меньше $\delta > 0$. Относительно границы $\Gamma$ предположим, что она есть ограниченное многообразие $(n-1)$-го измерения и порядка гладкости 2 [см. ([2]), стр. 300 и ([11]), § 8]. Это означает, что каждая точка $P \in \Gamma$ может быть окружена $n$-мерным шаром с центром в этой точке настолько малого радиуса $r$, что он отсекает от $\Gamma$ кусок $S$ *, на котором можно ввести местные криволинейные координаты $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ такие, что функции

$$x_i = x_i(u_1, \ldots, u_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

дважды непрерывно дифференцируемы. Отсюда следует, что нормали к $S$ на достаточно малом расстоянии от $S$ не пересекаются (доказательство можно найти в работе ([2]), стр. 300 и в работе ([11]), § 8, стр. 89).

Наряду с шаром радиуса $r$ с центром в точке $P \in \Gamma$ построим другой, концентрический с первым шар настолько малого радиуса $r'$, что он отсекает на $\Gamma$ кусок $S'$, который вместе со своим замыканием принадлежит $S$ и на котором, таким образом, также можно ввести некоторые другие местные координаты $(u'_1, \ldots, u'_{n-1})$, обладающие вышеупомянутыми свойствами.

Таким образом, можно построить систему многообразий $\{S\}$ и $\{S'\}$, $\bar{S}' \subset S$, обладающих указанными свойствами и образующих покрытие $\Gamma$. По теореме Гейне — Бореля, из покрытия $\{S'\}$ можно выделить конечное покрытие $\{S'_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Тогда тем более $\{S_i\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ будет также покрытием $\Gamma$. Для каждого $S_i$ (аналогично $S'_i$) найдется $n$-мерная окрестность $V_i$, содержащая $S_i$, в пересечении которой с $\Omega$ (обозначим $V'_i = \Omega \cap V_i$) можно ввести локальные координаты

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ h &= h(x_1, \ldots, x_n) \quad (x_1, \ldots, x_n) \in V'_i, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $h$ — расстояние до $\Gamma$ по нормали, а $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ — некоторые местные

* Этот кусок $S$ будет являться односвязным открытым множеством.

криволинейные координаты на многообразии $S_i$, причем функции (1.1) непрерывно дифференцируемы.

При достаточно малом $\delta > 0$ в области $V_i''\{(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_i,\ 0 \leqslant h \leqslant \delta\}$ соответствие

$$(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)$$

будет взаимно однозначным и

$$\begin{aligned} A > |J_u| &= \left| \frac{D(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right| > B > 0, \\ C > |J_x| &= \left| \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)} \right| > D > 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ — постоянные.

Пусть на $\Omega$ определена положительная функция $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$, дважды непрерывно дифференцируемая и подчиненная условию:

$$c_1 \rho(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \sigma(x_1, \ldots, x_n) \leqslant c_2 \rho(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.3}$$

где $\rho(x_1, \ldots, x_n)$ — расстояние точки $(x_1, \ldots, x_n)$ до границы $\Gamma$, а $c_1$, $c_2$ — положительные постоянные, не зависящие от $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_2(\Omega)$ принадлежит $W_2^1(\alpha)$, если она имеет на $\Omega$ обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные первого порядка и

$$D_\alpha(f) = \int \cdots \int_\Omega \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right] \sigma^\alpha(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega < \infty, \tag{1.4}$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$.

В области $V_i''$ совершим замену координат:

$$x_i = x_i(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и положим

$$\begin{aligned} f^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) &= f(x_1(u_1, \ldots, u_{n-1}, h), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)), \\ \sigma^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) &= \sigma^*(x_1(u_1, \ldots, u_{n-1}, h), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)). \end{aligned}$$

Из (1.3) и результатов работы [9] следует справедливость неравенства

$$\widetilde{C}_1 h \leqslant \sigma^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) \leqslant \widetilde{C}_2 h. \tag{1.5}$$

На основании (1.2), (1.4), (1.5), имеем:

$$\int \cdots \int_{S_i} \int_0^\delta \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial f^*}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^*}{\partial h} \right)^2 \right] h^\alpha\, du_1 \ldots du_{n-1}\, dh \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\widetilde{C}_1} \int \cdots \int_{S_i} \int_0^\delta \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial f^*}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^*}{\partial h} \right)^2 \right] \sigma^{*\alpha}(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)\, du_1 \ldots du_{n-1}\, dh =$$

$$= \frac{1}{\widetilde{C}_1} \int \cdots \int_{V_i''} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial h} \right)^2 \right] \frac{\sigma^\alpha(x_1, \ldots, x_n)}{|J_x|}\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant M \int \cdots \int_{V_i''} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right] \sigma^\alpha(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n < M D_\alpha(f), \tag{1.6}$$

где

$$M = \frac{1}{\widetilde{C},\ D} \max_{j,\ i} \left\{ \left| \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \right|^2,\ \left| \frac{\partial x_i}{\partial h} \right|^2 \right\}.$$

Из (1.6) следует, что при любом $0 < \eta \leqslant \delta$

$$\int_\eta^\delta \int \cdots \int_{S_i} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial f^*}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^*}{\partial h} \right)^2 \right] du_1 \ldots du_{n-1}\, dh < \infty, \tag{1.7}$$

т. е. $f^* \in W_2^1$ в области $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_i,\ \eta < h \leqslant \delta$.

Обозначим через $S_{i\eta}$ многообразие $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_i,\ h = \eta$.

По теореме вложения [см. ([1]), стр. 64], имеем:

$$s = n - 1, \quad l = 1, \quad p = 2, \quad s > n - lp = n - 2,$$

$$q < \frac{sp}{n - lp} = 2 + \frac{2}{n-2}.$$

Тогда можно положить $q = 2$. Итак, $f^*|_{S_{i\eta}} \in L_2$ при любом $\eta > 0$.

С другой стороны, из (1.7) следует, что функция

$$\Phi(h) = \int \cdots \int_{S_i} \left( \frac{\partial f^*}{\partial h} \right)^2 h^\alpha\, du_1 \ldots du_{n-1}$$

суммируема на отрезке $[0, \delta]$. Отсюда при помощи рассуждений, аналогичных проведенным в работе ([13]) (стр. 516), мы, применяя неравенство Гёльдера, получим:

$$\int \cdots \int_{S_i} [f^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h_1) - f^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h_2)]^2 du_1 \ldots du_{n-1} =$$

$$= \int \cdots \int_{S_i} \left[ \int_{h_2}^{h_1} \frac{\partial f^*}{\partial h}\, dh \right]^2 du_1 \ldots du_{n-1} =$$

$$= \int \cdots \int_{S_i} \left[ \int_{h_2}^{h_1} \frac{1}{h^{\frac{\alpha}{2}}} \left( \frac{\partial f^*}{\partial h} \cdot h^{\frac{\alpha}{2}} \right) dh \right]^2 du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h_1^{1-\alpha} - h_2^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \int \cdots \int_{S_i} \int_{h_2}^{h_1} \left( \frac{\partial f^*}{\partial h} \right)^2 h^\alpha\, du_1 \ldots du_{n-1}\, dh \to 0$$

при $h_1,\ h_2 \to 0$. Отсюда вытекает, что существует

$$\lim_{h \to 0} f^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) = f^*(u_1, \ldots, u_{n-1, 0}) = \varphi(u_1, \ldots, u_{n-1}) \tag{1.8}$$

в смысле $L_2$.

Под $f|_\Gamma$ будем понимать функцию, определенную на $\Gamma$ и равную пределу (1.8). В этом случае мы будем писать

$$f|_\Gamma = \varphi.$$

Функция $\varphi$ была определена нами при помощи некоторых местных криволинейных координат, которые можно вводить различными способами. Однако, как это показано в работе ([2]) (стр. 308), предельная функция,

полученная при помощи одних криволинейных координат, будет отличаться от предельной функции, полученной с помощью других криволинейных координат, лишь на функцию, эквивалентную нулю в среднем.

## § 2. Вариационная задача для функционала $D_\alpha(f)$

Основные результаты этого параграфа, как указано во введении, принадлежат Л. Д. Кудрявцеву. Однако в целях связного изложения мы приводим предложения и теоремы с доказательствами.

Пусть на $\Omega$ задана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которой

$$D_\alpha(f) = \int \cdots \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right] \sigma^\alpha(x_1, \ldots, x_n)\, d\Omega < \infty.$$

В § 1 было доказано, что

$$f|_\Gamma = \varphi \in L_2. \tag{2.1}$$

Рассмотрим множество функций $\{\psi(x_1, \ldots, x_n)\}$, удовлетворяющих равенству (2.1) и принадлежащих к $W_2^1(\alpha)$. Обозначим это множество через $W_2^1(\alpha)(f)$. Оно не пусто, так как к нему принадлежит $f(x_1, \ldots, x_n)$ Положим

$$\inf_{\psi \in W_2^1(\alpha)(f)} D_\alpha(\psi) = d > 0.$$

Последовательность $\{\psi_m\}$, для которой справедливо равенство

$$\lim_{m \to \infty} D_\alpha(\psi_m) = d,$$

назовем минимизирующей.

ЛЕММА 2.1. *Если* $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in W_2^1(\alpha)$, *то*

$$\|\psi\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C\{D_\alpha(\psi) + \|\psi\|^2_{L(\Gamma)}\}, \tag{2.2}$$

*где $C$ — не зависящая от $\psi$ постоянная.*

Доказательство. Рассмотрим область $\Sigma_\delta = \Omega - \Omega_\delta$. При достаточно малом $\delta > 0$ $\Sigma_\delta$ можно покрыть областями $V_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. В каждом $V_i''$ введем координаты (1.1), удовлетворяющие условиям (1.2). Положим

$$\psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) = \psi[x_1(u, \ldots, u_{n-1}, h), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)].$$

Для точек $V_i''$, в силу неравенства Гёльдера, имеем:

$$\int \cdots \int_{S_i} \int_0^\delta \left| \frac{\partial \psi^*}{\partial h} \right| du_1 \ldots du_{n-1} dh = \int \cdots \int_{S_i} \int_0^\delta \frac{1}{h^{\frac{\alpha}{2}}} \left| \frac{\partial \psi}{\partial h} \right| h^{\frac{\alpha}{2}} du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left( \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int \cdots \int_{V_i''} \left| \frac{\partial \psi^*}{\partial h} \right|^2 h^\alpha du_1 \ldots du_{n-1} dh \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant A_i D_\alpha^{\frac{1}{2}}(\psi), \tag{2.3}$$

где $A_i$ не зависят от $\psi$. Отсюда, по теореме Фубини, следует, что почти для всех $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_i$ $\left| \frac{\partial \psi^*}{\partial h} \right|$ суммируема на отрезке $[0, \delta]$, т. е. почти

для всех $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_i$ функция $\psi^*$ абсолютно непрерывна по $h$. Следовательно, почти для всех $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_i$ существует предел

$$\lim_{h\to 0} \psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) = \psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0).$$

Таким образом, почти для всех $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_i$ имеет смысл неравенство

$$|\psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)|^2 \leqslant 2|\psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) - \psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)|^2 + \\ + 2|\psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)|^2.$$

Умножим это неравенство на $du_1 \ldots du_{n-1}\, dh$ и проинтегрируем по $V_i''$

$$\int_0^\delta \int_{S_i} \cdots \int |\psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)|^2 du_1 \ldots du_{n-1}\, dh \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{S_i} \cdots \int \left(\int_0^h \frac{\partial \psi^*}{\partial h}(u_1, \ldots, u_{n-1}, t)\, dt\right)^2 du_1 \ldots du_{n-1} dh +$$

$$+ 2\delta \int_{S_i} \cdots \int \psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)|^2 du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant B_i [D_{\alpha V_i''}(\psi) + \|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)}].$$

Из условий (1.2) имеем:

$$\int_{V_i''} \cdots \int [\psi(x_1, \ldots, x_n)]^2 dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_0^\delta \int_{S_i} \cdots \int |\psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)|^2 |J_x| du_1 \ldots du_{n-1}\, dh \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{S_i} \cdots \int_0^\delta |\psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)|^2 du_1 \ldots du_{n-1} dh < \gamma_i [D_{\alpha V_i''}(\psi) + \|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)}]. \tag{2.4}$$

Суммируя по $V_i''$, получаем:

$$\|\psi\|^2_{L_2(\Sigma_\delta)} \leqslant A[D_\alpha(\psi) + \|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)}]. \tag{2.5}$$

Так как в области $\Omega_\delta$ $\psi \in W_2^1$, то применимо неравенство типа Пуанкаре [см. ([1]), стр. 76, неравенство (9.13)], которое установлено для произвольной области с гладкой границей С. М. Никольским ([9]). Следовательно,

$$\|\psi\|^2_{L_2(\Omega_\delta)} \leqslant M[D_\alpha(\psi) + \|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)}], \tag{2.6}$$

где $\Gamma_\delta$ — граница области $\Omega_\delta$.

Пусть $S_{i\delta} = V_i'' \cap \Gamma_\delta$. Тогда для почти всех $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_i$ имеем:

$$|\psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, \delta)|^2 \leqslant 2|\psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, \delta) - \psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)|^2 + \\ + 2|\psi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)|^2$$

и, следовательно,

$$\|\psi\|^2_{L_2(S_{i\delta})} = \|\psi^*\|^2_{L_2(S_{i\delta})} \leqslant M_i [D_\alpha(\psi) + \|\psi\|^2_{L_2(S_{i\delta})}].$$

Суммируя по $i$, получим:

$$\| \psi \|^2_{L_2(\Gamma_\delta)} \leqslant \overline{M} [D_\alpha(\psi) + \|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)}]. \tag{2.7}$$

Из неравенств (2.5) — (2.7) следует (2.2). Лемма доказана.

Определим норму в $W_2^1(\alpha)$ формулой

$$\|\psi\|^2_{W_2^1(\alpha)} = D_\alpha(\psi) + \|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)}. \tag{2.8}$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Минимизирующая последовательность* $\{\psi_m\}$ *сходится по норме* $W_2^1(\alpha)$ *к некоторой предельной функции* $u(x_1, \ldots, x_n)$. *Эта функция принадлежит к* $W_2^1(\alpha)(f)$ *и дает функционалу* $\underset{\psi \in W_2^1(\alpha)(f)}{D_\alpha(\psi)}$ *наименьшее значение.*

Доказательство. В силу (2.8), принимая во внимание, что $(\psi_m - \psi_n)|_\Gamma = 0$ в смысле $L_2$, будем иметь:

$$\|\psi_m - \psi_n\|^2_{W_2^1(\alpha)} = D_\alpha(\psi_m - \psi_n).$$

Так как $\{\psi_n\}$ — минимизирующая последовательность, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N_\varepsilon$, что для всех $m, n > N_\varepsilon$ справедливы неравенства:

$$D_\alpha(\psi_n) < d + \varepsilon, \quad D_\alpha(\psi_m) < d + \varepsilon.$$

Очевидно, $\frac{\psi_m + \psi_n}{2} \in W_2^1(\alpha)(f)$ и, следовательно, $D_\alpha\left(\frac{\psi_m + \psi_n}{2}\right) \geqslant d$. Далее, имеем:

$$D_\alpha\left(\frac{\psi_m - \psi_n}{2}\right) = \frac{1}{2} D_\alpha(\psi_m) + \frac{1}{2} D_\alpha(\psi_n) -$$

$$- D_\alpha\left(\frac{\psi_m + \psi_n}{2}\right) < \frac{d+\varepsilon}{2} + \frac{d+\varepsilon}{2} - d = \varepsilon,$$

$$\|\psi_m - \psi_n\|^2_{W_2^1(\alpha)} = D_\alpha(\psi_m - \psi_n) \to 0 \text{ при } m, n \to \infty.$$

Из неравенства (2.2), в силу того, что $[\psi_m(x_1, \ldots, x_n) - \psi_n(x_1, \ldots, x_n)]|_\Gamma = 0$ в смысле $L_2$, следует:

$$\|\psi_m - \psi_n\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C D_\alpha(\psi_m - \psi_n) \to 0 \text{ при } m, n \to \infty \tag{2.9}$$

и, кроме того, каждая $\psi_m \in L_2(\Omega)$. Таким образом, из (2.9) следует существование функции $u(x_1, \ldots, x_n) \in L_2(\Omega)$ такой, что

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x_1, \ldots, x_n) \text{ в смысле } L_2(\Omega). \tag{2.10}$$

Покажем, что $u(x_1, \ldots, x_n)$ имеет внутри области $\Omega$ обобщенные в смысле С. Л. Соболева первые производные по $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. На основании (2.9),

$$\|\psi'_{m_{x_i}} - \psi'_{n_{x_i}}\|_{L_2^{\sigma^\alpha}(\Omega)} \to 0 \text{ при } m, n \to \infty,$$

где

$$\|\psi'_{m_{x_i}} - \psi'_{n_{x_i}}\|_{L_2^{\sigma^\alpha}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \cdots \int [\psi'_{m_{x_i}} - \psi'_{n_{x_i}}]^2 \sigma^\alpha \, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из свойств функции $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ следует, что для всякого $\delta > 0$

$$\|\psi'_{m_{x_i}} - \psi'_{n_{x_i}}\|_{L_2(\Omega_\delta)} \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Следовательно, существуют функции $u_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ такие, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \psi'_{m_{x_i}}(x_1, \ldots, x_n) = u_i(x_1, \ldots, x_n)\,(i = 1, \ldots, n) \text{ в смысле } L_2(\Omega_\delta). \quad (2.11)$$

Из (2.10), (2.11) вытекает, что $u_i(x_1, \ldots, x_n)\,(i = 1, \ldots, n)$ являются обобщенными первыми производными функциями $u(x_1, \ldots, x_n)$ соответственно по $x_i$ во всякой внутренней подобласти $\Omega_\delta$ области $\Omega$.

Далее, при любом $\delta > 0$ имеем:

$$\int_\Omega \cdots \int |u_i|\,d\Omega = \lim_{m\to\infty} \int_{\Omega_\delta} \cdots \int \left|\frac{\partial\psi_m}{\partial x_i}\right| d\Omega = \lim_{m\to\infty} \int_{\Omega_\delta} \cdots \int \frac{1}{\sigma^{\frac{\alpha}{2}}} \left(\left|\frac{\partial\psi_m}{\partial x_i}\right| \sigma^{\frac{\alpha}{2}}\right) d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \left(\int_\Omega \cdots \int \frac{1}{\sigma^\alpha}\,d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega \cdots \int \left|\frac{\partial\psi_m}{\partial x_i}\right|^2 \sigma^\alpha\,d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} < A < \infty.$$

Следовательно, функции $u_i(x_1, \ldots, x_n)$ суммируемы по $\Omega$. На основании леммы работы ([1]) (стр. 46), $u_i$ являются на $\Omega$ обобщенными частными производными соответственно по $x_i$ функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ и для любого $\delta$ при $m \to 0$ справедливо равенство:

$$D_{\alpha_{\Omega_\delta}}(u - \psi_m) = \int_{\Omega_\delta} \cdots \int \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi_m}{\partial x_i}\right)^2\right] \sigma^\alpha\,d\Omega \to 0.$$

Таким образом,

$$D_{\alpha_{\Omega_\delta}}(u) = \lim_{m\to\infty} D_{\alpha_{\Omega_\delta}}(\psi_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} D_\alpha(\psi_m) < C < \infty. \quad (2.12)$$

Так как соотношение (2.12) справедливо при любом $\delta > 0$, то $D_\alpha(u) < \infty$. Покажем, что $D_\alpha(u) = d$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие $\delta > 0$ и $N_1$, что

$$D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(u) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |D_{\alpha_{\Omega_\delta}}(u) - D_{\alpha_{\Omega_\delta}}(\psi_m)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

при $m > N_1$, где $\Sigma_\delta = \Omega - \Omega_\delta$. Кроме того, для заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N_\varepsilon$, что при $n > N_\varepsilon$

$$D_\alpha(\psi_{N_\varepsilon} - \psi_n) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Возьмем $\delta > 0$ таким, чтобы одновременно выполнялись неравенства:

$$D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(\psi_i) < \frac{\varepsilon}{8} \quad (i = 1, 2, \ldots, N_\varepsilon).$$

Для $i > N_\varepsilon$ имеем:

$$D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(\psi_i) < 2D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(\psi_{N_\varepsilon}) + 2D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(\psi_{N_\varepsilon} - \psi_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что $D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(\psi_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n$ одновременно.

Далее,

$$|D_\alpha(\psi_m) - D_\alpha(u)| < D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(u) + D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(\psi_m) + |D_{\alpha_{\Omega_\delta}}(\psi_m) - D_{\alpha_{\Omega_\delta}}(u)| < \varepsilon$$

при $m > N_1, N_\varepsilon$. Утверждение доказано.

Чтобы доказать равенства $u|_\Gamma = f|_\Gamma = \varphi$, достаточно установить их справедливость, когда $\Gamma$ заменено на $S_i$. В соответствующем $V_i$ введем координаты (1.1) и положим

$$\Phi_m(x_1, \ldots, x_n) = \psi_m(x_1, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_m^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) = \\ = \psi_m^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) - u^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h).$$

Аналогично (2.4), имеем при $h < \delta$:

$$\int_{S_i} \cdots \int \Phi_m^{*2}(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)\, du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{S_i} \cdots \int |\Phi_m^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) - \Phi_m^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)|^2 du_1 \ldots du_{n-1} +$$

$$+ 2 \int_{S_i} \cdots \int \Phi^{*2}(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)\, du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant C' \left[ D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(\Phi_m) + \int_{S_i} \cdots \int \Phi_m^{*2}(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)\, du_1 \ldots du_{n-1} \right].$$

Интегрируя по $h$ от 0 до $\delta$, получим при $m \to \infty$:

$$\int_{S_i} \cdots \int \Phi_m^{*2}(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)\, du_1 \ldots du_{n-1} < C_2 [D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(\Phi_m) + \|\Phi_m\|^2_{L_2(\Sigma_\delta)}] \to 0.$$

Переходя к пределу по $m$, находим:

$$\int_{S_i} \cdots \int |u^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0) - \varphi(u_1, \ldots, u_{n-1})|^2 du_1 \ldots du_{n-1} = 0,$$

или $u|_\Gamma = \varphi$. Теорема доказана.

Обозначим через $Z^0$ класс функций, дважды непрерывно дифференцируемых и обращающихся в нуль в некоторой граничной полоске (своей для каждой функции) положительной толщины. Пусть $z \in Z^0$. Тогда, очевидно, $u + \lambda z \in W_2^1(\alpha)(f)$ и

$$D_\alpha(u + \lambda z) = D_\alpha(u) + 2\lambda D_\alpha(u, z) + \lambda^2 D_\alpha(z) = \tau(\lambda),$$

где

$$D_\alpha(u, z) = \int_\Omega \cdots \int \left[ \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_i} \right] \sigma^\alpha\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Так как $\tau(\lambda)$ имеет минимум при $\lambda = 0$, то необходимо

$$D_\alpha(u, z) = 0. \tag{2.13}$$

Интегрируя (2.13) по частям, получим:

$$\int_\Omega \cdots \int u L(z)\, dx_1 \ldots dx_n = 0,$$

где

$$L(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma^{\alpha}\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)$$

для любого $z\in Z^0$. Следовательно, $u$ является обобщенным в смысле С. Л. Соболева решением уравнения *

$$L(u)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sigma^{\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=0 \tag{2.14}$$

при краевом условии $u|_{\Gamma}=\varphi$.

Из условия (2.13) [см. ([6]), § 4] следует, что функция $u(x_1,\ldots,x_n)$ внутри области $\Omega$ будет дважды непрерывно дифференцируемой.

Интегрируя (2.13) по частям, получим:

$$\int_{\Omega}\!\!\ldots\!\int zL(u)\,dx_1\ldots dx_n=0$$

для любой функции $z\in Z^0$. Отсюда следует, что $L(u)=0$ всюду внутри области $\Omega$. Таким образом, $u(x_1,\ldots,x_n)$ является обычным решением краевой задачи (2.14).

Докажем единственность решения вариационной задачи. Пусть имеются решения $u_1\in W_2^1(\alpha)(f)$, $u_2\in W_2^1(\alpha)(f)$ такие, что $u_1\neq u_2$ и $D_\alpha(u_1)=$ $=D_\alpha(u_2)=d$. Из тождества

$$0\leqslant D_\alpha\left(\frac{u_1-u_2}{2}\right)=\frac{1}{2}D_\alpha(u_1)+\frac{1}{2}D_\alpha(u_2)-D_\alpha\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)<\frac{d}{2}+\frac{d}{2}-d=0$$

имеем: $D_\alpha(u_1-u_2)=0$. Следовательно, $u_1-u_2=\mathrm{const}$ внутри области $\Omega$. Так как $u_1-u_2|_{\Gamma}=0$, то $u_1-u_2=0$ почти всюду в $\Omega$.

ЛЕММА 2.2. *Пусть $v(x_1,\ldots,x_n)$ дважды непрерывно дифференцируема внутри $\Omega$, принадлежит $W_2^1(\alpha)$ и удовлетворяет уравнению* (2.13). *Тогда $D_\alpha(v,z)=0$ для любой функции $z\in W_2^1(\alpha)(f)$, дважды непрерывно дифференцируемой и обращающейся в нуль в среднем на $\Gamma$.*

Доказательство. Для доказательства применим прием С. М. Никольского, использованный в его работе ([9]):

$$D_\alpha(v,z)=\lim_{\delta\to 0}D_{\alpha\Omega_\delta}(v,z)=\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{\Gamma_\delta}\!\!\ldots\!\int z\sigma^\alpha\frac{\partial v}{\partial \bar n}\,d\Gamma_\delta-\int_{\Omega_\delta}\!\!\ldots\!\int zL(v)\,dx_1\ldots dx_n\right]=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\int_{\Gamma_\delta}\!\!\ldots\!\int z\sigma^\alpha\frac{\partial v}{\partial \bar n}\,d\Gamma_\delta, \tag{2.15}$$

где $\Gamma_\delta$ — граница области $\Omega_\delta$, $\bar n$ — внутренняя нормаль к $\Gamma_\delta$ **. Законность интегрирования по частям следует из того, что функция $v(x_1,\ldots,x_n)$ на $\Omega_\delta$ дважды непрерывно дифференцируема, а $z\in W_2^1(\alpha)$. Мы имеем:

$$\left|\int_{\Gamma_\delta}\!\!\ldots\!\int z\sigma^\alpha\frac{\partial v}{\partial \bar n}\,d\Gamma_\delta\right|\leqslant\left(\int_{\Gamma_\delta}\!\!\ldots\!\int z^2\sigma^\alpha\,d\Gamma_\delta\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{\Gamma_\delta}\!\!\ldots\!\int\left(\frac{\partial v}{\partial \bar n}\right)^2\sigma^\alpha\,d\Gamma_\delta\right)^{\frac{1}{2}}=J_{1\delta}^{\frac{1}{2}}J_{2\delta}^{\frac{1}{2}}.$$

---

* См., например, ([6]), § 2, или ([15]).

** Очевидно, что $\Gamma_\delta$ имеет непрерывную внутреннюю нормаль.

В куске $V_i''$ области $\Sigma_\delta$ введем координаты (1.1) и пусть $S_{i\delta} = \Gamma_\delta \Pi V_i''$. Тогда, учитывая (1.2), (1.3) и (1.5), получим:

$$\left|\int_{S_{i\delta}}\!\!\cdots\!\int z^2\sigma^\alpha\, d\Gamma_\delta\right| = \left|\int_{\substack{S_i\\ h=\delta}}\!\!\cdots\!\int z^{*2}\sigma^{*\alpha}\right| J_x \,|\, du_1 \ldots du_{n-1}| <$$

$$< A_1\delta^\alpha \int_{S_i}\!\!\cdots\!\int z^{*2}(u_1, \ldots, u_{n-1}, \delta)\, du_1 \ldots du_{n-1} =$$

$$= A_1\delta^\alpha \int_{S_i}\!\!\cdots\!\int |z^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, \delta) - z^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)|^2\, du_1 \ldots du_{n-1} =$$

$$= A_1\delta^\alpha \int_{S_i}\!\!\cdots\!\int \left(\int_0^\delta \frac{\partial z^*}{\partial h}\, dh\right)^2 du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant A_2\delta D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(z) = o(\delta), \qquad (2.16)$$

так как при $\delta \to 0$ $D_{\alpha_{\Sigma_\delta}}(z) \to 0$. Суммируя (2.16) по $i$, получим:

$$J_{1\delta} = o(\delta). \qquad (2.17)$$

Положительная функция

$$\Phi(\delta) = \int_{\Gamma_\delta}\!\!\cdots\!\int \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 \sigma^\alpha\, d\Gamma_\delta$$

суммируема на отрезке $[0, a]$, где $a$ — некоторое положительное число. Поэтому можно указать последовательность $\delta_k \to 0$, для которой

$$\Phi(\delta_k) < \frac{A_3}{\delta_k}, \qquad (2.18)$$

где $A_3$ — постоянная. Так как $D_\alpha(v, z)$ существует, то для любой последовательности $\delta_j \to 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ соблюдается равенство (2.15). В равенстве (2.15) возьмем такую последовательность, для которой справедливо неравенство (2.18). Тогда

$$|D_\alpha(v, z)| = \lim_{\delta_k \to 0} |D_{\alpha_{\Omega_{\delta_k}}}(v, z)| \leqslant \lim_{\delta_k \to 0} J_{1\delta_k}^{\frac{1}{2}} \cdot J_{2\delta_k}^{\frac{1}{2}} = \lim_{\delta_k \to 0} o\left(\delta_k^{\frac{1}{2}}\right) \cdot o\left(\frac{1}{\delta_k^{\frac{1}{2}}}\right) = 0.$$

Лемма доказана.

На основании этой леммы легко доказывается

ТЕОРЕМА 2.2. *Краевая задача* (2.14) *имеет единственное решение в классе* $W_2^1(\alpha)(f)$.

Доказательство. Пусть $v(x_1, \ldots, x_n) \in W_2^1(\alpha)(f)$, $v \neq u$, будет тоже решением уравнения (2.14) с краевым условием $v|_\Gamma = u|_\Gamma = \varphi$. Тогда, очевидно, $D_\alpha(v) > d$, ибо $d$ есть $\inf\limits_{\psi \in W_2^1(\alpha)(f)} D_\alpha(\psi)$. Положим $z = u - v$. Тогда $z|_\Gamma = 0$ в смысле $L_2$; применив предыдущую лемму, получим:

$$D_\alpha(u) = D_\alpha[v + (u - v)] = D_\alpha(v) + 2D_\alpha(v, u - v) + D_\alpha(u - v) =$$
$$= D_\alpha(v) + D_\alpha(u - v) > D_\alpha(v) > d,$$

а это противоречит тому, что $D_\alpha(u) = d$.

## § 3. Случай бесконечной области

Пусть функция $n$ переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная для $x_n \geqslant 0$ и при любом $A > 0$ суммируемая с квадратом по области

$$0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$0 \leqslant x_n \leqslant A,$$

имеет обобщенные в смысле С. Л. Соболева первые производные для $x_n > 0$ и удовлетворяет условиям:

1) $\widetilde{D}_\alpha(f) = \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right] x_n^\alpha \, dx_1 \ldots dx_n < c < \infty$;

2) $f(x_1, \ldots, x_n)$ — $2\pi$-периодическая нечетная функция по каждому $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$;

3) $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \pi, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, где условие 3), как всюду в этой работе, понимается в сысле равенства (1.8). Из результатов § 1, следует, что условие 1) автоматически влечет за собой равенство

$$\lim_{h \to 0} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, h) = \lim_{h \to 0} \varphi_h(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \text{ в смысле } L_2.$$

Множество функций $\{\psi\}$, удовлетворяющих условиям 1) — 3), назовем классом $\widetilde{W}_2^1(\alpha)$, а множество функций $\{\tau\}$, удовлетворяющих условиям 1) — 3) и дополнительному условию

$$\tau(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \text{ в смысле } L_2,$$

назовем классом $\widetilde{W}_2^1(\alpha)(f)$. Класс $\widetilde{W}_2^1(\alpha)(f)$ не пуст, так как к нему принадлежит $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Положим $\inf\limits_{\widetilde{\psi} \in W_2^1(\alpha)(f)} \widetilde{D}_\alpha(\psi) = d > 0$, и пусть $\{\psi_m\}$ — минимизирующая последовательность, для которой

$$\lim_{m \to \infty} \widetilde{D}_\alpha(\psi_m) = d.$$

Тогда справедлива

ЛЕММА 3.1. *Если $\psi \in \widetilde{W}_2^1(\alpha)(f)$, то при любом $a > 0$*

$$\int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} \psi^2(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$
$$\leqslant 2a \left[\int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \varphi^2(x_1, \ldots, x_{n-1}) \, dx_1 \ldots dx_{n-1} + \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \widetilde{D}_\alpha(\psi)\right]. \qquad (3.1)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1.

Для произвольной функции $\tau \in \widetilde{W}_2^1(\alpha)$ определим норму формулой

$$\|\tau\|^2_{W_2^1(\alpha)} = \widetilde{D}_\alpha(\tau) + \|g\|^2_{L_2},$$

где $g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \tau|_{x_n = 0}$ в смысле $L_2$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Минимизирующая последовательность $\{\psi_m\}$ сходится по норме $\widetilde{W}_2^1(\alpha)$ к некоторой функции $u(x_1, \ldots, x_n)$. Предельная функция принадлежит к $\widetilde{W}_2^1(\alpha)(f)$ и дает функционалу $\widetilde{D}_\alpha(\psi)$ наименьшее значение.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.1, для $m, n > N_\varepsilon$ имеем:

$$0 < \widetilde{D}_\alpha\left(\frac{\psi_m - \psi_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\widetilde{D}_\alpha(\psi_m) + \frac{1}{2}\widetilde{D}_\alpha(\psi_n) - \widetilde{D}_\alpha\left(\frac{\psi_m + \psi_n}{2}\right) <$$
$$< \frac{d+\varepsilon}{2} + \frac{d+\varepsilon}{2} - d = \varepsilon. \qquad (3.2)$$

Из (3.1) следует:

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}\int_0^a |\psi_m - \psi_n|^2 dx_1 \ldots dx_n \leqslant \frac{2a^{2-\alpha}}{1-\alpha}\widetilde{D}_\alpha(\psi_m - \psi_n) \to 0 \text{ при } m, n \to \infty. \qquad (3.3)$$

Из (3.2) и (3.3) обычным путем можно установить существование функции $u(x_1, \ldots, x_n)$, имеющей первые обобщенные производные, для которой при $m \to \infty$

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}\int_\delta^a |\psi_m - u|^2 dx_1 \ldots dx_n \to 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}\int_0^a \left|\frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx_1, \ldots, dx_n \to 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}\int_\delta^a \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] x_n^\alpha dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}\int_\delta^a \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] x_n^\alpha dx_1 \ldots dx_n \leqslant \lim_{m\to\infty} \widetilde{D}_\alpha(\psi_m) < \infty. \qquad (3.4)$$

Так как (3.4) справедливо при любых $a > 0$ и $\delta > 0$, то $\widetilde{D}_\alpha(u) < \infty$. Доказательства утверждений $\widetilde{D}_\alpha(u) = d$ и $u|_{x_n=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ в смысле $L_2$ аналогичны доказательствам в теореме 2.1.

Пусть снова $Z^0$ — класс функций, дважды непрерывно дифференцируемых и обращающихся в нуль в некоторой граничной полоске положительной толщины. Для любой функции $z \in Z^0$ имеем:

$$\widetilde{D}_\alpha(u, z) = 0, \qquad (3.5)$$

откуда следует, что $u$ есть обобщенное решение уравнения $L(u) = 0$.

Из результатов работы ([6]) заключаем, что $u(x_1, \ldots, x_n)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая функция для $x_n > 0$ и произвольных $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и тем самым является обычным решением уравнения

$$L(u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_n^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0. \qquad (3.6)$$

Доказательство единственности решения вариационной задачи аналогично соответствующему доказательству в § 2.

ЛЕММА 3.2. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемая при* $x_n > 0$ *функция* $\bar{u}(x_1, \ldots, x_n)$ *принадлежит* $\widetilde{W}_2^1(\alpha)(f)$ *и удовлетворяет уравнению* (3.6). *Тогда* $\widetilde{D}_\alpha(\bar{u}, \psi) = 0$ *для любой функции* $\psi \in \widetilde{W}_2^1(\alpha)$, *дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяющей условиям* 1) — 3) *и условию* $\psi|_{x_n=0} = 0$ *в смысле* $L_2$.

Доказательство. Функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ абсолютно непрерывна почти для всех $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ по $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, ее можно всякий раз изменять на множестве $n$-мерной меры нуль так, что будет законным интегрирование по частям в выражениях

$$\begin{gathered}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} x_n^\alpha \, dx_i = x_n^\alpha \psi \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \psi \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_n^\alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\right) dx_i, \\ \int_\delta^\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} \frac{\partial \psi}{\partial x_n} x_n^\alpha \, dx_i = x_n^\alpha \psi \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\Big|_\delta^\mu - \int_\delta^\mu \psi \frac{\partial}{\partial x_n}\left(x_n^\alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}\right) dx_n \\ (i = 1, 2, \ldots, n-1).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Обозначим

$$d\Omega^i = dx_1 \ldots dx_{i-1} \, dx_{i+1} \ldots dx_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Умножим равенства (3.7) на $d\Omega^i$, проинтегрируем по $x_i$ от 0 до $2\pi$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и по $x_n$ от $\delta$ до $\mu$ и сложим. Из условий 1) — 3) следует, что $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ на многообразиях $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ почти всюду равна нулю, и так как функция $\bar{u}(x_1, \ldots, x_n)$ для $x_n \geqslant \delta$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (3.6), то имеем:

$$\widetilde{D}_\alpha(\bar{u}, \psi; \delta, \mu) = \int_\delta^\mu \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right] x_n^\alpha \, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \underset{x_n=\mu}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \psi \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_{n-1} - \underset{x_n=\delta}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \psi \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_{n-1} -$$

$$- \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \int_\delta^\mu \psi L(\bar{u}) \, d\Omega = \underset{x_n=\mu}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_{n-1} -$$

$$- \underset{x_n=\delta}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \psi \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

$$|\widetilde{D}_\alpha(\bar{u}, \psi; \delta, \mu)| \leqslant \left| \underset{x_n=\mu}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \psi \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} d\Omega^{n-1} \right| + \left| \underset{x_n=\delta}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \psi \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} d\Omega^{n-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \Big( \underset{x_n=\mu}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \psi^2 d\Omega^{n-1} \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big( \underset{x_n=\mu}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}\right)^2 x_n^\alpha \, d\Omega^{n-1} \Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \Big( \underset{x_n=\delta}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \psi^2 \, d\Omega^{n-1} \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big( \underset{x_n=\delta}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}\right)^2 x_n^\alpha \, d\Omega^{n-1} \Big)^{\frac{1}{2}} = (I_1^\mu \cdot I_2^\mu)^{\frac{1}{2}} \cdot (I_1^\delta \cdot I_2^\delta)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.8}$$

$$I_1^\delta = \underset{x_n=\delta}{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \psi^2 \, d\Omega^{n-1} =$$

$$= \delta^\alpha \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} | \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \delta) - \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) |^2 \, d\Omega^{n-1} =$$

$$= \delta^\alpha \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\delta \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n \right)^2 d\Omega^{n-1} \leqslant \delta^\alpha \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^\delta \frac{dx_n}{x_n^\alpha} \cdot \int_0^\delta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right)^2 x_n^\alpha \, dx_n \right] d\Omega^{n-1} =$$

$$= \frac{\delta}{1-\alpha} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right)^2 x_n^\alpha \, d\Omega = o(\delta), \tag{3.9}$$

так как

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^\delta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right)^2 x_n^\alpha \, d\Omega \to 0 \text{ при } \delta \to 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_n^\alpha \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} \right)^2 dx_1 \ldots dx_{n-1} = F(x_n).$$

Поскольку $F(x_n)$ суммируема на отрезке $[0, a]$, $a > 0$, можно указать такую последовательность $\delta_k \to 0$, что

$$F(\delta_k) < \frac{B}{\delta_k}, \tag{3.10}$$

где $B$ — абсолютная константа.

Далее,

$$I_1^\mu = \underset{x_n=\mu}{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \psi^2 \, d\Omega^{n-1} = \mu^\alpha \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n \right)^2 d\Omega^{n-1} \leqslant \frac{\mu}{1-\alpha} \widetilde{D}_\alpha(\psi) = O(\mu),$$

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_n^\alpha \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} \right)^2 d\Omega^{n-1} = H(x_n).$$

Функция $H(x_n)$ суммируема на $[0, \infty]$ и, следовательно, можно указать такую последовательность $\mu_k \to \infty$, что

$$H(\mu_k) < \frac{A}{\mu_k \ln \mu_k}, \tag{3.11}$$

где $A$ — абсолютная постоянная. Так как $\widetilde{D}_\alpha(\bar{u}, \psi)$ существует, то для любых последовательностей $\delta_j \to 0$, $\mu_j \to \infty$ $(j = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$

$$\widetilde{D}_\alpha(\bar{u}, \psi) = \lim_{\substack{\delta_j \to 0, \\ \mu_j \to \infty}} \widetilde{D}_\alpha(\bar{u}, \psi; \delta_j, \mu_j). \tag{3.12}$$

Возьмем такие последовательности $\{\delta_j\}$ и $\{\mu_j\}$, для которых выполняются условия (3.10) и (3.11). Тогда имеем:

$$|\widetilde{D}_\alpha(\bar{u}, \psi)| = \lim_{\substack{\delta_k \to 0 \\ \mu_k \to \infty}} |\widetilde{D}_\alpha(\bar{u}, \psi; \delta_k, \mu_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\substack{\delta_k \to 0 \\ \mu_k \to \infty}} \left[ o\left(\delta_k^{\frac{1}{2}}\right) \cdot O\left(\frac{1}{\delta_k^{\frac{1}{2}}}\right) + O\left(\mu_k^{\frac{1}{2}}\right) \cdot O\left(\frac{1}{\mu_k^{\frac{1}{2}}}\right) \right] = 0,$$

что и требовалось доказать. На основании этой леммы, можно утверждать, что решение краевой задачи

$$L(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_n^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0 \tag{3.13}$$

при краевом условии $u|_{x_n=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ в смысле $L_2$ единственно в классе $\widetilde{W}_2^1(\alpha)$ $(f)$.

Доказательство единственности аналогично соответствующему доказательству в § 2.

## § 4. Решение краевой задачи (3.13) в классе функций $\widetilde{W}_2^1(\alpha)$

Мы получили, что функция, обращающая в минимум функционал $\underset{\psi \in \widetilde{W}_2^1(\alpha)(f)}{\widetilde{D}_\alpha(\psi)}$, удовлетворяет уравнению

$$L(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_n^{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

при $x_n > 0$ и краевых условиях:

а) $u|_{x_i = k\pi} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$,

б) $u|_{x_n=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$

в смысле $L_2$.

Решим данную краевую задачу методом разделения переменных. Пусть

$$V(x_1, \ldots, x_n) = X_1(x_1) \ldots X_n(x_n).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{X_i''(x_i)}{X_i(x_i)} + \frac{X_n''(x_n) + \frac{\alpha}{x_n} X_n'(x_n)}{X_n(x_n)} = 0. \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) распадается на $n$ уравнений:

$$X_i''(x_i) + m_i^2 X_i(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{4.2}$$

$$X_n''(x_n) + \frac{\alpha}{x_n} X'(x_n) - \nu^2 X_n(x_n) = 0, \tag{4.3}$$

где $m_i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$, $\nu^2 = \sum_{i=1}^{n-1} m_i^2$. Решениями уравнений (4.2) с учетом условий а) будут:

$$X_i(x_i) = \sin m_i x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Решение уравнения (4.3) ищется в интервале $(0, \infty)$. Так как решение уравнения (3.13) ищется в классе $\widetilde{W}_2^1(\alpha)$, то $X_n(x_n)$ необходимо должно быть ограниченным на $\infty$ и в точке $x_n = 0$.

Определим решение (4.3) так, чтобы выполнялось условие

$$X_n(0) = 1. \qquad (4.4)$$

Рассмотрим уравнение Бесселя

$$\eta^2 \frac{d^2u}{d\eta^2} + \eta \frac{du}{d\eta} + \left[\eta^2 - \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2\right] u = 0. \qquad (4.5)$$

Если в этом уравнении сделать замену

$$u = x_n^{\frac{\alpha-1}{2}} X_n(x_n), \quad \eta = i\nu x_n,$$

где $i = \sqrt{-1}$, то после соответствующих выкладок получим уравнение (4.3). Общее решение уравнения (4.5) имеет вид:

$$u(\eta) = C_1 I_{\frac{1-\alpha}{2}}(\eta) + C_2 I_{\frac{\alpha-1}{2}}(\eta).$$

Следовательно, общее решение уравнения (4.3) имеет вид:

$$X_n(x_n) = x_n^{\frac{1-\alpha}{2}} [C_1 I_{\frac{1-\alpha}{2}}(i\nu x_n) + C_2 I_{\frac{\alpha-1}{2}}(i\nu x_n)], \qquad (4.6)$$

где $C_1$, $C_2$ — независимые постоянные,

$$I_{\frac{1-\alpha}{2}}(i\nu x_n) = i^{\frac{1-\alpha}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(k+1+\frac{1-\alpha}{2}\right)} \left(\frac{\nu x_n}{2}\right)^{2k+\frac{1-\alpha}{2}}, \qquad (4.7)$$

$$I_{\frac{\alpha-1}{2}}(i\nu x_n) = i^{\frac{\alpha-1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(k+1+\frac{\alpha-1}{2}\right)} \left(\frac{\nu x_n}{2}\right)^{2k+\frac{\alpha-1}{2}}. \qquad (4.8)$$

Положим

$$C_1 = -\frac{Ce^{i\pi\frac{1-\alpha}{2}}}{i\sin\frac{1-\alpha}{2}\pi}, \quad C_2 = \frac{C}{i\sin\frac{1-\alpha}{2}\pi}.$$

Тогда

$$X_n(x_n) = Cx_n^{\frac{1-\alpha}{2}} \left[\frac{-I_{\frac{1-\alpha}{2}}(i\nu x_n)\, e^{-i\pi\frac{(1-\alpha)}{2}} + I_{\frac{\alpha-1}{2}}(i\nu x_n)}{i\sin\frac{1-\alpha}{2}\pi}\right] = Cx_n^{\frac{1-\alpha}{2}} H^1_{\frac{1-\alpha}{2}}(i\nu x_n),$$

где $H^1_{\frac{1-\alpha}{2}}(i\nu x_n)$ — функция Ханкеля первого рода. Из условия (4.4) имеем:

$$\frac{C\,(i\nu)^{\frac{\alpha-1}{2}}\, 2^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha-1}{2}\right) i\sin\left(\frac{1-\alpha}{2}\pi\right)} = 1$$

или

$$C = i^{\frac{3-\alpha}{2}} \nu^{\frac{1-\alpha}{2}} \Gamma\left(1+\frac{\alpha-1}{2}\right) \sin\left(\frac{1-\alpha}{2}\pi\right) \cdot 2^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

Следовательно,

$$X_n(x_n) = i^{\frac{3-\alpha}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{\alpha-1}{2}\right) 2^{\frac{\alpha-1}{2}} \sin\left(\frac{1-\alpha}{2}\pi\right) (\nu x_n)^{\frac{1-\alpha}{2}} H^1_{\frac{1-\alpha}{2}}(i\nu x_n) = AK_{\frac{1-\alpha}{2}}(\nu x_n),$$

где

$$A = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \cdot 2^{\frac{1+\alpha}{2}} \sin\left(\frac{1-\alpha}{2}\pi\right)}{\pi}.$$

Для $K_{\frac{1-\alpha}{2}}(\nu x_n)$ имеет место [см. ([10]), стр. 593] интегральное представление

$$K_{\frac{1-\alpha}{2}}(\nu x_n) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu x_n \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2} z} dz.$$

Таким образом,

$$X_n(x_n) = \frac{A}{2} (\nu x_n)^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu x_n \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2} z} dz.$$

Для удобства записи введем в рассмотрение новую функцию

$$\Phi(\nu x_n) = X_n(x_n) = \frac{A}{2} (\nu x_n)^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu x_n \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2} z} dz \tag{4.9}$$

и оценим величину $\Phi(\nu x_n)$ и ее производных по $x_n$ до второго порядка. Положим $\nu x_n = t$. При $t \geqslant 1$ имеем:

$$\Phi(t) = \frac{A}{2} t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2} z} dz =$$

$$= \frac{A}{2}\left[t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2} z} dz + t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{0} e^{-t \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2} z} dz\right] = \frac{A}{2}(I_1 + I_2).$$

В интеграле $I_1$ совершим замену $\sqrt{t}\, \frac{z}{\sqrt{2}} = u$, а в интеграле $I_2$ положим $x = -\sqrt{t}\, z$. Тогда

$$I_1 = t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2} z} dz < e^{-t} \cdot t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t \frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}} e^{-t}}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du < C_1 e^{-t}, \tag{4.10}$$

$$I_2 = t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{0} e^{-t \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2} z} dz = t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} x + \frac{1-\alpha}{2} x} dx \leqslant$$

$$\leqslant t^{\frac{1-\alpha}{2}} e^{-t} \int_0^{\infty} e^{-t \frac{x^2}{2} + \frac{1-\alpha}{2} x} dx = \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}} e^{-t}}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + \frac{1-\alpha}{2\sqrt{t}} u} du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}} e^{-t}}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + \frac{1-\alpha}{2} u} du < C_2 e^{-t}. \tag{4.11}$$

Из (4.10) и (4.11) следует, что

$$\Phi(\nu x_n) < Ce^{-\nu x_n} \text{ при } \nu x_n \geqslant 1,$$

где $C$ — постоянная, не зависящая от $\nu$ и $x_n$.

Если $\nu x_n < 1$, то из (4.8) и (4.7) выводим:

$$\Phi(\nu x_n) = 1 + q(\nu x_n)^{1-\alpha} + o((\nu x_n)^{1-\alpha}),$$

где $q$ — постоянная. Следовательно, для всех $\nu x_n$

$$0 < \Phi(\nu x_n) < C' e^{-\nu x_n}. \tag{4.12}$$

При $\nu x_n \geqslant 1$ аналогичная оценка справедлива и для $|\Phi'_{x_n}(\nu x_n)|$. Действительно,

$$\Phi'_{x_n}(\nu x_n) = \frac{A}{2}\nu\left[\frac{1-\alpha}{2}(\nu x_n)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu x_n \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2}z}\,dz - \right.$$
$$\left. - (\nu x_n)^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu x_n \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2}z}\cdot \operatorname{ch} z\,dz\right].$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, так как функция

$$e^{-\nu x_n \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2}z}\cdot \operatorname{ch} z$$

непрерывна по $x_n$ и $z$ и интеграл от нее сходится равномерно при $\nu x_n \geqslant 1$. Следовательно,

$$|\Phi'_{x_n}(\nu x_n)| < \frac{A}{2}\nu\left[\frac{1-\alpha}{2}(\nu x_n)^{-\frac{1-\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu x_n \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2}z}\,dz + \right.$$
$$\left. + (\nu x_n)^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu x_n \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2}z}\cdot \operatorname{ch} z\,dz\right] = \frac{A}{2}\nu\,[I_1 + I_2].$$

Для $I_1$ справедлива оценка (4.12). Найдем оценку для $I_2$. Положив $\nu x_n = t$, мы, в силу неравенств

$$\operatorname{ch} z \leqslant \begin{cases} e^z, & z \geqslant 0, \\ e^{-z}, & z < 0, \end{cases}$$

получим:

$$I_2 = t^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} z - \frac{1-\alpha}{2}z}\cdot \operatorname{ch} z\,dz \leqslant$$
$$\leqslant t^{\frac{1-\alpha}{2}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-t \operatorname{ch} z - \frac{3-\alpha}{2}z}\,dz + \int_{0}^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} z + \frac{1+\alpha}{2}z}\,dz\right] \leqslant$$
$$\leqslant t^{\frac{1-\alpha}{2}} e^{-t}\left[\int^{0} e^{-t\frac{z^2}{2} - \frac{3-\alpha}{2}z}\,dz + \int^{\infty} e^{-t\frac{z^2}{2} + \frac{1+\alpha}{2}z}\,dz\right] = I_1 + I_2.$$

Положим $\sqrt{t}\,z = -x$ в первом интеграле и $\sqrt{t}\,z = x$ — во втором; тогда получим:

$$I_1 + I_2 = \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}} e^{-t}}{\sqrt{t}} \left[\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{3-\alpha}{2\sqrt{t}}x} dx + \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{1+\alpha}{2\sqrt{t}}x} dx\right] < Be^{-t}.$$

Таким образом, при $\nu x_n \geqslant 1$ имеем:

$$|\Phi'_{x_n}(\nu x_n)| < B_1 \nu e^{-\nu x_n}, \tag{4.13}$$

где $B_1$ не зависит от $\nu$. При $\nu x_n = t < 1$, учитывая формулы (4.7), (4.8), будем иметь:

$$\Phi'_{x_n}(\nu x_n) = \nu\,[\beta(\nu x_n)^{-\alpha} + \gamma + o(1)],$$

где $\beta$, $\gamma$ — постоянные. Следовательно, при $0 < \nu x_n < 1$

$$|\Phi'_{x_n}(\nu x_n)| < B_2 \nu (\nu x_n)^{-\alpha}, \tag{4.14}$$

где $B_2$ не зависит от $\nu$.

Аналогично, для $\Phi''_{x_n^2}(\nu x_n)$ будем иметь оценки:

$$\Phi''_{x_n^2}(\nu x_n) < \begin{cases} A_4 \nu^2 e^{-\nu x_n} & \text{при } \nu x_n \geqslant 1, \\ A_5 \nu^2 (\nu x_n)^{-1-\alpha} & \text{при } 0 < \nu x_n < 1, \end{cases} \tag{4.15}$$

где $A_4$, $A_5$ — постоянные, не зависящие от $\nu$.

Пусть

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \backsim \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} h_{m_1, \ldots, m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1}$$

— ряд Фурье функции $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Рассмотрим ряд

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} \Phi(\nu x_n). \tag{4.16}$$

Очевидно, функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ измерима. Этот ряд, а также ряды, полученные из него почленным дифференцированием дважды, на основании оценок (4.12) — (4.15), будут равномерно сходящимися при $x_n > 0$. Следовательно, ряд (4.16) является при $x_n > 0$ решением уравнения $L(u) = 0$.

Функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условиям 2), 3) § 3. Покажем, что

$$\lim_{x_n \to 0} v(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \text{ в смысле } L_2.$$

Действительно,

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n-1} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} [\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) - V(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)]^2\, dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} [1 - \Phi^2(\nu x_n)] +$$

$$+ \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=N+1}^{\infty} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} + \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1+N}^{\infty} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \Phi^2(\nu x_n). \tag{4.17}$$

Зафиксировав $\varepsilon > 0$, можно указать такое $N$, что второе слагаемое правой части (4.17), как остаток сходящегося ряда, будет меньше $\frac{\varepsilon}{4}$. Так как

$$0 < \Phi(\nu x_n) < Ce^{-\nu x_n},$$

то третье слагаемое при $\nu > N$ будет тоже меньше $\frac{\varepsilon}{4}$. Непрерывная функция $\Phi(\nu x_n) \to 1$ при $x_n \to 0$. Это значит, что при $\nu < N\sqrt{n}$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$|1 - \Phi^2(\nu x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $\nu$ одновременно, если $0 \leqslant x_n \leqslant \delta$. Следовательно,

$$\|\varphi - v\| L_2^{(n-1)} < \varepsilon \text{ при } x_n < \delta.$$

Утверждение доказано.

Докажем, что $v(x_1, \ldots, x_n) \in \widetilde{W}_2^1(\alpha)$, откуда, в силу единственности решения краевой задачи, будет следовать, что

$$v(x_1, \ldots, x_n) \equiv u(x_1, \ldots, x_n),$$

где $u(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, решающая вариационную задачу.

Положим

$$V_N(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} \Phi(\nu x_n).$$

Тогда

$$\frac{\partial V_N}{\partial x_i} = \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} m_i h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{i-1} x_{i-1} \cos m_i x_i \sin m_{i+1} x_{i+1} \ldots$$

$$\ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} \Phi(\nu x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\frac{\partial V_N}{\partial x_n} = \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} \nu h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} \Phi'(\nu x_n).$$

Следовательно,

$$\widetilde{D}_\alpha(v_N) = \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial v_N}{\partial x_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_N}{\partial x_n} \right)^2 \right] x_n^\alpha \, d\Omega =$$

$$= (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} \nu^2 h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_0^{\infty} [\Phi^2(\nu x_n) + \Phi'^2(\nu x_n)] \, x_n^\alpha \, dx_n =$$

$$= (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_0^{\infty} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)] \, t^\alpha dt.$$

Но

$$\int_0^\infty [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt \geqslant \int_0^\infty \Phi^2(t)\, t^\alpha dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int_0^\infty \left[t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t\,\mathrm{ch}\, z - \frac{1-\alpha}{2} z} dz\right]^2 t^\alpha dt \geqslant \frac{A}{2}\int_0^\infty \left[t^{\frac{1-\alpha}{2}} \int_0^1 e^{-t\,\mathrm{ch}\, z - \frac{1-\alpha}{2} z} dz\right]^2 t^\alpha dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{A}{2}\int_0^\infty e^{-(1-\alpha)}\cdot e^{-2t\,\mathrm{ch}\,1}\cdot t\,dt \geqslant \frac{A\cdot e^{-(1-\alpha)}}{2}\int_0^\infty e^{-4t}\cdot t\cdot dt =$$

$$= \frac{Ae^{-(1-\alpha)}}{32} = A_1 > 0. \tag{4.18}$$

С другой стороны, учитывая оценки (4.12) — (4.14), имеем:

$$\int_0^\infty [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt = \int_0^\infty \Phi^2(t)\, t^\alpha dt + \int_0^\infty \Phi'^2(t)\, t^\alpha dt <$$

$$< C\int_0^\infty e^{-2t} t^\alpha dt + B_2 \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} + B_1 \int_1^\infty e^{-2t} t^\alpha dt < A_2 < \infty. \tag{4.19}$$

Из (4.18) и (4.19) следует, что

$$(\pi)^{n-1} A_1 \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{N} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1\ldots m_{n-1}} < \widetilde{D}_\alpha(v_N) <$$

$$< (\pi)^{n-1} A_2 \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{N} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1\ldots m_{n-1}}, \tag{4.20}$$

где $A_1$ и $A_2$ не зависят от $N$. Таким образом, $\widetilde{D}_\alpha(v_N)$ конечно. Пусть

$$z_N(x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_n) - v_N(x_1, \ldots, x_n),$$

где $u(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, решающая вариационную задачу для функционала $\underset{\psi \in W_2^1(\alpha)(f)}{\widetilde{D}_\alpha(\psi)}$. Тогда, очевидно, $\widetilde{D}_\alpha(z_N)$ конечно.

Далее имеем:

$$\widetilde{D}_\alpha(u) = \widetilde{D}_\alpha(v_N + z_N) = \widetilde{D}_\alpha(v_N) + 2\widetilde{D}_\alpha(v_N, z_N) + \widetilde{D}_\alpha(z_N),$$

$$\widetilde{D}_\alpha(v_N, z_N) = \lim_{\substack{h\to+0\\ R\to+\infty}} \int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\int_h^R \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_N}{\partial x_i}\frac{\partial z_N}{\partial x_i}\right] x_n^\alpha\, dx_1\ldots dx_n. \tag{4.21}$$

Так как при $h > 0$ $v_N(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывно дифференцируема, то к (4.21) можно применить формулу Грина:

$$\widetilde{D}_\alpha(v_N, z_N) = \lim_{\substack{h\to+0\\ R\to+\infty}} \left[\int_{\Gamma_h^R}\cdots\int x_n^\alpha z_N \frac{\partial v_N}{\partial \bar{n}}\, d\Gamma_h^R - \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_h^R z_N L(v_N)\, dx_1\ldots dx_n\right],$$

где $\Gamma_h^R$ — граница области $0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $h \leqslant x_n \leqslant R$, а $\bar{n}$ — направление внутренней нормали к $\Gamma_h^R$. Учитывая условия 3) § 3 и то, что $L(v_N) = 0$, получаем:

$$\widetilde{D}_\alpha(u_N, v_N) = \lim_{h\to+0} \underset{x_n=h}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha z_N \frac{\partial v_N}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_{n-1} -$$

$$- \lim_{R\to+\infty} \underset{x_n=R}{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha z_N \frac{\partial v_N}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

При достаточно малом $x_n$, учитывая оценку (4.14), получим:

$$\frac{\partial v_N}{\partial x_n} = \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} [B_2 \nu^{1-\alpha} x_n^{-\alpha} + o(x_n^{-\alpha})].$$

Следовательно,

$$\lim_{h\to+0} \underset{x_n=h}{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha z_N \frac{\partial v_N}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_{n-1} =$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} B_2 \nu^{1-\alpha} h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} z_N \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} dx_1 \ldots dx_{n-1} = 0,$$

так как все коэффициенты Фурье функции $\varphi_N(x_1, \ldots, x_n) = z_N(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ при $m_1, \ldots, m_{n-1} = 1, 2, \ldots, N$ равны нулю.

Далее,

$$\left| \underset{x_n=R}{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha z_N \frac{\partial v_N}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_{n-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \Big( \underset{x_n=R}{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha z_N^2 dx_1 \ldots dx_{n-1} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \underset{x_n=R}{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha \left(\frac{\partial v_N}{\partial x_n}\right)^2 dx_1 \ldots dx_{n-1} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Почти для всех $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ имеет смысл и справедливо неравенство

$$z_N^2(x_1, \ldots, x_{n-1}, R) \leqslant 2 | z_N(x_1, \ldots, x_{n-1}, R) - z_N(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) |^2 +$$

$$+ 2 | z_N(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) |^2 = 2 \left( \int_0^R \frac{\partial z_N}{\partial x_n} dx_n \right)^2 + 2 | z_N(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) |^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} \int_0^R \left( \frac{\partial z_N}{\partial x_n} \right)^2 x_n^\alpha dx_n + 2 | z_N(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) |^2.$$

Умножим это неравенство на $x_n^\alpha\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$ и проинтегрируем по $x_1, \ldots, x_{n-1}$ от 0 до $2\pi$. Тогда получим:

$$\underset{x_n=R}{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha z_N^2\, dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{R}{1-\alpha} \widetilde{D}_\alpha (z_N) + 2R^\alpha \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} z_N^2 (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \ldots dx_{n-1} < CR,$$

где $C$ не зависит от $R$. Применяя оценку (4.13), находим:

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} x_n^\alpha \left(\frac{\partial v_N}{\partial x_n}\right)^2 dx_1 \ldots dx_{n-1} = R^\alpha (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 \{[\Phi(\nu x_n)]_{x_n}'\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant CR^\alpha e^{-2R} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} \nu^2 h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 < C_2 R^\alpha e^{-2R}.$$

Окончательно получаем:

$$\left| \underset{x_n=R}{\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi}} x_n^\alpha z_N \frac{\partial v_N}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_{n-1} \right| < L_1 R^{\frac{1}{2}} R^{\frac{\alpha}{2}} e^{-R} \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Следовательно,

$$\widetilde{D}_\alpha (v_N, z_N) = 0$$

и, значит,

$$\widetilde{D}_\alpha (v_N) = \widetilde{D}_\alpha (u) - \widetilde{D}_\alpha (z_N) < \widetilde{D}_\alpha (u).$$

Отсюда, на основании (4.20), следует, что ряд

$$\sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2$$

сходится. Покажем, что существует и равномерно относительно $R$ и $h > 0$ ограничен интеграл $(R > h)$

$$I(h, R;\ v) = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_h^R \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right] x_n^\alpha\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Из оценок (4.12), (4.13) следует, что ряд

$$\sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} \Phi(\nu x_n)$$

сходится равномерно и абсолютно; продифференцированный ряд будет сходиться равномерно и абсолютно при $x_n > \delta$, где $\delta$ — любое положительное число. Следовательно, справедлива формула:

$$I(h, R;\ v) = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_h^R \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right] x_n^\alpha\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left\{\sum_{i=1}^{n-1} \left[\sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} m_i h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \times\right.\right.$$

$$\left.\times \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{i-1} x_{i-1} \cdot \cos m_i x_i \cdot \sin m_{i+1} x_{i+1} \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} \Phi(\nu x_n)\right]^2 +$$

$$\left.+ \left[\sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} \cdot \Phi'(\nu x_n)\right]^2\right\} x_n^\alpha\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^2 h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 \int_h^R [\Phi^2(\nu x_n) + \Phi'^2(\nu x_n)]\, x_n^\alpha\, dx_n =$$

$$= (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 \int_{\nu h}^{\nu R} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt \leqslant$$

$$\leqslant (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 \int_0^{\infty} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt.$$

На основании оценки (4.19) имеем:

$$I(h, R;\ v) < A \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 < B.$$

Следовательно, $\widetilde{D}_\alpha(v)$ существует.

Далее, имеем:

$$|\widetilde{D}_\alpha(v) - \widetilde{D}_\alpha(v_N)| \leqslant |I(h, R; v) - I(h, R; v_N)| + \widetilde{D}_{\alpha_{x_n \leqslant h}}(v) +$$

$$+ \widetilde{D}_{\alpha_{x_n \leqslant h}}(v_N) + \widetilde{D}_{\alpha_{x_n \geqslant R}}(v) + \widetilde{D}_{\alpha_{x_n \geqslant h}}(v_N),$$

где

$$\widetilde{D}_{\alpha_{x_n \leqslant h}}(f) = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_0^h \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right] x_n^\alpha\, dx_1 \ldots dx_n$$

и

$$\widetilde{D}_{\alpha_{x_n \geqslant R}}(f) = \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_R^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2\right] x_n^\alpha\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $\widetilde{D}_\alpha(v)$ существует и конечно, то найдется такое $h_0 > 0$, что

$$D_{\alpha_{x_n \leqslant h}}(v) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогично, найдется $R_0 > 0$ такое, что

$$\widetilde{D}_{\alpha_{x_n \geqslant R_0}}(v) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

В силу справедливости неравенства

$$|I(h, R, v) - I(h, R, v_N)| \leqslant$$

$$\leqslant (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=N+1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 \int_0^{\infty} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt,$$

для заданного $\varepsilon > 0$ всегда найдется номер $N_0(\varepsilon)$ такой, что $|I(h, R; v) -$

$-I(h, R, v_N)|$, как остаток сходящегося ряда для всех $N > N_0(\varepsilon)$, будет меньше $\frac{\varepsilon}{8}$. Далее, имеем:

$$D_{\alpha_{x_n \geqslant R}}(v_N) = (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_{\nu R}^{\infty} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt.$$

На основании оценок (4.12), (4.13), получаем:

$$\widetilde{D}_{\alpha_{x_n \geqslant R}}(v_N) < Ce^{-2RN} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant Ce^{-2RN} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} < Be^{-2RN},$$

где $B$ не зависит от $R$ и $N$. Следовательно, найдется такое $R_1 > 0$, что для всех $R > R_1$

$$\widetilde{D}_{\alpha_{x_n \geqslant R}}(v_N) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Мы имеем:

$$\widetilde{D}_{\alpha_{x_n \leqslant h}}(v_N) = (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_0^{\nu h} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt =$$

$$= (\pi)^{n-1} \Bigg[ \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N_0(\varepsilon)} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_0^{\nu h} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt +$$

$$+ \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=N_0(\varepsilon)+1}^{N} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_0^{\nu h} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt \Bigg].$$

Но

$$(\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=N_0(\varepsilon)+1}^{N} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_0^{\nu h} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt \leqslant$$

$$\leqslant (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=N_0(\varepsilon)+1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_0^{\infty} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Оценим сумму

$$S = (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N_0(\varepsilon)} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_0^{\nu h} [\Phi^2(t) + \Phi'^2(t)]\, t^\alpha dt.$$

Будем считать $h$ настолько малым, чтобы для всех $\nu \leqslant N_0(\varepsilon)\sqrt{n}$ было $\nu h < 1$. Тогда из оценок (4.12), (4.13) будет следовать:

$$S \leqslant B \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N_0(\varepsilon)} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \int_0^{\nu h} \left( e^{-2t} + \frac{1}{t^{2\alpha}} \right) t^\alpha dt \leqslant$$

$$\leqslant B \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N_0(\varepsilon)} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} \left[ \frac{(\nu h)^\alpha}{2} (1 - e^{-2\nu h}) + \frac{(\nu h)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] \leqslant$$

$$\leqslant h^{1-\alpha} B_1 \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{N_0(\varepsilon)} \nu^2 h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}}.$$

Выберем $h_1$ настолько малым, чтобы для всех $h < h_1$

$$B_1 h^{1-\alpha} \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{N_0(\varepsilon)} \nu^2 h^2_{m_1\ldots m_{n-1}} < \frac{\varepsilon}{4} .$$

Тогда, если взять $R > R_0, R_1$, $h < \min(h_1, h_0)$, $N > N_0(\varepsilon)$, то будут справедливы все оценки. Следовательно,

$$|\widetilde{D}_\alpha(v) - \widetilde{D}_\alpha(v_N)| < \varepsilon.$$

Мы доказали, что

$$\widetilde{D}_\alpha(v) = \lim_{N\to\infty} \widetilde{D}_\alpha(v_N) \leqslant \widetilde{D}_\alpha(u).$$

Вследствие единственности решения краевой задачи в классе $\widetilde{W}_2^1(\alpha)(f)$, $u(x_1, \ldots, x_n) = v(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = v(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

в смысле $L_2$. Положим

$$\widetilde{I}_{hx_i}(\varphi) = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \frac{[\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \ldots x_{n-1})]^2}{h^{2-\alpha}}\, dx dh \tag{4.22}$$

$$(dx = dx_1 \ldots dx_{n-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Но

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \backsim$$

$$\backsim 2 \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{\infty} h_{m_1\ldots m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{i-1} x_{i-1} \cos m_i \left(x_i + \frac{h}{2}\right) \times$$

$$\times \sin m_{i+1} x_{i+1} \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} \cdot \sin \frac{m_i h}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Из оценки (4.20), так как $\widetilde{D}_\alpha(v)$ конечно, вытекает, что

$$\lambda_1 \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1\ldots m_{n-1}} \leqslant D_\alpha(v_N) \leqslant \lambda_2 \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1\ldots m_{n-1}}, \tag{4.23}$$

где $\lambda_i$ — некоторые постоянные.

Далее,

$$\widetilde{I}_{hx_i}(\varphi) = 2(\pi)^{n-1} \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{\infty} h^2_{m_1\ldots m_{n-1}} \int_0^\delta \frac{\sin^2 \frac{m_i h}{2}}{h^{2-\alpha}}\, dh =$$

$$= 2^\alpha (\pi)^{n-1} \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{\infty} m_i^{1-\alpha} h^2_{m_1\ldots m_{n-1}} \int_0^{\frac{m_i\delta}{2}} \frac{\sin^2 t}{t^{2-\alpha}}.$$

Но

$$\lambda < \int_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{\sin^2 t}{t^{2-\alpha}}\, dt \leqslant \int_0^{\frac{m_i\delta}{2}} \frac{\sin^2 t}{t^{2-\alpha}}\, dt < \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2-\alpha}}\, dt < \mu.$$

Таким образом,

$$\lambda \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{\infty} m_i^{1-\alpha} h^2_{m_1\ldots m_{n-1}} < I_{hx_i}(\varphi) < \mu \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{\infty} m_i^{1-\alpha} h^2_{m_1\ldots m_{n-1}}, \quad (4.24)$$

где $\lambda, \mu$ — постоянные.

Определение. Будем говорить, что $2\pi$-периодическая функция $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ принадлежит классу $\widetilde{A}_0^\alpha$, если конечен интеграл

$$\widetilde{I}_{hx_i} = \int_0^{\delta}\int_0^{2\pi} \cdots$$

$$\cdots\int_0^{2\pi} \frac{|\psi(x_1,\ldots,x_{i-1}, x_i+h, x_{i+1},\ldots,x_{n-1}) - \psi(x_1,\ldots,x_{i-1}, x_i, x_{i+1},\ldots,x_{n-1})|^2}{h^{2-\alpha}}\, dxdh$$

$$(dx = dx_1\ldots dx_{n-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где $\delta$ — некоторое малое положительное число.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям 1)—3) § 3. Тогда, очевидно,

$$\widetilde{D}_\alpha(v) \leqslant \widetilde{D}_\alpha(f) < \infty,$$

где $v(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, решающая вариационную задачу для функционала $\widetilde{D}_\alpha(\psi)$. Если
$\psi \in W_2^1(\alpha)(f)$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = v(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$$

в смысле $L_2$, то [см. оценку (4.24)]

$$\widetilde{I}_{hx_i}(\varphi) < \mu \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{\infty} m_i^{1-\alpha} h^2_{m_1\ldots m_{n-1}} <$$

$$< \mu \sum_{m_1,\ldots,m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha}_i h^2_{m_1\ldots m_{n-1}} < c\widetilde{D}_\alpha(v) < \infty.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4.1. *Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условиям 1)—3) § 3, то $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ (в смысле $L_2$) принадлежит классу $\widetilde{A}_0^\alpha$.*

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть задана функция $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, $2\pi$-периодическая и нечетная по каждому $x_i$ и удовлетворяющая условиям*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, \pi, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

*для которой $\widetilde{I}_{hx_i}(\varphi)$ конечны $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. В таком случае в полупространстве $x_n \geqslant 0$ можно построить функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую условиям:*

1) $\lim\limits_{x_n \to +0} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *в смысле* $L_2$;

2) $\widetilde{D}_\alpha(f)$ *конечно.*

Доказательство. Разложим функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ в ряд Фурье:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \backsim \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 x_1 \ldots \sin m_{n-1} x_{n-1} e^{-\nu x_n}.$$

Очевидно, условие 1) выполняется (это доказывается аналогично доказательству формулы (4.17)). Таким образом,

$$\widetilde{D}_\alpha(f) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ R \to \infty}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \int_h^R \left[ \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right] x_n^\alpha \, dx_1 \ldots dx_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant (\pi)^{n-1} \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^2 h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 \int_0^{\infty} e^{-\nu x_n} x_n^\alpha \, dx_n < B \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2.$$

Но

$$\nu^{1-\alpha} = \left( \sum_{i=1}^{n-1} m_i^2 \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} < \sum_{i=1}^{n-1} m_i^{1-\alpha} \tag{4.25}$$

[см. ([3]), стр. 252, неравенство (1.9′), которое остается справедливым и в случае $0 < p \leqslant p' < \infty$]. Следовательно,

$$\widetilde{D}_\alpha(f) < B \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 < B \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} m_i^{1-\alpha} \right) h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} m_i^{1-\alpha} h_{m_1 \ldots m_{n-1}}^2 \right) = \sum_{i=1}^{n-1} I_{hx_i}(\varphi) < \infty,$$

что и требовалось доказать.

## § 5. Случай произвольной ограниченной области

Пусть $\Omega$ — произвольная область точек $(x_1, \ldots, x_n)$ с границей $\Gamma$, удовлетворяющей условиям, определенным в § 1. На $\Omega$ определена функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которой

$$D_\alpha(f) \doteq \int \cdots \int_\Omega \left[ \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right] \sigma^\alpha \, d\Omega < c < \infty, \tag{5.1}$$

где $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ — определенная в § 1 функция. Рассмотрим некоторый кусок $V_i''$ области $\Omega - \Omega_\delta$ ($\delta$ — достаточно малое положительное число), в котором можно ввести местные координаты (1.1) с условиями (1.2) (см. § 1). Тогда преобразование

$$\begin{aligned} u_i &= u_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ h &= h(x, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $h$ — расстояние точки $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ до $\Gamma$ по нормали, переводит кусок $V_i''$ в некоторую цилиндрическую область

$$0 \leqslant h \leqslant \delta, \quad (u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_i.$$

При этом можно считать, что

$$0 < a_i < u_i < b_i < \pi, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

чего всегда можно достигнуть некоторым линейным преобразованием переменных $u_i$. Тогда из (5.1) будет следовать, что

$$\int\limits_{S_i}\cdots\int\int\limits_0^\delta\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial f^*}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial f^*}{\partial h}\right)^2\right]h^\alpha\, du_1\ldots du_{n-1}dh < \infty \tag{5.3}$$

[см. (1.6)]. Зададим функцию

$$F(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) = \begin{cases} f^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) & \text{при} \quad 0 \leqslant h \leqslant \delta, \\ f^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, -h) & \text{при} \quad -\delta \leqslant h \leqslant 0, \end{cases}$$

определенную на области

$$\lambda^{(n)}\{(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_i, -\delta \leqslant h \leqslant \delta\}.$$

Для нее интеграл (5.3) по области конечен. Функцию $F(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)$ можно продолжить с области $\lambda_\varepsilon^{(n)}$($\varepsilon > 0$ и достаточно мало, а $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ — по-прежнему, совокупность точек области $\lambda^{(n)}$, расстояние которых до границы области $\lambda^{(n)}$ не меньше $\varepsilon$) на область $G\{0 \leqslant u_i \leqslant 2\pi, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, -\infty < h < \infty\}$ так, что интеграл (5.3) для продолженной функции $\widetilde{F}(x_1, \ldots, x_{n-1}, h)$ будет конечным по области $G$ и будут выполняться равенства:

$$\widetilde{F}(u_1, \ldots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_{n-1}, h) = \widetilde{F}(u_1, \ldots, u_{i-1}, \pi, u_{i+1}, \ldots, u_{n-1}, h) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

(Доказательство аналогично проведенному в работе ([2]), стр. 272.)

Распространим $\widetilde{F}(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)$ на все пространство периодически по $u_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) с периодом $2\pi$. Мы получим некоторую новую периодическую функцию $\overline{F}(u_1, \ldots, u_{n-1}, h)$, причем, по доказанному в § 4,

$$\overline{F}(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0) = \varphi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \widetilde{A}_\alpha^0,$$

где равенство по-прежнему понимается в смысле $L_2$.

Тогда тем более будет конечен интеграл

$$J_{hu_j}(\varphi) = \int\limits_0^\delta \int\limits_{S_{i_{\varepsilon_1}}} \frac{|\varphi^*(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_j + h, u_{j+1}, \ldots, u_{n+1}) - \varphi^*(u_1, \ldots, u_{n-1})|^2}{h^{2-\alpha}}\, du\, dh,$$

где $du = du_1 \ldots du_{n-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, а $\delta$ и $\varepsilon_1$ — малые положительные числа такие, что точка $(u_1, \ldots, u_{j-1}, u_j + h, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1}) \in S_\varepsilon$ для всех $h \leqslant \delta$, $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_{i_{\varepsilon_1}}$. Но на $S_{i_\varepsilon}$

$$\varphi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}) = \varphi(u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

Согласно условиям, наложенным на $\Gamma$ в § 1, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ многообразия $\{S_{i_\varepsilon}\}$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) также образуют покрытие $\Gamma$. Значит, согласно определению, сделанному во введении, $\varphi \in A_0^\alpha(\Gamma)$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть на $\Omega$ задана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащая классу $W_2^1(\alpha)$, и пусть граница $\Gamma$ области $\Omega$ удовлетворяет условиям, сформулированным в § 1. Тогда функция $\varphi = f|_\Gamma$, понимаемая в смысле равенства* (1.8), *принадлежит классу $A_0^\alpha(\Gamma)$.*

ТЕОРЕМА 5.2 (обратная к теореме (5.1)). *Пусть на границе $\Gamma$ области $\Omega$, удовлетворяющей условиям § 1, задана функция $\varphi$ класса $A_0^\alpha(\Gamma)$. Тогда на $\Omega$ можно построить функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую условиям:*

1) $f|_\Gamma = \varphi$ *в смысле равенства* (1.8),

2) $f \in W_2^1(\alpha)$.

Доказательство. Так же, как в работе (²), нам достаточно доказать возможность такого продолжения для каждого $S_i$ в некоторую окрестность $V_i''$. Введем в $V_i''$ координаты (1.1), где

$$0 \leqslant h \leqslant \delta, \quad 0 < a_i < u_i < b_i < \pi, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ на } S_i.$$

Применяя методы продолжения [см. (²), стр. 272], рассмотрим в подпространстве $-\infty < u_i < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, функцию $\varphi^*(u_1, \ldots, u_{n-1})$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\varphi^*(u_1, \ldots, u_{n-1})$ — нечетная и периодическая периода $2\pi$ по каждому $u_i$ функция.

2) $\varphi^*(u_1, \ldots, u_{n-1})$ есть функция, принадлежащая к классу $\widetilde{A}_0^\alpha$ периодических функций.

3) $\varphi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}) \equiv \varphi(u_1, \ldots, u_{n-1})$, если $(u_1, \ldots, u_{n-1}) \in S_{i_\varepsilon}$.

4) $\varphi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}, 0, u_{i+1}, \ldots, u_{n-1}) = \varphi^*(u_1, \ldots, u_{i-1}, \pi, u_{i+1}, \ldots, u_{n-1}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Разложим $\varphi^*(u_1, \ldots, u_{n-1})$ в ряд Фурье. Пусть

$$\varphi^*(u_1, \ldots, u_{n-1}) \backsim \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 u_1 \ldots \sin m_{n-1} u_{n-1}.$$

Рассмотрим функцию определенную для $h \geqslant 0$ формулой

$$F(u_1, \ldots, u_{n-1}, h) = \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} h_{m_1 \ldots m_{n-1}} \sin m_1 u_1 \ldots \sin m_{n-1} u_{n-1} e^{-\nu h}. \tag{5.4}$$

Тогда справедливо равенство

$$F|_{h=0} = \varphi_\varepsilon^*(u_1, \ldots, u_{n-1}) \text{ в смысле } L_2.$$

(Это равенство можно доказать аналогично тому, как доказывалось (4.17).) В силу свойств функции $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ и свойств преобразований (1.1), будем иметь:

$$D_{\alpha V_i''}(F^*) = \int \ldots \int_{V_i''} \left[ \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial F^*}{\partial x_i} \right)^2 \right] \sigma^\alpha(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_1 \int\limits_0^{2\pi} \cdots \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{\partial F}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial h} \right)^2 \right] h^\alpha \, du_1 \ldots du_{n-1} \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \sum_{m_1, \ldots, m_{n-1}=1}^{\infty} \nu^{1-\alpha} h^2_{m_1 \ldots m_{n-1}} < A_2 \sum_{i=1}^{n-1} J_{hx_i}(\varphi^*) < \infty^*,$$

где $\widetilde{C}_1$, $A_1$, $A_2$ — некоторые постоянные, а

$$F^*(x_1, \ldots, x_n) = F[u_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n), \; h(x_1, \ldots, x_n)].$$

Таким образом, в области $V_i'$ построена функция $F^*(x_1, \ldots, x_n)$, для которой

а) $D_{\alpha V_i''}(F^*) < \infty$,

б) $F^*|_{S_{i_\varepsilon}} = \varphi$.

Следовательно [см. ([3]), теорема 6.2], можно построить функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на области $\Omega$, удовлетворяющую условиям 1), 2).

Теорема доказана.

Из теорем 5.1 и 5.2 следует

ТЕОРЕМА 5.3 *Если на достаточно гладкой границе* $\Gamma$ *области* $\Omega$, *удовлетворяющей условиям гладкости, сформулированным в* § 1, *задана функция* $\varphi \in A_0^\alpha(\Gamma)$, *то в классе* $W_2^1(\alpha)$ *существует, и притом единственное, решение* $u(x_1, \ldots, x_n)$ *дифференциального уравнения* (2.14), *удовлетворяющее в среднем граничному условию* $u|_\Gamma = \varphi$.

Поступило
5.VI. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

[2] Никольский С. М., Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Матем. сборн., 33 (75) : 2(1953), 261—326.

[3] Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVIII (1951), 244—278.

[4] Никольский С. М., К задаче Дирихле для круга и полупространства, Матем. сборн., 35(75) : 2(1954), 247—265.

[5] Кудрявцев Л. Д., О решении вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе, Доклады Ак. наук СССР, 108, № 1 (1956), 16—19.

[6] Вишик М. И., Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений, Матем. сборн., 25(67) : 2 (1949), 189—234.

[7] Ульянов П. Л., О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов, Успехи матем. наук, 8, № 6(5) (1953), 133—141.

[8] Бабич В. М., Слободецкий Л. Н., Об ограниченности интеграла Дирихле, Доклады Ак. наук СССР, 106, № 4 (1956), 604—606.

[9] Никольский С. М., Об одной вариационной задаче Гильберта, Доклады Ак. наук СССР, 4 (1957), 573—575.

[10] Тихонов А. И., Самарский А. А., Уравнения математической физики, М., 1953.

* Эта формула может быть доказана аналогично тому, как доказывалась формула (4.25).

[11] Кудрявцев Л. Д., Продолжение функций и вложение классов функций. Применение к решению вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области (докторская диссертация), Матем. институт Ак. наук СССР, 1956.
[12] Келдыш М. В., О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области, Доклады Ак. наук СССР, 77 (1951), 181—183.
[13] Вишик М. И., Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, Матем. сборн., 35 (77): 3 (1954), 513—568.
[14] Захаров В. К., Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа четвертого порядка, вырождающихся на границе области, Доклады Ак. наук СССР, 114 (1957), 694—697.
[15] Кондрашев В. И., К теории краевых проблем и задач о собственных значениях в областях с вырожденным контуром для вариационных и дифференциальных уравнений (докторская диссертация), Матем. институт Ак. наук СССР, 1948.
[16] Вашарин А. А., Граничные свойства функций, имеющих конечным интеграл Дирихле с весом, Доклады Ак. наук СССР, 117, № 5 (1957), 742—744.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 455—488

И. С. САРГСЯН

# ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА*

(*Представлено академиком* **И. Н. Векуа**)

В работе изучаются асимптотические оценки производных спектральной функции оператора Шредингера, заданного в конечной или бесконечной части двумерного пространства. Полученные асимптотические оценки для производных спектральной функции применяются к изучению вопросов суммируемости и сходимости дифференцированных разложений по собственным функциям оператора Шредингера. Основными вспомогательными средствами являются метод и тауберовы теоремы для интегралов Фурье Б. М. Левитана.

## Введение

Обозначим через $q(x, y)$ действительную непрерывную функцию, определенную в некоторой замкнутой конечной части $\mathcal{D}$ двумерного пространства $\mathcal{E}_2$. Через $\Gamma$ обозначим границу области $\mathcal{D}$.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \tag{0.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0 \text{ **}. \tag{0.2}$$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ собственные значения задачи (0.1) — (0.2), а через $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y), \ldots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции задачи (0.1) — (0.2). Так как, по предположению, функция $q(x, y)$ непрерывна в $\mathcal{D} + \Gamma$, то, значит, она ограничена, и поэтому, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что спектр задачи (0.1) — (0.2) неотрицателен. В самом деле, при таком предположении относительно функции $q(x, y)$, как известно, отрицательный спектр задачи (0.1) — (0.2) снизу ограничен и поэтому можно подобрать число $\eta$ так, чтобы спектр задачи

$$\Delta u + \{(\lambda + \eta) - q(x, y)\} u = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0$$

оказался неотрицательным.

---

* Основные результаты работы без доказательств были опубликованы в заметках ([23]), ([24]).

** Вместо граничного условия (0.2) можно брать любое самосопряженное граничное условие.

Итак, пусть $\lambda_n > 0$. Положим $\mu_n^2 = \lambda_n$ и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} &\theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \varphi_n(x, y)\varphi_n(u, v), && \mu > 0, \\ &\theta(x, y, u, v; \mu) = 0, && \mu = 0, \\ &\theta(x, y, u, v; \mu) = -\theta(x, y, u, v; -\mu), && \mu < 0. \end{aligned}$$

Функция $\theta(x, y, u, v; \mu)$ называется *спектральной функцией* задачи (0.1)—(0.2).

Настоящая работа посвящена изучению асимптотических оценок производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v, \mu)$ при больших $\mu$ и изучению вопросов суммируемости и сходимости дифференцированных разложений по собственным функциям оператора Шредингера, заданного в конечной или бесконечной части двумерного пространства $\mathcal{E}_2$. Аналогичный вопрос для уравнения (0.1) в одномерном случае исследован автором в работах ([15])—([18]) и в совместных работах Б. М. Левитана и автора ([6]), ([7]); трехмерный случай уравнения (0.1) исследован Б. М. Левитаном в работе ([2]). Локальные оценки для производных собственных функций в трехмерном случае получены также в совместной работе Б. М. Левитана и автора ([8]). Б. М. Левитаном исследован аналогичный вопрос и для оператора Лапласа в пространствах произвольного измерения [см. ([3])]. Отдельные результаты о дифференцировании спектральной функции оператора Лапласа имеются в работе Плейеля ([13]), который пользовался методом Карлемана [см. ([14])]. Для суммирования дифференцированных разложений по собственным функциям основной результат во всех перечисленных случаях один и тот же и заключается в том, что каждое дифференцирование повышает порядок суммирования по М. Риссу на единицу. Кроме того, при повышении размерности пространства на единицу порядок суммирования соответствующих производных разложения по собственным функциям повышается на половину. Так, например, если первая производная разложения по собственным функциям в одномерном случае суммируется к первой производной разлагаемой функции средними по М. Риссу первого порядка [см. ([17])], то в трехмерном случае приходится суммировать средними второго порядка [см. ([2])], в двумерном же случае, как будет показано ниже (см. теорему 6.1), порядок суммирования оказывается равным $\frac{3}{2}$.

Сформулируем основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 0.1. *Обозначим через $\eta$ произвольное положительное число и через $\mathcal{D}_\eta$ — множество точек области $\mathcal{D}$, расстояние которых до границы $\Gamma$ области $\mathcal{D}$ не меньше, чем $\eta$. Если функция $q(x, y)$ в области $\mathcal{D}$ имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha + \beta - 1$ ($\alpha$ и $\beta$ — любые целые положительные числа) включительно, то при $(x, y), (u, v) \in \mathcal{D}_\eta$ существует константа $C = C_\eta$ такая, что при $\mu \to \infty$ имеет место асимптотическая оценка:*

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{D^\alpha_{xy} D^\beta_{uv} \theta(x, y, u, v; \mu)\} =$$

$$= \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} |D^\alpha_{xy}\varphi_n(x, y)| \cdot |D^\beta_{uv}\varphi_n(u, v)| < C_\eta \mu^{\alpha+\beta+1}, \qquad (0.3)$$

*где через $D^{\alpha}_{xy}$ обозначен следующий оператор дифференцирования:*

$$D^{\alpha}_{xy} \equiv \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha_1}\, \partial y^{\alpha_2}} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha).$$

*Оценка* (0.3) *имеет место равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри $\mathcal{D}$.*

Пусть $f(x, y) \subset L_2(\mathcal{D})$. Введем обозначения ($s \geqslant 0$):

$$S_s(x, y; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n \varphi_n(x, y),$$

$$S_s^*(x, y; \mu) = \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d_\nu S^*(x, y, \nu),$$

где

$$c_n = \iint_{(\mathcal{D})} f(x, y)\, \varphi_n(x, y)\, dx\, dy, \quad S^*(x, y; \nu) = \iint_{(\mathcal{D})} f(u, v)\, \theta^*(x, y, u, v; \nu)\, du\, dv,$$

причем $\theta^*(x, y, u, v; \nu)$ — спектральная функция уравнения (1) для всего пространства $\mathcal{E}_2$ при $q(x, y) \equiv 0$ и определяется формулой [см. ([4]), стр. 296]:

$$\theta^*(x, y, u, v; \nu) = \frac{\nu}{2\pi} \cdot \frac{J_1(\nu r)}{r},$$

где $r$ — расстояние между точками $(x, y)$ и $(u, v)$, а $J_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка $p$.

Функция $S_s(x, y; \mu)$ есть среднее по М. Риссу порядка $s$ разложения по собственным функциям оператора Шредингера, а $S_s^*(x, y; \mu)$ — среднее по М. Риссу порядка $s$ разложения в обычный двукратный интеграл Фурь, функции, равной $f(x, y)$ для $(x, y) \in \overline{\mathcal{D}}$ и равной нулю для остальных $(x, y)$.

Используя оценку (0.3), можно установить следующую теорему равносуммируемости дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Шредингера и разложения в двукратный интеграл Фурье.

ТЕОРЕМА 0.2. *Пусть функция $f(x, y) \subset L_2(\mathcal{D})$. Если функция $q(x, y)$ в области $\mathcal{D}$ имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha$ включительно, то равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри $\mathcal{D}$, имеет место равенство:*

$$\lim_{\mu \to \infty} \{D^{\alpha}_{xy} S_{\alpha + \frac{1}{2}}(x, y; \mu) - D^{\alpha}_{xy} S^*_{\alpha + \frac{1}{2}}(x, y; \mu)\} = 0,$$

*т. е. разность между средними по Риссу порядка $\alpha + \frac{1}{2}$ производных порядка $\alpha$ разложения функции $f(x, y)$ по собственным функциям оператора Шредингера и разложения в обычный двукратный интеграл Фурье функции, равной $f(x, y)$ для $(x, y) \in \overline{\mathcal{D}}$ и равной нулю для остальных $(x, y)$ стремится к нулю равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри $\mathcal{D}$.*

В работе доказана также теорема о суммировании дифференцированного разложения по собственным функциям к соответствующим производным разлагаемой функции.

ТЕОРЕМА 0.3. *Пусть функция* $f(x, y) \subset L_2(\mathcal{D})$ *и в окрестности точки* $(x_0, y_0)$ *имеет непрерывные частные производные до порядка* $\alpha$ *включительно, и пусть функция* $q(x, y)$ *в окрестности точки* $(x_0, y_0)$ *имеет ограниченные частные производные порядка* $\alpha$. *Тогда*

$$\lim_{\mu\to\infty} D_{xy}^{\alpha} S_{\alpha+\frac{1}{2}}(x, y; \mu)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = D_{xy}^{\alpha} f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \tag{0.4}$$

*т. е. производная порядка* $\alpha$ *разложения функции* $f(x, y)$ *по собственным функциям оператора Шредингера в точке* $(x_0, y_0)$ *суммируема по методу Рисса порядка* $\alpha + \frac{1}{2}$ *к значению* $D_{xy}^{\alpha} f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$.

*Если условия дифференцируемости, наложенные на* $f(x, y)$ *и* $q(x, y)$, *выполнены в некоторой замкнутой области* $d$, *целиком содержащейся внутри* $\mathcal{D}$, *то равенство* (0.4) *имеет место равномерно в* $d$.

Далее, если разлагаемая функция $f(x, y)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то имеет место и сходимость дифференцированного разложения по собственным функциям к соответствующей производной разлагаемой функции $f(x, y)$. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 0.4. *Пусть функция* $f(x, y)$ *в области* $\mathcal{D}$ *имеет вторые частные производные, причем* $\Delta f - q(x, y) f \subset L_2(\mathcal{D})$, *и пусть* $f(x, y)$ *удовлетворяет условию* (0.2). *Предположим, что в окрестности внутренней (по отношению к области* $\mathcal{D}$*) точки* $(x_0, y_0)$ *функция* $q(x, y)$ *имеет ограниченные частные производные первого порядка, а функция* $f(x, y)$ — *ограниченные частные производные второго порядка. Тогда*

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\partial}{\partial x} S_0(x, y; \mu)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \lim_{\mu\to\infty} \sum_{\mu_n<\mu} c_n \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \tag{0.5}$$

*т. е. первая производная разложения функции* $f(x, y)$ *по собственным функциям оператора Шредингера в точке* $(x_0, y_0)$ *сходится к первой производной функции* $f(x, y)$ *в точке* $(x_0, y_0)$.

*Если условия дифференцируемости, наложенные на* $f(x, y)$ *и* $q(x, y)$, *выполнены в некоторой замкнутой области* $d$, *целиком содержащейся внутри* $\mathcal{D}$, *то равенство* (0.5) *имеет место равномерно в* $d$.

В работе рассмотрен также случай бесконечной области. Для простоты изложения предполагается, что область совпадает со всем пространством $\mathcal{E}_2$. Пусть $q(x, y) \to +\infty$, когда $r \to \infty (r = \sqrt{x^2+y^2})$. Тогда собственные функции на бесконечности экспоненциально убывают и поэтому для построения ряда Фурье нет нужды предполагать, что разлагаемая функция имеет интегрируемый квадрат. В связи с этим в работе изучаются вопросы разложения и дифференцирования таких разложений по собственным функциям уравнения (0.1) функций, растущих на бесконечности, как многочлен. Аналогичный вопрос в одномерном случае изучал Титчмарш ([10]), а в трехмерном случае — Б. М. Левитан ([5]).

В заключение заметим, что на протяжении всей работы буквой $C$ мы обозначаем константу, не обязательно одну и ту же. Некоторые сокращенные обозначения в работе являются обычными и поэтому не должны вызывать затруднений у читателя.

Приношу глубокую благодарность Б. М. Левитану за постановку задачи и ряд ценных замечаний.

## § 1. Вывод одной вспомогательной формулы

При тех же предположениях относительно функции $q(x, y)$ и области $\mathcal{D}$, что и во введении, рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2, \ldots$ собственные значения, а через $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y), \ldots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции задачи (1.1) — (1.2).

Далее, при тех же предположениях относительно функции $q(x, y)$ рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\Delta u - q(x, y) u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.3}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f(x, y). \tag{1.4}$$

Если в уравнении (1.3) $q(x, y) \equiv 0$, то решение задачи (1.3) — (1.4), как известно, дается формулой [см. ([11]), стр. 158]:

$$U_0(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{r \leqslant t} \frac{f(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, d\xi\, d\eta, \tag{1.5}$$

где $r$ — расстояние точки $(\xi, \eta)$ от начала координат.

Далее, рассмотрим следующую неоднородную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = g(x, y, t), \tag{1.6}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{1.7}$$

Решение задачи (1.6) — (1.7) дается формулой [см. ([11]), стр. 159]:

$$U(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \iint\limits_{r \leqslant \tau} \frac{g(x+\xi, y+\eta, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\, d\xi\, d\eta, \tag{1.8}$$

где $r$ имеет то́ же значение, что и в формуле (1.5).

Для произвольного действительного $t$ легко убедиться, что функция

$$\Phi_n(x, y, t) = \varphi_n(x, y) \cos \mu_n t,$$

где $\varphi_n(x, y)$ — собственная функция задачи (1.1) — (1.2), является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} - \Delta \Phi_n = -q(x, y)\, \Phi_n, \tag{1.9}$$

$$\Phi_n(x, y, 0) = \varphi_n(x, y), \quad \left.\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{1.10}$$

Известно, что если функция $u(x, y, t)$ есть решение задачи (1.3)—(1.4), то функция $u'_t(x, y, t)$ является решением уравнения (1.3) с начальными условиями

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Поэтому, рассматривая в уравнении (1.9) правую часть как известную функцию и применяя формулы (1.5) и (1.8), нетрудно составить следующее интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1.9) — (1.10):

$$\varphi_n(x, y)\cos\mu_n t = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{r\leqslant t}\frac{\varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,d\xi\,d\eta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t d\tau\iint\limits_{r\leqslant\tau}\frac{q(x+\xi, y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\cos\mu_n(t-\tau)\,d\xi\,d\eta. \quad (1.11)$$

Формула (1.11) в вопросах оценки производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$ при больших $\mu$ задач (1.1) — (1.2) будет играть важную роль.

## § 2. Асимптотическая оценка производных спектральной функции в конечной области

Обозначим через $g_\varepsilon(t)$ функцию, удовлетворяющую условиям:

1) $g_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(-t)$, т. е. четна;

2) $g_\varepsilon(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$;

3) $g_\varepsilon(t)$ имеет ограниченные производные достаточно высоких порядков.

Обозначим через $\psi_\varepsilon(\mu)$ cos-преобразование Фурье функции $g_\varepsilon(t)$, т. е. положим

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int\limits_0^\varepsilon g_\varepsilon(t)\cos\mu t\,dt. \quad (2.1)$$

Интегрируя равенство (2.1) $p$ раз по частям, в силу условий 2) и 3), получим оценку ($\mu\to\infty$):

$$\psi_\varepsilon(\mu) = O(\mu^{-p}). \quad (2.2)$$

Пусть $a$ — произвольное действительное число. Положим

$$g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t)\cos at. \quad (2.3)$$

Тогда, в силу (2.1), получим:

$$\int\limits_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\cos\mu t\,dt = \frac{1}{2}\{\psi_\varepsilon(\mu+a) + \psi_\varepsilon(\mu-a)\}. \quad (2.4)$$

Помножим обе части равенства (1.11) на $g_\varepsilon(t, a)$ и проинтегрируем по $t$ от 0 до $\varepsilon$. Тогда, в силу (2.4), получим:

$$\varphi_n(x, y)\{\psi_\varepsilon(\mu_n+a) + \psi_\varepsilon(\mu_n-a)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{r\leqslant t}\frac{\varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,d\xi\,d\eta\right\}dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\left\{\int\limits_0^t\cos\mu_n(t-\tau)\,d\tau\iint\limits_{r\leqslant\tau}\frac{q(x+\xi, y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\xi\,d\eta\right\}dt. \quad (2.5)$$

Интегрируя первый интеграл правой части равенства (2.5) по частям и меняя затем порядок интегрирования в обоих интегралах, находим:

$$\varphi_n(x, y)\{\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leqslant t} \varphi_n(x+\xi, y+\eta)\left\{\int\limits_r^\varepsilon \frac{g'_\varepsilon(t, a)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\,dt\right\}d\xi\,d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} q(x+\xi, y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi, y+\eta)\left\{\int\limits_r^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\,dt\int\limits_r^t \frac{\cos\mu_n(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\,d\tau\right\}d\xi\,d\eta. \quad (2.6)$$

Положим

$$h_\varepsilon(r, a) = \int\limits_r^\varepsilon \frac{g'_\varepsilon(t, a)\,dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad (2.7)$$

$$k_\varepsilon(r, a, \mu_n) = \int\limits_r^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\left\{\int\limits_r^t \frac{\cos\mu_n(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\,d\tau\right\}dt. \quad (2.8)$$

В силу обозначений (2.7) и (2.8), равенство (2.6) примет вид:

$$\varphi_n(x, y)\{\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)\} = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} \varphi_n(x+\xi, y+\eta)\,h_\varepsilon(r, a)\,d\xi\,d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} q(x+\xi, y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi, y+\eta)\,k_\varepsilon(r, a, \mu_n)\,d\xi\,d\eta. \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.9) по $x$, заменяя в интегралах $\frac{\partial}{\partial x}$ на $\frac{\partial}{\partial \xi}$ и интегрируя по частям, находим:

$$\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\{\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} \varphi_n(x+\xi, y+\eta)\,\frac{\partial}{\partial\xi}h_\varepsilon(r, a)\,d\xi\,d\eta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} q(x+\xi, y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi, y+\eta)\,\frac{\partial}{\partial\xi}k_\varepsilon(r, a, \mu_n)\,d\xi\,d\eta. \quad (2.10)$$

В силу неравенства

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2),$$

из (2.10) получим:

$$\left[\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right]^2\{\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi^2}\left[\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} \varphi_n(x+\xi, y+\eta)\,\frac{\partial}{\partial\xi}h_\varepsilon(r, a)\,d\xi\,d\eta\right]^2 +$$

$$+\frac{2}{\pi^2}\left[\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} q(x+\xi, y+\eta)\,\varphi_n(x+\xi, y+\eta)\,\frac{\partial}{\partial\xi}k_\varepsilon(r, a, \mu_n)\,d\xi\,d\eta\right]^2. \quad (2.11)$$

Суммируя по $n$ неравенства (2.11) в пределах $a \leqslant \mu_n \leqslant a+1$, найдем:

$$\sum_{a \leqslant \mu_n \leqslant a+1} \left[\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x}\right]^2 \{\psi_\varepsilon(\mu_n + a) + \psi_\varepsilon(\mu_n - a)\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi^2} \sum_{a \leqslant \mu_n \leqslant a+1} \left[\iint_{r \leqslant \varepsilon} \varphi_n(x+\xi, y+\eta) \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, a)\, d\xi\, d\eta\right]^2 +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \sum_{a \leqslant \mu_n \leqslant a+1} \left[\iint_{r \leqslant \varepsilon} q(x+\xi, y+\eta)\, \varphi_n(x+\xi, y+\eta) \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, a, \mu_n)\, d\xi\, d\eta\right]^2 =$$

$$= I_1 + I_2. \tag{2.12}$$

Оценим отдельные слагаемые правой части (2.12) при $a \to \infty$. В силу неравенства Бесселя и определения функции $h_\varepsilon(r, a)$, т. е. формулы (2.7), имеем:

$$I_1 \leqslant \frac{2}{\pi^2} \iint_{r \leqslant \varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \int_r^\varepsilon \frac{g'_\varepsilon(t, a)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dt\right]^2 d\xi\, d\eta. \tag{2.13}$$

Для оценки последнего интеграла рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \mu^2 u = 0$$

о всем пространстве $\mathscr{E}_2$. Его нормированные собственные функции имеют вид:

$$\frac{1}{2\pi} e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)},$$

причем $\{\alpha_1^2 + \alpha_2^2\}^{\frac{1}{2}} = \mu$. Для этого случая, аналогично предыдущему [см. (2.10)], при $q(x, y) \equiv 0$ получим:

$$i\alpha_1 \frac{e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}}{2\pi} \{\psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint_{r \leqslant \varepsilon} \frac{e^{i[\alpha_1(x+\xi) + \alpha_2(y+\eta)]}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, a)\, d\xi\, d\eta. \tag{2.10'}$$

Из последней формулы, в силу равенства Парсеваля, следует:

$$\iint_{r \leqslant \varepsilon} \left\{\frac{\partial}{\partial \xi} \int_r^\varepsilon \frac{g'_\varepsilon(t, a)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dt\right\}^2 d\xi\, d\eta = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathscr{E}'_2} \alpha_1^2 \{\psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a)\}^2 d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{2.14}$$

Переходя к полярным координатам в пространстве $\mathscr{E}'_2$ и замечая, что

$$\{\alpha_1^2 + \alpha_2^2\}^{\frac{1}{2}} = \mu,$$

найдем:

$$\iint_{\mathscr{E}'_2} \alpha_1^2 \{\psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a)\}^2 d\alpha_1 d\alpha_2 =$$

$$= C \int_0^\infty \mu^3 \{\psi_\varepsilon(\mu + a) + \psi_\varepsilon(\mu - a)\}^2 d\mu = O(a^3). \tag{2.15}$$

Из (2.13), (2.14) и (2.15) следует оценка ($a \to \infty$):

$$I_1 < Ca^3. \tag{2.16}$$

Оценим $I_2$. Мы имеем [см. (2.8)]:

$$k_\varepsilon(r, a, \mu_n) = \int_r^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\left\{\int_r^t \frac{\cos\mu_n(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\tau\right\}dt. \tag{2.17}$$

Непосредственное дифференцирование равенства (2.17) дает:

$$\frac{\partial k_\varepsilon(r, a, \mu_n)}{\partial\xi} = -\frac{\xi}{r^2}\int_0^\varepsilon \frac{tg_\varepsilon(t, a)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dt - \mu_n\frac{\xi}{r}\int_r^\varepsilon g_\varepsilon(t, a)\left\{\int_r^t \frac{\tau\sin\mu_n(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\tau\right\}dt.$$

Поэтому при $a\to\infty$, $r\to 0$ и $a\leqslant\mu_n\leqslant a+1$ получим оценку:

$$\frac{\partial k_\varepsilon(r, a, \mu_n)}{\partial\xi} = O\left(\frac{1}{r}\right) + O(a). \tag{2.18}$$

ЛЕММА 2.1 [см. ([1]), лемма 2.5.1]. *Обозначим через $\delta$ произвольное положительное число и через $\mathscr{D}_\delta$ — множество тех точек области $\mathscr{D}$, расстояние которых до границы $\Gamma$ области $\mathscr{D}$ не меньше, чем $\delta$. Если точка $(x, y)\in\mathscr{D}_\delta$, то существует константа $C=C_\delta$ такая, что при $a\to\infty$ справедлива асимптотическая оценка*

$$\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1}\varphi_n^2(x, y) < C_\delta\, a. \tag{2.19}$$

Из определения $I_2$, т. е. из формулы (2.12), и оценки (2.18) следует:

$$I_2\leqslant C\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1}\left\{\iint_{r\leqslant\varepsilon}\varphi_n(x+\xi, y+\eta)\left[\frac{1}{r}+a\right]d\xi\, d\eta\right\}^2 =$$

$$= C\iint_{r\leqslant\varepsilon}d\xi\, d\eta\iint_{\rho\leqslant\varepsilon}du\, dv\left[\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1}|\varphi_n(x+\xi, y+\eta)|\cdot|\varphi_n(x+u, y+v)|\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{r}+a\right)\left(\frac{1}{\rho}+a\right)\right], \tag{2.20}$$

где $r=\{\xi^2+\eta^2\}^{\frac{1}{2}}$, $\rho=\{u^2+v^2\}^{\frac{1}{2}}$ и константа $C$ зависит от $x, y$. В силу неравенства Коши — Буняковского, из оценки (2.19) вытекает следующая оценка ($a\to\infty$):

$$\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1}|\varphi_n(x+\xi, y+\eta)\cdot|\varphi_n(x+u, y+v)|\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\sum_{a\leqslant\mu_a\leqslant a+1}\varphi_n^2(x+\xi, y+\eta)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1}\varphi_n^2(x+u, y+v)\Big)^{\frac{1}{2}} < Ca,$$

где $C$ зависит от $x$ и $y$. Поэтому из (2.20) окончательно получим:

$$I_2\leqslant Ca\left\{\iint_{r\leqslant\varepsilon}\left(\frac{1}{r}+a\right)d\xi\, d\eta\right\}^2 = O(a^3). \tag{2.21}$$

Из неравенства (2.12) и оценок (2.16) и (2.21) следует важная оценка ($a\to\infty$):

$$\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1}\left[\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right]^2\{\psi_\varepsilon(\mu_n+a)+\psi_\varepsilon(\mu_n-a)\}^2 < Ca^3. \tag{2.22}$$

Обозначим через $\theta(x, y, u, v; \mu)$ спектральную функцию задачи (1.1)—(1.2), т. е. положим

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n<\mu} \varphi_n(x, y)\varphi_n(u, v), \quad \mu > 0,$$
$$\theta(x, y, u, v; \mu) = -\theta(x, y, u, v; -\mu), \quad \mu < 0,$$
$$\theta(x, y, u, v; \mu) = 0, \quad \mu = 0.$$

Из оценки (2.22) легко следует

ЛЕММА 2.2. *Пусть* $\delta$, $\mathcal{D}_\delta$ *и* $C_\delta$ *имеют те же значения, что и в лемме* 2.1. *Если* $(x, y) \in \mathcal{D}_\delta$, *то при* $a \to \infty$ *имеет место асимптотическая оценка*

$$\overset{a+1}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \left\{\frac{\partial^2\theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x\,\partial u}\right\}_{\substack{u=x\\ v=y}} = \sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1} \left[\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right]^2 < C_\delta a^3. \tag{2.23}$$

*Оценка* (2.23) *имеет место равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области* $\mathcal{D}$.

В самом деле, в качестве функции $g_\varepsilon(t)$ возьмем функцию

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |t|), & (t) \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |t| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\psi_\varepsilon(\mu_n + a) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{\mu_n + a}{2}\varepsilon}{\left[\frac{\varepsilon(\mu_n + a)}{2}\right]^2}, \quad \psi_\varepsilon(\mu_n - a) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\frac{\mu_n - a}{2}\varepsilon}{\left[\frac{\varepsilon(\mu_n - a)}{2}\right]^2}. \tag{2.24}$$

Значит, функции $\psi_\varepsilon(\mu_n + a)$ и $\psi_\varepsilon(\mu_n - a)$ положительны и поэтому из неравенства (2.22) следует:

$$\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1} \left[\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right]^2 \psi_\varepsilon^2(\mu_n - a) < Ca^3. \tag{2.25}$$

Подставляя значение функции $\psi_\varepsilon(\mu_n - a)$ из (2.24) в (2.25) и полагая $\varepsilon = 1$, $\mu_n - a = \nu_n$, получим:

$$\sum_{0\leqslant\nu_n\leqslant 1} \left[\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right]^2 \cdot \left[\frac{\sin\frac{\nu_n}{2}}{\frac{\nu_n}{2}}\right]^4 < Ca^3. \tag{2.26}$$

Как известно, для $0 \leqslant \nu \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\frac{\sin\nu}{\nu} \geqslant \frac{2}{\pi}$. Поэтому из (2.26) и из определения спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$ выводим:

$$Ca^3 > \sum_{0\leqslant\nu_n\leqslant 1} \left[\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right]^2 \left[\frac{\sin\frac{\nu_n}{2}}{\frac{\nu_n}{2}}\right]^4 \geqslant \frac{16}{\pi^4} \sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1} \left[\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial x}\right]^2 =$$
$$= \frac{16}{\pi^4} \overset{a+1}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \left\{\frac{\partial^2\theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x\,\partial u}\right\}_{\substack{u=x\\ v=y}},$$

что и доказывает лемму.

Из леммы 2.2 и неравенства Коши — Буняковского следует

ЛЕММА 2.3. *При тех же условиях, что и в лемме 2.2, и при $a \to \infty$ имеет место асимптотическая оценка*

$$\overset{a+1}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \left\{ \frac{\partial^2 \theta (x, y, u, v; \mu)}{\partial x \, \partial u} \right\} = \sum_{a \leqslant \mu_n \leqslant a+1} \left| \frac{\partial \varphi_n (x, y)}{\partial x} \right| \cdot \left| \frac{\partial \varphi_n (u, v)}{\partial u} \right| < C_8 a^3. \quad (2.27)$$

*Оценка (2.27) имеет место равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathcal{D}$.*

Из лемм 2.1 и 2.2 и неравенства Коши — Буняковского следует

ЛЕММА 2.4. *При тех же предположениях, что и в лемме 2.2, справедлива асимптотическая оценка*

$$\overset{a+1}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \left\{ \frac{\partial \theta (x, y, u, v; \mu)}{\partial x} \right\} = \sum_{a \leqslant \mu_n \leqslant a+1} \left| \frac{\partial \varphi_n (x, y)}{\partial x} \right| \cdot | \varphi_n (u, v) | < C_8 a^2. \quad (2.28)$$

*Оценка (2.28) имеет место равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathcal{D}$.*

Оценим старшие производные спектральной функции $\theta (x, y, u, v; \mu)$. Обозначим через $D^{\alpha}_{xy}$ следующий оператор дифференцирования:

$$D^{\alpha}_{xy} \equiv \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha_1} \, \partial y^{\alpha_2}} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha).$$

Применяя к неравенству (2.9) оператор $D^{\alpha}_{xy}$, а затем заменяя под интегралами $D^{\alpha}_{xy}$ на $D^{\alpha}_{\xi\eta}$, получим:

$$\{\psi_{\varepsilon} (\mu_n + a) + \psi_{\varepsilon} (\mu_n - a)\} D^{\alpha}_{xy} \varphi_n (x, y) =$$
$$= -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{r \leqslant \varepsilon} h_{\varepsilon} (r, a) D^{\alpha}_{\xi\eta} \varphi_n (x + \xi, \; y + \eta) \, d\xi \, d\eta -$$
$$- \frac{1}{\pi} \iint\limits_{r \leqslant \varepsilon} k_{\varepsilon} (r, a, \mu_n) D^{\alpha}_{\xi\eta} q (x + \xi, \; y + \eta) \varphi_n (x + \xi, \; y + \eta) \, d\xi \, d\eta. \quad (2.29)$$

Предполагая, что функция $g_{\varepsilon} (t)$ дифференцируема $\alpha$ раз, и интегрируя первый интеграл правой части (2.29) по частям $\alpha$ раз, а второй интеграл — один раз, найдем:

$$\{\psi_{\varepsilon} (\mu + a) + \psi_{\varepsilon} (\mu - a)\} D^{\alpha}_{xy} \varphi_n (x, y) =$$
$$= \frac{(-1)^{\alpha - 1}}{\pi} \iint\limits_{r \leqslant \varepsilon} \varphi_n (x + \xi, \; y + \eta) D^{\alpha}_{\xi\eta} h_{\varepsilon} (r, a) \, d\xi \, d\eta +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \iint\limits_{r \leqslant \varepsilon} D^{\alpha - 1}_{\xi\eta} \{q (x + \xi, \; y + \eta) \varphi_n (x + \xi, \; y + \eta)\} \frac{\partial}{\partial \xi} k_{\varepsilon} (r, a, \mu_n) \, d\xi \, d\eta. \quad (2.30)$$

Из (2.30), в силу неравенства $(a + b)^2 \leqslant 2 (a^2 + b^2)$, получим:

$$\{\psi_{\varepsilon} (\mu_n + a) + \psi_{\varepsilon} (\mu_n - a)\}^2 \{D^{\alpha}_{xy} \varphi_n (x, y)\}^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\pi^2} \left\{ \iint\limits_{r \leqslant \varepsilon} \varphi_n (x + \xi, \; y + \eta) D^{\alpha}_{\xi\eta} h_{\varepsilon} (r, a) \, d\xi \, d\eta \right\}^2 +$$
$$+ \frac{2}{\pi^2} \left\{ \iint\limits_{r \leqslant \varepsilon} D^{\alpha - 1}_{\xi\eta} [q (x + \xi, \; y + \eta) \varphi_n (x + \xi, \; y + \eta)] \frac{\partial}{\partial \xi} k_{\varepsilon} (r, a, \mu_n) \, d\xi \, d\eta \right\}^2. \quad (2.31)$$

Суммируя неравенства (2.31) по $n$ в пределах $a \leqslant \mu_n \leqslant a+1$, найдем:

$$\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1} \{\psi_\varepsilon(\mu_n+a)+\psi_\varepsilon(\mu_n-a)\}^2\{D_{xy}^\alpha \varphi_n(x, y)\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi^2} \sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1} \left\{\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} D_{\xi\eta}^{\alpha-1}[q(x+\xi, y+\eta)\varphi_n(x+\xi, y+\eta)] \frac{\partial}{\partial\xi} k_\varepsilon(r, a, \mu_n)\, d\xi\, d\eta\right\}^2 +$$

$$+\frac{2}{\pi^2} \sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1} \left\{\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} \varphi_n(x+\xi, y+\eta) D_{\xi\eta}^\alpha h_\varepsilon(r, a)\, d\xi\, d\eta\right\}^2 = I_1 + I_2. \quad (2.32)$$

Оценим отдельные слагаемые правой части (2.32). Сначала оценим $I_2$. Для этого применяем оператор $D_{xy}^{\alpha-1}$ к равенству (2.10′), заменяем под интегралами $D_{xy}^{\alpha-1}$ на $D_{\xi\eta}^{\alpha-1}$, интегрируем $\alpha-1$ раз по частям, применяем затем равенство Парсеваля и поступаем так, как при получении оценки (2.16); в результате получаем оценку ($a\to\infty$)

$$I_2 < Ca^{2\alpha+1}. \quad (2.33)$$

Для оценки $I_1$ поступим следующим образом. Предположим, что для $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha-1$ и при $a\to\infty$ справедлива оценка

$$\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a-1} \{D_{xy}^\nu \varphi_n(x, y)\}^2 < Ca^{2\nu+1}. \quad (2.34)$$

При $\nu = 1$ такая оценка имеет место [см. оценку (2.23)]. Предполагая, что функция $q(x, y)$ имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha-1$ включительно, в силу оценки (2.34) и неравенства Коши — Буняковского, получим:

$$\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1} | D_{\xi\eta}^{\alpha-1}\varphi_n(x+\xi, y+\eta)\, q(x+\xi, y+\eta)| \times$$

$$\times | D_{\tau\sigma}^{\alpha-1}\varphi_n(x+\tau, y+\sigma)\, q(x+\tau, y+\sigma)| < Ca^{2\alpha-1}. \quad (2.35)$$

Тогда из оценок (2.18) и (2.35) будет следовать:

$$I \leqslant C \sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1} \left\{\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} D_{\xi\eta}^{\alpha-1}[q(x+\xi, y+\eta)\varphi_n(x+\xi, y+\eta)] \frac{\partial}{\partial\xi} k_\varepsilon(r, a, \mu_n)\, d\xi\, d\eta\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} d\xi\, d\eta \iint\limits_{\rho\leqslant\varepsilon} d\tau\, d\sigma \Bigg[\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a-1} | D_{\xi\eta}^{\alpha-1} q(x+\xi, y+\eta)\varphi_n(x+\xi, y+\eta)| \times$$

$$\times | D_{\tau\sigma}^{\alpha-1} q(x+\tau, y+\sigma)\varphi_n(x+\tau, y+\sigma)| \cdot \left(\frac{1}{r}+a\right)\left(\frac{1}{\rho}+a\right)\Bigg] \leqslant$$

$$\leqslant Ca^{2\alpha-1}\left(\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon}\left(\frac{1}{r}+a\right)d\xi\, d\eta\right)^2 \leqslant Ca^{2\alpha+1}. \quad (2.36)$$

Комбинируя оценки (2.33) и (2.36), из неравенства (2.32) получим:

$$\sum_{a\leqslant\mu_n\leqslant a+1} \{\psi_\varepsilon(\mu_n+a)+\psi_\varepsilon(\mu_n-a)\}^2\{D_{xy}^\alpha \varphi_n(x, y)\}^2 < Ca^{2\alpha-1}, \quad (2.37)$$

где константа $C$ зависит от $x$ и $y$.

ЛЕММА 2.5. *Пусть* $\delta$, $D_\delta$ *и* $C_\delta$ *имеют те же значения, что и в лемме* 2.1. *Если функция* $q(x, y)$ *имеет ограниченные частные производные до порядка* $\alpha+\beta-1$ *включительно, то при* $(x, y), (u, v) \in \mathcal{D}_\delta$ *и при* $a \to \infty$ *равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области* $\mathcal{D}$, *имеет место асимптотическая оценка:*

$$\overset{a+1}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \{D_{xy}^{\alpha} D_{uv}^{\beta} \theta(x, y, u, v; \mu)\} =$$

$$= \sum_{a \leqslant \mu_n \leqslant a+1} |D_{xy}^{\alpha} \varphi_n(x, y)| \cdot |D_{uv}^{\beta} \varphi_n(u, v)| < C_\delta a^{\alpha+\beta+1}. \qquad (2.38)$$

Доказательство леммы выводится из оценки (2.37) в точности так, как доказательство леммы 2.2 — из оценки (2.22).

## § 3. Асимптотическая оценка производных спектральной функции в бесконечной области

Асимптотические оценки для производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$, полученные в предыдущем параграфе, показывают, что они от размеров области не зависят. Поэтому нетрудно предвидеть, что они будут верны и для бесконечных областей. Это и доказывается в настоящем параграфе. Для простоты изложения мы предположим, что область $\mathcal{D}$ совпадает со всем пространством $\mathcal{E}_2$.

Обозначим через $\mathcal{D}_N$ последовательность областей, расширяющихся для всего пространства $\mathcal{E}_2$, т. е. $\mathcal{D}_N \to \mathcal{E}_2$ при $N \to \infty$, и через $\Gamma_N$ — границу области $\mathcal{D}_N$.

Для каждой области $\mathcal{D}_N$ рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \qquad (3.1)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_N} = 0. \qquad (3.2)$$

Будем считать, что функция $q(x, y)$ действительна и непрерывна в каждой конечной области пространства $\mathcal{E}_2$.

Предположим сначала, что при любом $N = 1, 2, \ldots$ спектр задачи (3.1) — (3.2) неотрицателен. Обозначим через $\mu_{N,1}^2, \mu_{N,2}^2, \ldots, \mu_{N,n}^2, \ldots$ собственные значения задачи (3.1) — (3.2), а через $\varphi_{N,1}(x, y)$, $\varphi_{N,2}(x, y), \ldots$ $\ldots, \varphi_{N,n}(x, y), \ldots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции задачи (3.1) — (3.2). Для каждого $N$ образуем свою спектральную функцию, полагая

$$\theta_N(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_{N,n} < \mu} \varphi_{N,n}(x, y) \varphi_{N,n}(u, v)$$

для $\mu > 0$ и продолжая эту функцию нечетно для отрицательных $\mu$. Как показано Б. М. Левитаном [см. ([1]), гл. III, леммы 3.1.3 и 3.1.4], в каждой конечной области пространства $\mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_1$ семейство функций $\{\theta_N(x, y, u, v; \mu)\}$ равномерно ограничено и по $(x, y)$ и $(u, v)$ равностепенно непрерывно.

Рассмотрим семейство функций

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x} \theta_N(x, y, u, v; \mu)\right\}. \qquad (3.3)$$

Так как в оценке (2.28) постоянная $C$ от размеров области $\mathcal{D}$ не зависит, то семейство функций (3.3) имеет равномерно ограниченную вариацию в каждой конечной части пространства $\mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_2 \times \mathcal{E}_1$. Поэтому, если мы докажем и равностепенную непрерывность этого семейства по $(x, y)$, то в оценке (2.28) можно будет перейти к пределу, в силу теоремы Арцелля — Хелли, и тогда мы получим оценку $(a \to \infty)$:

$$\mathop{\mathrm{V}}_{a}^{a+1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, y, u, v; \mu) \right\} < Ca^2,$$

где $\theta(x, y, u, v; \mu)$ — спектральная функция уравнения (3.1) для всего двумерного пространства.

Для доказательства равностепенной непрерывности семейства (3.3) по $(x, y)$ выпишем тождество (2.10) для задачи (3.1) — (3.2), положив там $a = 0$ и заменив $x$ и $y$ соответственно на $x + u$ и $y + v$. Тогда мы получим:

$$\psi_\varepsilon(\mu_{N,n}) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{N,n}(x+u, y+v) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{r \leqslant \varepsilon} \varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, 0)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{r \leqslant \varepsilon} q(x+u+\xi, y+v+\eta) \varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, 0, \mu_{N,n})\, d\xi\, d\eta. \tag{3.4}$$

Полагая в тождестве (3.4) $u = v = 0$ и вычитая полученное тождество из (3.4), находим:

$$\psi_\varepsilon(\mu_{N,n}) \left\{ \frac{\partial \varphi_{N,n}(x+u, y+v)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{N,n}(x, y)}{\partial x} \right\} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{r \leqslant \varepsilon} \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta) \left\{ \frac{\partial h_\varepsilon(\rho, 0)}{\partial \xi} - \frac{\partial h_\varepsilon(r, 0)}{\partial \xi} \right\} d\xi\, d\eta +$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_{r \leqslant \varepsilon} \{ q(x+u+\xi, y+v+\eta) \varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) -$$
$$- q(x+\xi, y+\eta)\, \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta) \} \frac{\partial k_\varepsilon(r, 0, \mu_{N,n})}{\partial \xi} d\xi\, d\eta, \tag{3.5}$$

где $\rho$ — расстояние от точки $(\xi, \eta)$ до точки $(u, v)$.

Пусть $\mu_0 > 0$ — произвольное конечное число. Применяя к равенству (3.5) неравенство

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2),$$

а затем суммируя по $n$ в пределах $1 \leqslant \mu_{N,n} \leqslant \mu_0$, получим:

$$\sum_{\mu_{N,n} < \mu_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{N,n}(x+u, y+v) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{N,n}(x, y) \right]^2 \psi_\varepsilon^2(\mu_{N,n}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{\mu_{N,n} < \mu_0} \left\{ \iint_{r \leqslant \varepsilon} \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta) \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(\rho, 0) - \frac{\partial}{\partial \xi} h_\varepsilon(r, 0) \right] d\xi\, d\eta \right\}^2 +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{\mu_{N,n} < \mu_0} \left\{ \iint_{r \leqslant \varepsilon} [q(x+u+\xi, y+v+\eta) \varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) -$$
$$- q(x+\xi, y+\eta) \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)] \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} k_\varepsilon(r, 0, \mu_{N,n})\, d\xi\, d\eta \right\}^2 = I_1 + I_2. \tag{3.6}$$

В силу неравенства Бесселя,

$$I_1 \leqslant \iint\limits_{\mathscr{E}_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [h_\varepsilon(\rho, 0) - h_\varepsilon(r, 0)] \right\}^2 d\xi\, d\eta.$$

Очевидно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно подобрать столь малое $\delta_1 > 0$, что если $\{u^2 + v^2\}^{\frac{1}{2}} < \delta_1$, т. е. если расстояние точки $(u, v)$ до начала координат $< \delta_1$, то

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.7}$$

Оценим теперь $I_2$. Заметим, что

$$\begin{gathered} q(x+u+\xi,\ y+v+\eta)\,\varphi_{N,n}(x+u+\xi,\ y+v+\eta) - \\ - q(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_{N,n}(x+\xi,\ y+\eta) = \\ = q(x+u+\xi, y+v+\eta)\,[\varphi_{N,n}(x+u+\xi, y+v+\eta) - \varphi_{N,n}(x+\xi, y+\eta)] + \\ + \varphi_{N,n}(x+\xi,\ y+\eta)\,[q(x+u+\xi,\ y+v+\eta) - q(x+\xi,\ y+\eta)]. \end{gathered}$$

Имеем:

$$\begin{gathered} \Big(\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} [\,q(x+u+\xi,\ y+v+\eta)\,\varphi_{N,n}(x+u+\xi,\ y+v+\eta) - \\ - q(x+\xi,\ y+\eta)\,\varphi_{N,n}(x+\xi,\ y+\eta)]\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,k_\varepsilon(r,\ 0,\ \mu_{N,n})\,d\xi\,d\eta\Big)^2 \leqslant \\ \leqslant 2\Big(\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} q(x+u+\xi,\ y+v+\eta)\,[\varphi_{N,n}(x+u+\xi,\ y+v+\eta) - \\ - \varphi_{N,n}(x+\xi,\ y+\eta)]\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,k_\varepsilon(r,\ 0,\ \mu_{N,n})\,d\xi\,d\eta\Big)^2 + \\ + 2\Big(\iint\limits_{r\leqslant\varepsilon} \varphi_{N,n}(x+\xi,\ y+\eta)\,[q(x+u+\xi,\ y+v+\eta) - \\ - q(x+\xi,\ y+\eta)]\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,k_\varepsilon(r,\ 0,\ \mu_{N,n})\,d\xi\,d\eta\Big)^2 = I_2' + I_2''. \end{gathered} \tag{3.8}$$

В силу неравенства Коши — Буняковского и леммы 3.1.4 работы ([1]), для произвольного сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$, не зависящее от $N$, что если $\{u^2 + v^2\}^{\frac{1}{2}} < \delta_2$, то

$$I_2' < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.9}$$

Наконец, из равномерной непрерывности функции $q(x, y)$ легко следует, что при $\{u^2 + v^2\}^{\frac{1}{2}} < \delta_3$ и $\delta_3$ достаточно малом выполняется неравенство

$$I_2'' < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.10}$$

Обозначим

$$\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\}.$$

Тогда из оценок (3.7), (3.9) и (3.10), в силу (3.8) и (3.6), следует, что при $\{u^2 + v^2\}^{\frac{1}{2}} < \delta$ выполняется неравенство

$$\sum_{\mu_{N,n}<\mu_0} \left[\frac{\partial\varphi_{N,n}(x+u,\ y+v)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_{N,n}(x,\ y)}{\partial x}\right]^2 \psi_\varepsilon^2(\mu_{N,n}) < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Опираясь на это неравенство и выбирая $\psi_\varepsilon(\mu)$ так, как в равенствах (2.24) доказательство равностепенной непрерывности семейства (3.3) можно закончить точно так же, как доказательство леммы 4.1.5 и 4.1.6 работы ([4]).

Итак, нами доказано, что семейство функций (3.3) равномерно сходится. Поэтому, переходя к пределу при $N \to \infty$ в оценке (2.28), выписанной для спектральной функции задачи (3.1) — (3.2), т. е. для функции $\theta_N(x, y, u, v; \mu)$, мы получим следующую лемму.

ЛЕММА 3.1. *При $a \to \infty$ равномерно в каждой конечной области пространства $\mathcal{E}_2$ имеет место асимптотическая оценка ($a \to \infty$):*

$$\overset{a+1}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, y, u, v; \mu) \right\} = O(a^2), \tag{3.12}$$

*где $\theta(x, y, u, v; \mu)$ — спектральная функция уравнения* (3.1) *для всего пространства $\mathcal{E}_2$.*

Обозначим через $\theta^*(x, y, u, v; \mu)$ спектральную функцию уравнения (3.1) для всего пространства $\mathcal{E}_2$ при $q(x, y) \equiv 0$. Она определяется формулой [см. ([4]), стр. 296]:

$$\theta^*(x, y, u, v; \mu) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{J_1(\mu r)}{r}, \tag{3.13}$$

где $J_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка $p$, а $r$ — расстояние между точками $(u, v)$ и $(x, y)$.

ЛЕММА 3.2. *При $a \to \infty$ равномерно во всем пространстве $\mathcal{E}_2$ справедлива асимптотическая оценка:*

$$\overset{a+1}{\underset{a}{\mathrm{V}}} \{ D^\alpha_{xy} D^\beta_{uv} \theta^*(x, y, u, v; \mu) \} = O(a^{\alpha+\beta+1}). \tag{3.14}$$

Доказательство следует непосредственно из определения функции $\theta^*(x, y, u, v; \mu)$.

Оценка, аналогичная оценке (3.14), имеет место и для спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$.

## § 4. Некоторые вспомогательные формулы и оценки

При прежних предположениях относительно функции $q(x, y)$ рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\Delta u - q(x, y)\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{4.1}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = f(x, y). \tag{4.2}$$

Если в уравнении (4.1) функция $q(x, y) \equiv 0$, то решение задачи (4.1) — (4.2) дается формулой:

$$u_0(x, y, t) = \frac{t}{2\pi} \iint\limits_{r \leq 1} \frac{f(x + t\xi, y + t\eta)}{\sqrt{1 - r^2}}\, d\xi\, d\eta, \tag{4.3}$$

где $r = \{\xi^2 + \eta^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Далее, рассмотрим неоднородную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = g(x, y, t), \tag{4.4}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u'_t(x, y, 0) = 0. \tag{4.5}$$

Решение задачи (4.4) — (4.5) дается формулой:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau \iint_{r<\tau} \frac{g(x+\xi,\ y+\eta,\ t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{4.6}$$

Перепишем уравнение (4.1) в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = -\ q(x, y)\, u.$$

Рассматривая в последнем уравнении правую часть как известную функцию и применяя формулы (4.3) и (4.6), мы получим следующее интегральное уравнение, эквивалентное задаче (4.1) — (4.2):

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau \iint_{r\leqslant\tau} \frac{q(x+\xi,\ y+\eta)\, u(x+\xi,\ y+\eta,\ t+\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\, d\xi\, d\eta, \tag{4.7}$$

где $u_0(x, y, t)$ определяется по формуле (4.3). Пусть

$$u_n(x, y, t) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^t d\tau \iint_{r\leqslant\tau} \frac{q(x+\xi,\ y+\eta)\, u_{n-1}(x+\xi,\ y+\eta,\ t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{4.8}$$

Тогда

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t) + \ldots = u_0(x, y, t) + v(x, y, t) \tag{4.9}$$

есть решение задачи (4.1) — (4.2). Следовательно, решение $\tilde{u}(x, y, t)$ задачи

$$\Delta\tilde{u} - q(x, y)\,\tilde{u} = \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2},$$

$$\tilde{u}(x, y, 0) = f(x, y), \quad \tilde{u}'_t(x, y, 0) = 0$$

имеет вид:

$$\tilde{u}(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t}. \tag{4.10}$$

В дальнейшем нам понадобится оценка для $\tilde{u}'_t(x, y, t)$ при $t \to 0$. Предположим, что функция $f(x, y)$ в окрестности точки $(x, y)$ имеет ограниченные частные производные второго порядка, а функция $q(x, y)$ — ограниченные частные производные первого порядка. Тогда, в силу (4.10), имеем:

$$\frac{\partial\tilde{u}(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_0(x, y, t)}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x\, \partial t}. \tag{4.11}$$

Далее, из формулы (4.3) следует:

$$\frac{\partial^2 u_0(x, y, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left\{\frac{t}{2\pi}\iint_{r<1} \frac{f(x+\xi t,\ y+\eta t)}{\sqrt{1-r^2}}\, d\xi d\eta\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{r\leqslant 1} \frac{\partial f(x+\xi t,\ y+\eta t)}{\partial x}\cdot\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1-r^2}} +$$

$$+ \frac{t}{2\pi}\iint_{r\leqslant 1}\left\{\xi\frac{\partial^2 f(x+\xi t,\ y+\eta t)}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial^2 f(x+\xi t,\ y+\eta t)}{\partial x \partial y}\right\}\frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{1-r^2}}. \tag{4.12}$$

Так как, по предположению, $f'_x(x, y)$ имеет ограниченные частные производные первого порядка, то из теоремы о конечных приращениях следует, что при $t \to 0$

$$\frac{\partial f(x + t\xi,\ y + t\eta)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + O(t).$$

Отсюда и из (4.12) вытекает, что

$$\frac{\partial^2 u_0(x, y, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \varphi(x, y, t), \tag{4.13}$$

причем при $t \to 0$

$$\varphi(x, y, t) = O(t).$$

В силу (4.8), имеем:

$$\frac{\partial^2 u_1(x, y, t)}{\partial x \partial t} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^t \tau d\tau \iint_{r\leqslant 1} \frac{\partial q(x + \tau\xi,\ y + \tau\eta)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_0(x + \tau\xi,\ y + \tau\eta,\ t - \tau)}{\partial t} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - r^2}} -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_0^t \tau d\tau \iint_{r\leqslant 1} q(x + \tau\xi,\ y + \tau\eta) \frac{\partial^2 u_0(x + \tau\xi,\ y + \tau\eta,\ t - \tau)}{\partial x \partial t} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Отсюда, на основании (4.3) и оценки (4.13), получим, что при $t \to 0$

$$\frac{\partial^2 u_1(x, y, t)}{\partial x \partial t} = O(t^2). \tag{4.14}$$

Рассуждая аналогично, найдем ($n = 2, 3, \ldots$):

$$\frac{\partial^2 u_n(x, y, t)}{\partial x \partial t} = O(t^{2n}) \quad (t \to 0). \tag{4.15}$$

Так как, по определению,

$$v(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y, t),$$

то, в силу оценок (4.14) и (4.15), получим, что при $t \to \infty$

$$\frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial t} = O(t^2). \tag{4.16}$$

На основании оценок (4.13) и (4.16), из (4.11) вытекает важная для дальнейшего оценка ($t \to 0$):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \psi(x, y, t), \tag{4.17}$$

причем при $t \to 0$

$$\psi(x, y, t) = O(t). \tag{4.18}$$

## § 5. Равносуммируемость дифференцированных разложений по собственным функциям и в двукратный интеграл Фурье

Опираясь на результаты предыдущих параграфов, мы в этом параграфе покажем равносуммируемость дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Шредингера и разложения в обычный двукратный интеграл Фурье функций с интегрируемым квадратом.

Рассмотрим в конечной односвязной области $\mathcal{D}$ с границей Г задачу на собственные значения:

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \tag{5.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{5.2}$$

где функция $q(x, y)$ удовлетворяет прежним предположениям.

Обозначим через $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2, \ldots$ собственные значения, а через $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y)$ — соответствующие ортонормированные собственные функции задачи (5.1) — (5.2).

Пусть функция $f(x, y) \subset L_2(\mathcal{D})$. Обозначим через $c$ коэффициенты Фурье функции $f(x, y)$ относительно системы собственных функций $\{\varphi_n(x, y)\}$, т. е. положим

$$c_n = \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(x, y)\varphi_n(x, y)\,dxdy.$$

Пусть $(x, y)$ — внутренняя точка области $\mathcal{D}$ и $\varepsilon > 0$ настолько мало, что круг с центром в точке $(x, y)$ и радиусом $\varepsilon$ целиком лежит внутри $\mathcal{D}$. Решая задачу Коши

$$\Delta u - q(x, y) u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t'(x, y, 0) = 0$$

для $t \leqslant \varepsilon$ сначала по формуле (4.10), а затем по методу Фурье и приравнивая эти два решения, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x, y) \cos \mu_n t = \frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t}, \tag{5.3}$$

где функции $u_0(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ определены в предыдущем параграфе. Пусть функция $g_\varepsilon(t)$ удовлетворяет условиям (2.1). Помножим обе части тождества (5.3) на функцию $g_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по $t$ от 0 до $\varepsilon$. Тогда, в силу (2.1), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x, y) \psi_\varepsilon(\mu_n) = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \left\{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t}\right\} dt. \tag{5.4}$$

Положим

$$S(x, y, \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} c_n \varphi_n(x, y). \tag{5.5}$$

Тогда тождество (5.4) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu S(x, y, \mu) = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \left\{\frac{\partial u_0(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t}\right\} dt. \tag{5.6}$$

Предполагая, что функции $f(x, y)$ и $q(x, y)$ в окрестности точки $(x, y)$ имеют ограниченные частные производные первого порядка, и дифферен-

цируя тождество (5.6) по $x$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x} = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t) \left\{ \frac{\partial^2 u_0(x, y, t)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial t} \right\} dt. \quad (5.7)$$

Интегралы слева как в тождестве (5.6), так и в (5.7) существуют в силу оценки (2.3).

Положим

$$\alpha_1(x, y; \mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \alpha(x, y; \nu)\, d\nu,$$

$$\alpha(x, y; \nu) = \int_0^1 \frac{\partial^2 u_0(x, y, t)}{\partial x \partial t} \cos \nu t\, dt. \quad (5.8)$$

Применяя к равенствам (2.2) и (5.8) равенство Парсеваля для обычных интегралов Фурье, найдем ($0 < \varepsilon \leqslant 1$):

$$\int_0^\varepsilon \frac{\partial^2 u_0(x, y, t)}{\partial x \partial t} g_\varepsilon(t)\, dt = \int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \alpha_1(x, y; \mu). \quad (5.9)$$

Аналогично,

$$\int_0^\varepsilon \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial t} g_\varepsilon(t)\, dt = \int_0^\infty \psi_2(\mu)\, d_\mu \beta_1(x, y; \mu), \quad (5.10)$$

где

$$\beta_1(x, y; \mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \beta(x, y; \nu)\, d\nu,$$

$$\beta(x, y; \nu) = \int_0^1 \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial t} \cos \nu t\, dt. \quad (5.11)$$

В силу (5.9) и (5.10), тождество (5.7) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x} = \int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \{\alpha_1(x, y; \mu) + \beta_1(x, y; \mu)\}. \quad (5.12)$$

Далее, положим

$$S^*(x, y; \mu) = \iint_{(\mathscr{D})} f(\xi, \eta)\, \theta^*(x, y, \xi, \eta; \mu)\, d\xi d\eta, \quad (5.13)$$

где $\theta^*(x, y, \xi, \eta; \mu)$ — спектральная функция уравнения (5.1) для всего пространства $\mathscr{E}_2$ при $q(x, y) \equiv 0$, которая определяется по формуле (3.13).

Выписывая для функции $S^*(x, y; \mu)$ формулу, аналогичную формуле (5.12), вычитая ее из (5.12) и учитывая, что в этом случае $q(x, y) \equiv 0$, а следовательно, равна нулю функция $v(x, y, t)$ и, значит, функция $\beta_1(x, y; \mu)$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \left\{ \frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, y, \mu)}{\partial x} \right\} = \int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \beta_1(x, y; \mu). \quad (5.14)$$

Для доказательства теоремы о равносуммируемости дифференцированного разложения по собственным функциям задачи (5.1) — (2.1) и разложения в обычный двукратный интеграл Фурье нам понадобится ряд лемм, к доказательству которых мы и переходим.

ЛЕММА 5.1. *Если функция $q(x, y)$ в области $\mathscr{D}$ имеет ограниченные частные производные первого порядка, то при $\mu \to \infty$ имеет место оценка*

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \left\{ \frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x} \right\} = \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} |c_n| \left| \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right| = o(\mu^{\frac{3}{2}}). \tag{5.15}$$

*Оценка* (5.15) *имеет место равномерно в каждой области, содержащейся внутри области $\mathscr{D}$.*

Доказательство. Из определения функции $S(x, y; \mu)$, т. е. из формулы (5.5), и неравенства Коши—Буняковского следует:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} S(x, y; \mu) \right\} = \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} |c_n| \left| \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left( \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} c_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} \left[ \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.16}$$

В силу леммы (2.2),

$$\left( \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} \left[ \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O(\mu^{\frac{3}{2}}). \tag{5.17}$$

Далее, так как $f(x, y) \subset L_2(\mathscr{D})$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < +\infty.$$

Поэтому при $\mu \to \infty$

$$\sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} c_n^2 = o(1). \tag{5.18}$$

Лемма следует из неравенства (5.16) в силу оценок (5.17) и (5.18).

На основании леммы 2.5 аналогично доказывается

ЛЕММА 5.2. *Если функция $q(x, y)$ в области $\mathscr{D}$ имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha$ включительно, то при $\mu \to \infty$ имеет место оценка*

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{ D_{xy}^{\alpha} S(x, y; \mu) \} = \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} |c_n| \, | D_{xy}^{\alpha} \varphi_n(x, y) | = o(\mu^{\alpha + \frac{1}{2}}). \tag{5.19}$$

*Оценка* (5.19) *имеет место равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathscr{D}$.*

Из определения функции $S^*(x, y; \mu)$ непосредственно следует

ЛЕММА 5.3. *При $\mu \to \infty$ справедлива оценка*

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{ D_{xy}^{\alpha} S^*(x, y; \mu) \} = o(\mu^{\alpha + \frac{1}{2}}). \tag{5.20}$$

*Оценка* (5.20) *имеет место равномерно во всем пространстве $\mathscr{E}_2$.*

Положим

$$\Phi(x, y; \mu) = \frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, y, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{2}\beta_1(x, y; \mu). \tag{5.21}$$

Имеет место

ЛЕММА 5.4. *При тех же предположениях относительно функции $q(x, y)$, что и в лемме 5.1, и при $\mu \to \infty$ равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathcal{D}$, имеет место оценка:*

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\{\Phi(x, y; \mu)\} = o(\mu^{\frac{3}{2}}). \tag{5.22}$$

Доказательство. В самом деле, в силу лемм 5.1 и 5.3 (при $\alpha = 1$) и в силу определения функции $\beta_1(x, y; \mu)$, т. е. в силу формулы (5.11), мы имеем:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\{\Phi(x, y; \mu)\} \leqslant \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\left\{\frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x}\right\} + \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\left\{\frac{\partial S^*(x, y; \mu)}{\partial x}\right\} + \frac{1}{2}\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\{\beta_1(x, y; \mu)\} \leqslant$$

$$\leqslant \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\left\{\frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x}\right\} + \overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\left\{\frac{\partial S^*(x, y; \mu)}{\partial x}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\mu+1} |\beta(x, y; \nu)|\, d\nu = o(\mu^{\frac{3}{2}}) + o(1) = o(\mu^{\frac{3}{2}}). \tag{5.23}$$

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующей тауберовой теоремой, принадлежащей Б. М. Левитану [см. (3), приложение].

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $\sigma(\nu)$ — нечетная функция, определенная на всей числовой прямой и удовлетворяющая оценке ($\mu \to \infty$):*

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}}\{\sigma(\nu)\} = O(\mu^r). \tag{5.24}$$

*Предположим, что преобразование Бохнера — Стильтьеса функции $\sigma(\nu)$ в интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ эквивалентно нулю. Тогда для $s \geqslant 0$ справедлива оценка:*

$$\int_0^{\mu}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d\sigma(\nu) = O(\mu^{r-s}). \tag{5.25}$$

Теорема остается в силе, если в оценках (5.24) и (5.25) заменить $O$ на $o$.

Введем обозначения $(s \geqslant 0)$:

$$S_s(x, y; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu}\left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n \varphi_n(x, y), \tag{5.26}$$

$$S_s^*(x, y; \mu) = \int_0^{\mu}\left(1 - \frac{\nu^r}{\mu^2}\right)^s d_\nu\, S^*(x, y; \nu). \tag{5.27}$$

Функция $S_s(x, y; \mu)$ есть среднее по М. Риссу порядка $s$ разложения по собственным функциям оператора Шредингера, заданного в конечной

части $\mathscr{D}$ двумерного пространства $\mathscr{E}_2$, а функция $S^*(x, y; \mu)$ — среднее по М. Риссу порядка $s$ разложения в обычный двукратный интеграл Фурье функции, равной $f(x, y)$ для $(x, y) \in \mathscr{D}$ и равной нулю для прочих $(x, y)$.

ТЕОРЕМА 5.2 (о равной суммируемости). *Если функция $q(x, y)$ в области $\mathscr{D}$ имеет ограниченные частные производные первого порядка, а функция $f(x, y) \subset L_2(\mathscr{D})$, то равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри $\mathscr{D}$, имеет место равенство*

$$\lim_{\mu\to\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial x} S_{\frac{3}{2}}(x, y; \mu) - \frac{\partial}{\partial x} S_{\frac{3}{2}}^*(x, y; \mu)\right\} = 0,$$

*т. е. разность между средними по М. Риссу порядка $\frac{3}{2}$ производных первого порядка разложения по собственным функциям оператора Шредингера и разложения в обычный двукратный интеграл Фурье функции, равной $f(x, y)$ для $(x, y) \in \overline{\mathscr{D}}$ и равной нулю для прочих $(x, y)$, стремится к нулю равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathscr{D}$.*

Доказательство. В силу обозначения (5.21), тождество (5.14) можно переписать в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \Phi(x, y; \mu) = 0. \tag{5.28}$$

На основании леммы 1.13 работы ([4]), из (5.28) следует, что преобразование Бохнера—Стильтьеса функции $\Phi(x, y; \mu)$ эквивалентно нулю. Но тогда, в силу нечетности функции $\Phi(x, y; \mu)$ относительно $\mu$, применима теорема 5.1, откуда, на основании оценки (5.22), следует, что средние по М. Риссу порядка $\frac{3}{2}$ функции $\Phi(x, y; \mu)$ равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathscr{D}$, стремятся к нулю, т. е.

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu \Phi(x, y; \nu) = 0,$$

или, согласно обозначению (5.21).

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\infty \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu \left\{\frac{\partial S(x, y; \nu)}{\partial x} - \frac{\partial S^*(x, y; \nu)}{\partial x} - \frac{1}{2}\beta_1(x, y; \nu)\right\} = 0.$$

Поэтому, в силу обозначений (5.26) и (5.27), для доказательства теоремы достаточно доказать равенство

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu \beta_1(x, y; \nu) = 0. \tag{5.29}$$

В силу определения функции $\beta_1(x, y; \mu)$, т. е. в силу формулы (5.11), имеем:

$$\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu \beta_1(x, y; \nu) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial t}\left\{\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cos \nu t\, d\nu\right\} dt.$$

Как известно [см. (9), стр. 234],

$$\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cos \nu t\, d\nu = 2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\mu \frac{J_2(\mu t)}{(\mu t)^2}. \tag{5.30}$$

Поэтому

$$\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu \beta_1(x, y; \nu) = \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial t}\cdot\frac{J_2(\mu t)}{(\mu t)^2}\, d(\mu t).$$

Так как функция $q(x, y)$ имеет ограниченные частные производные первого порядка, то можно пользоваться оценкой (4.16), на основании которой получим:

$$\int_0^1 \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu \beta_1(x, y; \nu) = C\int_0^1 t^2 \frac{J_2(\mu t)}{(\mu t)^2}\, d(\mu t) = o(1),$$

что доказывает равенство (5.29) и тем самым теорему.

На основании лемм 5.2 и 5.3 аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 5.3. *Если функция $q(x, y)$ в области $\mathcal{D}$ имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha$ включительно, а $f(x, y) \subset L_2(\mathcal{D})$, то равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathcal{D}$, имеет место равенство:*

$$\lim_{\mu\to\infty}\{D^\alpha_{xy} S_{\alpha+\frac{1}{2}}(x, y; \mu) - D^\alpha_{xy} S^*_{\alpha+\frac{1}{2}}(x, y; \mu)\} = 0,$$

*т. е. разность между средними по М. Риссу порядка $\alpha+\frac{1}{2}$ производных порядка $\alpha$ разложения по собственным функциям оператора Шредингера и разложения в обычный двукратный интеграл Фурье функции, равной $f(x, y)$ для $(x, y) \in \overline{\mathcal{D}}$ и равной нулю для прочих $(x, y)$, стремится к нулю равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathcal{D}$.*

## § 6. Суммируемость и сходимость дифференцированных разложений по собственным функциям

Из теоремы о равной симмируемости дифференцированных разложений по собственным функциям оператора Шредингера и разложений в обычный двукратный интеграл Фурье функции с интегрируемым квадратом, доказанной в предыдущем параграфе, можно получить теорему о суммировании дифференцированных разложений по собственным функциям опера-

тора Шредингера к соответствующим производным разлагаемой функции, если имеется соответствующая теорема для дифференцированных разложений в обычный двукратный интеграл Фурье. Но метод работы, принадлежащий Б. М. Левитану, позволяет непосредственно доказать такую теорему для дифференцированных разложений по собственным функциям оператора Шредингера.

Кроме того, в настоящем параграфе мы докажем, что если разлагаемая функция удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то имеет место и теорема о сходимости дифференцированного разложения по собственным функциям.

В предыдущем параграфе мы вывели формулу [см. (5.12)]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x} = \int_{0}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \{\alpha_1(x, y; \mu) + \beta_1(x, y; \mu)\}, \tag{6.1}$$

где функции $\alpha_1(x, y; \mu)$ и $\beta_1(x, y; \mu)$ соответственно определяются равенствами (5.8) и (5.11).

Полагая

$$R(x, y; \mu) = \frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x} - \frac{1}{2}\alpha_1(x, y; \mu) - \frac{1}{2}\beta_1(x, y; \mu) \tag{6.2}$$

и учитывая нечетность функций $\alpha_1(x, y; \mu)$ и $\beta_1(x, y; \mu)$ относительно $\mu$, можно записать формулу (6.1) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu R(x, y; \mu) = 0 \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1). \tag{6.3}$$

Из леммы 5.1 и определения функций $\alpha_1(x, y; \mu)$ и $\beta_1(x, y; \mu)$ непосредственно следует

ЛЕММА 6.1. *Если функция $q(x, y)$ в области $\mathscr{D}$ имеет ограниченные частные производные первого порядка, а функция $f(x, y) \subset L_2(\mathscr{D})$ и имеет ограниченные частные производные первого порядка, то при $\mu \to \infty$ равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathscr{D}$, справедлива оценка*

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{R(x, y; \mu)\} = o(\mu^{\frac{3}{2}}). \tag{6.4}$$

На основании леммы 1.1.3 работы ([4]), из (6.3) следует, что преобразование Бохнера — Стильтьеса функции $R(x, y; \mu)$ эквивалентно нулю. Но тогда, в силу нечетности функции $R(x, y; \mu)$ относительно $\mu$, вытекающей из нечетности функций $S(x, y; \mu)$, $\alpha_1(x, y; \mu)$ и $\beta_1(x, y; \mu)$, применима теорема 5.1, откуда, на основании оценки (6.4), следует, что средние по

М. Риссу порядка $\frac{3}{2}$ функции $R(x, y; \mu)$ равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathcal{D}$, стремятся к нулю, т. е.

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu R(x, y; \nu) = 0,$$

или, в силу обозначения (6.2) и равенства (5.29),

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu \frac{\partial S(x, y; \nu)}{\partial x} = \lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right) d_\nu\, \alpha_1(x, y; \nu). \tag{6.5}$$

ЛЕММА 6.2. *Если функция $q(x, y)$ в области $\mathcal{D}$ имеет ограниченные частные производные первого порядка, а функция $f(x, y) \subset L_2(\mathcal{D})$ и имеет непрерывные частные производные первого порядка, то справедливо равенство*

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu \alpha_1(x, y; \nu) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}. \tag{6.6}$$

*Равенство* (6.6) *имеет место равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области $\mathcal{D}$.*

Доказательство. В силу определения функции $\alpha_1(x, y; \mu)$, т. е. формулы (5.8), мы имеем:

$$\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu\, \alpha_1(x, y; \mu) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\partial^2 u_0(x, y, t)}{\partial x\, \partial t}\left(\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cos \nu t d\nu\right) dt,$$

откуда, на основании формулы (5.30), получим:

$$\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu\, \alpha_1(x, y; \nu) =$$

$$= \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{\partial^2 u_0(x, y, t)}{\partial x\, \partial t} \cdot \frac{J_2(\mu t)}{(\mu t)^2}\, d(\mu t).$$

Если функция $f(x, y)$ в окрестности точки $(x, y)$ имеет непрерывную первую производную (по $x$), то, в силу формулы (4.13),

$$\frac{\partial^2 u_0(x, y, t)}{\partial x\, \partial t} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \varphi(x, y, t),$$

причем при $t \to 0$

$$\varphi(x, y, t) = o(t). \tag{6.7}$$

Поэтому

$$\int_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} d_\nu \alpha_1(x, y; \nu) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{J_2(\mu t)}{(\mu t)^2} d(\mu t) +$$

$$+ C \int_0^1 \varphi(x, y, t) \frac{J_2(\mu t)}{(\mu t)^2} d(\mu t) = i_1 + i_2. \tag{6.8}$$

Так как [см. ([12]), стр. 428]

$$\int_0^\infty \frac{J_2(u)}{u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)},$$

то

$$\lim_{\mu\to\infty} i_1 = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{J_2(u)}{u^2} du = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}. \tag{6.9}$$

С другой стороны, в силу (6.7), имеем

$$i_2 = o\left(\frac{1}{\mu}\int_0^\mu \frac{J_2(u)}{u} du\right) = o(1). \tag{6.10}$$

Поэтому лемма следует из (6.8), в силу (6.9) и (6.10).

Из равенства (6.5), в силу леммы 6.2, следует

ТЕОРЕМА 6.1 (о суммировании). *Если функция $q(x, y)$ в окрестности точки $(x_0, y_0)$ имеет ограниченные частные производные первого порядка, а функция $f(x, y) \subset L_2(\mathcal{D})$ и в окрестности точки $(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, то в точке $(x_0, y_0)$ имеет место равенство*

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\partial}{\partial x} S_{\frac{3}{2}}(x, y; \mu)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \tag{6.11}$$

*т. е. первая производная разложения функции $f(x, y)$ по собственным функциям оператора Шредингера в точке $(x_0, y_0)$ суммируема по методу М. Рисса порядка $\frac{3}{2}$ к значению $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$.*

*Если условия дифференцируемости, наложенные на $q(x, y)$ и $f(x, y)$, выполнены в некоторой замкнутой области $d$, целиком содержащейся внутри области $\mathcal{D}$, то равенство (6.11) имеет место равномерно в $d$.*

На основании леммы 5.2, аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 6.2. *Если функция $f(x, y) \subset L_2(\mathcal{D})$ и в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $\alpha$ включительно, а функция $q(x, y)$ — ограниченные частные производные до порядка $\alpha$ включительно, то в точке $(x_0, y_0)$ имеет место равенство*

$$\lim_{\mu\to\infty} D_{xy}^\alpha S_{\alpha+\frac{1}{2}}(x, y; \mu)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = D_{xy}^\alpha f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \tag{6.12}$$

*т. е. производная порядка $\alpha$ разложения функции $f(x, y)$ по собственным функциям оператора Шредингера в точке $(x_0, y_0)$ суммируема по методу М. Рисса порядка $\alpha + \frac{1}{2}$ к значению $D_{xy}^\alpha f(x, y)\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$.*

*Если условия дифференцируемости, наложенные на $q(x, y)$ и $f(x, y)$, выполнены в некоторой замкнутой области $d$, целиком содержащейся внутри области $\mathcal{D}$, то равенство (6.12) имеет место равномерно в $d$.*

ТЕОРЕМА 6.3 (о сходимости). *Пусть функция $f(x, y)$ в области $\mathcal{D}$ имеет вторые частные производные, причем $\Delta f - q(x, y) f \subset L_2(\mathcal{D})$, и пусть $f(x, y)$ удовлетворяет краевому условию $\left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0$. Предположим, что в окрестности внутренней (по отношению к $\mathcal{D}$) точки $(x_0, y_0)$ функция $q(x, y)$ имеет ограниченные частные производные первого порядка, а функция $f(x, y)$ — ограниченные частные производные второго порядка. Тогда*

$$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\mu_n<\mu} c_n \left.\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \tag{6.13}$$

*т. е. первая производная разложения функции $f(x, y)$ по собственным функциям оператора Шредингера в точке $(x_0, y_0)$ сходится к значению $\left.\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$.*

*Если условия дифференцируемости, наложенные на $q(x, y)$ и $f(x, y)$, выполнены в некоторой замкнутой области $d$, целиком содержащейся внутри $\mathcal{D}$, то равенство (6.13) имеет место равеномерно в $d$.*

Доказательство. Если функции $q(x, y)$ и $f(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы, то справедливо равенство (4.17) и, следовательно, тождество (5.6) после дифференцирования по $x$ можно переписать в виде ($\varepsilon = 1$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \left.\frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} \int_0^1 g_\varepsilon(t)\, dt + \int_0^1 \psi(x_0, y_0, t)\, g_\varepsilon(t)\, dt. \tag{6.14}$$

Обращая равенство (2.2) и интегрируя от 0 до 1, получим:

$$\int_0^1 g_\varepsilon(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu) \frac{\sin\mu}{\mu}\, d\mu. \tag{6.15}$$

Имеем:

$$\begin{gathered} \alpha_1(x_0, y_0, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \alpha(x_0, y_0, t)\, d\nu, \\ \alpha(x_0, y_0, \nu) = \int_0^1 \psi(x_0, y_0, t) \cos \nu t\, dt. \end{gathered} \tag{6.16}$$

В силу равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье, из (2.2) и из (6.16) находим:

$$\int_0^1 \psi(x_0, y_0, t)\, g_\varepsilon(t)\, dt = \int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \alpha_1(x_0, y_0; \mu). \tag{6.17}$$

На основании (6.15) и (6.17), тождество (6.14) можно записать в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu R(x_0, y_0; \mu) = 0 \quad (\varepsilon = 1), \tag{6.18}$$

где

$$R(x, y; \mu) = \frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \frac{\sin \nu}{\nu} d\nu - \alpha_1(x, y; \mu). \qquad (6.19)$$

Так как, по условию, $\Delta f - q(x, y) f \subset L_2(\mathscr{D})$ и $f(x, y)$ удовлетворяет краевому условию

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial n} \right|_\Gamma = 0,$$

то, применяя тождество Грина, мы получим:

$$c_n = \frac{d_n}{\mu_n^2}, \qquad (6.20)$$

где

$$d_n = \iint_{(\mathscr{D})} \{\Delta f(x, y) - q(x, y) f(x, y)\} \varphi_n(x, y) \, dx \, dy.$$

Далее, в силу (6.20) и определения функции $S(x, y; \mu)$, имеем:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \left\{ \frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x} \right\} = \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} |c_n| \cdot \left| \frac{\partial \varphi_n(x, y; \mu)}{\partial x} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu^2} \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} |d_n| \left| \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right|.$$

На основании неравенства Коши — Буняковского, отсюда следует:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \left\{ \frac{\partial S(x, y; \mu)}{\partial x} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left( \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} \left[ \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} d_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\mu^2}. \qquad (6.21)$$

Так как $\Delta f - q(x, y) f \subset L_2(\mathscr{D})$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 < +\infty$$

и поэтому при $\mu \to \infty$

$$\sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} d_n^2 = o(1). \qquad (6.22)$$

В силу леммы 2.2 и оценки (6.22), из неравенства (6.21) следует важная оценка ($\mu \to \infty$):

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} S(x, y; \mu) \right\}_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = o(1). \qquad (6.23)$$

На основании этой оценки и определения функции $\alpha_1(x, y; \mu)$, т. е. формулы (6.16), из (6.19) следует оценка:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{R(x_0, y_0; \mu)\} = o(1).$$

Согласно теореме 1.4.2 работы ([4]) отсюда вытекает равенство:

$$\lim_{\mu\to\infty} R(x_0, y_0; \mu) = 0. \tag{6.24}$$

Далее, как известно,

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\mu} \frac{\sin\nu}{\nu}\,d\nu = 1. \tag{6.25}$$

Покажем, что

$$\lim_{\mu\to\infty} \alpha_1(x_0, y_0; \mu) = 0. \tag{6.26}$$

В самом деле, в силу определения функции $\alpha_1(x, y; \mu)$, мы имеем:

$$\alpha_1(x_0, y_0; \mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \psi(x_0, y_0, t)\frac{\sin\mu t}{t}\,dt. \tag{6.27}$$

Нетрудно заключить, что равенство (6.26) следует из (6.27) на основании оценки (4.18) и леммы Римана — Лебега.

Утверждение теоремы следует из (6.24) в силу (6.19), (6.25) и (6.26).

## § 7. Разложения и дифференцирование разложений по собственным функциям в случае неограниченно растущего потенциала

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\}\,u = 0 \tag{7.1}$$

во всем двумерном пространстве $\mathcal{E}_2$. Предположим, что $q(x, y)$ — действительная непрерывная функция и при $r = \{x^2 + y^2\}^{\frac{1}{2}} \to \infty$

$$q(x, y) \to +\infty. \tag{7.2}$$

Известно, что при выполнении условия (7.2) уравнение (7.1) имеет чисто точечный спектр, причем собственные значения неограниченно растут и имеют единственную предельную точку на бесконечности. Так как функция $q(x, y)$ ограничена снизу, то, во-первых, можно предполагать, что $q(x, y) > 0$, так как это предположение влечет за собой замену числа $\lambda$; во-вторых, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что спектр уравнения (7.1) неотрицателен.

Обозначим через $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots, \mu_n^2, \ldots$ собственные значения, а через $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y), \ldots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции уравнения (7.1).

При выполнении условия (7.2) собственные функции $\varphi_n(x, y)$ на бесконечности экспоненциально убывают и поэтому для построения ряда Фурье нет нужды предполагать, что разлагаемая функция имеет интегрируемый квадрат.

В настоящем параграфе, используя одну асимптотическую формулу для распределения собственных значений уравнения (7.1), полученную нами в работе ([19]), мы изучим вопросы как разложения, так и дифферен-

цирования разложений по собственным функциям уравнения (7.1) функций, растущих на бесконечности как многочлен.

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть функция* $q(x, y)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1. *При* $r \leqslant 1$

$$|q(x + r\cos\vartheta, y + r\sin\vartheta) - q(x, y)| < Ar\{q(x, y)\}^a,$$

*где* $A$ *и* $a$ — *некоторые константы, причем* $0 < a < \frac{3}{2}$.

2. *При* $r > 1$

$$q(x + r\cos\vartheta, y + r\sin\vartheta) < C\exp\left\{\frac{1}{2} r\sqrt{q(x, y)}\right\},$$

*где* $C$ — *некоторое постоянное число.*

3. *Существуют такие константы* $B > 0$ *и* $\delta > 0$, *что для достаточно больших* $r = \{x^2 + y^2\}^{\frac{1}{2}}$ *выполняется неравенство*

$$q(x, y) > Br^\delta.$$

*Пусть для некоторого* $\tau \geqslant 0$ *функция* $f(x, y)$ *удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x, y)}{q^\tau(x, y)}\, dx\, dy < +\infty. \tag{7.3}$$

*Положим*

$$c_n = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\varphi_n(x, y)\, dx\, dy.$$

*Тогда в каждой точке непрерывности* $(x_0, y_0)$ *функции* $f(x, y)$ *имеет место равенство* $\left(s > \tau + \frac{2}{\delta} + \frac{3}{2}\right)$

$$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n \varphi_n(x_0, y_0) = f(x_0, y_0),$$

*т. е. средние по М. Риссу порядка* $> \tau + \frac{2}{\delta} + \frac{3}{2}$ *разложения функции* $f(x, y)$ *по собственным функциям оператора Шредингера, заданного во всем двумерном пространстве, в точке* $(x_0, y_0)$ *стремятся к значению* $f(x_0, y_0)$.

Доказательство. Положим

$$a_n^{(\tau)} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} q^\tau(x, y)\,\varphi_n^2(x, y)\, dx\, dy. \tag{7.4}$$

В работе ([19]) была установлена оценка ($\mu \to \infty$):

$$\sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu + 1} a_n^{(\tau)} = O\left(\mu^{2\tau + \frac{4}{\delta} + 2}\right). \tag{7.5}$$

Далее, мы имеем:

$$|c_n| \leqslant \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x,\ y)|}{q^{\frac{\tau}{2}}(x,\ y)} |\varphi_n(x,\ y)|\, q^{\frac{\tau}{2}}(x,\ y)\, dx\, dy.$$

В силу неравенства Коши — Буняковского, отсюда следует:

$$|c_n| \leqslant \left\{ \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x,\ y)}{q^{\tau}(x,\ y)}\, dx\, dy \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(x,\ y)\, q^{\tau}(x,\ y)\, dx\, dy \right\}^{\frac{1}{2}},$$

что, в силу (7.3) и (7.4), дает:

$$|c_n| \leqslant C\, \{a_n^{(\tau)}\}^{\frac{1}{2}}, \tag{7.6}$$

При фиксированных $x$ и $y$, на основании неравенства Коши — Буняковского, имеем:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{S(x,\ y;\ \mu)\} = \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} |c_n \varphi_n(x,\ y)| \leqslant$$

$$\leqslant \Big( \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} c_n^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} \varphi_n^2(x,\ y) \Big)^{\frac{1}{2}},$$

где функция $S(x,\ y;\ \mu)$ имеет прежнее значение. Отсюда, учитывая (7.6), в силу леммы 2.1 и оценки (7.5), получим:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \{S(x,\ y;\ \mu)\} = \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} |c_n \varphi_n(x,\ y)| = O\big(\mu^{\tau + \frac{2}{\delta} + \frac{3}{2}}\big) \quad (\mu \to \infty). \tag{7.7}$$

Аналогично, в силу леммы 2.2 и оценки (7.5), найдем:

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{\mathrm{V}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} S(x,\ y;\ \mu) \right\} = \sum_{\mu \leqslant \mu_n \leqslant \mu+1} \left| c_n \frac{\partial \varphi_n(x,\ y)}{\partial x} \right| = O\Big(\mu^{\tau + \frac{2}{\delta} + \frac{5}{2}}\Big). \tag{7.8}$$

Опираясь на оценку (7.7), доказательство теоремы можно закончить точно так же, как доказательство теоремы 6.1.

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть функции $q(x,\ y)$ и $f(x,\ y)$ удовлетворяют условиям теоремы 7.1 и, кроме того, в некоторой окрестности точки $(x_0,\ y_0)$ функция $q(x,\ y)$ имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha$ включительно. Тогда при $s > \tau + \frac{2}{\delta} + \frac{3}{2} + \alpha$ имеет место равенство*

$$\lim_{\mu \to \infty} \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n D_{xy}^{\alpha} \varphi_n(x,\ y)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = D_{xy}^{\alpha} f(x,\ y)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \tag{7.9}$$

*т. е. средние по М. Риссу порядка $> \tau + \frac{2}{\delta} + \frac{3}{2} + \alpha$ дифференцированных разложений порядка $\alpha$ функции $f(x,\ y)$ по собственным функциям оператора Шредингера, заданного во всем пространстве, в точке $(x_0,\ y_0)$ стремятся к значению $D_{xy}^{\alpha} f(x,\ y)\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$.*

*Если условия дифференцируемости, наложенные на* $q(x, y)$ *и* $f(x, y)$, *выполнены в некоторой замкнутой конечной области* $d$, *то равенство* (7.9) *имеет место равномерно в* $d$.

Доказательство следует из оценки (7.8) так же, как при доказательстве теоремы 6.1.

Институт математики и механики
Ак. наук Армянской ССР

Поступило
30. XII. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Левитан Б. М., Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\}u = 0$, Труды Моск. матем. об-ва, IV (1955), 237—290.

[2] Левитан Б. М., О дифференцировании разложений по собственным функциям уравнения Шредингера, Труды Моск. матем. об-ва, VII (1958), 269—290.

[3] Левитан Б. М., О дифференцировании спектральной функции оператора Лапласа, Матем. сборн., 39(81) : 1 (1956), 37—50.

[4] Левитан Б. М., О разложении по собственным функциям оператора Лапласа, Матем. сборн., 35(77) : 2(1954), 267—316.

[5] Левитан Б. М., О разложении по собственным функциям оператора Шредингера в случае неограниченно растущего потенциала, Доклады Ак. наук СССР, 103, № 2 (1955), 191—194.

[6] Левитан Б. М., Саргсян И. С., Теорема о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля, Известия Ак. наук Арм. ССР, серия физ.-матем., 9, № 3 (1956), 3—16.

[7] Левитан Б. М., Саргсян И. С., К статье «Теорема о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля», Известия Ак. наук Арм. ССР, серия физ.-матем. наук, 9, № 7 (1956), 105.

[8] Левитан Б. М. и Саргсян И. С., Асимптотические оценки производных собственных функций уравнения Шредингера, Известия Ак. наук Арм. ССР, серия физ.-матем. наук, 10, № 5 (1957), 19—32.

[9] Титчмарш Е. С., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.— Л., 1948.

[10] Titchmarch E. C., Some properties of eigenfunction expansions, Quart. J. of Math., Oxford (2), Vol. 5, № 17 (1954), 59—70.

[11] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, Гостехиздат, М.— Л., 1951.

[12] Ватсон Д. Н., Теория бесселевых функций, т. 1, ИЛ, 1949.

[13] Pleijel A., Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibration, Ark. Mat. Astr. och. Fys., 27A, № 13 (1940), 1—100.

[14] Carleman T., Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, Attonde Skand. Matematikerkongressen i Stockholm, 1934.

[15] Саргсян И. С., Суммирование производных разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля, Доклады Ак. наук СССР, 104, № 6 (1955), 821—824.

[16] Саргсян И. С., Теоремы о суммировании производных разложений в обычный и обобщенный интеграл Фурье, Доклады Ак. наук Арм. ССР, 23, № 1 (1956), 3—8.

[17] Саргсян И. С., О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21(1957), 263—282.

[18] Саргсян И. С., Асимптотическое поведение производных спектральной функции оператора Штурма—Лиувилля, Известия Ак. наук Арм. ССР, серия физ.-матем., 10, № 3 (1957), 3—16.

[19] Саргсян И. С., Об одной асимптотической формуле распределения собственных значений оператора Шредингера в двумерном пространстве, Доклады Ак. наук Арм. ССР, 27, № 3 (1958), 129—137.

[20] Саргсян И. С., Сходимость дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Шредингера на плоскости, Доклады Ак. наук Арм. ССР, 25, № 4 (1957), 163—169.

[21] Саргсян И. С., О разложении и дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Шредингера в случае неограниченно растущего потенциала, Доклады Ак. наук Арм. ССР, 27, № 4 (1958), 193—199.

[22] Саргсян И. С., Об асимптотических оценках производных спектральной функции оператора Шредингера в двумерном пространстве, Известия Ак. наук Арм. ССР, серия физ.-мат., 11, № 6 (1958), 15—30.

[23] Саргсян И. С., О дифференцировании спектральной функции оператора $-\Delta + q(x, y)$, Доклады Ак. наук Арм. ССР, 26, № 3 (1958), 129—134.

[24] Саргсян И. С., О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора $-\Delta + q(x, y)$, Доклады Ак. наук Арм. ССР, 26, № 4 (1958), 201—205.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 489—502

А. И. МАЛЬЦЕВ

# РЕГУЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

Вводится понятие регулярного произведения, обобщающее понятие прямого произведения моделей. Для регулярных произведений доказываются теоремы, частными случаями которых являются теоремы А. Мостовского ([7]) и Р. Воота ([8]) о прямых произведениях моделей. Предварительно изучается один частный вид модельных соответствий, определенных в работе ([5]).

В работе ([5]) было введено понятие аксиоматизируемого соответствия между моделями фиксированных классов. § 1 настоящей статьи посвящен рассмотрению тех модельных соответствий, которые могут быть заданы формулами узкого исчисления предикатов (формулами УИП), не содержащими дополнительных предикатных символов. Рассмотрение это основывается на одной элементарной лемме о приведении формул УИП с разделяющимися переменными. В качестве иллюстрации выводятся результаты С. Фефермана ([8]) о формулах, истинных на прямых произведениях конечного числа моделей.

В § 2 изучаются произведения бесконечного числа моделей. В этом параграфе вводится новое понятие регулярного произведения моделей, более общее, чем понятие прямого произведения. Опираясь на идею разделяющихся переменных, использованную в § 1, и на теорему Г. Бемана ([1]) о нормальной форме формул с одночленными предикатными символами, для каждой замкнутой формулы УИП $\mathfrak{P}$, относящейся к регулярному произведению моделей $\Pi\mathfrak{M}_\alpha$, удается построить эквивалентное $\mathfrak{P}$ выражение $\mathfrak{A}$, составленное с помощью операций &, $\vee$, $\neg$ из конечного числа высказываний $\mathfrak{D}$ вида: «*среди сомножителей существуют такие модели* $\mathfrak{M}_{\alpha_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\alpha_m}$, *на которых соответственно истинны формулы* $\mathfrak{P}_{\beta_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{\beta_m}$, *причем* $\alpha_{i_1} \neq \alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{i_p} \neq \alpha_{j_p}$», где $\mathfrak{P}_{\beta_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{\beta_m}$ — эффективно конструируемые замкнутые формулы УИП. Таким образом, чтобы иметь возможность судить об истинности или ложности произвольно заданной формулы УИП $\mathfrak{P}$ на регулярном произведении, достаточно (в общем случае и необходимо) уметь решать вопрос об истинности или ложности лишь формул указанного вида, относящихся в основном к сомножителям. Это — основной результат работы.

Предполагая число сомножителей в регулярном (правильном в смысле § 2) произведении $\Pi\mathfrak{M}_\alpha$ бесконечным, а все сомножители — изоморфными одной и той же модели $\mathfrak{M}_0$, мы видим непосредственно, что указанные выше выражения $\mathfrak{D}$ приводятся к высказываниям вида: «*на* $\mathfrak{M}_0$ *имеет место формула* $\mathfrak{P}_{\beta_1} \& \ldots \& \mathfrak{P}_{\beta_m}$». Следовательно, в случае регулярной степени

$\Pi\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}_0^{\aleph_\xi}$ вопрос об истинности фиксированной формулы УИП $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{M}_0^{\aleph_\xi}$ сводится к вопросу об истинности подходящей эффективно конструируемой формулы УИП на $\mathfrak{M}_0$. Для случая прямых степеней это доказано А. Мостовским (7).

Предположим, что в правильном регулярном произведении $\mathfrak{M} = \Pi\mathfrak{M}_\alpha$ сомножители разбиты на классы изоморфных между собою моделей, что каждый класс содержит бесконечное число моделей и что совокупность $\mathfrak{M}_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ является системой представителей указанных классов. Тогда каждое упомянутое выше выражение $\mathfrak{D}$ приводится к конъюнкции выражений вида: «*среди моделей* $\mathfrak{M}_\gamma$ *существует модель, на которой истинна формула* $\mathfrak{P}_\beta$». Отрицание этого выражения имеет вид: «*на каждой модели* $\mathfrak{M}_\gamma$ *истинно выражение* $\neg\mathfrak{P}_\beta$». Следовательно, мы будем иметь алгоритм для распознавания истинных и ложных формул УИП на $\Pi\mathfrak{M}_\alpha$, если существует алгоритм, распознающий истинность и ложность формул УИП одновременно на всех $\mathfrak{M}_\gamma$. Для случая прямых произведений этот результат сформулирован Р. Воотом (8).

Помимо большей общности результатов § 2 сравнительно с соответствующими результатами А. Мостовского и Р. Воота, доказательства в § 2 кажутся более простыми, чем у А. Мостовского, в основном благодаря использованию преобразования Г. Бемана. Сравнить методы § 2 с методами Р. Воота автор не мог, так как упоминавшиеся результаты Р. Воота опубликованы пока без доказательств.

## § 1. Расслаивающиеся соответствия

1.1. Пусть $K_1, K_2$ — заданные классы моделей с основными предикатами $P_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ и $Q_\delta$ $(\delta \in \Delta)$. Основные множества моделей этих классов условимся обозначать соответственно через $M$, $N$. Введем новые предикатные символы $R_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ вообще смешанного характера, т. е. часть аргументов каждого $R_\lambda$ будет пробегать множество $M$, а часть может пробегать множество $N$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ некоторую систему замкнутых формул (аксиом) узкого исчисления предикатов (УИП), записанных с помощью предикатных символов $P_\gamma$, $Q_\delta$, $R_\lambda$. Эти аксиомы могут содержать знак равенства. Все предметные переменные в них, а также кванторы, будут предполагаться специализированными. Таким образом, если предметное переменное $x$ будет первого рода, то квантор $(\exists x)$ будет означать высказывание: «в множестве $M$ существует такой элемент $x$, что...» [ср. (5)]. Модели $\mathfrak{M} \in K_1$, $\mathfrak{N} \in K_2$ называются связанными $\mathfrak{S}$-соответствием, если на $M$, $N$ возможно определить предикаты $R_\lambda$ так, что все аксиомы $\mathfrak{S}$ будут истинными.

Соответствия, определяемые указанным способом, называются аксиоматизируемыми. Аналогично определяются аксиоматизируемые соответствия между моделями любого числа классов [см. (5)].

Хотя в приведенных определениях классы $K_1$, $K_2$ могли быть произвольными, при рассмотрении аксиоматизируемых соответствий предполагается, что $K_1$ и $K_2$ — классы в с е х моделей данного типа. Если же $K_1$, $K_2$ — аксиоматизируемые классы, то системы аксиом, характеризующие $K_1$, $K_2$, включаются в систему $\mathfrak{S}$ и тем самым дело сводится к основному

случаю классов «всех» моделей. Заметим еще, что индивидуальные символы не предполагаются в аксиомах. Вместо них в случае необходимости можно ввести новые одноместные предикаты, поскольку число предикатных символов не ограничивается и может быть бесконечным.

К числу простейших соответствий можно отнести соответствия, которые допускают аксиоматизацию посредством системы $\mathfrak{S}$ аксиом, не содержащих вспомогательных смешанных предикатов $R_\lambda$, и, таким образом, записываемых с помощью лишь основных предикатных символов рассматриваемых классов. Эти соответствия условимся называть *расслаивающимися*. Некоторым оправданием такому названию может служить

ТЕОРЕМА 1. *Каждое расслаивающееся соответствие между моделями классов $K_1, \ldots, K_s$ может быть охарактеризовано системой аксиом вида*

$$\mathfrak{A}_1^{(\mu)} \vee \mathfrak{A}_2^{(\mu)} \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_s^{(\mu)} \quad (\mu \in M),$$

*где $\mathfrak{A}_i^{(\mu)}$ — аксиома, записанная в терминах класса $K_i$ $(i = 1, \ldots, s)$.*

Эта теорема непосредственно вытекает из следующей чисто комбинаторной леммы.

ЛЕММА. *Пусть в формуле* УИП

$$\mathfrak{B} = (Q_1 x_1) \ldots (Q_m x_m)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

($Q_i = \forall, \exists$, $\mathfrak{A}$ кванторов не содержит) *множество всех предметных переменных $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$, встречающихся в записи $\mathfrak{A}$, удалось разбить на непересекающиеся классы $I_1, \ldots, I_s$ так, что никакой член вида $P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ или $x_i = x_j$ из $\mathfrak{A}$ не содержит переменных разных классов. Тогда регулярным процессом можно найти такие формулы $\mathfrak{B}_{ij}$, что формула $\mathfrak{B}$ будет эквивалентна выражению*

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_{11} \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_{1k_1} \,\&\ldots\&\, \mathfrak{B}_{p1} \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_{pk_p},$$

*причем все предметные переменные каждой формулы $\mathfrak{B}_{ij}$ принадлежат одному из указанных классов, а префикс $\mathfrak{B}_{ij}$ является подпрефиксом префикса $\mathfrak{B}$.*

Процесс приведения $\mathfrak{B}$ к виду $\mathfrak{C}$ в основном совпадает с процессом, известным в теории формул с одинарными предикатами [см. ([1])], и мы лишь для полноты изложения приводим доказательство.

Если $\mathfrak{B}$ кванторов не имеет, то утверждение леммы очевидно, так как в качестве $\mathfrak{B}_{ij}$ в этом случае можно взять члены $P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ $x_i = x_j$, или их отрицания. Далее пользуемся индукцией по числу кванторов в $\mathfrak{B}$. Пусть для $m-1$ кванторов лемма верна. Тогда для формулы

$$(Q_2 x_2) \ldots (Q_m x_m)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

найдется эквивалентная ей формула вида $\mathfrak{C}$ и, значит, будем иметь эквивалентность

$$\mathfrak{B} \sim (Q_1 x_1)(\mathfrak{B}_{11} \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_{1k_1} \,\&\ldots\&\, \mathfrak{B}_{p1} \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_{pk_p}).$$

Допустим, что $Q_1 = \forall$. Тогда

$$\mathfrak{B} \backsim (x_1)(\mathfrak{B}_{11} \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_{1k_1}) \& \ldots \& (x_1)\ (\mathfrak{B}_{p1} \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_{pk_p}).$$

Объединяя в $\mathfrak{B}_{i1} \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_{ik_i}$ сомножители с предметными переменными того же, что и $x_1$, класса в один член, например в $\mathfrak{B}_{i1}$, мы сможем переписать $\mathfrak{B}$ в требуемой форме:

$$\mathfrak{B} \backsim (x_1)\, \mathfrak{B}_{11} \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_{1k_1} \& \ldots \& (x_1)\ \mathfrak{B}_{p1} \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_{pk_p}.$$

Если в $\mathfrak{B}$ имеем $Q_1 = \exists$, то $\mathfrak{C}$ переписываем в дизъюнктивной нормальной форме и затем поступаем двойственно вышеизложенному.

Таким образом, лемма доказана, а вместе с нею доказана и теорема 1, так как в каждой аксиоме из системы, характеризующей соответствие, предметные переменные, относящиеся к классу $K_i$, встречаются в качестве аргументов только у предикатов этого же класса $K_i$ и не сталкиваются с предметными переменными, относящимися к другим классам $K_j$.

1.2. Класс моделей $K$ называется *минимальным*, если он аксиоматизируем и не содержит никакого отличного от $K$ аксиоматизируемого подкласса. Очевидно, минимальные классы — это те классы, которые могут быть охарактеризованы полной системой аксиом УИП. Каждая модель содержится в одном и только одном минимальном классе. В качестве системы аксиом, характеризующих этот класс, можно взять совокупность всех аксиом, истинных на заданной модели.

Пусть $\sigma$ — какое-нибудь соответствие между моделями классов $K_1$, $K_2$. Тогда каждому подклассу $L_1 \subseteq K_1$ будет отвечать определенный подкласс $L_1\sigma$ в $K_2$, состоящий из всех тех $K_2$-моделей, которые находятся в $\sigma$-соответствии хотя бы с одной моделью из $L_1$. Класс $K_1$, как и любой класс, расслаивается на минимальные аксиоматизируемые подклассы, которым в $K_2$ отвечают подклассы, вообще говоря, сложной природы.

*Если соответствие $\sigma$ между моделями классов $K_1$, $K_2$ расслаивающееся, то каждому минимальному подклассу $L_m \subseteq K_1$ в $K_2$ отвечает аксиоматизируемый класс $L_m\sigma$, причем $L_m\sigma = \mathfrak{M}\sigma$ для $\mathfrak{M} \in L_m$.*

В самом деле, пусть $\sigma$ и $L_m$ задаются соответственно системами аксиом $\{\mathfrak{A}_1^\mu \vee \mathfrak{A}_2^\mu\}$ и $\mathfrak{C} = \{\mathfrak{C}^\nu\}$. Ввиду полноты системы $\mathfrak{C}$, для каждого $\mu$ из $\mathfrak{C}$ следует либо $\mathfrak{A}_1^\mu$, либо $\neg\mathfrak{A}_1^\mu$. Класс $L_m\sigma$ характеризуется системой тех аксиом $\mathfrak{A}_2^\mu$, для которых $\mathfrak{C} \to \neg\mathfrak{A}_1^\mu$. Ввиду минимальности $L_m$, произвольная аксиома $\mathfrak{A}_1^\mu$ тогда и только тогда истинна на $\mathfrak{M} \in L_m$, когда $\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}_1^\mu$, откуда

$$L_m\sigma = \mathfrak{M}\sigma.$$

По аналогии с понятием псевдоаксиоматизируемых классов моделей [см. ([6])] условимся говорить, что модельное соответствие $\sigma$ псевдоаксиоматизируемо, если для любой системы $\mathfrak{T}$ аксиом УИП, записываемых с помощью предикатных символов основных классов и вспомогательных предикатных символов, связывающих элементы основных множеств моделей рассматриваемых классов, из того, что для каждой конечной части $\mathfrak{T}_0$ системы $\mathfrak{T}$ существуют модели, удовлетворяющие $\mathfrak{T}_0$ и связанные соответ-

ствием $\sigma$, следует существование моделей, удовлетворяющих $\mathfrak{T}$ и связанных соответствием $\sigma$.

Аналогичным образом можно ввести понятия псевдорасслаивающегося и псевдопроективного соответствий. Для этого следует в качестве аксиом системы $\mathfrak{T}$ допускать лишь аксиомы, записываемые с помощью предикатных символов одних основных классов или же с помощью смешанных предикатных символов, связывающих элементы основных множеств моделей заданных классов с элементами вспомогательных множеств [см. ([5])].

Из основной локальной теоремы УИП [см. ([5])] непосредственно следует, что *каждое проективное соответствие является псевдопроективным.*

Заметим, что из псевдопроективности следует псевдоаксиоматизируемость, а из псевдоаксиоматизируемости следует псевдорасслаиваемость соответствия.

ТЕОРЕМА 2. *Соответствие $\sigma$ между моделями классов $K_1$, $K_2$ тогда и только тогда расслаивающееся, когда оно псевдорасслаивающееся и всякой модели произвольного минимального подкласса из $K_1$ отвечает в $K_2$ один и тот же аксиоматизируемый подкласс.*

Необходимость условий установлена выше. Докажем достаточность. По условию, соответствие $\sigma$ описывается связями вида

$$\{\mathfrak{C}_\lambda\} \rightarrow \mathfrak{B},$$

где $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$—полная система аксиом типа $K_1$. Из псевдорасслаиваемости $\sigma$ следует, что для каждой связи указанного вида должна существовать и связь вида

$$\mathfrak{C}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{C}_p \rightarrow \mathfrak{B},$$

где $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_p$ — подходящее конечное подмножество из $\{\mathfrak{C}_\lambda\}$. Полагая

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{C}_p,$$

мы видим, что $\sigma$ характеризуется аксиомами

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},$$

имеющими расслоенный вид.

1 3. В качестве примера приведем задачу, рассмотренную С. Феферманом [см. ([8])], о редукции формул, относящихся к прямому произведению конечного числа моделей, к формулам, относящимся к сомножителям.

Пусть $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ — заданные однотипные модели с основными множествами $M_1$, $M_2$ и основными предикатами $P_\alpha^{(1)}$ и $P_\alpha^{(2)}$ ($\alpha \in A$). Прямым произведением моделей $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ называется модель $\mathfrak{M}$, основным множеством которой служит множество пар $\langle a_1, a_2 \rangle$ ($a_1 \in M_1$ $a_2 \in M_2$), а основные предикаты определяются формулами

$$P_\alpha(\langle a_1, a_2 \rangle, \ldots, \langle c_1, c_2 \rangle) = \\ = P_\alpha^{(1)}(a_1, \ldots, c_1) \mathbin{\&} P_\alpha^{(2)}(a_2, \ldots, c_2). \quad (1)$$

Пусть

$$(Q_1 x_1) \ldots (Q_m x_m)\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m)$$

—формула УИП, относящаяся к $\mathfrak{M}$. Заменяя в этой формуле выражения

$$P_\alpha(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$$

выражением

$$P_\alpha^{(1)}(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_p}^1) \& P_\alpha^{(2)}(x_{i_1}^2, \ldots, x_{i_p}^2)$$

и каждый квантор $(Q_i x_i)$—парой кванторов $(Q_i x_i^1)(Q_i x_i^2)$, получим новую формулу $\mathfrak{B}$ со специализированными переменными, часть которых относится к множеству $M_1$, а часть — к множеству $M_2$. Это разбиение переменных удовлетворяет условиям леммы и потому формула $\mathfrak{B}$ указанным в п. 1.1 процессом приводится к виду

$$\mathfrak{B}_1^1 \vee \mathfrak{B}_1^2 \& \ldots \& \mathfrak{B}_s^1 \vee \mathfrak{B}_s^2,$$

где $\mathfrak{B}_1^1, \ldots, \mathfrak{B}_s^1$ — формулы, относящиеся к первому сомножителю, а $\mathfrak{B}_1^2, \ldots, \mathfrak{B}_s^2$ — формулы, относящиеся ко второму сомножителю.

Мы рассмотрели случай, когда модели $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ имеют по одному основному множеству. Если эти модели многоосновные [см. ([5])], то их прямое произведение можно определять существенно различными способами. Пусть, например, $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ определены на парах множеств $M_1$, $N_1$ и $M_2$, $N_2$. Тогда прямым произведением $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ естественно назвать модель с основными множествами $M_1 \times M_2$ и $N_1 \times N_2$, предикаты на которых определяются по формулам (1). Для этих произведений сказанное выше имеет силу без всяких изменений.

Предположим теперь, что первое основное множество у моделей $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ общее: $M_1 = M_2 = M$. Тогда модель $\mathfrak{M}$ с основными множествами $M$, $N_1 \times N_2$ и предикатами $P_\alpha$, определяемыми снова по формулам (1), естественно назвать прямым произведением моделей $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ *над множеством* $M$. Прямые произведения этого вида встречаются, например, при изучении групп и колец с фиксированной областью операторов.

На прямые произведения над фиксированными множествами указанные выше преобразования непосредственно не переносятся. Однако теорема А. Хорна ([2]), указывающая достаточный признак для того, чтобы аксиома, выполняющаяся на каждом сомножителе, была истинной и на прямом произведении, остается справедливой для обоих видов прямых произведений. Ясно, что при этом следует требовать, чтобы в аксиоме не встречался знак равенства, связывающий элементы фиксированного основного множества с элементами остальных основных множеств. В частности, теорема Хорна остается верной для аксиом расширенного исчисления 2-й ступени, содержащих лишь квантор существования по предикатным переменным в пренексной форме.

## § 2. Регулярные произведения

2.1. Переходя к рассмотрению прямых произведений бесконечного числа моделей, обобщим само понятие прямого произведения. Для простоты далее предполагается, что все рассматриваемые модели одноосновные.

Пусть задана некоторая система моделей

$$\mathfrak{M}_\alpha = \langle M_\alpha;\ \{P_\gamma^\alpha\}\rangle \quad (\alpha \in \mathrm{A},\ \gamma \in \Gamma_\alpha).$$

Мы не будем требовать ни однотипности этих моделей, ни различия $\mathfrak{M}_\alpha, \mathfrak{M}_\beta$ при $\alpha \neq \beta$. Предположим, что для каждого $\alpha \in A$ задана система формул УИП

$$\mathfrak{A}_\lambda^\alpha(x_1, \ldots, x_{m_\lambda}) =$$
$$= (Q_1 y_1) \ldots (Q_{p_\lambda} y_{p_\lambda}) \mathfrak{A}_\lambda^{\alpha^*}(x_1, \ldots, x_{m_\lambda}, y_1, \ldots, y_{p_\lambda}) \quad (Q = \exists, \forall;\ \lambda \in \Lambda), \quad (2)$$

где $\mathfrak{A}_\lambda^{\alpha^*}$ — открытая формула со свободными предметными переменными $x_1, \ldots, x_{m_\lambda}, y_1, \ldots, y_{p_\lambda}$, все предикатные переменные которой принадлежат системе $\{P_\gamma^\alpha\}$. Формулы (2) могут содержать знак равенства.

Введем предикатные символы

$$S_\lambda(\alpha, x_1, \ldots, x_{m_\lambda}),$$

в которых $\alpha$ пробегает множество A, а $x_1, \ldots, x_{m_\lambda}$ пробегают декартово произведение $M = \Pi M_\alpha$ основных множеств заданных моделей. Далее $S_\lambda(\alpha, x_1, \ldots, x_{m_\lambda})$ рассматриваются как символы предикатов, определенных на паре множеств A, $M$ формулами

$$S_\lambda(\alpha, x_1, \ldots, x_{m_\lambda}) = \mathfrak{A}_\lambda^\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_{m_\lambda}^\alpha), \quad (3)$$

где $x^\alpha$ обозначает проекцию $x \in M$ в множестве $M_\alpha$, а значение правой части равенства (3) вычисляется в модели $\mathfrak{M}_\alpha$ согласно формуле (2).

С помощью символов $S_\lambda$ определяем на $M$ новую систему предикатов посредством равенств

$$P_\gamma(x_1, \ldots, x_{n_\gamma}) =$$
$$= (Q_1 \alpha_1) \ldots (Q_{q_\lambda} \alpha_{q_\gamma}) \mathfrak{R}_\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q_\gamma}, x_1, \ldots, x_{n_\gamma}) \quad (\gamma \in \Gamma). \quad (4)$$

Здесь $\mathfrak{R}_\gamma$ — открытая формула УИП с предикатными символами $S_\lambda$ и, возможно, отношениями равенства, связывающими некоторые из переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_{q_\gamma}$. Кванторы в (4) специализированные, относящиеся к множеству A.

Модель $\mathfrak{M}$ с основным множеством $M$ и основными предикатами $P_\gamma$, определенными на $M$ равенствами (4), будет называться *регулярным произведением* моделей $\mathfrak{M}_\alpha$. Формулы (3), (4) определяют тип регулярного произведения. Ясно, что если задано регулярное произведение моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\alpha \in A$), то можно говорить и о регулярном произведении (того же типа) моделей $\mathfrak{M}_\beta$ ($\beta \in B$), где B—произвольное подмножество множества A.

Основным типом регулярных произведений можно считать тот тип, когда все модели $\mathfrak{M}_\alpha$ однотипны, $\Gamma = \Gamma_\alpha$, $n_\gamma = m_\gamma$ и формулы (3) приводятся к виду

$$S_\lambda(\alpha, x_1, \ldots, x_{m_\lambda}) =$$
$$= \mathfrak{A}_\lambda^\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_{m_\lambda}^\alpha) = P_\lambda^\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_{m_\lambda}^\alpha).$$

Регулярные произведения этого типа условимся называть *правильными*. Варьируя формулы (4), мы получим различные типы правильных произведений. Например, полагая

$$P_\gamma(x_1, \ldots, x_{m_\gamma}) = (\alpha) S_\gamma(\alpha, x_1, \ldots, x_{m_\lambda}),$$

мы получим обыкновенное прямое произведение моделей. Полагая

$$P_\gamma(x_1, \ldots, x_{m_\gamma}) = (\alpha)(\beta)(\alpha \neq \beta \rightarrow S_\gamma(\alpha, x_1, \ldots, x_{m_\lambda}) \vee S_\gamma(\beta, x_1, \ldots, x_{m_\lambda}))$$

или

$$P_\gamma(x_1, \ldots, x_{m_\gamma}) = (\alpha)(\beta)(\delta)(\alpha = \beta \vee \alpha = \delta \vee \beta = \delta \vee S_\gamma(\alpha) \vee S_\gamma(\beta) \vee S_\gamma(\delta)),$$

мы получим правильные произведения иных типов.

Из последних примеров видно, что правильные произведения не обязаны быть ассоциативными, даже если они коммутативны. Кроме того, правильное произведение алгебр может не быть алгеброй.

ТЕОРЕМА 3. *Существует финитный процесс, позволяющий для каждой формулы вида*

$$\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m) = \\ = (Q_{m+1}x_{m+1}) \ldots (Q_n x_n) \mathfrak{P}^*(x_1, \ldots, x_n) \quad (Q_i = \forall, \exists),$$

*где $\mathfrak{P}^*$ — открытая формула УИП со свободными предметными переменными $x_1, \ldots, x_n$ и предикатными символами $P_\gamma$, и для каждой системы формул*

$$(Q_1\alpha_1) \ldots (Q_{q_\gamma}\alpha_{q_\gamma}) \mathfrak{R}_\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q_\gamma}, x_1, \ldots, x_{n_\gamma}),$$

*где $\mathfrak{R}_\gamma$ — открытая формула с предикатными символами $S_\lambda(\alpha, x_1, \ldots, x_{m_\lambda})$, построить формулу*

$$\mathfrak{Q}(x_1, \ldots, x_m) = (Q_1\alpha_1) \ldots (Q_r\alpha_r) \mathfrak{Q}^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, x_1, \ldots, x_m)$$

*с предикатными символами $T_\sigma(\alpha, x_1, \ldots, x_{m_\sigma})$ ($\mathfrak{Q}^*$ — открытая) и формулы $\mathfrak{B}_\sigma(x_1, \ldots, x_{m_\sigma})$ со свободными предметными переменными $x_1, \ldots, x_{m_\sigma}$ и предикатными символами $S_\lambda^{(1)}(x_1, \ldots, x_{m_\lambda})$, обладающие следующими свойствами. Пусть каждому $\alpha \in A$ поставлены в соответствие некоторая модель $\mathfrak{M}_\alpha$ и заданные на ней формулы $\mathfrak{A}_\lambda^\alpha(x_1, \ldots, x_{m_\lambda})$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ регулярное произведение моделей $\mathfrak{M}_\alpha$, определяемое соотношениями* (3), (4). *Тогда на $\mathfrak{M}$ будем иметь:*

$$\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m) \backsim \mathfrak{Q}(x_1, \ldots, x_m)$$

*при условии, что переменные $\alpha_i$ пробегают $A$, предикаты $S_\lambda^{(1)}$ определены на $\mathfrak{M}_\alpha$ формулами*

$$S_\lambda^{(1)}(x_1, \ldots, x_{m_\lambda}) = \mathfrak{A}_\lambda^\alpha(x, \ldots, m_{m_\lambda}),$$

*а предикаты $T_\sigma(\alpha, x_1, \ldots, x_{m_\sigma})$ определены на паре $A$, $\mathfrak{M}$ формулами*

$$T_\sigma(\alpha, x_1, \ldots, x_{m_\sigma}) = \mathfrak{B}_\sigma(x_1^\alpha, \ldots, x_{m_\sigma}^\alpha), \tag{5}$$

*где $x^\alpha$ есть проекция $x$ в $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\sigma$ рассматривается в $\mathfrak{M}_\alpha$.*

Доказательство проводим индукцией по числу кванторов в формуле $\mathfrak{P}$. Если в $\mathfrak{P}$ кванторов нет, то, подставляя в $\mathfrak{P}$ вместо $P_\gamma$ их выражения из (4) и вынося кванторы по элементам $A$ в начало, получим требуемую формулу $\mathfrak{Q}$ со значениями

$$T_\sigma = S_\sigma, \quad \mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{A}_\sigma.$$

Пусть теперь теорема 3 справедлива для формул, число кванторов которых меньше, чем у $\mathfrak{P}$. Тогда финитным процессом мы найдем формулы $\mathfrak{B}_\sigma^\alpha$, $T_\sigma$ и $\mathfrak{Q}^*$, имеющие указанное в теореме 3 строение и такие,

что на $\mathfrak{M}$

$$(Q_{m+2}x_{m+2}) \ldots (Q_n x_n) \mathfrak{P}^* \sim (Q_1 \alpha_1) \ldots (Q_r \alpha_r) \mathfrak{Q}^* (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, x_1, \ldots, x_{m+1})$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_m) \sim (Q_{m+1}x_{m+1}) Q(\alpha_1) \ldots (Q_r \alpha_r) \mathfrak{Q}^* (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, x_1, \ldots, x_{m+1}).$$

Нам остается лишь преобразовать правую часть этой эквивалентности. Для определенности предположим, что $Q_{m+1} = \forall$. В случае $Q_{m+1} = \exists$ достаточно будет пользоваться двойственными формулами. Согласно условию, $\mathfrak{Q}^*$ выражается с помощью операций $\neg, \vee, \&$ через формулы вида $\alpha^i = \alpha_j$ и $T_\sigma(\alpha_i, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{m\sigma}})$. Считая $x_1, \ldots, x_{m+1}$ произвольными параметрами, мы можем рассматривать выражение

$$(Q_1\alpha_1) \ldots (Q_r \alpha_r) \mathfrak{Q}^* (\alpha_1, \ldots, \alpha_r; x_1, \ldots, x_{m+1})$$

как формулу с одинарными предикатами $T_\sigma(\alpha) = T_\sigma(\alpha, x_1, \ldots)$ и знаком равенства. Поэтому при помощи известных преобразований Бемана [см. (1), стр. 44] мы сможем найти эквивалентную ей конъюнкцию формул вида

$$(\alpha_1) \ldots (\alpha_u) (\alpha_{i_1} = \alpha_{j_1} \vee \ldots \vee \alpha_{i_p} = \alpha_{j_p} \vee T^{\varepsilon_1}_{\sigma_1}(\alpha_1) \vee \ldots \vee T^{\varepsilon_v}_{\sigma^v}(\alpha_v)$$
$$\vee (\exists \beta_1) X_1(\beta_1) \vee \ldots \vee (\exists \beta_w) X_w(\beta_w)),$$

где

$$X_i(\beta_i) = T^{\varepsilon_{i1}}_{\sigma_{i1}}(\beta_i) \,\&\, \ldots \,\&\, T^{\varepsilon_{iq}}_{\sigma_{iq}}(\beta_i) \quad (\varepsilon = \pm 1;\ T^1 = T,\ T^{-1} = \overline{T}).$$

Полагая

$$X(\beta) = X_1(\beta) \vee \ldots \vee X_w(\beta)$$

и пользуясь перестановочностью универсальных кванторов $(x_{m+1})$ и $(\alpha_i)$, мы сведем первоначальную формулу $\mathfrak{P}$ к конъюнкции формул вида

$$(\alpha_1) \ldots (\alpha_u) [\alpha_{i_1} = \alpha_{j_1} \vee \ldots \vee \alpha_{i_p} = \alpha_{j_p} \vee$$
$$(x_{m+1}) (T^{\varepsilon_1}_{\sigma_1}(\alpha_1) \vee \ldots \vee T^{\varepsilon_v}_{\sigma_v}(\alpha_v) \vee (\exists \beta) X(\beta))]$$

и нам останется лишь надлежащим образом преобразовать выражения вида

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots, x_m) = (x_{m+1}) (T^{\varepsilon_1}_{\sigma_1}(\alpha_1) \vee \ldots \vee T^{\varepsilon_v}_{\sigma_v}(\alpha_v) \vee (\exists \beta) X(\beta)),$$

которые можно переписать в форме

$$(x_{m+1}) [Y_1(\alpha_1) \vee \ldots \vee Y_v(\alpha_v) \vee (\exists \beta) (\beta \neq \alpha_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \beta \neq \alpha_v \,\&\, X(\beta))],$$

где

$$Y_i(\alpha_i) = T^{\varepsilon_i}_{\sigma_i}(\alpha_i) \vee X(\alpha_i) \qquad (i = 1, \ldots, v).$$

По условию, формулы $Y_i(\alpha)$, $X(\alpha)$ выражаются с помощью операций $\neg$, $\vee$, $\&$ через $T_\sigma(\alpha, x_{i_1}, \ldots)$, а последние на $\mathfrak{M}$ равносильны формулам $\mathfrak{B}^\alpha_\sigma(x^\alpha_{i_1}, \ldots)$.

Обозначим через $Y^\alpha_i(x^\alpha_1, \ldots, x^\alpha_{m+1})$ и $X^\alpha(x^\alpha_1, \ldots, x^\alpha_{m+1})$ формулы, которые получатся, если в $Y_i(\alpha)$ и $X(\alpha)$ выражения $T_\sigma(\alpha)$ заменить соответ-

ствующими выражениями $\mathfrak{B}_\sigma^\alpha$. На $\mathfrak{M}$ имеет место эквивалентность

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots, x_m) \sim (x_{m+1}) [Y_1^{\alpha_1}(x_1^\alpha, \ldots, x_{m+1}^\alpha) \vee \ldots \vee Y_v^{\alpha_v}(x_1^\alpha, \ldots, x_{m+1}^\alpha) \vee$$
$$(\exists\beta)(\beta \neq \alpha_1 \& \ldots \& \beta \neq \alpha_v \& X^\alpha)].$$

Здесь квантор $(x_{m+1})$ можно заменить бесконечной совокупностью кванторов $(x_{m+1}^\alpha)$ ($\alpha$ пробегает A), так как условие, что элемент $x$ пробегает декартово произведение $M$, равносильно условию, что проекции его $x^\alpha$ независимо друг от друга пробегают каждая свое множество $M_\alpha$. Член с квантором $(\exists\beta)$ можно представить в виде бесконечной дизъюнкции

$$\bigvee_{\beta \bar{\in} \{\alpha_1, \ldots, \alpha_v\}} X^\beta(x_1^\beta, \ldots, x_{m+1}^\beta).$$

Отсюда ясно, что

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots, x_{m+1}) \sim (x_{m+1})(Y_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee Y_v^{\alpha_v}) \vee$$
$$(\exists\beta)[\beta \neq \alpha_1 \& \ldots \& \beta \neq \alpha_v \& (x_{m+1}^\beta) X^\beta(x_1^\beta, \ldots, x_{m+1}^\beta)]. \qquad (6)$$

Вводя формулу

$$\mathfrak{C}_\varkappa^\beta(x_1^\beta, \ldots, x_m^\beta) = (x^\beta) X^\beta(x_1^\beta, \ldots, x_m^\beta, x^\beta)$$

и соответствующий ей на паре A, $\mathfrak{M}$ предикат

$$U_\varkappa(\beta, x_1, \ldots, x_m) = \mathfrak{C}_\varkappa^\beta(x_1^\beta, \ldots, x_m^\beta),$$

мы сможем второй член дизъюнкции (6) переписать в окончательном виде:

$$(\exists\beta)(\beta \neq \alpha_1 \& \ldots \& \beta \neq \alpha_v \& U_\varkappa(\beta, x_1, \ldots, x_m)).$$

Теперь остается аналогично преобразовать выражение

$$(x_{m+1})(Y_1^{\alpha_1}(x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_{m+1}^{\alpha_1}) \vee \ldots \vee Y_v^{\alpha_v}(x_1^{\alpha_v}, \ldots, x_{m+1}^{\alpha_v})). \qquad (7)$$

Если бы было известно, что $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, v$), то, согласно вышеизложенному, выражение (6) было бы эквивалентно формуле

$$(x_{m+1}^{\alpha_1}) Y_1^{\alpha_1}(x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_{m+1}^{\alpha_1}) \vee \ldots \vee (x_{m+1}^{\alpha_v}) Y_v^{\alpha_v}(x_1^{\alpha_v}, \ldots, x_{m+1}^{\alpha_v})$$

и редукция была бы закончена. Чтобы свести дело к этому случаю, поступаем следующим образом.

Пусть $\tau$ — какое-нибудь разбиение множества $I = \{1, \ldots, v\}$ на попарно не пересекающиеся непустые подмножества $I_1, \ldots, I_{h_i}$. Обозначим через $\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_v)$ конъюнкцию всех выражений $\alpha_j = \alpha_k$ для $j, k$, входящих в один и тот же класс, и выражений $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j, k$, взятых из разных классов $I_1, \ldots, I_{h_i}$. Так как дизъюнкция формул $\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_v)$, составленных для всевозможных разбиений $\tau$, тождественно истинна, то формула (7) эквивалентна дизъюнкции формул

$$\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_v) \& (x_{m+1})(Y_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee Y_v^{\alpha_v}). \qquad (8)$$

Пусть $\tau = \{I_1, \ldots, I_h\}$ и $I_j = \{a_{1j}, \ldots, a_{q_j j}\}$. Полагая

$$Z_j^\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_{m+1}^\alpha) = Y_{a_{1j}}^\alpha \vee \ldots \vee Y_{a_{qj}}^\alpha \quad (q = q_j),$$

мы сможем формулу (8) переписать в виде:

$$\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_v) \& (x_{m+1}) (Z_1^{\alpha_{a_{11}}} \vee \ldots \vee Z_h^{\alpha_{a_{1h}}}).$$

Если среди $\alpha_{a_{11}}, \ldots, \alpha_{a_{1h}}$ есть совпадающие, то первый член этой формулы, а вместе с ним и вся формула ложны. Поэтому преобразование второго члена формулы можно вести в предположении, что $\alpha_{a_{11}}, \ldots, \alpha_{a_{1h}}$ различны. Согласно предыдущему, в этом случае второй член эквивалентен выражению

$$(x_{m+1}^{\beta_1}) Z_1^{\beta_1} (x_1^{\beta_1}, \ldots, x_{m+1}^{\beta_1}) \vee \ldots \vee (x_{m+1}^{\beta_h}) Z_h^{\beta_h} (x_1^{\beta_h}, \ldots, x_{m+1}^{\beta_h}) \quad (\beta_i = \alpha_{a_{1i}}).$$

Вводя формулы

$$\mathfrak{C}_{\mu+i}^{\beta} (x_1^{\beta}, \ldots, x_m^{\beta}) = (x_{m+1}^{\beta}) Z_i^{\beta} (x_1^{\beta}, \ldots, x_m^{\beta}, x_{m+1}^{\beta}) \quad (i = 1, \ldots, h)$$

и соответствующие им на A, $\mathfrak{M}$ предикаты

$$U_{\mu+i}(\beta, x_1, \ldots, x_m) = \mathfrak{C}_{\mu+i}^{\beta} (x_1^{\beta}, \ldots, x_m^{\beta}),$$

мы сможем переписать выражение (8) в окончательном виде:

$$\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_v) \& U_{\mu+1}(\alpha_{a_{11}}, x_1, \ldots, x_m) \vee \ldots \vee U_{\mu+h}(\alpha_{a_{1h}}, x_1, \ldots, x_m).$$

Итак, проведя все указанные редукции, мы из формулы $\mathfrak{P}$ получим эквивалентную ей на $\mathfrak{M}$ формулу вида

$$(Q_1\alpha_1) \ldots (Q_t\alpha_t) \mathfrak{Q}_0 (\alpha_1, \ldots, \alpha_t, x_1, \ldots, x_m),$$

где $\mathfrak{Q}_0$ выражается с помощью операций $\neg$, $\vee$, & через выражения вида $\alpha_i = \alpha_j$ и $U_\nu(\alpha_j, x_{j_1}, \ldots, x_{j_p})$. На множествах A, $\mathfrak{M}$ предикаты $U_\nu$ связаны зависимостями

$$U_\nu(\alpha, x_1, \ldots, x_p) = \mathfrak{C}_\nu^{\alpha} (x_1^{\alpha}, \ldots, x_p^{\alpha}),$$

где $\mathfrak{C}_\nu^{\alpha}$ выражаются через $\mathfrak{C}_\sigma^{\alpha}$, а следовательно, и через $\mathfrak{A}_\lambda^{\alpha}$, что и требовалось доказать.

2.2. Рассмотрим ряд следствий, вытекающих из теоремы 3. Прежде всего исследуем более подробно тот случай, когда заданная формула $\mathfrak{P}$ является замкнутой.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 3 формула $\mathfrak{P}$ является замкнутой. Тогда соответствующая формула*

$$\mathfrak{Q} = (Q_1\alpha_1) \ldots (Q_r\alpha_r) \mathfrak{Q}^* (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$

*замкнута и содержит лишь одночленные предикатные символы $T_i(\alpha)$, помимо знака равенства. Для каждого отображения $\alpha \to \mathfrak{M}_\alpha$ $(\alpha \in A)$ и каждой системы формул $\mathfrak{A}_\lambda^{\alpha}$ соотношения* (5) *делают $T_\sigma(\alpha)$ одночленными предикатами на* A *и тем самым обращают* A *в модель $\mathfrak{N}(A) = \langle A, T_1, \ldots, T_s \rangle$. Если отображение $\alpha \to \mathfrak{M}_\alpha$ рассматривать для части $B \subseteq A$, то соответствующая модель $\mathfrak{N}(B)$ будет подмоделью модели $\mathfrak{N}(A)$, а эквивалентность*

$$\mathfrak{P} \sim (Q_1\alpha_1) \ldots (Q_r\alpha_r) \mathfrak{Q}^* (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$

*будет иметь место и для регулярного произведения $\Pi \mathfrak{M}_\beta$ $(\beta \in B)$ в том смысле, что левая часть вычисляется в $\mathfrak{M}$, а правая — в $\mathfrak{N}(B)$.*

Действительно, согласно теореме 3, значения $T_\sigma(\alpha)$ для каждого фиксированного $\alpha$ однозначно определяются моделью $\mathfrak{M}_\alpha$ и заданными на ней формулами $\mathfrak{A}_\lambda^\alpha$ и не зависят от $\mathfrak{M}_\beta$ для $\beta \neq \alpha$. А это и значит, что $\mathfrak{N}(B)$ будет подмоделью $\mathfrak{N}(A)$. Последнее утверждение следствия непосредственно содержится в теореме 3.

Условимся систему подмножеств $\{A_i\}$ произвольного множества A называть локальной системой в A, если каждое конечное множество элементов A содержится в подходящем подмножестве, принадлежащем данной системе.

Следствие 2. *Пусть заданы регулярное произведение* $\mathfrak{M}$ *моделей* $\mathfrak{M}_\alpha$ $(\alpha \in A)$ *и локальная система* $\{A_i\}$ *подмножеств множества* A. *Если какая-нибудь замкнутая формула* УИП *истинна на каждом произведении* $\Pi\mathfrak{M}_\beta$ $(\beta \in A_i)$, *то она истинна и на* $\mathfrak{M}$.

В самом деле, для заданной замкнутой формулы $\mathfrak{P}$ строим соответствующую формулу $\mathfrak{Q}$ с предикатными переменными $T_\sigma(\alpha)$ и модель $\mathfrak{N}(A)$. Согласно Г. Беману [1], формула $\mathfrak{Q}$, как формула с одночленными предикатами, эквивалентна формуле сколемского вида

$$(\alpha_1) \ldots (\alpha_u)(\exists\alpha_{u+1}) \ldots (\exists\alpha_v)\mathfrak{Q}_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_v). \qquad (9)$$

По условию, эта формула истинна на каждой подмодели $\mathfrak{N}(A_i)$ модели $\mathfrak{P}(A)$, причем подмодели $\mathfrak{N}(A_i)$ образуют локальную систему в $\mathfrak{P}(A)$. Отсюда следует, что формула (9) истинна на $\mathfrak{N}(A)$ и, значит, формула $\mathfrak{P}$ истинна на $\mathfrak{M}$.

Из следствия 2 известным путем приходим к утверждению:

*Пусть K — аксиоматизируемый класс моделей,* $\mathfrak{M}$ — *регулярное произведение моделей* $\mathfrak{M}_\alpha$ $(\alpha \in A)$ *и* $\{A_i\}$ —*локальная система подмножеств в* A. *Если каждое произведение* $\Pi\mathfrak{M}_\beta$ $(\beta \in A_i)$ *принадлежит K, то K принадлежит и произведение* $\mathfrak{M}$.

В частности, *если аксиоматизируемый класс моделей K содержит правильные произведения фиксированного типа любых конечных систем своих моделей, то K содержит и правильные произведения любых бесконечных систем своих моделей.*

Как уже упоминалось, все эти следствия для случая, когда регулярные произведения являются прямыми, указаны Р. Воотом [8]. В качестве проблем они были сформулированы Ю. Лосем [4].

Для иллюстрации рассмотрим пример из теории *RN*-, *RI*- и *Z*-групп [определения см. в работе [3]]. В статье [5] показано, что классы этих групп аксиоматизируемы. Кроме того, известно, что прямое произведение двух групп какого-нибудь из указанных классов есть группа того же класса. Из приведенных выше утверждений об аксиоматизируемых классах непосредственно получаем, что *полное прямое произведение любого числа RN-, RI- или Z-групп есть группа того же типа.*

Это обстоятельство явно, по-видимому, не отмечалось, хотя теоретико-групповое доказательство его также не представляет трудности.

2.3. Теорема 3 позволяет без дополнительных вычислений распространить теорему А. Мостовского [7] о разрешимости прямых степеней разрешимых моделей на регулярные степени разрешимых моделей и, частично, на регулярные произведения.

Пусть задана замкнутая формула УИП $\mathfrak{P}$, истинность или ложность которой нам требуется установить на регулярном произведении $\mathfrak{M}$ моделей $\mathfrak{M}_\alpha\,(\alpha \in \mathrm{A})$. Согласно следствию 1 теоремы 3, мы можем найти формулу $\mathfrak{Q}$ с одинарными предикатными символами $T_\sigma(\alpha)$, в определенном смысле эквивалентную $\mathfrak{P}$. На основании упоминавшейся теоремы Бемана [1], формула $\mathfrak{Q}$ может быть приведена к дизъюнкции формул вида

$$(\exists\alpha_1)\ldots(\exists\alpha_u)(\alpha_{i_1} \neq \alpha_{j_1} \& \ldots \& \alpha_{i_k} \neq \alpha_{j_k} \& T_{\sigma_1}^{\varepsilon_1}(\alpha_1) \& \ldots \& T_{\sigma_v}^{\varepsilon_v}(\alpha_v)) \& (\chi)\, U(\alpha), \quad (10)$$

где $U(\alpha)$ — конъюнкция формул, имеющих вид

$$T_{k_1}^{\eta_1}(\alpha) \vee \ldots \vee T_{k_p}^{\eta_p}(\alpha) \quad (\varepsilon_i,\ \eta_j = \pm 1).$$

Для простоты предположим, что рассматриваемое регулярное произведение правильное. Тогда для каждого $T_\sigma(\alpha)$ мы сможем написать замкнутую формулу $\mathfrak{B}_\sigma\,(\sigma = 1, \ldots, s)$ такую, что значение $T_\sigma(\alpha)$ совпадает со значением формулы $\mathfrak{B}_\sigma$ в модели $\mathfrak{M}_\alpha$. Из вида формул (10) непосредственно получается

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ — правильное произведение моделей $\mathfrak{M}_\alpha\,(\alpha \in \mathrm{A})$ с предикатами $P_\gamma^\alpha$, заданное некоторой системой формул* (4). *Тогда для каждой замкнутой формулы* УИП $\mathfrak{P}$ *с предикатными символами $P_\gamma$ финитным процессом может быть построена конечная система формул $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_t$ таких, что истинность $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{M}$ будет равносильна истинности финитно конструируемой формулы, составленной лишь с помощью операций* &, $\vee$, $\neg$ *из высказываний вида* (*i*): *«среди сомножителей существуют такие модели $\mathfrak{M}_{\alpha_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\alpha_m}$, на которых соответственно истинны формулы $\mathfrak{P}_{\beta_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{\beta_m}$ и, сверх того, $\alpha_{i_1} \neq \alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{i_p} \neq \alpha_{i_p}$».*

В самом деле, согласно (10), истинность $\mathfrak{P}$ равносильна истинности подходящей финитно конструируемой формулы, составленной из высказываний вида (*i*) и высказываний вида (*ii*): *«во всех сомножителях формула $\mathfrak{P}_\beta$ истинна».* Так как теперь, помимо операций &, $\vee$, допускается и операция отрицания, то вместо высказываний вида (*ii*) можно брать их отрицания, имеющие вид (*i*).

Из теоремы 4 вытекает такое уточнение следствия теоремы 3:

*при заданном типе* (4) *правильных произведений для каждой формулы* УИП $\mathfrak{P}$ *можно найти такое натуральное $n$, что если $\mathfrak{P}$ истинна на произведении любых $n$ моделей из произвольной заданной системы моделей $\mathfrak{M}_\alpha\,(\alpha \in \mathrm{A})$, то $\mathfrak{P}$ будет истинной и на произведении всей этой системы моделей.*

Модель $\mathfrak{M}$ называется *разрешимой*, если существует регулярный алгоритм, позволяющий для каждой замкнутой формулы УИП $\mathfrak{P}$ решить вопрос об истинности или ложности $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{M}$. Из теоремы 4 непосредственно получаем

Следствие. *Любая правильная степень разрешимой модели разрешима.*

Действительно, если все перемножаемые модели изоморфны некоторой фиксированной модели $\mathfrak{M}_0$, то указанные в теореме 4 высказывания вида (*i*) приводятся к высказываниям вида: *«формулы $\mathfrak{P}_{\beta_1}, \ldots, \mathfrak{P}_{\beta_m}$ истин-*

*ны на $\mathfrak{M}_0$, и перемножается не менее $k$ моделей».* По условию, все такие высказывания разрешимы и, следовательно, разрешима и рассматриваемая степень модели $\mathfrak{M}_0$.

Во введении было указано также, как с помощью теоремы 4 можно получить и случай Р. Воота, когда в рассматриваемом произведении $\Pi\mathfrak{M}_\alpha$ для каждого сомножителя имеется бесконечное число ему изоморфных других сомножителей.

Поступило
2. I. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ackerman W., Solvable cases of the decision problem, Amsterdam, 1954.

[2] Horn A., On sentences which are true of direct unions of algebras, Journ. of Symb. Logic, 16, № 1 (1951), 14—21.

[3] Курош А. Г. и Черников С. Н., Разрешимые и нильпотентные группы, Успехи матем. наук, 2, № 3 (1947), 18—59.

[4] Łoś J., On the extending of models, Fund. Math., 42(1955), 38—54.

[5] Мальцев А. И., Модельные соответствия, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 313—336.

[6] Мальцев А. И., О классах моделей с операцией порождения, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 5 (1957), 738—741.

[7] Mostowski A., On direct powers of theories, Journ. of Symb. Logic, 17, № 1 (1952), 1—31.

[8] Vaught R. L., On sentences holding in direct products of relational systems, Proc. Intern. Congr. Math., 2 (1954), 409—410.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 503—508

С. М. РОЗИН

# О НУЛЯХ $L$-РЯДОВ ДИРИХЛЕ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе оценивается сумма характеров по модулю, равному степени простого числа. Для $L$-рядов Дирихле оценки роста модуля и области нулей получены с постоянным $p$.

Введем ряд обозначений. Пусть $p$ — простое число $> 2$, $n$ — натуральное число, $D = p^n$, $\chi$ — первообразный характер по модулю $D$, $c_i$ — некоторые положительные постоянные.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\left(\frac{n_1}{\log^3 n_1}\right)^{\frac{1}{4}} \geqslant 13$. *Тогда для любого* $n > n_1$ *при* $l \geqslant p^{2(n\log n)^{\frac{3}{4}}}$ *справедлива оценка*

$$\left|\sum_{x=N}^{N+l-1} \chi(x)\right| < l \cdot p^{-(n\log n)^{\frac{1}{4}}}$$

Доказательство. Используем метод Н. М. Коробова ([2]). Разобьем интервал $(1, n)$ на части длиной $k+1$: $n = s(k+1) - r$, где

$$1 \leqslant r \leqslant k+1, \quad k = \left[\frac{n}{(n\log n)^{\frac{3}{4}} - (n\log n)^{\frac{1}{4}}}\right].$$

Далее, разобьем интервал $(N, N+l-1)$ на части длиной $p^{2s-r}$ (это возможно, так как $s > r$. Действительно,

$$k < \frac{n}{(n\log n)^{\frac{3}{4}} - (n\log n)^{\frac{1}{4}}} < \frac{2n}{(n\log n)^{\frac{3}{4}}} = 2\left(\frac{n}{\log^3 n}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$4k^2 < 16\left(\frac{n}{\log^3 n}\right)^{\frac{1}{2}} < 16 n^{\frac{1}{2}} < n, \qquad s > \frac{n}{k+1} > \frac{4k^2}{k+1} > k+1 \geqslant r).$$

Мы получим:

$$l = l_1 \cdot p^{2s-r} + R_1,$$

где $0 \leqslant R_1 \leqslant p^{2s-r} \leqslant p^{2s-1}$.

Таким образом,

$$\sum_{x=N}^{N+l-1} \chi(x) = \sum_{l_1} \sum_{p^{2s-r}} \chi(x) + \theta R_1, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Далее,

$$\left|\sum_{x=N}^{N+l-1}\chi(x)\right|\leqslant l_1|S_1|+p^{2s-1}, \qquad (1)$$

где

$$|S_1|=\max_N\left|\sum_{x=N_i}^{N_i+p^{2s-1}}\chi(x)\right|.$$

Пусть $|S_1|$ достигает своего наибольшего значения при $N=N_1$. Тогда, применяя результаты, полученные А. Г. Постниковым в работе ([3]), имеем:

$$x+N_1=x_1+p^s x_2,$$

где $1\leqslant x_1\leqslant p^s-1$, $0\leqslant x_2\leqslant p^{s-r}-1$ и

$$\operatorname{ind}_g(x+N_1)\equiv\operatorname{ind}_g x_1+\Lambda(p-1)f(x_1'x_2)\ (\mathrm{mod}\ p^{n-1}(p-1))$$

при $x_1x_1'\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$.

Следовательно,

$$|S_1|=\left|\sum_{x=0}^{p^{2s-r}-1}e^{\frac{2\pi im\operatorname{ind}_g(x+N_1)}{\varphi(p^n)}}\right|\leqslant p^s\left|\sum_{x_2=0}^{p^{s-r}-1}e^{\frac{2\pi im\Lambda f(x_1'x_2)}{p^{n-1}}}\right|=p^s|S_2|. \qquad (2)$$

Так как

$$f(x_1'x_2)\equiv p^{s-1}x_1'x_2-\frac{p^{2s-1}}{2}(x_1'x_2)^2+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^k\frac{p^{sk-1}}{k}(x_1'x_2)^k\ (\mathrm{mod}\ p^{s(k+1)}),$$

то старший коэффициент многочлена $\dfrac{m\Lambda f(x_1'x_2)}{p^{s(k+1)-r-1}}$ имеет вид $\dfrac{b}{p^{s-r}}$, $(b,\ p)=1$.

Воспользуемся оценкой И. М. Виноградова ([1]), которую при $k\geqslant 12$, $a_k=\dfrac{a}{q_k}+\dfrac{\theta}{q_k^2}$ и $P\leqslant q_k\leqslant P^{k-1}$ можно легко привести к виду:

$$\left|\sum_{x=0}^{P-1}e^{2\pi i(a_1x+\ldots+a_nx^n)}\right|<n^{3n\log n}P^{1-\frac{1}{9n^2\log n}}.$$

Действительно,

$$k>\frac{n}{(n\log n)^{\frac{3}{4}}-(n\log n)^{\frac{1}{4}}}-1>\left(\frac{n}{\log^3 n}\right)^{\frac{1}{4}}-1\geqslant 12,$$

а в сумме $S_2$ имеем:

$$P=p^{s-r},\qquad a_k=(-1)^k\frac{(x_1'x_2)^k}{k\cdot p^{s-r}},\qquad q_k=k\cdot p^{s-r}>p^{s-r}=P.$$

Далее, при $k\geqslant 12$

$$k!<k^{k-2}<p^{(k-2)\log k},$$

$$s > \frac{4k^2}{k+1} > k + 1 + \log k, \quad \log k < s - (k+1) \leqslant s - r$$

и, следовательно,

$$k! < p^{(k-2)(s-r)};$$

таким образом,

$$P^{k-1} = p^{(k-1)(s-r)} > k!\, p^{s-r} > q_k$$

и, значит,

$$P < q_k < P^{k-1}.$$

Мы получаем:

$$|S_2| < p^{3k\log^2 k + (s-r)\left(1 - \frac{1}{9k^2 \log k}\right)}. \tag{3}$$

Объединяя оценки (1), (2) и (3), находим:

$$\left|\sum_{x=N}^{N+l-1} \chi(x)\right| < l_1 p^{2s-r}\, p^{-\frac{s-r-(3k\log k)^3}{9k^2\log k}} + p^{2s-1} < l \cdot p^{-\frac{s-(k+1)-(3k\log k)^3}{9k^2\log k}} + p^{2s-1}.$$

Так как

$$s \leqslant \frac{n}{k+1} + 1 < (n\log n)^{\frac{3}{4}} - (n\log n)^{\frac{1}{4}} + 1,$$

то при $p^n \geqslant l \geqslant p^{2(n\log n)^{\frac{3}{4}}}$ имеем:

$$p^{2s-1} < \frac{1}{p} \cdot p^{2(n\log n)^{\frac{3}{4}} - (n\log n)^{\frac{1}{4}}} < \frac{1}{3}\, l \cdot p^{-(n\log n)^{\frac{1}{4}}}. \tag{4}$$

Далее,

$$k < \frac{n}{(n\log n)^{\frac{3}{4}} - (n\log n)^{\frac{1}{4}}} < \frac{n}{(n\log n)^{\frac{3}{4}}(1-10^{-4})}, \quad 4\log k < \log n,$$

$$n > 64(1-10^{-4})\, k^4 \log^3 k > 63{,}97\, k^4 \log^3 k, \quad s > \frac{12}{13}\,\frac{n}{k} > 59{,}04\,(k\log k)^3.$$

Но

$$k + 1 + (3k\log k)^3 < 27{,}01\,(k\log k)^3.$$

Следовательно,

$$s - [k + 1 + (3k\log k)^3] > 32\,(k\log k)^3,$$

т. е.

$$p^{-\frac{s-(k+1)-(3k\log k)^3}{9k^2\log k}} < p^{-\frac{32}{9}k\log^2 k}.$$

Далее,

$$k > \frac{n}{(n\log n)^{\frac{3}{4}} - (n\log n)^{\frac{1}{4}}} - 1 > \frac{11}{12}\left(\frac{n}{\log^3 n}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$\log k > \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)\log n + \lambda\log n - \frac{3}{4}\log\log n + \log\frac{11}{12} \geqslant \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)\log n$$

при $\lambda \geqslant \dfrac{\frac{3}{4}\log\log n - \log\frac{11}{12}}{\log n}$. Если $n > n_1$, то получим:

$$\lambda \geqslant \frac{0{,}75\log 16{,}2 + \log 12 - \log 11}{16{,}2}$$

Положим $\lambda = 0{,}1345$; тогда $\frac{1}{4} - \lambda = 0{,}1155$ и

$$\log k > 0{,}1155\log n, \quad \log^2 k > 0{,}01334\log^2 n,$$

$$\frac{32}{9} k \log^2 k > \frac{32 \cdot 11 \cdot 1334}{9 \cdot 12 \cdot 10^5} \left(\frac{n}{\log^3 n}\right)^{\frac{1}{4}} \log^2 n =$$

$$= \frac{32 \cdot 11 \cdot 1334}{9 \cdot 12 \cdot 10^5} (n \log n)^{\frac{1}{4}} \log n > (n \log n)^{\frac{1}{4}} + 1.$$

Следовательно,

$$p^{-\frac{32}{9} k \log^2 k} < \frac{1}{p} \cdot p^{-(n \log n)^{\frac{1}{4}}} < \frac{1}{3} l \cdot p^{-(n \log n)^{\frac{1}{4}}} \tag{5}$$

Объединяя оценки (4) и (5), получаем:

$$\left| \sum_{x=N}^{N+l-1} \chi(x) \right| < \frac{1}{3} l \cdot p^{-(n \log n)^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{3} l \cdot p^{-(n \log n)^{\frac{1}{4}}} < l \cdot p^{-(n \log n)^{\frac{1}{4}}}.$$

Так как сумма характеров периодична с периодом $p^n$, то случай $l \geqslant p^n + p^{2(n \log n)^{\frac{3}{4}}}$ можно не рассматривать. Если же $p^n < l < p^n + p^{2(n \log n)^{\frac{3}{4}}}$, то при $n > n_0$

$$\left| \sum_{x=N}^{N+l-1} \chi(x) \right| \leqslant p^{2(n \log n)^{\frac{3}{4}}} < p^n \cdot p^{-(n \log n)^{\frac{1}{4}}} \leqslant l \cdot p^{-(n \log n)^{\frac{1}{4}}}.$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

Пользуясь теоремой 1, оценим хорошо известным методом рост модуля и область нулей $L$-ряда.

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольного* $\varepsilon > 0$ *при* $n \to \infty$ *и* $\log p = c_1$ *в области* $2 \geqslant \sigma \geqslant 1 - \dfrac{1}{\log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D}$, $|t| < c_2$ *справедлива оценка:*

$$|L(s, \chi)| \ll \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D.$$

Доказательство. Обозначим

$$\gamma = \frac{1}{\log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D}, \quad N = p^{2(n \log n)^{\frac{3}{4}}}.$$

Преобразуем оценку суммы характеров следующим образом:

$$\left| \sum_{x=N}^{N+l-1} \chi(x) \right| < l^{1-n^{-\frac{3}{4}}} p^{n^{\frac{1}{4}} - (n \log n)^{\frac{1}{4}}}.$$

Очевидно,

$$L(s, \chi) = \sum_{x < 2N-1} \frac{\chi(x)}{x^s} + s \int_{2N}^{\infty} \frac{\sum_{N \leqslant x \leqslant u} \chi(x)}{u^{s+1}} du - \frac{\sum_{N \leqslant x \leqslant 2N-1} \chi(x)}{(2N)^s}.$$

Пусть $2 \geqslant \sigma \geqslant 1 - \gamma$, $|t| < c_2$. Тогда

$$|L(s, \chi)| \leqslant \sum_{x \leqslant 2N-1} \frac{1}{x^{1-\gamma}} + |s| \int_{2N}^{\infty} \frac{p^{n^{\frac{1}{4}} - (n \log n)^{\frac{1}{4}}} u^{1-n^{-\frac{3}{4}}}}{u^{2-\gamma}} du + \frac{\left| \sum_{N \leqslant x \leqslant 2N-1} \chi(x) \right|}{(2N)^{1-\gamma}}.$$

Далее,

$$|L(s, \chi)| \ll \frac{N^\gamma}{\gamma} + p^{n^{\frac{1}{4}} - (n \log n)^{\frac{1}{4}}} N^{-\frac{1}{2n^{\frac{3}{4}}}} n^{\frac{3}{4}} + N^\gamma$$

(так как $\gamma \leqslant \frac{1}{2n^{\frac{3}{4}}}$ при $n > n_0$). Подставляя значения $N$ и $\gamma$, получаем:

$$N^{\gamma} \ll 1, \quad p^{n^{\frac{1}{4}} - (n \log n)^{\frac{1}{4}}} N^{-\frac{1}{2n^{\frac{3}{4}}}} n^{\frac{3}{4}} \ll 1 \qquad \text{при } n > n_1.$$

Таким образом,

$$|L(s, \chi)| \ll \frac{1}{\gamma} = \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D,$$

что и требовалось доказать.

Результат теоремы 2 верен и при $\log p \leqslant c_3 \frac{n^{\delta}}{\log^{\frac{3}{4}} n}$, $\delta < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 3. *Для произвольного* $\varepsilon > 0$ *при* $n \to \infty$ *и* $\log p = c_1$ $L(s, \chi)$ *не имеет нулей в области*

$$|t| < c_4, \quad \sigma > 1 - \frac{c_5}{\log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D}.$$

Доказательство. Пусть $\beta + i\gamma$ — нуль $L(s, \chi)$ с $|\gamma| < c_4$. Будем считать, что он лежит в верхней полуплоскости. Рассмотрим точки $s_0 = \sigma_0 + i\gamma$ и $s_0' = \sigma_0 + 2i\gamma$, где $1 + \frac{1}{D^{\frac{30}{41}+\delta}} < \sigma_0 < 2$ (точнее $\sigma_0$ будет определена ниже). Около точек $s_0$ и $s_0'$ опишем круги радиусом $r = \frac{1}{\log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D}$. Оба круга лежат в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{\log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D}, \quad |t| \leqslant 2c_4 + 1.$$

Используем теорему 2. В круге $|s - s_0| \leqslant r$

$$\left|\frac{L(s, \chi)}{L(s_0, \chi)}\right| < c_6 \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} < c_7 \log^2 D.$$

В круге $|s - s_0'| \leqslant r$

$$\left|\frac{L(s, \chi^2)}{L(s_0', \chi^2)}\right| < c_8 \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} < c_9 \log^2 D.$$

Применяя лемму работы ([4]), находим:

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma_0 + i\gamma, \chi)}{L(\sigma_0 + i\gamma, \chi)} < c_{10} \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D,$$

и если $\beta > \sigma_0 - \frac{1}{2\log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D}$, то

$$-\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma_0 + 2i\gamma, \chi^2)}{L(\sigma_0 + 2i\gamma, \chi^2)} < c_{10} \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D - \frac{1}{\sigma_0 - \beta}.$$

Пусть $\beta > \sigma_0 - \frac{1}{2\log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D}$. Известно неравенство:

$$-3\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} - 4\operatorname{Re} \frac{L'(\sigma_0 + i\gamma, \chi)}{L(\sigma_0 + i\gamma, \chi)} - \operatorname{Re} \frac{L'(\sigma_0 + 2i\gamma, \chi^2)}{L(\sigma_0 + 2i\gamma, \chi^2)} \geqslant 0.$$

Так как при $\sigma_0 \to 1$

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} \sim \frac{1}{\sigma_0 - 1},$$

то мы имеем:

$$-\frac{\zeta'(\sigma_0)}{\zeta(\sigma_0)} < \frac{a}{\sigma_0 - 1},$$

где при $\sigma_0 - 1$, близком к нулю, $a$ можно сделать достаточно близким к 1.

Мы получим:

$$\frac{3a}{\sigma_0 - 1} + 5c_{10} \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D - \frac{4}{\sigma_0 - \beta} \geqslant 0,$$

$$\sigma_0 - \beta \geqslant \frac{1}{\frac{3a}{4(\sigma_0 - 1)} + \frac{5}{4} c_{10} \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D},$$

$$1 - \beta \geqslant \frac{1}{\frac{3a}{4(\sigma_0 - 1)} + \frac{5}{4} c_{10} \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D} - (\sigma_0 - 1),$$

$$1 - \beta \geqslant \frac{1 - \frac{3a}{4} - \frac{5}{4} c_{10} (\sigma_0 - 1) \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D}{\frac{3a}{4(\sigma_0 - 1)} + \frac{5}{4} c_{10} \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D}.$$

Положим

$$a = \frac{5}{4}, \quad \sigma_0 = 1 + \frac{1}{40\, c_{10} \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D}.$$

Тогда

$$1 - \beta \geqslant \frac{\frac{1}{32}}{\frac{155}{4} c_{10} \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D} = \frac{1}{1240\, c_{10} \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D}.$$

Пусть теперь $\beta < \sigma_0 - \frac{1}{2 \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D}$. Тогда мы снова получаем:

$$1 - \beta \geqslant \frac{1}{2 \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D} - \frac{1}{40\, c_{10} \log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D} > \frac{c_{11}}{\log^{\frac{3}{4}+\varepsilon} D \cdot \log\log D}.$$

Теорема доказана.

Приношу глубокую благодарность Н. М. Коробову и А. Г. Постникову за ценные консультации.

Поступило
28. VI. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Избранные труды, М.—Л., 1952.

[2] Коробов Н. М., Рациональные тригонометрические суммы с показательными функциями, их обобщения и приложения, Труды 3-го матем. съезда, т. II (1956), 109.

[3] Постников А. Г., Исследования по методу тригонометрических сумм И. М. Виноградова, Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук.

[4] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, ИЛ, 1953.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 509—528

СЯ ДО-ШИН

# О ПОЛУНОРМИРОВАННЫХ КОЛЬЦАХ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе изучаются полунормированные кольца с инволюцией и обобщаются некоторые теоремы Гельфанда, Наймарка и Райкова для нормированных колец.

## § 1. Введение

Пусть $R$ — линейное топологическое кольцо с единицей $e$, в котором топология определена (счетным или несчетным) набором полунорм $|x|_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Мы предполагаем, что для $|x|_\alpha$ выполнены условия:

$$|x|_\alpha \geqslant 0, \quad |x+y|_\alpha \leqslant |x|_\alpha + |y|_\alpha, \quad |cx|_\alpha = |c|\,|x|_\alpha$$

($c$ — комплексное число) и

$$|xy|_\alpha \leqslant |x|_\alpha |y|_\alpha.$$

Отметим, что из $|x|_\alpha = 0$ не обязательно следует $x = 0$, однако если $|x|_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, то $x = 0$. Такое кольцо $R$ будем называть полунормированным. Мы можем заменить нормы кольца эквивалентными нормами такими, что $|e|_\alpha = 1$; в дальнейшем мы всегда предполагаем, что $|e|_\alpha = 1$ и кольцо $R$ полно, т. е. $R$ есть полное топологическое пространство.

Кольцо называется симметричным, или с инволюцией, если в $R$ определена операция $x \to x^*$ (она называется инволюцией), обладающая следующими свойствами:

а) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$,

б) $x^{**} = x$,

в) $(xy)^* = y^* x^*$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ пространство всех максимальных замкнутых идеалов кольца $R$, через $\mathfrak{M}_\alpha$ — пространство идеалов $M$ в $\mathfrak{M}$ таких, что $|x(M)| \leqslant |x|_\alpha$ для любого $x \in R$; тогда

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{M}_\alpha.$$

Очевидно, понятие полунормированного кольца есть обобщение понятия нормированного кольца. Нормированные кольца с инволюцией были подробно изучены в работах Гельфанда, Наймарка, Райкова и Шилова. Оказывается, что в случае полунормированного кольца возникают новые особые трудности при попытках обобщить известные для случая нормированного кольца результаты.

В этой работе доказывается ряд теорем (они сообщались в заметке автора ([8])), являющихся обобщениями соответствующих теорем Гельфанда, Наймарка и Райкова.

В § 2 устанавливается, что на полном счетно-нормированном кольце (т. е. кольце со счетным набором норм) с непрерывной инволюцией каждый положительный функционал непрерывен. Для любого полунормированного кольца это утверждение, вообще говоря, неверно.

В § 3 показывается, что каждый линейный положительный функционал (хотя бы и разрывный) на полном коммутативном кольце можно представить интегралом по некоторой положительной конечной мере на компактном множестве пространства всех (не обязательно непрерывных) симметричных или вещественных (т. е. таких, что $x^*(M) = \overline{x(M)}$) мультипликативных функционалов на $R$.

В § 4 находится необходимое и достаточное условие для того, чтобы полунормированное кольцо с непрерывной инволюцией было вполне симметричным (т. е. таким, что для любого $x \in R$ существует $(e + x^*x)^{-1}$).

В § 5 выводится условие, необходимое и достаточное для того, чтобы полное коммутативное кольцо было вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных функций на пространстве $\mathfrak{M}$.

В § 6 получено представление полунормированного кольца в кольце операторов (не обязательно ограниченных) в некотором гильбертовом пространстве.

Автор выражает благодарность И. М. Гельфанду, Д. А. Райкову и Б. С. Митягину за помощь в настоящей работе.

## § 2. Положительные функционалы на кольце $R$

Линейный функционал $f$ на кольце $R$ с инволюцией называется положительным, если для любого $x \in R$ $f(x^* x) \geqslant 0$. Гельфандом и Наймарком ([1]) было доказано, что каждый линейный положительный функционал на полном нормированном кольце с непрерывной инволюцией непрерывен. Вообще для произвольного полного полунормированного кольца с непрерывной инволюцией это неверно: Майкл [см. ([2]), стр. 49] построил пример коммутативного несчетно-нормированного полного кольца с непрерывной инволюцией, на котором существуют линейные положительные разрывные функционалы. Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $R$ — полное счетно-нормированное кольцо (т. е. кольцо со счетным набором норм) с непрерывной инволюцией. Если $f(x)$ — линейный положительный функционал над кольцом $R$, то $f(x)$ непрерывен.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что $|x|_1 \leqslant |x|_2 \leqslant \ldots$. Пусть $f(x)$ — линейный положительный функционал над кольцом $R$, и пусть $f(e) = 1$. Если $f(x)$ разрывен, то существует последовательность $x_n \in R$ такая, что $x_n \to 0$ по топологии в $R$ и $f(x_n) \not\to 0$. Положим

$$\underline{\lim} |f(x_n)| > \varepsilon > 0.$$

В силу того, что

$$|f(x_n)| \leqslant \sqrt{f(x_n^* x_n)},$$

имеем:

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n^* x_n) \geqslant \varepsilon^2.$$

Пусть

$$y_n = \frac{x_n^* x_n}{f(x_n^* x_n)};$$

тогда

$$y_n^* = y_n, \quad y_n \to 0, \quad f(y_n) = 1.$$

Обозначим $N_m(x) = \max(|x|_m, 1)$ для $x \in R$. Так как $y_n \to 0$, то из последовательности $y_n$ можно выбрать подпоследовательность $z_n$, $n = 1, 2, \ldots$, такую, что

$$Q_n = N_n(z_1) + (N_n(z_2) + (N_n(z_3) + \cdots + (N_n(z_{n-1}) + |z_n|_n^2)^2 \ldots)^2 -$$
$$- \{N_n(z_1) + (N_n(z_2) + (N_n(z_3) + \cdots + (N_n(z_{n-2}) + N_n(z_{n-1})^2)^2 \ldots)^2\} < \frac{1}{2^n}. \tag{2.1}$$

Построим в кольце $R$ элементы

$$\lambda_n = z_1 + (z_2 + (z_3 + \cdots + (z_{n-1} + z_n^2)^2 \ldots)^2 = P_n(z_1, \ldots, z_n). \tag{2.2}$$

Так как $\lambda_n - \lambda_{n-1}$ — многочлен от $z_1, \ldots, z_n$ с положительными коэффициентами, то

$$|\lambda_n - \lambda_{n-1}|_n \leqslant P_n(|z_1|_n, \ldots, |z_n|_n) - P_{n-1}(|z_1|_n, \ldots, |z_{n-1}|_n) \leqslant$$
$$\leqslant P_n(N_n(z_1), \ldots, N_n(z_{n-1}), |z_n|_n) - P_{n-1}(N_n(z_1), \ldots, N_n(z_{n-1})) = Q_n < \frac{1}{2^n}. \tag{2.3}$$

Значит, последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится в кольце $R$ к некоторому элементу $\chi_1$, причем $\chi_1^* = \chi_1$.

Пусть

$$\lambda_n^{(1)} = z_2 + (z_3 + (z_4 + \cdots + (z_{n-1} + z_n^2)^2 \ldots)^2.$$

Аналогично неравенству (2.3) можно получить:

$$|\lambda_n^{(1)} - \lambda_{n-1}^{(1)}|_n \leqslant N_n(z_2) + (N_n(z_3) + \cdots + (N_n(z_{n-1}) + |z_n|_n^2)^2 \cdots)^2 -$$
$$- \{N_n(z_2) + (N_n(z_3) + \cdots + (N_n(z_{n-2}) + N_n(z_{n-1})^2)^2 \cdots)^2\} =$$
$$= \frac{Q_n}{P_n(N_n(z_1), \ldots, N_n(z_{n-1}), |z_n|_n) + P_{n-1}(N_n(z_1), \ldots, N_n(z_{n-1}))} < \frac{1}{2^n},$$

так как $N_n(z) \geqslant 1$. Поэтому существует элемент $\chi_2 \in R$ такой, что

$$\lambda_n^{(1)} \to \chi_2, \quad \chi_2^* = \chi_2.$$

В силу того, что $\lambda_n = z_1 + \lambda_n^{(1)2}$, имеем $\chi_1 = z_1 + \chi_2^2$. Продолжая процесс, получаем последовательность $\{\chi_n\}$ в кольце $R$ такую, что

$$\chi_m = z_m + \chi_{m+1}^2, \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$\chi_m^* = \chi_m.$$

Таким образом, $f(\chi_m^2) \geqslant f(\chi_m)^2$ и

$$f(\chi_1) = f(z_1) + f(\chi_2^2) \geqslant 1 + f(\chi_2)^2 = 1 + (1 + f(\chi_3^2))^2 \geqslant$$
$$\geqslant 1 + (1 + f(\chi_3)^2)^2 \geqslant \cdots \geqslant 1 + (1 + (1 + \cdots + (1 + f(\chi_m)^2)^2 \cdots)^2 \geqslant m$$

для любого $m$. Но это невозможно, следовательно, функционал $f(x)$ непрерывен. Теорема доказана.

## § 3. Положительные функционалы на коммутативном кольце $R$

Пусть $R$ — кольцо с инволюцией. Линейный функционал $f(x)$ над $R$ называется вещественным (симметричным), если при $x \in R$

$$f(x^*) = \overline{f(x)}.$$

Обозначим через $\hat{\mathfrak{M}}$ пространство всех линейных вещественных мультипликативных функционалов на кольце $R$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $R$ — полунормированное кольцо с непрерывной инволюцией. Если $f(x)$ — линейный положительный функционал на кольце $R$ и $f(e) = 1$, то существуют бикомпактное множество $\mathfrak{M}_f$ пространства $\hat{\mathfrak{M}}$ и единичная положительная мера $\mu$ на $\mathfrak{M}_f$ такие, что*

$$f(x) = \int_{\mathfrak{M}_f} x(M)\, d\mu(M) \ \ \text{при}\ \ x \in R. \tag{3.1}$$

Эта теорема есть обобщение соответствующей теоремы Гельфанда и Наймарка для нормированного кольца [см. (1)].

ЛЕММА 1. *Пусть $A^{(n)}$ — кольцо всех целых функций и комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$, и пусть в этом кольце определена инволюция*

$$\varphi^*(z_1, \ldots, z_n) = \overline{\varphi(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)},$$

*где $\varphi \in A^{(n)}$. Если $f(\varphi)$ — линейный положительный функционал над $A^{(n)}$, то существуют ограниченное множество $\mathfrak{M}_f$ на $n$-мерном вещественном пространстве и положительная конечная мера $\mu$ на $\mathfrak{M}_f$ такие, что*

$$f(\varphi) = \int_{\mathfrak{M}_f} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, d\mu(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.2}$$

*для любого $\varphi \in A^{(n)}$, причем мера $\mu$ единственная.*

Доказательство. Введем в $A^{(n)}$ счетный набор норм

$$|\varphi|_m = \sup_{|z_\nu| \leqslant m} |\varphi(z_1, \ldots, z_n)|.$$

Легко видеть, что $A^{(n)}$ является полным счетно-нормированным кольцом с непрерывной инволюцией. По теореме 1, функционал $f(\varphi)$ непрерывен на $A^{(n)}$. Поэтому существуют число $m$ и константа $c$ такие, что

$$|f(\varphi)| \leqslant c\, |\varphi|_m.$$

Пусть $A_m^{(n)}$ — пополнение кольца $A^{(n)}$ по норме $|\varphi|_m$. Тогда $A_m^{(n)}$ является нормированным кольцом всех функций, аналитических при $|z_\nu| < m$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, и непрерывных при $|z_\nu| \leqslant m$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Мно-

жество $|x_\nu| \leqslant m$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, где $x_\nu$ вещественно, является множеством всех симметричных (вещественных) максимальных идеалов кольца $A_m^{(n)}$. Так как функционал $f(\varphi)$ непрерывен по норме $|\varphi|_m$, то его можно продолжить на все кольцо $A_m^{(n)}$. Следовательно, $f$ является положительным функционалом кольца $A_m^{(n)}$. По теореме Гельфанда и Наймарка ([1]),

$$f(\varphi) = \int\limits_{\hat{\mathfrak{M}}_m} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, d\mu(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\hat{\mathfrak{M}}_m$ — компакт вещественнного пространства, а $\mu(x_1, \ldots, x_n)$ — конечная положительная мера на $\hat{\mathfrak{M}}_m$. Единственность меры может быть легко доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\hat{R}$ — кольцо всех самосопряженных элементов в кольце $R$, а $x_\beta$, $\beta \in B$, — линейный базис в кольце $\hat{R}$ ($x_0 = e$, $B$ — множество индекса). Предположим, что $f(e) = 1$. Каждому $\beta > 0$, $\beta \in B$, поставим в соответствие одномерное пространство $E_\beta$. Пусть $E = \underset{\beta>0}{\pi} E_\beta$ — произведение пространств $E_\beta$. Рассмотрим $u \in E$ как линейный функционал над $\hat{R}$, полагая $u(x_\beta) = u_\beta$ ($u_\beta$—$\beta$-я координата $u$) и $u(e) = 1$. Тогда $\hat{\mathfrak{M}} \subset E$.

Если $\varphi(z_1, \ldots, z_n) \in A^{(n)}$, $\beta_\nu \in B$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_\nu > 0$ и

$$\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \sum a_{k_1, \ldots, k_n} \; z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n},$$

то ряд

$$\sum a_{k_1, \ldots, k_n} x_{\beta_1}^{k_1} \cdots x_{\beta_n}^{k_n}$$

сходится по топологии кольца $R$ к некоторому элементу в $R$. Обозначим этот элемент через $\varphi(x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_n})$. Тогда

$$\varphi^*(x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_n}) = [\varphi(x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_n})]^*.$$

Пусть $A_{\beta_1, \ldots, \beta_n}$ — кольцо всех элементов $\varphi(x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_n})$, $\varphi \in A^{(n)}$. Функционал $f(x)$ положителен на кольце $A_{\beta_1, \ldots, \beta_n}$. Так как кольцо $A^{(n)}$ гомоморфно кольцу $A_{\beta_1, \ldots, \beta_n}$, то, по лемме 1, существуют замкнутое ограниченное множество $B_{\beta_1, \ldots, \beta_n}$ в пространстве $E_{\beta_1} \times \ldots \times E_{\beta_n}$ и положительная мера на $B_{\beta_1, \ldots, \beta_n}$ такие, что

$$f(\varphi(x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_n})) = \int\limits_{B_{\beta_1, \ldots, \beta_n}} \varphi(u_{\beta_1}, \ldots, u_{\beta_n})\, d\mu(u_{\beta_1}, \ldots, u_{\beta_n})$$

и

$$\mu(B_{\beta_1, \ldots, \beta_n}) = 1,$$

так как $f(e) = 1$. Легко видеть, что существуют $q_\beta$, $\beta \in B$, $\beta > 0$, такие, что $B_{\beta_1, \ldots, \beta_n}$ принадлежит множеству

$$|u_{\beta_\nu}| \leqslant q_{\beta_\nu}.$$

Пусть $D$ — множество тех $u$, которые удовлетворяют условиям

$$|u_\beta| \leqslant q_\beta.$$

Тогда $D$ бикомпактно по слабой топологии. Так как мера $\mu$ на множестве $B_{\beta_1, \ldots, \beta_n}$ единичная, то, по теореме Колмогорова ([6]), существу-

ет мера $\mu$ на $D$ такая, что

$$f(\varphi(x_{\beta_1},\ldots, x_{\beta_n})) = \int\limits_D \varphi(u_{\beta_1},\ldots, u_{\beta_n})\,d\mu(u). \qquad (3.3)$$

Пусть $\mathfrak{N}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}$ — проекция множества $\hat{\mathfrak{M}}D$ на пространство $E_{\beta_1}\times\cdots\times E_{\beta_n}$. Покажем, что мера $\mu$ на $B_{\beta_1,\ldots,\beta_n}$ сосредоточена на множестве $\mathfrak{N}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}$.

Пусть

$$x_\beta x_{\beta'} = \sum_{k\in B} S^k_{\beta\beta'} x_k.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\beta\beta'}$ множество тех $u\in E$, которые удовлетворяют условию

$$u_\beta u_{\beta'} = \sum S^k_{\beta\beta'} u_k.$$

Тогда

$$\hat{\mathfrak{M}} = \bigcap_{\beta\beta'\in B} \mathfrak{M}_{\beta\beta'}.$$

Из (3.3) следует, что

$$0 = f((x_\beta x_{\beta'} - \sum S^k_{\beta\beta'} x_k)^2) = \int\limits_D (u_\beta u_{\beta'} - \sum S^k_{\beta\beta'} u_k)^2 d\mu(u),$$

поэтому

$$\mu(D - D\,\mathfrak{M}_{\beta\beta'}) = 0. \qquad (3.4)$$

Пусть $\mathfrak{M}_f = D\bigcap_{\beta\beta'}\mathfrak{M}_{\beta\beta'}$; тогда $\mathfrak{M}_f\subset\hat{\mathfrak{M}}$ и бикомпактно.

Предположим, что $\mathfrak{M}^{\beta\beta'}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}$ — проекция множества $D\mathfrak{M}_{\beta\beta'}$ на пространство $E_{\beta_1}\times\cdots\times E_{\beta_n}$; тогда $\mathfrak{M}^{\beta\beta'}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}\subset B_{\beta_1,\ldots,\beta_n}$ и поэтому бикомпактно.

Мы знаем, что $\mathfrak{N}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}\subset B_{\beta_1,\ldots,\beta_n}$ и бикомпактно. Значит,

$$\mathfrak{N}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}\subset \mathfrak{M}^{\beta\beta'}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}.$$

Пусть $Q_m$ — последовательность замкнутых множеств таких, что

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m = B_{\beta_1,\ldots,\beta_n} - \mathfrak{N}_{\beta_1,\ldots,\beta_m}.$$

Пусть, далее, $\tilde{Q}_m$ — множество тех элементов $u\in D$, которые удовлетворяют условию $(u_{\beta_1},\ldots,u_{\beta_n})\in Q_m$. Так как

$$Q_m \cap \mathfrak{N}_{\beta_1,\ldots,\beta_n} = \emptyset,$$

то

$$\bar{Q}_m \bigcap_{\beta\beta'} D\mathfrak{M}_{\beta\beta'} = \emptyset.$$

В силу того, что множества $\tilde{Q}_m$, $D\,\mathfrak{M}_{\beta\beta'}$ бикомпактны, существуют $\beta_{m_1},\ldots,\beta_{m_{k_m}}$, $\beta'_{m_1},\ldots,\beta'_{m_{k_m}}$ такие, что

$$\tilde{Q}_m \bigcap_{\nu=1}^{k_m} D\,\mathfrak{M}_{\beta_{m_\nu}\beta'_{m_\nu}} = \emptyset,$$

т. е.

$$\tilde{Q}_m = \bigcup_{\nu=1}^{k_m} (D - D\,\mathfrak{M}_{\beta_{m_\nu}\beta'_{m_\nu}}).$$

Из (3.4) следует, что $\mu(\widetilde{Q}_m) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$, следовательно,

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{Q}_m\right) = 0$$

и

$$\mu(B_{\beta_1, \ldots, \beta_n} - \mathfrak{N}_{\beta_1, \ldots, \beta_n}) = 0.$$

Из (3.3) имеем:

$$f(\varphi(x_{\beta_1}, \ldots, x_{\beta_n})) = \int\limits_{\mathfrak{M}_f} \varphi(u_{\beta_1}, \ldots, u_{\beta_n})\, d\mu(u).$$

Теорема доказана.

Отметим, что в доказанной теореме не обязательно предполагать кольцо полунормированным. Легко видеть, что теорема 2 верна, когда $R$ есть коммутативное кольцо с единицей и инволюцией (может быть, без топологии), которое удовлетворяет следующим условиям: при фиксированных элементах $x_1, \ldots, x_n \in R$ каждой функции $\varphi \in A^{(n)}$ соответствует элемент $x_\varphi \in R$ такой, что $x_{z_\nu} = x_\nu$ и

$$x_{\varphi_1 + \varphi_2} = x_{\varphi_1} + x_{\varphi_2}, \quad x_{\varphi_1 \varphi_2} = x_{\varphi_1} x_{\varphi_2}, \quad x_{c\varphi} = c\, x_\varphi, \quad x_{\varphi^*} = x_\varphi^*.$$

Следствие. *Пусть $R$— полунормированное кольцо с непрерывной инволюцией. Если все вещественные мультипликативные положительные функционалы на кольце $R$ непрерывны, то каждый положительный функционал на кольце $R$ непрерывен.*

Доказательство. Пусть $|\cdots|_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$,— полный набор норм кольца $R$. Пусть $\hat{\mathfrak{M}}_\alpha$ — соответствующее множество симметрических максимальных идеалов — мультипликативных вещественных функционалов, непрерывных по норме $|x|_\alpha$. Тогда $\hat{\mathfrak{M}}_\alpha$ бикомпактно. Так как все вещественные мультипликативные положительные функционалы непрерывны, то:

$$\hat{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \hat{\mathfrak{M}}_\alpha. \tag{3.5}$$

По теореме 2 положительному функционалу $f(x)$ на кольце $R$ соответствует бикомпактное множество $\mathfrak{M}_f \subset \hat{\mathfrak{M}}$. Ему соответствует конечный набор множеств $\mathfrak{M}_{\alpha_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\alpha_n}$ таких, что

$$\mathfrak{M}_f \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{M}_{\alpha_\nu}.$$

Из (3.1) следует, что

$$|f(x)| \leqslant \max_{M \in \mathfrak{M}_f} |x(M)|\, f(e) \leqslant f(e) \max_{\nu=1,2,\ldots,n} |x|_{\alpha_\nu}.$$

Следовательно, функционал $f(x)$ непрерывен.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $R$ — полунормированное коммутативное кольцо с непрерывной инволюцией*. Пусть $\hat{\mathfrak{M}}$— пространство всех вещественных*

* В полунормированном кольце с непрерывной инволюцией мы можем полагать, что $|x^*|_\alpha = |x|_\alpha$ для $\alpha \in \mathfrak{A}$, так как набор полунорм $|x|_\alpha = \max(|x^*|_\alpha, |x|_\alpha)$ определит эквивалентную топологию.

*мультипликативных функционалов и $\hat{\mathfrak{M}}_0$ — множество всех непрерывных функционалов из $\hat{\mathfrak{M}}$. Тогда $\hat{\mathfrak{M}}_0$ плотно в $\hat{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $M_0 \in \hat{\mathfrak{M}} - \hat{\mathfrak{M}}_0$ и $x_1, \ldots, x_n \in R$ таковы, что в окрестности точки $M$

$$|x_\nu(M) - x_\nu(M_0)| < \varepsilon, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

не существует $M \in \mathfrak{M}_0$. Пусть

$$x_0 = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_\nu(M_0)e)^* (x_\nu - x_\nu(M_0)e).$$

Тогда при $M \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ и $x^0(M_0) = 0$

$$x_0(M) = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(M) - x_\nu(M_0)|^2 \geqslant \varepsilon^2. \tag{3.6}$$

Покажем, что если $\tilde{M}$ — замкнутый максимальный идеал (не обязательно симметричный) в $R$, то $x_0(\tilde{M}) \,\bar{\in}\, (-\varepsilon^2, \varepsilon^2)$.

Пусть $x_0(\tilde{M})$ вещественно и пусть $R_{x_0}$ — *минимальное* замкнутое симметричное подкольцо кольца $R$. Так как идеал $\tilde{M}$ замкнутый, то существует норма $|x|_\alpha$ на $R$ такая, что $|x(M)| \leqslant |x|_\alpha$.

Пусть $\bar{R}_{x_0}$ — пополнение кольца $R_{x_0}$ по норме $|x|_\alpha$. Так как $x_0^* = x_0$ и $x_0(\tilde{M})$ вещественно, то в $R_{x_0}$ существует мультипликативный вещественный функционал $M$, непрерывный по норме $|x|_\alpha$, такой, что

$$y(M) = y(\tilde{M})$$

при $y \in R_{x_0}$. Пусть $R_\alpha$ — пополнение кольца $R$ по норме $|x|_\alpha$. Очевидно, $R_\alpha$ — нормированное кольцо с непрерывной инволюцией и $\bar{R}_{x_0}$ — замкнутое симметричное подкольцо кольца $R_\alpha$. Функционал $M$ можно продолжить на все кольцо $R_\alpha$ с сохранением вещественности, непрерывности и мультипликативности. Следовательно, $M \in \hat{\mathfrak{M}}_0$.

Из (3.6) следует, что

$$x_0(\tilde{M}) = x_0(M) \,\bar{\in}\, (-\varepsilon^2, \varepsilon^2).$$

По теореме Майкла [см. ([2]), стр. 18—19], если для любого замкнутого максимального идеала $M$ $x(M) \neq \lambda$, то $(\lambda e - x)^{-1}$ существует, следовательно, когда $\lambda \in (-\varepsilon^2, \varepsilon^2)$, $(\lambda e - x)^{-1}$ существует. Поэтому существует $x^{-1}$ и мы имеем:

$$x^{-1}(M_0)\, x(M_0) = e(M_0) = 1.$$

Но это невозможно. Значит, $\hat{\mathfrak{M}}_0$ плотно в $\hat{\mathfrak{M}}$.

Следствие. *Пусть $R$ — полунормированное кольцо с непрерывной инволюцией и $f(x)$ — линейный положительный функционал на кольце $R$. Тогда*

$$|f(x^*x)| \leqslant f(e) \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|_\alpha}. \tag{3.7а}$$

*Если $R$ коммутативно, то*

$$|f(x)| \leqslant \max_{M \in \hat{\mathfrak{M}}_0} |x(M)|\, f(e) = f(e) \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|_\alpha}. \tag{3.7б}$$

Доказательство. Если $R$ коммутативно, то, в силу теорем 2 и 3,

$$|f(x)| \leqslant f(e) \sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = f(e) \sup_{M \in \mathfrak{M}_0} |x(M)|.$$

В общем случае возьмем какое-нибудь симметричное замкнутое коммутативное подкольцо кольца $R$, содержащее элементы $x^*x$. Тогда для $x^*x$ выполнено соотношение (3.7б), откуда следует (3.7а).

## § 4. Вполне симметричные кольца

Кольцо $R$ с инволюцией называется вполне симметричным, если для любого $x \in R$ $(e + x^*x)^{-1} \in R$. Райковым (3) было доказано, что полное нормированное кольцо (не обязательно коммутативное) с непрерывной инволюцией вполне симметрично тогда и только тогда, когда для любого $x \in R$

$$\sup f(x^*x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|}, \tag{4.1}$$

где верхняя грань в левой части берется по всем положительным функционалам на кольце $R$, удовлетворяющим условию $f(e) = 1$.

Найдем необходимое и достаточное условие для того, чтобы полное полунормированное кольцо с непрерывной инволюцией было вполне симметрично.

Из доказательства теоремы Райкова [см. (5), стр. 276] легко следует

ЛЕММА 2. *Пусть $R_1$ — нормированное кольцо с непрерывной инволюцией, и пусть $R_0$ — пополнение кольца $R_1$. Для любого $x \in R_1$ существует $(e + x^*x)^{-1} \in R_0$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in R_1$ выполнено равенство* (4.1).

ЛЕММА 3. *Пусть $R$ — полное полунормированное кольцо с непрерывной инволюцией. Кольцо $R$ вполне симметрично тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathfrak{A}$ и любого $x \in R$ имеет место равенство*

$$(N_\alpha(x) =) \sup f_\alpha(x^*x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|_\alpha}, \tag{4.2}$$

*где верхняя грань в левой части берется по всем положительным функционалам $f_\alpha$, непрерывным по норме $|x|_\alpha$ и удовлетворяющим условию $f_\alpha(e) = 1$.*

Доказательство. Пусть $R_\alpha$ — пополнение кольца $R$ по норме $|x|_\alpha$. Рассмотрим $R$ как подкольцо кольца $R_\alpha$; если $R$ вполне симметрично, то для $x \in R$ $(e + x^*x)^{-1} \in R_\alpha$ и, по лемме 2, имеет место условие (4.2). Обратно, если условие (4.2) выполнено для любого $\alpha$ и $x \in R$, то, по лемме 2, в кольце $R_\alpha$ существует $(e + x^*x)^{-1}$. Так как $R$ полно, то, по теореме Майкла [см. (2), стр. 18—19] *, в кольце $R$ существует $(e + x^*x)^{-1}$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $R$ — полунормированное кольцо с непрерывной инволюцией. Кольцо $R$ вполне симметрично тогда и только тогда, когда*

---

* Согласно этой теореме, если в кольце $R_\alpha$ для всякого $\alpha \in \mathfrak{A}$ существует $x^{-1}$, то $x^{-1} \in R$.

*для любого* $x \in R$

$$\sup f(x^*x) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|_\alpha}, \qquad (4.3)$$

*где верхняя грань в левой части* (4.3) *берется по всем положительным функционалам* $f(x)$ *на кольце* $R$, *удовлетворяющим условию* $f(e) = 1$.

Отметим, что обе части в равенстве (4.3) могут быть бесконечными.

Доказательство. Если $R$ вполне симметрично, то, по лемме 3,

$$\sup f(x^*x) \geqslant \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} N_\alpha(x) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|_\alpha}.$$

С другой стороны, в силу (3.7а), всегда имеет место неравенство

$$\sup f(x^*x) \leqslant \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|_\alpha}.$$

Поэтому условие (4.3) выполнено.

Пусть (4.3) имеет место для любого $x \in R$, и пусть

$$N(x) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|_\alpha}.$$

Покажем, что при этих условиях $N(x) < \infty$ и $(e + x^*x)^{-1}$ существует. Пусть

$$y = N(x^*)e - x^*x.$$

Тогда, в силу (3.7а),

$$f(x^*xx^*x) \leqslant N(x^*) f(x^*x)$$

для положительного функционала $f(x)$. Если $f(e) = 1$, то

$$f(y^*y) = f(N(x^*)^2 e - 2N(x^*)x^*x + (x^*x)^2) =$$
$$= N(x^*)^2 - 2N(x^*) f(x^*x) + f(x^*xx^*x) \leqslant N(x^*)^2 - N(x^*) f(x^*x) \leqslant N(x^*)^2.$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y^n|_\alpha} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|(y^*y)^n|_\alpha} \leqslant \sup \sqrt{f(y^*y)} \leqslant N(x^*),$$

откуда, при $n > n_\alpha$, получаем:

$$|(N(x^*)e - x^*x)^n|_\alpha \leqslant \left(N(x^*) + \frac{1}{2}\right)^n.$$

Следовательно, ряд

$$(e + x^*x)^{-1} = \frac{1}{N(x^*) + 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{N(x^*)e - x^*x}{N(x^*) + 1}\right)^n$$

сходится в $R$, т. е. $(e + x^*x)^{-1}$ существует.

Положим, что $x_0 \in R$, $N(x_0) = \infty$, и обозначим через $R_{z_0}$ максимальное коммутативное симметричное замкнутое подкольцо кольца $R$, содержащее элемент $z_0 = x_0^*x_0$. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — пространство всех мультипликативных непрерывных функционалов $M$ на $R$ и $z_0^* = z_0$. Покажем, что $z_0(M)$ вещественно. Если $z_0(M)$ не вещественно, то существует элемент $\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ такой, что

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_1} |\sin \lambda z_0(M)| = a > 1. \qquad (4.4)$$

Пусть

$$y_0 = \sin \lambda z_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} (\lambda z_0)^{2\nu+1};$$

тогда

$$y_0^* y_0 = \sin^2 \lambda z_0.$$

Докажем, что

$$\sup f(y_0^* y_0) \leqslant 1, \tag{4.5}$$

где верхняя грань берется по всем положительным функционалам на кольце $R$, удовлетворяющим условию $f(e) = 1$.

Пусть $\hat{\mathfrak{M}}_0$ — пространство всех непрерывных вещественных функционалов на $R_{z_0}$. Если $M \in \hat{\mathfrak{M}}_0$, то $z_0(M)$ вещественно и

$$|y_0(M)| = |(\sin \lambda_0 z_0)(M)| = |\sin(\lambda z_0(M))| \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_0} |y_0^* y_0(M)| \leqslant 1.$$

Из (3.7 б) получим (4.5).

Так как

$$\sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(y_0^* y_0)^n|_\alpha} = \sup_{M \in \mathfrak{M}_1} |\sin^2 \lambda z_0(M)| = a^2 > 1,$$

то мы будем иметь:

$$\sup f(y_0^* y_0) < \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(y_0^* y_0)^n|_\alpha},$$

а это, ввиду (4.3), невозможно, следовательно, $z_0(M)$ вещественно.

Покажем, что $z_0(M) \geqslant 0$ при $M \in \mathfrak{M}_1$.

Из теоремы Бернштейна (7) (гл. 3) легко заключить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция

$$g_\varepsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}, \quad a_1 > 0,$$

с вещественными коэффициентами, удовлетворяющая неравенству

$$\left| g_\varepsilon(\xi) - \frac{\xi}{1 + \varepsilon|\xi|} \right| < \varepsilon \text{ при } -\infty < \xi < \infty. \tag{4.6}$$

Пусть

$$h_\varepsilon(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} z^{2n} = \sqrt{\frac{g_\varepsilon(z)}{z}},$$

где коэффициенты $b_{2n}$ вещественны. Положим

$$g_\varepsilon(\mu z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} (\mu z_0)^{2n+1}, \tag{4.7}$$

$$h_\varepsilon(\mu z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} (\mu z_0)^{2n}. \tag{4.8}$$

Так как $g_\varepsilon(z)$ и $h_\varepsilon(z)$ — целые функции, то ряды (4.7) и (4.8) по топологии кольца сходятся соответственно к элементам $g_\varepsilon(\mu z_0)$ и $h_\varepsilon(\mu z_0)$. Следовательно,

$$h_\varepsilon(\mu z_0)^2 \mu z_0 = g_\varepsilon(\mu z_0).$$

Пусть $\mu > 0$, $x = \sqrt{\mu}\, x_0 h_\varepsilon(\mu z_0)$. Тогда

$$x^* x = h_\varepsilon(\mu z_0)\, \mu x_0^* x_0 h_\varepsilon(\mu z_0) = g_\varepsilon(\mu z_0)$$

и

$$\sup_\alpha \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|_\alpha} = \sup_\alpha \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|g_\varepsilon(\mu z_0)^n|_\alpha} =$$
$$= \sup_{M\in\mathfrak{M}_1} |g_\varepsilon(\mu z_0(M))| \leqslant \sup_{M\in\mathfrak{M}_1} \frac{\mu\,|z_0(M)|}{1+\mu\,|z_0(M)|\,\varepsilon} + \varepsilon \leqslant \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon.$$

Значит, $N(x) < \infty$, а для этого случая мы уже доказали, что $(e + x^*x)^{-1}$ существует, т. е. существует $(e + g_\varepsilon(\mu z_0))^{-1}$. Таким образом,

$$g_\varepsilon(\mu z_0)(M) = g_\varepsilon(\mu z_0(M)) \neq -1 \tag{4.9}$$

при $M \in \mathfrak{M}_1$ и $\mu > 0$.

Если $z_0(M_0) < 0$ для некоторого $M_0 \in \mathfrak{M}_1$, то, в силу (4.6), множество всех значений $g_\varepsilon(\mu z_0(M_0))$ с переменным $\mu > 0$ покрывает интервал $\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon, -\varepsilon\right)$. Поэтому если мы возьмем $\varepsilon < \frac{1}{2}$, то найдется $\mu_0$ такое, что

$$g_\varepsilon(\mu_0 z_0(M_0)) = -1.$$

Но это противоречит (4.9). Итак, $z_0(M) \geqslant 0$ при $M \in \mathfrak{M}_1$.

По теореме Майкла [см. (2), стр. 18—19], $(e + z_0)^{-1} = (e + x_0^* x_0)^{-1}$ существует. Теорема доказана.

## § 5. Представление коммутативного кольца

В этом параграфе мы будем рассматривать только коммутативные кольца. И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком (4) было доказано, что нормированное коммутативное кольцо с инволюцией $R$ вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ (кольцу всех непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов) тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$|x^*x| = |x|\,|x^*| \tag{5.1}$$

для любого $x \in R$.

Найдем соответствующее условие для полунормированного кольца.

Определение. Мы говорим, что полунормированное кольцо вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ (т. е. кольцу всех непрерывных функций на пространстве всех максимальных идеалов), если $R$ алгебраически изоморфно $C(\mathfrak{M})$, причем каждой норме $|x|_\alpha$ соответствует компактное множество $\mathfrak{M}_\alpha \in \mathfrak{M}$ такое, что

$$|x|_\alpha = \sup_{M\in\mathfrak{M}_\alpha} |x(M)|.$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $R$ — полунормированное коммутативное кольцо с инволюцией *. Если для любого $x \in R$*

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} |x^*x|_\alpha = \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} |x|_\alpha \sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} |x^*|_\alpha \tag{5.2}$$

($\sup_{\alpha\in\mathfrak{A}} |x|_\alpha$ *может быть бесконечным*), *то*

---

* Здесь мы не предполагаем, что инволюция непрерывна.

1) *для любого* $x$ *и* $\alpha$ $|x^*x|_\alpha = |x^*|_\alpha |x|_\alpha$,
2) $R$ *полно по норме* $|x|_\alpha$,
3) $R$ *вполне изоморфно кольцу* $C(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Обозначим

$$\|x\| = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} |x|_\alpha. \tag{5.3}$$

Пусть $\widetilde{R}$ — подкольцо кольца $R$, состоящее из тех элементов $x \in R$, которые удовлетворяют условию

$$\|x\| < \infty, \quad \|x^*\| < \infty.$$

Очевидно, что $\|e\| = 1$, $e \in \widetilde{R}$. Кольцо $\widetilde{R}$ с нормой $\|x\|$ — коммутативное нормированное кольцо с инволюцией, однако не обязательно полное Из (5.2) следует, что

$$\|x^*x\| = \|x\|\|x^*\|. \tag{5.4}$$

Пусть $\widetilde{\mathfrak{M}}$ — пространство всех максимальных идеалов кольца $\widetilde{R}$. Легко видеть (даже когда $\widetilde{R}$ не полно, как в доказательстве теоремы Гельфанда и Наймарка [см. ([5]), стр. 208]), что $\widetilde{R}$ вполне изоморфно подкольцу кольца $C(\widetilde{\mathfrak{M}})$ всех непрерывных функций на пространстве $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

ЛЕММА 4. *Если* $x \in R$ *и* $x^{-1}$ *существует, то*

$$x^{-1}x^* \in \widetilde{R}, \quad \|x^{-1}x^*\| = 1 \tag{5.5}$$

и

$$|x^*x|_\alpha = |x^2|_\alpha = |x^{*2}|_\alpha \tag{5.6}$$

*для любого* $\alpha \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $y = x^{-1}x^*$; тогда $y^* = (x^*)^{-1}x = y^{-1}$. Из (5.4) следует, что

$$\|y^*\|\|y\| = \|y^*y\| = \|e\| = 1. \tag{5.7}$$

Из того, что $y \neq 0$ и $y^* \neq 0$, выводим: $\|y\| < \infty$, $\|y^*\| < \infty$. Поэтому $y \in \widetilde{R}$, $y^* \in \widetilde{R}$. Так как $\widetilde{R}$ вполне изоморфно подкольцу кольца $C(\widetilde{\mathfrak{M}})$, то

$$\|y\| = \|y^*\|. \tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) следует, что $\|y\| = \|y^*\| = 1$.

Таким образом,

$$|x^*x|_\alpha \leqslant |x^*x^{-1}|_\alpha |x^2|_\alpha \leqslant \|x^*x^{-1}\| |x^2|_\alpha = |x^2|_\alpha,$$

$$|x^2|_\alpha \leqslant |x^{*-1}x|_\alpha |xx^*|_\alpha \leqslant \|y^*\| \, |x^*x|_\alpha = |x^*x|_\alpha$$

и (5.6) выполнено. Лемма 4 доказана.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_\alpha$ — пространства, определенные в § 1,

ЛЕММА 5. *Для любого* $x \in R$ $x^*(M) = \overline{x(M)}$, $M \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. По лемме 4, если $y \in R$ и $y^{-1}$ существует, то

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |y^*y(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(y^*y)^n|_\alpha} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|y^{2n}|_\alpha} =$$

$$= \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |y(M)|^2 = \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |y^*(M)|^2. \tag{5.9}$$

Пусть $M \in \mathfrak{M}_\alpha$. Обозначим через $M^*$ совокупность всех элементов $x^*$, $x \in M$. Легко показать, что $M^*$ — максимальный идеал и $x^*(M^*) = x(M)$.

Пусть $y = \exp \lambda x$, $|\lambda| = 1$; тогда $y^{-1}$ существует. Из (5.9) следует, что

$$|y(M^*)| = |y^*(M)| \leqslant \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |y^*(M)| = \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |y(M)| \leqslant |y|_\alpha.$$

В то же время,

$$y(M^*) = \exp \lambda x(M^*),$$

$$|y|_\alpha = |\exp \lambda x|_\alpha \leqslant \exp |x|_\alpha.$$

Поэтому

$$|x(M^*)| \leqslant |x|_\alpha,$$

т. е.

$$M^* \in \mathfrak{M}_\alpha.$$

Как и в доказательстве теоремы Гельфанда и Наймарка [см. ([5]), стр. 208], легко видеть, что соответствие $M \to M^*$ есть гомеоморфизм в пространстве $\mathfrak{M}_\alpha$. Пусть $\Gamma_\alpha$ — кольцевая граница $\mathfrak{M}_\alpha$. Докажем, что $M^* = M$ для всех $M \in \Gamma_\alpha$. Предположим противное: пусть $M_0^* \neq M_0$ для некоторого $M_0 \in \Gamma_\alpha$. Тогда существуют непересекающиеся окрестности $V(M_0)$ и $(V(M_0))^*$. Легко показать (хотя $R$ по норме $|x|_\alpha$ не полно), что в $R$ существует элемент $x_0$ такой, что $|x_0(M)|$ принимает свое наибольшее значение

$$a = \max_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x_0(M)|$$

в $V(M_0)$ и остается $< a$ в $\mathfrak{M}_\alpha - V(M_0)$. Предположим, что для некоторого $M_1 \in V(M_0)$

$$x_0(M_1) = a.$$

Пусть $y_0 = \exp x_0$. Тогда $y_0^{-1}$ существует,

$$|y_0(M_1)| = |\exp x_0(M_1)| = \exp a = \max_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |y_0(M)|$$

и

$$|y_0(M)| < \exp a \text{ при } M \in \mathfrak{M}_\alpha - V(M_0).$$

Значит, функция $|y_0^*(M)| = |y_0(M^*)|$ принимает свое наибольшее значение в $(V(M_0))^*$ и остается $< \exp a$ в $\mathfrak{M}_\alpha - (V(M_0))^*$. По построению функции,

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |y_0^* y_0(M)| = \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |y_0^*(M)|\,|y_0(M)| < \exp 2a = \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |y_0(M)|^2,$$

но это противоречит (5.9).

Таким образом, $M^* = M$ для всех $M \in \Gamma_\alpha$. Отсюда следует, что $x_0^*(M) = \overline{x(M)}$ для $M \in \Gamma_\alpha$.

Если $x^* = x$, то $x(M) = \overline{x(M)}$ в $\Gamma_\alpha$. Покажем, что $x(M)$ вещественно в $\mathfrak{M}_\alpha$. Предположим противное: пусть $M' \in \mathfrak{M}_\alpha - \Gamma_\alpha$, $x(M')$ не вещественно. Тогда существует вещественное число $\lambda$ такое, что

$$|\exp \lambda i x(M')| > 1.$$

А так как $|\exp \lambda ix(M)| = 1$ при $M \in \Gamma_\alpha$, то это противоречит определению границы. Таким образом, $x(M) = \overline{x(M)}$ в $\mathfrak{M}_\alpha$ и для любого $y \in R$ $y^*(M) = \overline{y(M)}$ в $\mathfrak{M}$.

Лемма доказана.

Очевидно, каждому идеалу $M \in \mathfrak{M}$ соответствует идеал $\widetilde{M} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ такой, что $x(M) = x(\widetilde{M})$ для всех $x \in \widetilde{R}$. Докажем, что если $M_1 \neq M_2$, то $\widetilde{M}_1 \neq \widetilde{M}_2$. В самом деле, существует элемент $x \in R$ такой, что $x(M_1) = 0$, $x(M_2) = a$, $a > 0$. Пусть $y = \exp x$. По лемме 4, $z = y^{-1}y^* \in \widetilde{R}$, и мы имеем:

$$\exp(-x(M)) \cdot \exp\,(\overline{x(M)}) = z(\widetilde{M}), \quad z(\widetilde{M}_1) = 1, \quad z(\widetilde{M}_2) = \exp(-2ai) \neq 1.$$

Таким образом, мы можем отождествлять $M$ и $\widetilde{M}$.

Рассмотрим $\mathfrak{M}$ как подмножество пространства $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

ЛЕММА 6. *Топология в пространстве $\mathfrak{M}$ есть топология, индуцированная из пространства $\widetilde{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $M_0 \in \mathfrak{M}$ и окрестности $U(M_0)$ в $\mathfrak{M}$ существует окрестность $\widetilde{U}(M_0)$ в $\widetilde{\mathfrak{M}}$ такая, что

$$\widetilde{U}(M_0)\mathfrak{M} \subset U(M_0).$$

Пусть $U(M_0)$ — совокупность тех $M \in \mathfrak{M}$, которые удовлетворяют условию $|x_\nu(M) - x_\nu(M_0)| < \varepsilon$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, где $x_1, \ldots, x_m$ — фиксированные элементы кольца $R$. Для простоты мы можем предполагать, что $x_\nu(M_0) = 0$ и $x_\nu^* = x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Возьмем

$$y_\nu = \exp\left[\frac{i}{2}\exp(-x_\nu^2)\right], \qquad z_\nu = y_\nu y_\nu^{*-1}.$$

Тогда $z_\nu \in \widetilde{R}$ и

$$z_\nu(M) = y_\nu y_\nu^{*-1}(M) = y_\nu(M)\,\overline{(y_\nu(M))}^{-1} = \exp[i\exp(-x_\nu^2(M))].$$

Таким образом, существует $\eta > 0$ такое, что если

$$|z_\nu(M) - z_\nu(M_0)| = |\exp[i\exp(-x_\nu^2(M))] - \exp i| =$$
$$= |-\exp[i\exp(-x_\nu^2(M)) - i] - 1| < \eta,$$

то

$$|x_\nu(M)| < \varepsilon.$$

Пусть $\widetilde{U}(M_0)$ — совокупность тех $M \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, которые удовлетворяют условию $|z_\nu(M) - z_\nu(M_0)| < \eta$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $\widetilde{U}(M_0)$ есть окрестность точки $M_0$ в пространстве $\widetilde{\mathfrak{M}}$ и

$$\widetilde{U}(M_0)\mathfrak{M} < U(M_0).$$

Тем самым лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. *Если $x \in R$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|_\alpha} = 0$, то $|x|_\alpha = 0$.*

Доказательство. Пусть $z = e + ix$ и

$$y = zz^{*-1} - e = (e + ix)(e - ix^*)^{-1} - e.$$

Тогда, по лемме 4, $y \in \widetilde{R}$ и для любого $M \in \mathfrak{M}_\alpha$

$$y(M) = (1 + x(M)i)(1 - x^*(M)i)^{-1} - 1 = 0,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y^n|_\alpha} = 0.$$

Если лемма верна для любого $y \in \widetilde{R}$, то $|y|_\alpha = 0$. Так как

$$i(x - x^*) = y(e - ix^*),$$

то $|x - x^*|_\alpha = 0$; аналогично получим $|x + x^*|_\alpha = 0$, значит, $|x_\alpha| = 0$.

Поэтому достаточно доказать лемму для случая $x \in \widetilde{R}$. Мы можем доказать больше: если $x \in \widetilde{R}$, то

$$|x|_\alpha = \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x(M)|.$$

Действительно, пусть $\widetilde{\widetilde{R}}$ — пополнение кольца $\widetilde{R}$ по норме $\|x\|$. Тогда $\widetilde{\widetilde{R}}$ вполне изоморфно кольцу $C(\widetilde{\mathfrak{M}})$. Так как $|x|_\alpha \leqslant \|x\|$, то мы можем продолжить полунорму $|x|_\alpha$ на все кольцо $\widetilde{\widetilde{R}}$. Пусть $I_\alpha$ — совокупность элементов $x \in \widetilde{\widetilde{R}}$ таких, что $|x|_\alpha = 0$. Тогда $I_\alpha$ — замкнутый идеал кольца $\widetilde{\widetilde{R}}$ и существует компактное множество $\mathfrak{M}_\alpha \subset \widetilde{\mathfrak{M}}$ такое, что $\widetilde{\widetilde{R}} / I_\alpha$ вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M}_\alpha)$. Для $y \in I_\alpha$ $|x + y|_\alpha = |x|_\alpha$, поэтому $|x|_\alpha$ можно рассматривать как полунорму в кольце $\widetilde{\widetilde{R}} / I_\alpha$. В силу теоремы Гельфанда и Наймарка [см. ([5]), стр. 279, теорема 1],

$$|x|_\alpha \geqslant \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x(M)|.$$

С другой стороны, для любого $y \in I_\alpha$

$$|x|_\alpha = \min_{y \in I_\alpha} |x + y|_\alpha \leqslant \min_{y \in I_\alpha} \|x + y\| = \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x(M)|.$$

Поэтому для любого $x \in \widetilde{R}$

$$|x|_\alpha = \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x(M)|.$$

Тем самым лемма 7 доказана.

Из леммы 7 следует, что если $x(M) = 0$ для любого $x \in M$, то $|x|_\alpha = 0$ при всех $\alpha$, т. е. $x = 0$.

Пусть $R_1$ — подкольцо кольца $C(\mathfrak{M})$, состоящее из функций $x(M)$, $x \in R$. Тогда $x \to x(M)$ есть взаимно однозначное соответствие между кольцами $R$ и $R_1$.

ЛЕММА 8. *Пусть $\varphi(M)$ — непрерывная функция на $\widetilde{\mathfrak{M}}$, удовлетворяющая условию*

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |\varphi(M)| = \max_{M \in \widetilde{\mathfrak{M}}} |\varphi(M)|. \tag{5.10}$$

*Тогда существует элемент $x_0 \in R$ такой, что $x_0(M) = \varphi(M)$ при $M \in \mathfrak{M}$ и*

$$\|x_0\| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |\varphi(M)|.$$

Доказательство. Очевидно, существуют элементы $x_n \in \widetilde{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\max_{M \in \widetilde{\mathfrak{M}}} |x_n(M) - \varphi(M)| \to 0. \tag{5.11}$$

Это значит, что

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \text{ при } n,\ m \to \infty,$$

т. е.

$$|x_n - x_m|_\alpha \to 0 \text{ при } n,\ m \to \infty$$

для любого $\alpha$. Так как $R$ полно, то существует элемент $x_0 \in R$ такой, что при $n \to \infty$

$$|x_n - x_0|_\alpha \to 0. \tag{5.12}$$

Следовательно, $x_n(M) \to x_0(M)$ при $M \in \mathfrak{M}$, т. е. $x_0(M) = \varphi(M)$ на $\mathfrak{M}$.

Так как

$$|x_0|_\alpha \leqslant |x_n - x_0|_\alpha + |x_n|_\alpha \leqslant |x_n - x_0|_\alpha + \|x_n\|,$$

то из (5.11) и (5.12) следует, что

$$\|x_n\| = \max_{M \in \widetilde{\mathfrak{M}}} |\varphi(M)|$$

и

$$|x_0|_\alpha \leqslant \max_{M \in \widetilde{\mathfrak{M}}} |\varphi(M)|$$

или

$$\|x_0\| \leqslant \max_{M \in \widetilde{\mathfrak{M}}} |\varphi(M)|.$$

Однако $\|x_0\| \geqslant \max_{M \in \mathfrak{M}} |\varphi(M)|$; из (5.10) следует, что

$$\|x_0\| = \max_{M \in \mathfrak{M}} |\varphi(M)|.$$

Лемма 8 доказана.

Докажем, что если $x \in R$, то

$$|x|_\alpha = \max_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x(M)|. \tag{5.13}$$

Так как $\mathfrak{M}_\alpha$ компактно, то каждую непрерывную функцию $f(M)$ на $\mathfrak{M}_\alpha$ можно продолжить на $\widetilde{\mathfrak{M}}$ с сохранением непрерывности и

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |f(M)| = \sup_{M \in \widetilde{\mathfrak{M}}} |f(M)|. \tag{5.14}$$

Поэтому каждому $x \in R$ соответствует непрерывная функция $\varphi(M)$ на $\widetilde{\mathfrak{M}}$ такая, что $x(M) = \varphi(M)$ при $M \in \mathfrak{M}_\alpha$ и $\sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x(M)| = \sup_{M \in \widetilde{\mathfrak{M}}} |\varphi(M)|$.

Таким образом, $\varphi(M)$ удовлетворяет (5.10).

Из леммы 8 следует, что существует элемент $x_0 \in R$ такой, что

$$x_0(M) = \varphi(M) = x(M) \text{ при } M \in \mathfrak{M}_\alpha \tag{5.15}$$

и

$$\|x_0\| = \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x(M)| = \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x_0(M)|. \tag{5.16}$$

Так как

$$\|x_0\| \geqslant |x_0|_\alpha \geqslant \sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x_0(M)|,$$

то мы имеем:

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}_\alpha} |x_0(M)| = |x_0|_\alpha. \tag{5.17}$$

Из (5.14) следует, что $(x_0 - x)(M) = 0$ при $M \in \mathfrak{M}_\alpha$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x_0 - x)^n|_\alpha} = 0.$$

По лемме 7,

$$|x_0 - x|_\alpha = 0, \tag{5.18}$$

поэтому из (5.18), (5.17) и (5.16) следует (5.13).

По лемме 5 имеет место равенство

$$|x^* x|_\alpha = \sup_{M\in\mathfrak{M}_\alpha} |x^*(M)\, x(M)| = \sup_{M\in\mathfrak{M}_\alpha} |x(M)|^2 = |x|_\alpha^2.$$

Докажем, что $R_1 = C(\mathfrak{M})$, где $R_1$ — образ кольца $R$ в $C(\mathfrak{M})$. Пусть $\varphi(M) \in C(\mathfrak{M})$. Тогда существует функция $\varphi_\alpha(M) \in C(\mathfrak{M})$ такая, что

$$\varphi(M) = \varphi_\alpha(M) \text{ при } M \in \mathfrak{M}_\alpha$$

и

$$|\varphi_\alpha(M)| \leqslant \sup_{M\in\mathfrak{M}_\alpha} |\varphi_\alpha(M)|$$

для любого $M \in \widetilde{\mathfrak{M}}$. Поэтому существуют $x_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, такие, что

$$x_\alpha(M) = \varphi_\alpha(M) = \varphi(M) \text{ при } M \in \mathfrak{M}_\alpha.$$

По теореме Майкла [см. (2), стр. 17], существует элемент $x_0 \in R$ такой, что $x_0(M) = \varphi(M)$ при $M \in \mathfrak{M}$, т. е. $\varphi(M) \in R_1$ и $R = C(\mathfrak{M})$. Утверждение доказано.

## § 6. Представление кольца в кольце операторов

Хорошо известно [см. (5), стр. 281] следующее предложение: если $R$ — нормированное, не обязательно коммутативное, кольцо с инволюцией, причем $|x^* x| = |x|^2$ для всех $x \in R$, то $R$ вполне изоморфно кольцу ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $R$ — полное полунормированное кольцо с инволюцией. Если для любых $x \in R$ и $\alpha \in \mathfrak{A}$*

$$\sup_\alpha |x^* x|_\alpha = \sup_\alpha |x|_\alpha^2, \tag{6.1}$$

*то для всех $\alpha$ имеет место равенство*

$$|x^* x|_\alpha = |x|_\alpha^2, \tag{6.2}$$

*причем существуют гильбертово пространство $H$ и проекционные операторы $P_\alpha$ на $H$ такие, что*

1) *каждому элементу $x \in R$ соответствует (не обязательно ограниченный) оператор $A_x$ на $H$ такой, что если $\widetilde{R}$ — кольцо всех $A_x$, $x \in R$, то $R$ и $\widetilde{R}$ алгебраически изоморфны и $A_x^* = A_{x^*}$;*

2) *$A_x P_\alpha = P_\alpha A_x$ есть ограниченный оператор в $H$ для любого $\alpha$ и любого $x \in R$;*

3) *имеет место равенство*

$$|x|_\alpha = |A_x P_\alpha|, \tag{6.3}$$

*где $|\ldots|$ — норма оператора в $H$.*

Доказательство. Пусть $R_0$ — подкольцо кольца $R$, состоящее из тех элементов в $R$, которые удовлетворяют условию

$$\|x\| = \sup_\alpha |x|_\alpha < \infty.$$

Так как $\|x^*\| = \|x\|$, то из $x \in R$ следует $x^* \in R$ и

$$\|x^*x\| = \|x\|^2. \tag{6.4}$$

Пусть $\bar{R}_0$ — пополнение кольца $R_0$ по норме $\|x\|$. Тогда $\bar{R}_0$ вполне изоморфно кольцу операторов в гильбертовом пространстве.

Так как $|x|_\alpha \leqslant \|x\|$, то мы можем продолжить полунорму $|x|_\alpha$ на кольцо $\bar{R}_0$. Пусть $I_\alpha$ — совокупность тех элементов $x \in \bar{R}_0$, которые удовлетворяют условию $|x|_\alpha = 0$. Тогда $I_\alpha$ — замкнутый идеал в $\bar{R}_0$.

Положим для любого $x \in R$ и любого $c > 0$

$$y = x[c(x^*x)^2]' + x, \tag{6.5}$$

где элемент

$$[c(x^*x)^2]' = [e + c(x^*x)^2]^{-1} - e$$

существует в силу того, что полное кольцо $R$ вполне регулярно. Полагая $z = x^*x$, имеем:

$$y^*y = [(cz^2)' + e](x^*x)[(cz^2)' + e] = [(cz^2)' + e]^2 z = z[e + cz^2]^{-2}.$$

Но при положительном $c$ функция $\frac{t}{(1+ct^2)^2}$ достигает своего наибольшего значения в точке $t = \frac{1}{\sqrt{3c}}$; следовательно, применяя к $y^*y$ функциональное представление, находим, что

$$\|y^*y\| \leqslant \frac{9}{16\sqrt{3c}}$$

и, значит,

$$\|y\| \leqslant \frac{3}{4\sqrt[4]{3c}}. \tag{6.6}$$

Пусть $R_z$ — максимальное симметричное подкольцо кольца $R$, содержащее $x$. Применяя теорему 5 к кольцу $R_z$, легко показать, что

$$|(cz^2)'|_\alpha = \frac{c|z|_\alpha^2}{1 + c|z|_\alpha^2}. \tag{6.7}$$

Пусть $x \in I_\alpha$; тогда также $z = x^*x \in I_\alpha$ и $(cz^2)' \in I_\alpha$. Но

$$y^* = x^* + (cz^2)' x^*.$$

Так как $-(cz^2)' x^* \in I_\alpha$, то $x^* - y^* \in I_\alpha$. В силу (6.6), мы имеем:

$$x^* = \lim_{c \to 0} (x^* - y^*) \in I_\alpha.$$

Следовательно, идеал $I_\alpha$ симметричен.

Рассмотрим фактор-кольцо $R/I_\alpha$ с нормой $|x|_\alpha$. Комбинируя (6.5), (6.6) и (6.7), заключаем, что в $R/I$

$$|x|_\alpha \leqslant |y|_\alpha + |x(cz^2)'|_\alpha \leqslant \frac{3}{4\sqrt[4]{3c}} + \frac{c|x|_\alpha |z|_\alpha^2}{1 + c|z|_\alpha^2}.$$

Положив $c = \frac{1}{3|z|_\alpha^2}$, получим

$$|x|_\alpha \leqslant \sqrt{|z|_\alpha} + \frac{1}{4}|x|_\alpha,$$

откуда

$$|x|_\alpha^2 \leqslant |z|_\alpha \leqslant |x^*x|_\alpha.$$

Следовательно, $|x|_\alpha \leqslant |x^*|_\alpha$ и, аналогично, $|x^*|_\alpha \leqslant |x|_\alpha$.

Таким образом, $|x^*|_\alpha = |x|_\alpha$. Но, с другой стороны,

$$|x^*x|_\alpha \leqslant |x^*|_\alpha |x|_\alpha = |x|_\alpha^2,$$

так что в $\overline{R}_0$

$$|x^*x|_\alpha = |x|_\alpha^2.$$

В силу теоремы 5, если $x \in R$, то

$$(x^*x)[e + \lambda(x^*x)^2]^{-2} \in R_0, \quad \lambda > 0.$$

Пусть $y = x[e + \lambda(x^*x)^2]^{-1}$; тогда

$$y^*y = (x^*x)[e + \lambda(x^*x)^2]^{-2} \in R_0,$$

поэтому $y \in R_0$ и $|y^*y|_\alpha = |y|_\alpha^2$, т. е.

$$|(x^*x)[e + \lambda(x^*x)^2]^{-2}|_\alpha = |x[e + \lambda(x^*x)^2]^{-1}|_\alpha^2.$$

При $\lambda \to 0$ отсюда выводим: $|x^*x|_\alpha = |x|_\alpha^2$ для любого $x \in R$.

Поэтому для каждого $\alpha$ существуют гильбертово пространство $H_\alpha$ и кольцо $R_\alpha$ операторов $A_x^\alpha$ такие, что всякому $x \in R$ соответствует $A_x^\alpha$, причем

$$|x|_\alpha = |A_x^\alpha|, \quad A_{x^*}^\alpha = A_x^{\alpha^*}, \quad A_{x_1+x_2}^\alpha = A_{x_1}^\alpha + A_{x_2}^\alpha, \quad A_{x_1x_2}^\alpha = A_{x_1}^\alpha A_{x_2}^\alpha.$$

Пусть $H$ — произведение пространств $H_\alpha$, и пусть

$$\xi \in H, \quad \xi = \{\xi_\alpha\}, \quad \xi_\alpha = H_\alpha, \quad \sum |\xi_\alpha|^2 < \infty.$$

Каждому элементу $x \in R$ поставим в соответствие оператор $A_x$ на $H$ такой, что

$$A_x \xi = \{A_x^\alpha \xi_\alpha\}$$

(т. е. оператор $A_x$ не обязательно ограниченный). Пусть $P_\alpha$ — проекционный оператор $H$ на $H_\alpha$. Тогда $H$ и $P_\alpha$ удовлетворяют условиям 1) — 3) теоремы 6. Теорема 6 полностью доказана.

Поступило
17.XII.1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Кольца с инволюцией и их представления, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 12(1948), 445—480.

[2] Michael E. A., Locally multiplicatively-convex topological algebras, Memoirs A. M. S., № 11 (1952), 1—75.

[3] Райков Д. А., К теории нормированных колец с инволюцией, Доклады Ак. наук СССР, 54 (1946), 391—394.

[4] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сборн., 12 (54) : 2 (1943), 197—213.

[5] Наймарк М. А., Нормированные кольца, ГИТЛ, 1956.

[6] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., 1936.

[7] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, 1937.

[8] Ся До-Шин, О полунормированных кольцах с инволюцией, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 6 (1959), 1223—1225.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 529—564

М. Ф. БОКШТЕЙН

# ТЕОРЕМА ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ДЛЯ ГРУПП ГОМОЛОГИЙ ГРУППОВЫХ КОМПЛЕКСОВ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

(*Представлено академиком* А. И. Мальцевым)

В работе доказывается (в форме прямого произведения, а не только в форме точной последовательности) теорема об универсальных коэффициентах для групп гомологий произвольных групповых комплексов без кручения, т. е. произвольных градуированных дифференциальных абелевых групп без элементов конечного порядка.

## § 1

В настоящей работе под группой будет всюду пониматься аддитивно записываемая абелева группа; при ее задании образующими и соотношениями соотношения коммутативности указываться не будут; свободной группой будет называться свободная абелева группа.

Цель работы состоит в обобщении одной теоремы гомологической алгебры, имеющем большое значение для алгебраической топологии, а также представляющем несомненный самостоятельный интерес *.

Напомним соответствующие алгебраические понятия **.

1. Тензорным произведением $G \otimes H$ групп $G$ и $H$ называется группа, образующими которой служат всевозможные пары $g \otimes h$, где $g \in G$, $h \in H$, а соотношениями — соотношения дистрибутивности

$$(g_1 + g_2) \otimes h = g_1 \otimes h + g_2 \otimes h, \quad g \otimes (h_1 + h_2) = g \otimes h_1 + g \otimes h_2.$$

Иными словами, $G \otimes H$ есть фактор-группа группы всех конечных линейных форм с целыми коэффициентами

$$\sum_k \lambda_k (g_k, h_k)$$

от символов $(g_k, h_k)$, где $g_k \in G$, $h_k \in H$, по подгруппе, порожденной элементами вида

$$(g_1, h) + (g_2, h) - (g_1 + g_2, h)$$

и

$$(g, h_1) + (g, h_2) - (g, h_1 + h_2).$$

---

* Краткое содержание настоящей работы опубликовано в заметках ([10]) и ([11]). Выражаю благодарность М. М. Постникову и А. С. Шварцу за ценные замечания, использованные при выполнении работы.

** См. ([1]).

Отметим, что из определения сразу вытекает, что

$$0 \otimes h = 0, \quad g \otimes 0 = 0, \quad \lambda g \otimes h = g \otimes \lambda h = \lambda (g \otimes h),$$

где $\lambda$ — целое число. Очевидно, каждый элемент группы $G \otimes H$ может быть, хотя и неоднозначно, записан в виде конечной суммы

$$\sum_k g_k \otimes h_k,$$

где $g_k \in G$, $h_k \in H$.

Важно иметь в виду, что если $G'$ есть подгруппа группы $G$, то $G' \otimes H$ еще не обязано изоморфно вкладываться в $G \otimes H$. Это значит, что символ $g \otimes h$ имеет различный смысл в зависимости от того, рассматривается ли он как элемент группы $G \otimes H$ или как элемент группы $G' \otimes H$. Поэтому каждый раз, когда группа $G'$ рассматривается как подгруппа некоторой другой группы $G$, мы будем его только в первом из этих двух случаев обозначать через $g \otimes h$ (если группа $G$ не рассматривается сама как подгруппа другой группы), записывая его во втором случае в виде $g \underset{G'}{\otimes} h$ * (что касается второго тензорного множителя $H$, то в нем мы в настоящей работе нигде к подгруппам не переходим).

Очевидно, в определении тензорного произведения за образующие достаточно принимать не всевозможные пары $g \otimes h$, а лишь такие, в которых $g$ и $h$ сами являются образующими групп $G$ и $H$. Тогда соотношения в группе $G \otimes H$ будут иметь вид

$$\sum \lambda_k (g_k \otimes h) = 0, \quad \sum \mu_k (g \otimes h_k) = 0,$$

где $\sum \lambda_k g_k = 0$, $\sum \mu_k h_k = 0$ — всевозможные соотношения в группах $G$ и $H$. Из этого замечания выводим, в частности, что

$$G \otimes I = G, \quad G \otimes I_m = G_m, \quad G \otimes (I \times k) = G \times k$$

и, аналогично,

$$I \otimes H = H, \quad I_m \otimes H = H_m, \quad (I \times k) \otimes H = H \times k$$

(знак равенства, как и всюду дальше, ставится в качестве знака естественного изоморфизма), где $G_m$ есть группа $G$, в которую введены дополнительные соотношения $mg = 0$ для каждого элемента (или каждой образующей) $g$ группы, т. е. фактор-группа $G/mG$ по подгруппе $m$-кратных элементов группы $G$, $G \times k$ — прямая сумма $k$ экземпляров группы $G$, $I$ — группа целых чисел, $I_m$ — группа целочисленных вычетов по модулю $m$, $I \times k$ — свободная группа с $k$ образующими.

Отметим, что соотношения

$$G \otimes (I \times k) = G \times k$$

и

$$(I \times k) \otimes H = H \times k$$

являются следствиями более общего свойства дистрибутивности тензор-

* Таким образом, в нашей работе символ $G'$ под знаком $\otimes$ имеет другой смысл, чем обычно, т. е. не имеет никакого отношения к кольцу, относительно которого берется тензорное произведение и которое у нас здесь всюду есть кольцо целых чисел.

ного произведения относительно прямого суммирования групп:

$$G \otimes (H' + H'') = G \otimes H' + G \otimes H'',$$

$$(G' + G'') \otimes H = G' \otimes H + G'' \otimes H.$$

Тензорное произведение является дважды ковариантным функтором, т. е. гомоморфизмы $\varphi : G \to G'$ и $\psi : H \to H'$ естественно порождают гомоморфизм

$$\varphi \otimes \psi : G \otimes H \to G' \otimes H',$$

удовлетворяющий условиям $1 \otimes 1 = 1$ и $(\varphi' \otimes \psi')(\varphi \otimes \psi) = \varphi'\varphi \otimes \psi'\psi$, где 1 обозначает тождественное отображение соответствующей группы, а $\varphi'\varphi$ есть суперпозиция отображений $\varphi$ и $\varphi'$ (и аналогично в остальных случаях). Этот гомоморфизм определяется соотношением

$$(\varphi \otimes \psi)(g \otimes h) = \varphi g \otimes \psi h \quad (g \in G,\ h \in H).$$

Вместо $\varphi \otimes 1$ и $1 \otimes \psi$ мы в дальнейшем там, где это не вызовет недоразумений, будем писать просто $\varphi$ и $\psi$, так что

$$\varphi (g \otimes h) = \varphi g \otimes h, \quad \psi (g \otimes h) = g \otimes \psi h.$$

2. Конечная или бесконечная в одну или в обе стороны последовательность групп, каждая из которых определенным образом гомоморфно отображена в следующую,

$$\cdots \to G^{q-1} \to G^{q} \to G^{q+1} \to \cdots,$$

называется *точной последовательностью*, если образ каждого гомоморфизма (т. е. образ группы при этом гомоморфизме) совпадает с ядром (подгруппой переходящих в нуль элементов) следующего.

В частности, точность пятичленной последовательности

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

означает, очевидно, что группу $A$ можно рассматривать как подгруппу группы $B$ и что $B/A = C$. Такая точная последовательность называется *расщепляющейся*, если существует изоморфное вложение $\tilde{\beta}$ группы $C$ в группу $B$, называемое *расщепляющим отображением*, для которого $\beta\tilde{\beta} = 1$, где $\beta$ — гомоморфизм рассматриваемой последовательности, отображающий группу $B$ на группу $C$. В этом случае группа $B$ распадается в прямую сумму $B \simeq A + C$, однако выделение второго прямого слагаемого не является естественным, а зависит от выбора расщепляющего отображения.

3. Периодическое произведение (или произведение кручения) $G * H$ двух групп $G$ и $H$ определяют обычно так. Группу $G$ представляют как фактор-группу $P/Q$ свободной группы $P$ по ее подгруппе $Q$, что, очевидно, всегда возможно. Тогда можно составить точную последовательность

$$0 \to Q \to P \to G \to 0.$$

Соответствующая последовательность

$$0 \to Q \otimes H \to P \otimes H \to G \otimes H \to 0,$$

гомоморфизмы которой порождаются гомоморфизмами предыдущей последовательности, уже не обязательно будет точной; точность сохра-

няется лишь для ее отрезка

$$Q \otimes H \to P \otimes H \to G \otimes H \to 0,$$

т. е. ядро гомоморфизма $Q \otimes H \to P \otimes H$, вообще говоря, нетривиально. Это ядро и принимаем за периодическое произведение:

$$G * H = \operatorname{Ker}(Q \otimes H \to P \otimes H).$$

Можно показать, что строение группы $G * H$ не зависит от случайностей такого определения и что к такой же группе можно прийти, производя соответствующее построение для множителя $H$ вместо $G$ (см. Добавление I). Наконец, периодическое произведение двух групп, как и тензорное произведение, тоже является дважды ковариантным функтором (см. § 4, п. 6).

Ниже мы дадим другое определение периодического произведения.

4. Групповым комплексом или просто комплексом называется последовательность групп, каждая из которых гомоморфно отображена в следующую с помощью гомоморфизма $d$, называемого дифференциальным гомоморфизмом или дифференциалом и удовлетворяющего условию $dd = 0$:

$$L: \cdots \xrightarrow[d]{} L^{q-1} \xrightarrow[d]{} L^{q} \xrightarrow[d]{} L^{q+1} \xrightarrow[d]{} \cdots *;$$

это значит, что образ каждого гомоморфизма содержится в ядре следующего:

$$\operatorname{Im}(L^{q-1} \to L^{q}) \subset \operatorname{Ker}(L^{q} \to L^{q+1}).$$

Группы комплекса $L$ мы будем предполагать последовательно занумерованными числом $q$ и не содержащими общих элементов, за исключением нуля; тогда обозначение всех гомоморфизмов между группами комплекса одним и тем же символом $d$ не может привести к недоразумению.

Часто вместо последовательности групп $L^q$ за комплекс $L$ принимают прямую сумму $\sum_q L^q$ этих групп — это есть градуированная дифференциальная группа, т. е. группа с занумерованными прямыми слагаемыми, в которой действует дифференциальный оператор $d$, удовлетворяющий условию $dd = 0$ и повышающий на единицу градуировку элементов из этих прямых слагаемых **.

5. Для комплекса $L$ $q$-мерные группы гомологий $H^q(L, G)$ по произвольной группе $G$, называемой группой коэффициентов, определяются следующим образом:

$$H^q(L, G) = \operatorname{Ker}(L^q \otimes G \to L^{q+1} \otimes G) / \operatorname{Im}(L^{q-1} \otimes G \to L^q \otimes G);$$

законность такого определения вытекает из того, что гомоморфизм $d \otimes 1$, порожденный дифференциальным гомоморфизмом $d$, будет тоже

* Мы будем придерживаться такой нумерации групп, хотя чаще их нумеруют справа налево.

** Как мне справедливо указал А. С. Шварц, полученные в настоящей работе результаты можно было бы без всякого изменения метода доказывать и для дифференциальных групп без градуировки, что, не увеличивая общности результатов (ибо такая дифференциальная группа $A$ равносильна комплексу $\ldots \to A \xrightarrow[d]{} A \to \ldots$), позволило бы несколько упростить обозначения, делая излишним индекс $q$.

дифференциальным гомоморфизмом для групп $L^q \otimes G$, ибо

$$(d \otimes 1)(d \otimes 1) = dd \otimes 1 = 0.$$

Соответствующее отображение

$$\operatorname{Ker}(L^q \otimes G \to L^{q+1} \otimes G) \to H^q(L, G)$$

обозначаем через $\eta$.

Для упрощения записи введем обозначения:

$$H^q(L, I) = H_0^q(L), \quad H^q(L, I_m) = H_m^q(L).$$

Первую группу будем называть $q$-мерной *целочисленной группой гомологий комплекса* $L$, а вторую — его $q$-мерной *группой гомологий по модулю* $m$. Имеем:

$$H_0^q(L) = \operatorname{Ker}(L^q \to L^{q+1}) / \operatorname{Im}(L^{q-1} \to L^q).$$

Значит, если $h \in H_0^q(L)$, то это равносильно тому, что $h = \eta l^q$, где $l^q \in \operatorname{Ker}(L^q \to L^{q+1})$, т. е.

$$l^q \in L^q, \quad dl^q = 0.$$

Точно так же $h \in H_m^q(L)$ означает, что

$$h = \eta(l^q \otimes 1_m)$$

(где $l^q \in L^q$, а $1_m \in I_m$ есть тот класс целочисленных вычетов по модулю $m$, который содержит число 1) и что

$$l^q \otimes 1_m \in \operatorname{Ker}(L^q \otimes I_m \to L^{q+1} \otimes I_m),$$

т. е.

$$d(l^q \otimes 1_m) = dl^q \otimes 1_m = 0.$$

Это значит, что

$$dl^q \equiv 0 \pmod m$$

(т. е. $dl^q = m\,l^{q+1}$, где $l^{q+1} \in L^{q+1}$), ибо, как отмечалось в п. 1,

$$L^{q+1} \otimes I_m = L^{q+1} / mL^{q+1}.$$

Отметим, что для любого элемента $h \in H_m^q(L)$ будем, очевидно, иметь $mh = 0$.

Гомоморфное отображение групп коэффициентов $\varphi: G \to G'$ естественно порождает гомоморфизм групп гомологий

$$H^q(L, G) \to H^q(L, G'),$$

определяемый тем, что элемент $\eta u = \eta\left(\sum l_k \otimes g_k\right)$ первой группы переходит в элемент $\eta\varphi u = \eta\left(\sum l_k \otimes \varphi g_k\right)$ второй. Такое определение законно в силу того, что $d\varphi = \varphi d$ (точнее, $(d \otimes 1)(1 \otimes \varphi) = d \otimes \varphi = (1 \otimes \varphi)(d \otimes 1)$).

Рассмотрим, в частности, для любых двух натуральных чисел $m$ и $m'$, из которых первое является делителем второго, т. е. $m / m'$, гомоморфизмы $\varphi_m^{m'}: I_{m'} \to I_m$ и $\psi_{m'}^m: I_m \to I_{m'}$, при которых единичные (т. е. содержащие число 1) классы вычетов $1_m$ и $1_{m'}$ из этих групп отобра-

жаются так:

$$\varphi_m^{m'} 1_{m'} = 1_m, \quad \psi_{m'}^m 1_m = \frac{m'}{m} 1_{m'};$$

рассмотрим также отображение $\varphi_m^0 : I \to I_m$, определенное тем, что $\varphi_m^0 1 = 1_m$. Гомоморфизмы групп гомологий

$$H_{m'}^q(L) \to H_m^q(L), \quad H_m^q(L) \to H_{m'}^q(L), \quad H_0^q(L) \to H_m^q(L),$$

порожденные этими отображениями, обозначим соответственно через $\pi_m^{m'}$, $\omega_{m'}^m$, $\pi_m^0$. Таким образом, имеем:

$$\pi_m^{m'} \eta(l \otimes 1_{m'}) = \eta(l \otimes \varphi_m^{m'} 1_{m'}) = \eta(l \otimes 1_m),$$
$$\omega_{m'}^m \eta(l \otimes 1_m) = \eta(l \otimes \psi_{m'}^m 1_m) = \eta\left(l \otimes \frac{m'}{m} 1_{m'}\right) = \eta\left(\frac{m'}{m} l \otimes 1_{m'}\right),$$
$$\pi_m^0 \eta l = \eta(l \otimes \varphi_m^0 1) = \eta(l \otimes 1_m).$$

Исходя из приведенного определения, элементарным образом можно проверить следующие свойства отображений $\pi$ и $\omega$:

$$\pi_m^{m'} \pi_{m'}^{m''} = \pi_m^{m''} \;(m \,/\, m' \,/\, m''), \quad \omega_{m''}^{m'} \omega_{m'}^m = \omega_{m''}^m \;(m \,/\, m' \,/\, m''),$$
$$\pi_{m'}^{\overline{m}} \omega_{\overline{m}}^m = \frac{\overline{m}\,(m,\, m')}{mm'} \, \omega_{m'}^{(m,\, m')} \pi_{(m,\, m')}^m \;(m \,/\, \overline{m},\; m' \,/\, \overline{m});$$

первая из этих формул справедлива и при $m'' = 0$.

## § 2

Наши результаты будут относиться к так называемой теореме об универсальных коэффициентах, которая состоит в том, что в хороших случаях, т. е. для соответствующе выделенного класса комплексов, группы гомологий по произвольной группе коэффициентов определяются целочисленными группами гомологий, а именно, имеет место формула

$$H^q(L,\, G) \approx H_0^q(L) \otimes G + H_0^{q+1}(L) * G. \qquad (1)$$

Эта теорема была доказана для комплексов $L$, состоящих из свободных групп. Для комплексов, состоящих из групп без кручения, т. е. не имеющих элементов конечного порядка, была доказана более слабая формула:

$$H^q(L,\, G) / [H_0^q(L) \otimes G] = H_0^{q+1}(L) * G\,^*. \qquad (2)$$

Отображение вложения $H_0^q(L) \otimes G \to H^q(L,\, G)$ определяется в этих двух формулах тем, что элементу

$$\sum \eta l_k \otimes g_k$$

$(l_k \in L^q,\; dl_k = 0,\; g_k \in G)$ ставится в соответствие элемент

$$\eta\left(\sum l_k \otimes g_k\right).$$

Если группы комплекса $L$ имеют элементы конечного порядка, то формула (2), а значит, тем более, формула (1) (последняя даже и при ином способе вложения первого прямого слагаемого) уже более не выполняется, как показывает элементарный пример: $L^q \approx I_2$ при всех $q$,

* См. ([1]), гл. VI, теорема 3.3. Знак $=$ вместо знака $\approx$ мы ставим в том случае, когда изоморфизм является естественным, чего не будет для формулы (1).

$dL^q = 0$, $G = I_2$; здесь

$$L^q \otimes G \approx I_2 \otimes I_2 \approx I_2,$$

$$\text{Ker}\,(L^q \to L^{q+1}) \approx \text{Ker}\,(L^q \otimes G \to L^{q+1} \otimes G) \approx I_2,$$

$$\text{Im}\,(L^{q-1} \to L^q) = \text{Im}\,(L^{q-1} \otimes G \to L^q \otimes G) = 0,$$

а значит,

$$H_0^q(L) \approx I_2, \quad H^q(L,\ G) \approx I_2$$

при всех $q$, так что и

$$H_0^{q+1}(L) \approx I_2,$$

а это, очевидно, противоречит формулам (1) и (2). Так как, с другой стороны, для комплекса $L'$, в котором для всех $q$ $L'^q \approx I$ и $d1 = 2$ и который имеет такие же целочисленные группы гомологий, что и комплекс $L$, формула (1) справедлива, то для него при $G = I_2$ будет

$$H^q(L',\ G) \approx I_2 + I_2,$$

откуда видно, что в классе всех комплексов универсальность группы коэффициентов $I$ заведомо не имеет места, т. е. произвольные группы гомологий уже не определяются целочисленными. Таким образом, в вопросе об универсальной группе коэффициентов приходится ограничиться классом комплексов, состоящих из групп без кручения. Такие групповые комплексы мы будем называть комплексами без кручения.

Мы хотим доказать, что для произвольного комплекса без кручения $L$ всегда имеет место не только формула (2), но и формула (1), т. е. что группа коэффициентов $I$ универсальна не только для класса комплексов, состоящих из свободных групп, но и для более широкого класса комплексов, состоящих из групп, не имеющих элементов конечного порядка.

1. Основное понятие, которое мы вводим для этой цели, есть понятие тензорного произведения систем групп, интересное, как нам кажется, и само по себе, а потому мы определяем его несколько шире, чем это нам непосредственно необходимо *.

*Системой групп* $\{G_\alpha;\ \pi\}$ или, подробнее, $\{G_\alpha;\ \pi\}_A$ назовем совокупность групп $G_\alpha$, где индекс $\alpha$ пробегает некоторое множество значений $A$, причем для некоторых из этих значений определены гомоморфизмы $\pi = \pi_\beta^\alpha$ группы $G_\alpha$ в группу $G_\beta$.

Две системы групп $\{G_\alpha;\ \pi\}$ и $\{G'_\alpha;\ \pi'\}$ называются *согласованными*, если они определены для одинакового множества индексов и если гомоморфизмы $\pi'^\alpha_\beta : G'_\alpha \to G'_\beta$ определены тогда и только тогда, когда определены гомоморфизмы $\pi_\beta^\alpha : G_\alpha \to G_\beta$. Если же системы $\{G_\alpha;\ \pi\}$ и $\{H_\alpha;\ \omega\}$ определены для одинакового множества индексов, а гомоморфизмы $\omega_\alpha^\beta : H_\beta \to H_\alpha$ определены тогда и только тогда, когда определены гомоморфизмы в обратную сторону $\pi_\beta^\alpha : G_\alpha \to G_\beta$, то эти две системы называются *сопряженными*.

* Понятие тензорного произведения систем групп было впервые введено нами в работе ([2]).

*Прямой суммой двух согласованных систем* $\{G'_\alpha;\ \pi'\}+\{G''_\alpha;\ \pi''\}$ называется система $\{G_\alpha;\ \pi\}$, составленная из прямых сумм

$$G_\alpha = G'_\alpha + G''_\alpha,$$

в которой гомоморфизмы $\pi^\alpha_\beta : G'_\alpha + G''_\alpha \to G'_\beta + G''_\beta$ определены для тех же пар индексов $\alpha$, $\beta$, что и в первоначальных системах с помощью условия

$$\pi^\alpha_\beta(g'_\alpha + g''_\alpha) = \pi'^\alpha_\beta g'_\alpha + \pi''^\alpha_\beta g''_\alpha \quad (g'_\alpha \in G'_\alpha,\ g''_\alpha \in G''_\alpha).$$

Из этого определения непосредственно видно, что для того чтобы система групп $\{G_\alpha;\ \pi\}$ распадалась в прямую сумму двух систем, необходимо и достаточно, чтобы каждая из групп $G_\alpha$ распадалась в прямую сумму двух групп

$$G_\alpha = G'_\alpha + G''_\alpha$$

так, чтобы при этом гомоморфизмы $\pi^\alpha_\beta$ переводили $G'_\alpha$ в $G'_\beta$ и $G''_\alpha$ в $G''_\beta$. А именно, при выполнении этого условия будем иметь:

$$\{G_\alpha;\ \pi\} = \{G'_\alpha;\ \pi'\} + \{G''_\alpha;\ \pi''\},$$

где гомоморфизмы $\pi' = \pi'^\alpha_\beta$, $\pi'' = \pi''^\alpha_\beta$ получаются, если гомоморфизм $\pi^\alpha_\beta$ рассматривать не на всей группе $G_\alpha$, а лишь на прямых слагаемых $G'_\alpha$ и $G''_\alpha$.

*Тензорным произведением двух сопряженных систем*

$$\{G_\alpha;\ \pi^\alpha_\beta\} \otimes \{H_\alpha;\ \omega^\beta_\alpha\}$$

называется группа, являющаяся фактор-группой прямой суммы $\sum\limits_\alpha G_\alpha \otimes H_\alpha$ по подгруппе, порожденной всеми элементами вида

$$g_\alpha \otimes \omega^\beta_\alpha h_\beta - \pi^\alpha_\beta g_\alpha \otimes h_\beta \quad (g_\alpha \in G_\alpha,\ h_\beta \in H_\beta;\ \alpha,\ \beta \in A).$$

Иначе говоря, тензорное произведение этих систем есть группа, образующими которой служат всевозможные пары $g_\alpha \hat{\otimes} h_\alpha$, где $g_\alpha \in G_\alpha$, $h_\alpha \in H_\alpha$, $\alpha \in A$ (мы эти пары обозначаем в виде $g_\alpha \hat{\otimes} h_\alpha$, имея в виду, что здесь символ $\hat{\otimes}$ имеет уже несколько другой смысл, чем символ $\otimes$ для элементов тензорного произведения лишь одной пары групп $G_\alpha \otimes H_\alpha$), а соотношения, кроме уже ранее отмеченных соотношений дистрибутивности, состоят из всех соотношений вида

$$g_\alpha \hat{\otimes} \omega^\beta_\alpha h_\beta = \pi^\alpha_\beta g_\alpha \hat{\otimes} h_\beta.$$

Как и в случае тензорного произведения двух групп, для систем групп также имеет место дистрибутивность относительно прямого суммирования:

$$(\{G'_\alpha;\ \pi'\} + \{G''_\alpha;\ \pi''\}) \otimes \{H_\alpha;\ \omega\} =$$
$$= \{G'_\alpha;\ \pi'\} \otimes \{H_\alpha;\ \omega\} + \{G''_\alpha;\ \pi''\} \otimes \{H_\alpha;\ \omega\}.$$

Действительно, из приведенных определений сразу вытекает, что группы, стоящие в обеих частях этого равенства, имеют одни и те же образую-

щие и те же самые соотношения. Аналогичное свойство справедливо, конечно, и для второго тензорного сомножителя.

2. Пусть $G$ — некоторая группа. *Естественной системой* этой группы мы назовем систему групп $\{_mG;\ i,\ j\}$, где $_mG\,(m=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ есть подгруппа тех элементов $g$ группы $G$, для которых выполняется условие $mg=0$, а гомоморфизмы $i=i^m_{m'}$ и $j=j^{m'}_m$ определены при $m/m'$ следующим образом: $i^m_{m'}$ есть отображение вложения подгруппы $_mG$ группы $G$ в подгруппу $_{m'}G$ той же группы, а $j^{m'}_m$ есть отображение $_{m'}G$ в $_mG$, возникающее в результате умножения элементов группы $G$ на число $\frac{m'}{m}$.

*Полной системой группы* $G$ мы будем называть ее естественную систему, дополненную самой группой $G$ и гомоморфизмами $i^m_0: {_mG}\to G$, являющимися отображениями вложения подгрупп $_mG$ в группу $G$. Полную систему $\{G,\ _mG;\ i,\ j\}$ мы также будем обозначать в виде

$$\{_mG;\ i,\ j\}_{m\geqslant 0},$$

где под $_0G$ понимается сама группа $G$. Во избежание смешения с полной системой мы будем естественную систему группы $G$ тоже обозначать с указанием значений, принимаемых числом $m$, т. е. в виде

$$\{_mG;\ i,\ j\}_{m>0}.$$

Оказывается, что *тензорное произведение естественных систем двух групп $G$ и $H$ есть периодическое произведение этих групп*:

$$G*H=\{_mG;\ i,\ j\}_{m>0}\otimes\{_mH;\ j,\ i\}_{m>0}. \qquad (3)$$

Прямое доказательство этой формулы дано в Добавлении I. Вместо этого формулу (3) можно принять за определение периодического произведения двух групп. Такое определение, как нам кажется, не менее естественно, чем приведенное ранее *.

3. Система $\{H^q_m(L);\ \pi,\ \omega\}_{m\geqslant 0}$ (или, короче, $\{H^q_m(L);\ \pi;\ \omega\}$), состоящая из $q$-мерной целочисленной группы гомологий комплекса $L$ и его $q$-мерных групп гомологий по модулю $m$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ и из связывающих эти группы гомоморфизмов $\pi^0_m$, $\pi^{m'}_m$, $\omega^m_{m'}$ $(m/m')$ (см. § 1, п. 5), называется *$q$-мерным модульным спектром групп гомологий* к о м п л е к с а $L$, или, короче, его *$q$-мерным спектром гомологий* **.

В настоящей работе мы прежде всего докажем универсальность $q$-мерного спектра гомологий для комплексов без кручения, т. е. покажем, что $q$-мерный спектр гомологий определяет $q$-мерные группы гомологий такого комплекса по любой группе коэффициентов $G$, а именно,

* Отметим, что эквивалентность этих двух определений вытекает также из сравнения формул (1) или (2) с формулой (10), если принять во внимание элементарно проверяемый факт, что всякая группа является целочисленной группой гомологий некоторого комплекса, составленного из свободных групп.

** Понятие спектра гомологий было введено нами для случая топологических пространств в работе (3).

установим справедливость формулы

$$H^q(L, G) = \{H^q_m(L); \pi, \omega\}_{m\geq 0} \otimes \{{}_mG; i, j\}_{m\geq 0},$$

где $L$ — произвольный комплекс без кручения, а $G$ — любая группа.

Универсальность целочисленных групп гомологий, т. е. формула (1), будет выведена затем из этой формулы.

## § 3

Переходим к доказательству формулы

$$H^q(L, G) = \{H^q_m(L); \pi, \omega\}_{m\geq 0} \otimes \{{}_mG; i, j\}_{m\geq 0} \tag{4}$$

для комплексов $L$ без кручения *.

1. Докажем сперва следующую лемму.

ЛЕММА. *Если элемент* $\sum_{k=1}^{n} g_k \otimes h_k$ *тензорного произведения двух групп* $G \otimes H$ $(g_k \in G,\ h_k \in H)$ *равен нулю, то найдется такая конечно-порожденная (т. е. имеющая конечное число образующих) подгруппа* $A$ *группы* $G$, *содержащая элементы* $g_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, *что элемент* $\sum_{k=1}^{n} g_k \underset{A}{\otimes} h_k$ *тензорного произведения* $A \otimes H$ *тоже равен нулю (а значит, и подавно* $\sum_{k=1}^{n} g_k \underset{C}{\otimes} h_k = 0$, *где* $C$ — *любая подгруппа группы* $G$, *содержащая* $A$, *так как множество соотношений в тензорном произведении только увеличивается при расширении его сомножителей).*

Доказательство. Соотношение $\sum_{k=1}^{n} g_k \otimes h_k = 0$, согласно определению тензорного произведения, означает, что в группе конечных целочисленных линейных форм от символов вида $(g, h)$ $(g \in G,\ h \in H)$ форма

$$\sum_{k=1}^{n} (g_k, h_k)$$

принадлежит к подгруппе, порожденной элементами вида

$$(g', h) + (g'', h) - (g' + g'', h)$$

и

$$(g, h') + (g, h'') - (g, h' + h''),$$

т. е. равна конечной линейной комбинации таких элементов:

$$\sum_{k=1}^{n} (g_k, h_k) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i [(g_i', \bar{h}_i) + (g_i'', \bar{h}_i) - (g_i' + g_i'', \bar{h}_i)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} \mu_j [(\bar{g}_j, h_j') + (\bar{g}_j, h_j'') - (\bar{g}_j, h_j' + h_j'')].$$

Но это соотношение представляет собою просто тождество двух линейных форм, а потому оно имеет место и в том случае, когда вместо груп-

* Идея такого доказательства в применении к топологическому случаю была изложена нами в работе ([2]).

пы $G$ берется ее подгруппа $A$, порожденная конечным числом элементов

$$g_1, \ldots, g_n, g_1', \ldots, g_r', g_1'', \ldots g_r'', g_1, \ldots, g_s,$$

а это и значит, что

$$\sum_{k=1}^{n} g_k \underset{A}{\otimes} h_k = 0.$$

Замечание. Доказанную лемму можно, очевидно, усилить, так как вторую группу $H$ можно тоже заменить конечно-порожденной подгруппой $B$ (а именно, подгруппой, порожденной элементами $h_1, \ldots, h_n$, $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_r$, $h_1', \ldots, h_s'$, $h_1'', \ldots, h_s''$) так, чтобы данный элемент был равен нулю уже в тензорном произведении $A \otimes B$. В настоящей работе нам, однако, не придется пользоваться этим усилением.

2. Определим естественное гомоморфное отображение $\Phi$ правой части формулы (4) в ее левую часть. Элементы правой части имеют вид

$$\sum_{k=1}^{s} h_k \hat{\otimes} g_k,$$

где $h_k \in H^q_{m_k}(L)$, $g_k \in {}_{m_k}G$, т. е.

$$h_k = \eta(l_k^q \otimes 1_{m_k}), \quad l_k^q \in L^q, \quad dl_k^q \equiv 0 \pmod{m_k}$$

(см. § 1, п. 5) и $g_k \in G$, $m_k g_k = 0$ ($m_k$ — неотрицательные целые числа, $1_0 = 1$). Сравнение

$$dl_k^q \equiv 0 \pmod{m_k}$$

означает, что

$$dl_k^q = m_k\, l_k^{q+1},$$

где $l_k^{q+1} \in L^{q+1}$. Положим

$$\Phi\left(\sum_k \eta(l_k^q \otimes 1_{m_k}) \hat{\otimes} g_k\right) = \sum_k \eta(l_k^q \otimes g_k).$$

Такое определение имеет смысл, так как

$$l_k^q \otimes g_k \in \mathrm{Ker}(L^q \otimes G \to L^{q+1} \otimes G),$$

ибо

$$d(l_k^q \otimes g_k) = dl_k^q \otimes g_k = m_k\, l_k^{q+1} \otimes g_k = l_k^{q+1} \otimes m_k g_k = 0.$$

Оно не зависит от произвола в выборе $l_k^q$ для данных $h_k$, так как если $l^q$ и $l'^q$ — такие элементы группы $L$, что

$$dl^q \equiv 0 \pmod m, \quad dl'^q \equiv 0 \pmod m$$

и

$$\eta(l^q \otimes 1_m) - \eta(l'^q \otimes 1_m) \in \mathrm{Im}(L^{q-1} \otimes I_m \to L^q \otimes I_m),$$

то

$$(l^q - l'^q) \otimes 1_m = d(l^{q-1} \otimes 1_m) = dl^{q-1} \otimes 1_m,$$

т. е.

$$l^q - l'^q \equiv dl^{q-1} \pmod m,$$

или, подробнее,

$$l^q - l'^q = dl^{q-1} + ml^{*q}$$

(ибо, как указывалось в § 1, п. 1, $L^q \otimes I_m = L^q/mL^q$); если теперь $mg=0$ (т. е. $g \in {}_m G \subset G$), то

$$l^q \otimes g - l'^q \otimes g = (l^q - l'^q) \otimes g = dl^{q-1} \otimes g + ml^{*q} \otimes g =$$
$$= dl^{q-1} \otimes g + l^{*q} \otimes mg = dl^{q-1} \otimes g = d(l^{q-1} \otimes g) \in \operatorname{Im}(L^{q-1} \otimes G \to L^q \otimes G)$$

и, значит,

$$\eta(l^q \otimes g) = \eta(l'^q \otimes g).$$

Отображение $\Phi$ не зависит от произвола в выборе элементов $h_k$ и $g_k$ для записи рассматриваемого элемента тензорного произведения систем групп, стоящих в правой части формулы (4). Действительно, справедливость соотношений

$$\Phi((h_1 + h_2) \hat{\otimes} g) = \Phi(h_1 \hat{\otimes} g + h_2 \hat{\otimes} g) = \Phi(h_1 \hat{\otimes} g) + \Phi(h_2 \hat{\otimes} g)$$

и

$$\Phi(h \hat{\otimes} (g_1 + g_2)) = \Phi(h \hat{\otimes} g_1 + h \hat{\otimes} g_2) = \Phi(h \hat{\otimes} g_1) + \Phi(h \hat{\otimes} g_2)$$

очевидна, а соотношения

$$\Phi\left(\pi^{m'}_m h \hat{\otimes} g\right) = \Phi\left(h \hat{\otimes} i^m_{m'} g\right)$$
$$(h = \eta(l \otimes 1_{m'}) \in H^q_{m'}(L), \quad g \in {}_m G, \quad m/m', \quad m' \geqslant 0),$$
$$\Phi\left(\omega^m_{m'} h \hat{\otimes} g\right) = \Phi\left(h \hat{\otimes} j^{m'}_m g\right)$$
$$(h = \eta(l \otimes 1_m) \in H^q_m(L), \quad g \in {}_{m'} G, \quad m/m', \quad m' > 0)$$

легко проверяются; именно, имеем:

$$\Phi\left(\pi^{m'}_m h \hat{\otimes} g\right) = \Phi(\eta(l \otimes 1_m) \hat{\otimes} g) = \eta(l \otimes g),$$
$$\Phi(h \hat{\otimes} i^m_{m'} g) = \Phi(\eta(l \otimes 1_{m'}) \hat{\otimes} g) = \eta(l \otimes g),$$
$$\Phi(\omega^m_{m'} h \hat{\otimes} g) = \Phi\left(\eta\left(\frac{m'}{m} l \otimes 1_{m'}\right) \hat{\otimes} g\right) = \eta\left(\frac{m'}{m} l \otimes g\right) = \eta\left(\frac{m'}{m}(l \otimes g)\right),$$
$$\Phi(h \hat{\otimes} j^{m'}_m g) = \Phi\left(\eta(l \otimes 1_m) \hat{\otimes} \frac{m'}{m} g\right) = \eta\left(l \otimes \frac{m'}{m} g\right) = \eta\left(\frac{m'}{m}(l \otimes g)\right)$$

на основании определений гомоморфизмов $\pi^{m'}_m$, $\omega^m_{m'}$, $\pi^0_m$ (§ 1, п. 5) и гомоморфизмов $i^m_{m'}$, $j^{m'}_m$, $i^m_0$ (§ 2, п. 2).

Гомоморфность построенного отображения $\Phi$ проверяется элементарным образом.

3. *Гомоморфизм $\Phi$ есть отображение на всю группу $H^q(L, G)$.*

Действительно, пусть

$$h = \eta\left(\sum_{k=1}^{s} l^q_k \otimes g_k\right) \quad \left(\sum_k l_k \otimes g_k \in \operatorname{Ker}(L^q \otimes G \to L^{q+1} \otimes G)\right)$$

есть некоторый элемент группы $H^q(L, G)$. Найдем его прообраз при отображении $\Phi$.

Обозначим через $B$ подгруппу группы $L^q$, порожденную элементами $l^q_k$ $(k = 1, \ldots, s)$; это есть группа с конечным числом образующих, т. е. конечно-порожденная свободная группа, так как группа $L^q$, по условию, не имеет элементов конечного порядка.

Тот факт, что $\sum\limits_k l_k^q \otimes g_k$ принадлежит к ядру отображения

$$L^q \otimes G \to L^{q+1} \otimes G,$$

означает, что

$$d\left(\sum_k l_k^q \otimes g_k\right) = 0,$$

т. е.

$$\sum_k dl_k^q \otimes g_k = 0.$$

Согласно лемме, найдется такая конечно-порожденная подгруппа $C$ группы $L^{q+1}$, содержащая элементы $dl_k^q$, в которой выполняется условие

$$\sum_k dl_k^q \underset{C}{\otimes} g_k = 0.$$

Группа $C$ также будет свободной, так как $L^{q+1}$ тоже не имеет элементов конечного порядка. При этом $dB \subset C$.

Как известно *, свободные образующие $b_i$ в группе $B$ и свободные образующие $c_i$ в группе $C$ можно выбрать так, чтобы

$$db_i = \begin{cases} m_i c_i & \text{при } i \leqslant N, \\ 0 & \text{при } i > N, \end{cases}$$

где $m_i$ — натуральные числа, а $N$ — некоторое число, не превосходящее рангов (т. е. числа свободных образующих) групп $B$ и $C$.

Разложим элементы $l_k^q$ по образующим группы $B$, к которой они принадлежат:

$$l_k^q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} b_i,$$

где $\lambda_{ik}$ — целые числа, а $n$ — ранг группы $B$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{s} l_k \otimes g_k = \sum_{i,k} \lambda_{ik} b_i \otimes g_k = \sum_{i=1}^{n}\left(b_i \otimes \sum_{k=1}^{s} \lambda_{ik} g_k\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes \overset{*}{g}_i,$$

где $\overset{*}{g}_i = \sum\limits_k \lambda_{ik} g_k$. С другой стороны, условие

$$\sum_k dl_k^q \underset{C}{\otimes} g_k = 0$$

дает:

$$\sum_{i,k} \lambda_{ik}\, db_i \underset{C}{\otimes} g_k = \sum_{i=1}^{n}\left(db_i \underset{C}{\otimes} \sum_k \lambda_{ik} g_k\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i c_i \underset{C}{\otimes} \overset{*}{g}_i = \sum_{i=1}^{N} c_i \underset{C}{\otimes} m_i \overset{*}{g}_i = 0.$$

Ввиду того, что $c_i$ являются свободными образующими в группе $C$ и что, как отмечалось в § 1, п. 1,

$$C \otimes G = (I \times n') \otimes G = G \times n'$$

---

* См., например, ([4]), § 87.

($n'$ — ранг группы $C$), это означает, что $m_i \overset{*}{g}_i = 0$, т. е.

$$\overset{*}{g}_i \in {}_{m_i}G \quad (i = 1, \ldots, N),$$

Если положить $m_i = 0$ при $i > N$, то элементы $\overset{*}{g}_i$ будут принадлежать к соответствующим ${}_{m_i}G$ при всех значениях $i = 1, \ldots, n$. С другой стороны, как отмечалось выше, из того, что

$$db_i = m_i c_i \equiv 0 \pmod{m_i}$$

при $i = 1, \ldots, N$ и $db_i = 0$ при $i > N$, следует, что при $i = 1, \ldots, n$

$$b_i \otimes 1_{m_i} \in \operatorname{Ker}\left(L^q \otimes I_{m_i} \to L^{q+1} \otimes I_{m_i}\right).$$

Поэтому

$$\sum_i \eta(b_i \otimes 1_{m_i}) \hat{\otimes} \overset{*}{g}_i$$

есть элемент тензорного произведения систем

$$\{H^q_m(L);\ \pi,\ \omega\} \otimes \{{}_mG;\ i,\ j\}_{m>0},$$

стоящего в правой части формулы (4). Имеем:

$$\Phi\left(\sum_i \eta(b_i \otimes 1_{m_i}) \hat{\otimes} \overset{*}{g}_i\right) = \sum_i \eta(b_i \otimes \overset{*}{g}_i) =$$
$$= \eta\left(\sum_i b_i \otimes \overset{*}{g}_i\right) = \eta\left(\sum_k l_k \otimes g_k\right) = h$$

(ибо, как указывалось при выборе элементов $\overset{*}{g}_i$, две последние суммы совпадают).

4. *Отображение* $\Phi$ *есть изоморфизм.*

Так как $\Phi$ есть гомоморфизм одной группы на другую, то достаточно показать, что ядро этого гомоморфизма состоит лишь из нулевого элемента. Пусть поэтому

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{s} h_k \hat{\otimes} g_k\right) = 0 \quad (h_k \in H^q_{m_k}(L),\ g_k \in {}_{m_k}G).$$

Покажем, что тогда

$$\sum_{k=1}^{s} h_k \hat{\otimes} g_k = 0.$$

Полагая

$$h_k = \eta(l^q_k \otimes 1_{m_k}),$$

где

$$l^q_k \otimes 1_{m_k} \in \operatorname{Ker}(L^q \otimes I_{m_k} \to L^{q+1} \otimes I_{m_k}),$$

т. е., как мы видели (§ 1, п. 5),

$$l^q_k \in L^q, \qquad dl^q_k \equiv 0 \pmod{m_k},$$

получаем:

$$\Phi\left(\sum_k h_k \hat{\otimes} g_k\right) = \Phi\left(\sum_k \eta(l^q_k \otimes 1_{m_k}) \ \hat{\otimes}\ g_k\right) = \sum_k \eta(l^q_k \otimes g_k) = 0,$$

т. е.

$$\sum_k l_k^q \otimes g_k \in \operatorname{Im}(L^{q-1} \otimes G \to L^q \otimes G),$$

или

$$\sum_k l_k^q \otimes g_k = d\Big(\sum_j l_j^{q-1} \otimes g_j'\Big) = \sum_j dl_j^{q-1} \otimes g_j',$$

где $l_j^{q-1}$ — элементы группы $L^{q-1}$, а $g_j'$ — элементы группы $G$ $(j = 1, \ldots, r)$ Это соотношение можно записать в виде

$$\sum_k l_k^q \otimes g_k - \sum_j dl_j^{q-1} \otimes g_j' = 0,$$

а потому, согласно лемме, найдется конечно-порожденная подгруппа $B$ группы $L^q$, содержащая элементы $l_k^q$ и $l_j^{q-1}$, для которой выполняется равенство

$$\sum_k l_k^q \underset{B}{\otimes} g_k - \sum_j dl_j^{q-1} \underset{B}{\otimes} g_j' = 0.$$

Подгруппу группы $L^{q-1}$, порожденную элементами $l_j^{q-1}$, обозначим через $A$, а образ $dB$ группы $B$ при дифференциальном гомоморфизме $d$ — через $C$. Тогда

$$A \subset L^{q-1}, \quad B \subset L^q, \quad C \subset L^{q+1}, \quad A \underset{d}{\to} B \underset{d}{\to} C.$$

Так как $L$ есть комплекс без кручения, то это — конечно-порожденные свободные группы.

Свободные образующие $a_i$, $b_i$, $c_i$ в этих группах можно, как известно *, выбрать так, чтобы

$$da_i = \begin{cases} m_i' b_i & \text{при } i \leqslant n, \\ 0 & \text{при } i > n, \end{cases}$$

$$db_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \leqslant N, \\ m_i'' c_i & \text{при } i > N \end{cases}$$

(в группе $C$ нумерация образующих начинается с числа $N+1$), где $m_i'$, $m_i''$, $n$ и $N$ — какие-то натуральные числа, причем $N \geqslant n$. Для удобства полагаем, что $m_i' = 0$ при $i > n$, $m_i'' = 0$ при $i \leqslant N$.

Пусть разложения элементов $l_j^{q-1}$ и $l_k^q$ по этим образующим будут

$$l_j^{q-1} = \sum_{i=1}^{n_1} \varkappa_{ij} a_i, \quad l_k^q = \sum_{i=1}^{n_2} \lambda_{ik} b_i,$$

где $n_1$ — ранг группы $A$, а $n_2$ — ранг группы $B$. Тогда равенство

$$\sum_k l_k^q \underset{B}{\otimes} g_k - \sum_j dl_j^{q-1} \underset{B}{\otimes} g_j' = 0$$

примет вид:

$$\sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{n_2} \lambda_{ik} b_i \underset{B}{\otimes} g_k - \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_1} \varkappa_{ij}\, da_i \underset{B}{\otimes} g_j' = 0;$$

принимая во внимание, что $da_i = m_i' b_i$ при $i \leqslant n$ и равно нулю при $i > n$, изменяя порядок суммирования и перенося числовые коэффи-

* См., например, работу ([4]), § 21.

циенты из одного тензорного множителя в другой, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n_2}\left(b_i \underset{B}{\otimes} \sum_k \lambda_{ik} g_k\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(b_i \underset{B}{\otimes} \sum_j m_i' \varkappa_{ij} g_j'\right) = 0.$$

Так как мы положили, что $m_i' = 0$ при $i > n$, то второе внешнее суммирование можно производить не от 1 до $n$, а от 1 до $n_2$, а потому, полагая

$$\sum_j \varkappa_{ij} g_j' = g_i^*,$$

мы можем записать предыдущее соотношение в виде

$$\sum_{i=1}^{n_2} b_i \underset{B}{\otimes} \left(\sum_k \lambda_{ik} g_k - m_i' g_i^*\right) = 0.$$

Но $b_i$ являются свободными образующими группы $B$, откуда, так же, как в предыдущем пункте доказательства, делаем вывод, что из полученного соотношения следует:

$$\sum_k \lambda_{ik} g_k - m_i' g_i^* = 0,$$

т. е.

$$\sum_k \lambda_{ik} g_k = m_i' g_i^* \quad (i = 1, \ldots, n_2).$$

С другой стороны, как отмечалось в начале настоящего пункта, $dl_k^q \equiv 0 \pmod{m_k}$, а так как

$$dl_k^q = d\left(\sum_{i=1}^{n_2} \lambda_{ik} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n_2} \lambda_{ik}\, db_i = \sum_{i=N+1}^{n_2} \lambda_{ik} m_i^{''} c_i,$$

то, ввиду того, что $c_i$ являются свободными образующими группы $C$, это значит, что

$$\lambda_{ik} m_i^{''} \equiv 0 \pmod{m_k} \quad (i = N+1, \ldots, n_2;\ k = 1, \ldots, s),$$

т. е.

$$\lambda_{ik} \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{m_k}{\delta_{ik}}\right),$$

где $\delta_{ik} = (m_i^{''}, m_k)$, или, наконец,

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ik}' \frac{m_k}{\delta_{ik}} \quad (i = N+1, \ldots, n_2;\ k = 1, \ldots, s),$$

где $\lambda_{ik}'$ — целые числа. Если $i \leqslant N$, то определяем $\delta_{ik} = m_k$, $\lambda_{ik}' = \lambda_{ik}$.

Положим

$$h_i^* = \eta\,(b_i \otimes 1_{m_i^{''}}) \quad (i = 1, \ldots, n_2).$$

Такое определение законно, ибо

$$db_i \equiv 0 \pmod{m_i^{''}},$$

так что (см. § 1, п. 5)

$$b_i \otimes 1_{m_i^{''}} \in \operatorname{Ker}(L^q \otimes I_{m_i^{''}} \to L^{q+1} \otimes I_{m_i^{''}}).$$

Имеем:

$$h_i^* \in H^q_{m_i^*}(L).$$

Так как

$$l_k^q = \sum_{i=1}^{n_2} \lambda_{ik} b_i = \sum_{i=1}^{n_2} \lambda'_{ik} \frac{m_k}{\delta_{ik}} b_i,$$

то, согласно определению отображений $\pi_m^{m'}$ и $\omega_{m'}^m$ (§ 1, п. 5),

$$h_k = \eta(l_k^q \otimes 1_{m_k}) = \eta\Big(\sum_{i=1}^{n_2} \lambda'_{ik} \frac{m_k}{\delta_{ik}} b_i \otimes 1_{m_k}\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_2} \lambda'_{ik} \eta\Big(b_i \otimes \frac{m_k}{\delta_{ik}} 1_{m_k}\Big) = \sum_{i=1}^{n_2} \lambda'_{ik} \omega_{m_k}^{\delta_{ik}} \pi_{\delta_{ik}}^{m_i^*} \eta(b_i \otimes 1_{m_i^*}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_2} \lambda'_{ik} \omega_{m_k}^{\delta_{ik}} \pi_{\delta_{ik}}^{m_i^*} h_i^*,$$

а потому, согласно определению тензорного произведения систем групп, а также согласно определению отображений $i_{m'}^m$ и $j_m^{m'}$ (§ 2, п. 1 и 2),

$$\sum_k h_k \hat{\otimes} g_k = \sum_{i,k} \lambda'_{ik} \omega_{m_k}^{\delta_{ik}} \pi_{\delta_{ik}}^{m_i^*} h_i^* \hat{\otimes} g_k = \sum_{i,k} h_i^* \hat{\otimes} \lambda'_{ik} i_{m_i^*}^{\delta_{ik}} j_{\delta_{ik}}^{m_k} g_k =$$

$$= \sum_{i,k} h_i^* \hat{\otimes} \lambda'_{ik} \frac{m_k}{\delta_{ik}} g_k = \sum_{i=1}^{n_2} \Big( h_i^* \hat{\otimes} \sum_k \lambda_{ik} g_k \Big) = \sum_{i=1}^{n_2} h_i^* \hat{\otimes} m'_i g_i^* =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i^* \hat{\otimes} m'_i g_i^* = \sum_{i=1}^{n} m'_i h_i^* \hat{\otimes} g_i^* = 0,$$

ибо при $i \leqslant n$ (а значит, и $\leqslant N$) имеем

$$g_i^* \in {}_{m_i^*}G = {}_0G = G$$

и

$$m'_i h_i^* = m'_i \eta(b_i \otimes 1_{m_i^*}) = m'_i \eta(b_i \otimes 1) = m'_i \eta\, b_i = \eta(m'_i b_i) = \eta\, da_i = 0,$$

ибо $da_i \in \mathrm{Im}(L^{q-1} \to L^q)$.

Таким образом, $\Phi$ есть изоморфное отображение правой части формулы (4) на левую, что и доказывает эту формулу (в смысле, указанном в сноске к формуле (2)).

5. Универсальность $q$-мерного спектра гомологий имеет место не только для $q$-мерных групп гомологий, но и для гомоморфизмов между ними, порожденных гомоморфными отображениями групп коэффициентов.

Действительно, введем следующие определения. Назовем *гомоморфизмом* $\varphi$ *системы групп* $\{G_\alpha;\ \pi\}$ в согласованную с ней систему $\{G'_\alpha,\ \pi'\}$ совокупность гомоморфных отображений $\varphi_\alpha : G_\alpha \to G'_\alpha$ (определенных для всех значений, принимаемых индексом $\alpha$), для которых выполняется условие

$$\varphi_\beta \pi_\beta^\alpha = \pi'^\alpha_\beta \varphi_\alpha$$

(короче: $\varphi\pi = \pi'\varphi$). Если $\{G_\alpha;\ \pi\}$ и $\{H_\alpha;\ \omega\}$ — две сопряженные системы групп, для которых заданы гомоморфизмы $\varphi : \{G_\alpha;\ \pi\} \to \{G'_\alpha;\ \pi'\}$ и $\psi : \{H_\alpha;\ \omega\} \to \{H';\ \omega'\}$ в другие системы, то определяется естественный

гомоморфизм $\varphi \otimes \psi$ (называемый тензорным произведением гомоморфизмов $\varphi$ и $\psi$) группы

$$\{G_\alpha; \pi\} \otimes \{H_\alpha; \omega\}$$

в группу

$$\{G'_\alpha; \pi'\} \otimes \{H'_\alpha; \omega'\},$$

задаваемый тем, что элементу

$$\sum g_\alpha \hat{\otimes} h_\alpha$$

ставится в соответствие элемент

$$\sum \varphi_\alpha g_\alpha \hat{\otimes} \psi_\alpha h_\alpha$$

(корректность такого определения легко проверяется). Нетрудно видеть, что для такого гомоморфизма, так же как и в случае тензорного произведения групп (§ 1, п. 1), $1 \otimes 1 = 1$ и

$$(\varphi' \otimes \psi')(\varphi \otimes \psi) = (\varphi'\varphi) \otimes (\psi'\psi),$$

где $1$ — тождественное отображение систем групп (т. е. можно сказать, что тензорное произведение систем групп тоже будет дважды ковариантным функтором). Как и раньше, вместо $\varphi \otimes 1$ и $1 \otimes \psi$ мы будем писать просто $\varphi$ и $\psi$. Тогда, в частности, будет:

$$\varphi\psi = \psi\varphi = \varphi \otimes \psi.$$

Очевидно, что всякий гомоморфизм $\varphi$ группы $G$ в группу $G'$ порождает гомоморфизм $\varphi = \{\varphi_m\}$ (обозначаем его тем же символом) между полными (или же естественными) системами этих групп:

$$\varphi : \{{}_mG; i, j\} \to \{{}_mG'; i, j\};$$

он определяется условием: $\varphi_m g = \varphi g$ для элементов $g \in {}_mG \subset G$ (ибо из $mg = 0$ следует $m\varphi g = 0$). Тогда соответствующий гомоморфизм $\varphi$ (точнее $1 \otimes \varphi$) группы

$$\{H^q_m(L); \pi, \omega\} \otimes \{{}_mG; i, j\}_{m>0}$$

в группу

$$\{H^q_m(L); \pi, \omega\} \otimes \{{}_mG'; i, j\}_{m>0}$$

переводит каждый элемент

$$\sum \eta(l_k \otimes 1_{m_k}) \hat{\otimes} g_k$$

первой группы ($l_k \in L^q$, $dl_k \equiv 0 \pmod{m_k}$, $g_k \in {}_{m_k}G$, $k = 1, \ldots, s$) в элемент

$$\sum \eta(l_k \otimes 1_{m_k}) \hat{\otimes} \varphi g_k$$

второй, а потому гомоморфизм $\Phi\varphi\Phi^{-1}$, который ему отвечает при переходе от правой части формулы (4) к левой, переводит элемент

$$\sum \eta(l_k \otimes g_k)$$

группы $H^q(L, G)$ в элемент

$$\sum \eta(l_k \otimes \varphi g_k)$$

группы $H^q(L, G')$, т. е. является определенным в § 1, п. 5, гомоморфизмом групп гомологий комплекса, порождаемым отображением $\varphi : G \to G'$ групп коэффициентов.

Более того, назовем гомоморфизмом $\theta$ комплекса

$$L: \ldots \to L^{q-1} \xrightarrow[d]{} L^q \xrightarrow[d]{} L^{q+1} \to \ldots$$

в комплекс:

$$L': \ldots \to L'^{q-1} \xrightarrow[d]{} L'^q \xrightarrow[d]{} L'^{q+1} \to \ldots$$

совокупность гомоморфных отображений $\theta_q : L^q \to L'^q$, для которых выполняется условие $d\theta_q = \theta_{q+1} d$. Такому гомоморфизму $\theta : L \to L'$ естественно отвечают гомоморфизмы $\theta_* : H^q(L, G) \to H^q(L', G)$ групп гомологий, определяемые соотношением

$$\theta_* \eta (l \otimes g) = \eta (\theta_q l \otimes g),$$

где $l \in L^q$, $g \in G$, $l \otimes g \in \operatorname{Ker} (L^q \otimes G \to L^{q+1} \otimes G)$ (корректность такого определения легко вытекает из условия $d\theta_q = \theta_{q+1} d$). Легко видеть, что $\theta_* \varphi = \varphi \theta_*$, где $\varphi$—определенное в § 1, п. 5, отображение групп гомологий, порожденное отображением $\varphi : G \to G'$ групп коэффициентов.

В частности, отображение $\theta_*$ переставимо с отображениями $\pi_m^{m'}$, $\omega_m^m$ и $\pi_m^0$, порожденными отображениями $\varphi_m^{m'}$, $\psi_{m'}^m$, $\varphi_m^0$ циклических групп коэффициентов (§ 1, п. 5). Следовательно, совокупность отображений $\theta_*$, определенных для групп коэффициентов

$$G = I_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

дает гомоморфизм системы $\{H_m^q(L); \pi, \omega\}$, т. е. спектра гомологий комплекса $L$ в спектр гомологий $\{H_m^q(L'); \pi, \omega\}$ комплекса $L'$. Обозначим этот гомоморфизм снова через $\theta$. Тогда соответствующий гомоморфизм $\theta$ (точнее, $\theta \otimes 1$) группы

$$\{H_m^q (L); \pi, \omega\} \otimes \{{}_m G; i, j\}_{m \geqslant 0}$$

в группу

$$\{H_m^q (L'); \pi, \omega\} \otimes \{{}_m G; i, j\}_{m \geqslant 0}$$

переводит каждый элемент

$$\sum \eta (l_k \otimes 1_{m_k}) \ \hat{\otimes} \ g_k$$

первой группы в элемент

$$\sum \eta (\theta l_k \otimes 1_{m_k}) \ \hat{\otimes} \ g_k$$

второй, а потому

$$\theta_* = \Phi \theta \Phi^{-1},$$

так как оба эти отображения переводят элемент

$$\sum \eta (l_k \otimes g_k)$$

группы $H^q(L, G)$ в элемент

$$\sum \eta (\theta_q l_k \otimes g_k)$$

группы $H^q(L', G)$.

Это значит, что отображения групп гомологий, порожденные гомоморфизмами комплексов, определяются гомоморфизмами спектров гомологий этих комплексов.

## § 4

Переходим к выводу формулы (1) из формулы (4).

1. Определим естественный гомоморфизм между группами гомологий соседних размерностей, который мы назовем *граничным гомоморфизмом**.

Пусть $h_m \in H^q_m(L)$. Тогда

$$h_m = \eta(l^q \otimes 1_m),$$

где $l^q \in L^q$, $dl^q \equiv 0 \pmod m$ (см. § 1, п. 5), т. е.

$$dl^q = ml^{q+1}$$

($l^{q+1} \in L^{q+1}$). Имеем:

$$mdl^{q+1} = d(ml^{q+1}) = ddl^q = 0,$$

а так как группы комплекса $L$ не имеют элементов конечного порядка, то отсюда следует, что

$$dl^{q+1} = 0,$$

т. е. $l^{q+1} \in \operatorname{Ker}(L^{q+1} \to L^{q+2})$.

Граничное отображение $\delta_0^m : H^q_m(L) \to H^{q+1}_0(L)$ определяем теперь так:

$$\delta_0^m h_m = \delta_0^m \eta(l^q \otimes 1_m) = l^{q+1}.$$

Отображение $\delta_0^m$ не зависит от произвола в выборе элементов $l^q$ и $l^{q+1}$. Действительно, пусть

$$h_m = \eta(l^q \otimes 1_m) = \eta(l'^q \otimes 1_m),$$

где $l^q$, $l'^q \in L^q, dl^q = ml^{q+1}, dl'^q = ml'^{q+1}$, $l^{q+1}, l'^{q+1} \in L^{q+1}$. Тогда

$$(l^q - l'^q) \otimes 1_m \in \operatorname{Im}(L^{q-1} \otimes I_m \to L^q \otimes I_m)$$

т. е., как указывалось в § 3, п. 2,

$$l^q - l'^q = dl^{q-1} + ml^{*q} \quad (l^{q-1} \in L^{q-1},\ l^{*q} \in L^q).$$

Имеем:

$$ml^{q+1} - ml'^{q+1} = dl^q - dl'^q = d(l^q - l'^q) = d\,d\,l^{q-1} + d(ml^{*q}),$$

т. е.

$$m(l^{q+1} - l'^{q+1} - dl^{*q}) = 0,$$

а так как группа $L^{q+1}$ не имеет кручения, то отсюда следует, что

$$l^{q+1} - l'^{q+1} = dl^{*q},$$

т. е.

$$\eta l^{q+1} = \eta l'^{q+1}.$$

Очевидно, отображение $\delta_0^m$ будет гомоморфизмом.

Отметим элементарно проверяемые соотношения

$$\delta_0^m \pi_m^{m'} = \frac{m'}{m}\,\delta_0^{m'}, \qquad \delta_0^{m'} \omega_{m'}^m = \delta_0^m, \tag{5}$$

где $m$ и $m'$ — натуральные числа, первое из которых делит второе ($m / m'$).

---

* Этот гомоморфизм (в случае групп когомологий топологического пространства) впервые определен нами в работе ([5]).

2. Докажем, что последовательности

$$\ldots \to H_0^q(L) \underset{m}{\to} H_0^q(L) \underset{\pi}{\to} H_m^q(L) \underset{\delta}{\to} H_0^{q+1}(L) \underset{m}{\to} H_0^{q+1}(L) \to \ldots \qquad (6)$$

и

$$\ldots \to H_p^q(L) \underset{\omega}{\to} H_{mp}^q(L) \underset{\pi}{\to} H_m^q(L) \underset{\pi\delta}{\to} H_p^{q+1}(L) \underset{\omega}{\to} H_{mp}^{q+1}(L) \to \ldots \qquad (7)$$

являются точными *. Здесь $m$ и $p$ — произвольные натуральные числа (впрочем, нас будет интересовать лишь случай, когда $p$ является простым числом), кроме того, через $m$ обозначен также эндоморфизм, состоящий в умножении элементов группы, к которой он применяется, на число $m$. Индексы у символов $\pi$, $\omega$ и $\delta$ для простоты опущены, так что в первой последовательности

$$\pi = \pi_m^0, \quad \delta = \delta_0^{m},$$

а во второй последовательности

$$\omega = \omega_{mp}^p, \quad \pi = \pi_m^{mp}, \quad \pi\delta = \pi_p^0\delta_0^m.$$

Обе последовательности являются комплексами, так как соотношения

$$\pi_m^0 m = 0, \qquad \delta_0^m \pi_m^0 = 0, \qquad m\,\delta_0^m = 0,$$
$$\pi_m^{mp}\omega_{mp}^p = 0, \quad \pi_p^0\delta_0^m\pi_m^{mp} = 0, \quad \omega_{mp}^p\,\pi_p^0\delta_0^m = 0$$

элементарно вытекают из определения отображений $\pi$, $\omega$ и $\delta$. Значит, ядро каждого гомоморфизма содержит образ предыдущего, и остается проверить, что и, обратно, каждый элемент такого ядра содержится в соответствующем образе.

а) Пусть $\pi_m^0 h_0 = 0$, $h_0 \in H_0^q(L)$ и пусть

$$h_0 = \eta l^q, \quad l^q \in L^q, \quad dl^q = 0;$$

тогда

$$l^q \otimes 1_m \in \operatorname{Im}(L^{q-1} \otimes I_m \to L^q \otimes I_m),$$

т. е., как отмечалось в § 3, п. 2,

$$l^q = dl^{q-1} + ml^{*q} \; (l^{q-1} \in L^{q-1},\ l^{*q} \in L^q).$$

Следовательно,

$$mdl^{*q} = d(ml^{*q}) = dl^q - ddl^{q-1} = 0,$$

а значит, в силу отсутствия кручения в комплексе $L$, $dl^{*q} = 0$, т. е.

$$l^{*q} \in \operatorname{Ker}(L^q \to L^{q+1});$$

стало быть, так как $\eta l^q = \eta(ml^{*q})$, то $h_0 = mh_0^*$, где $h_0^* = \eta l^{*q}$.

б) Пусть $\delta_0^m h_m = 0$, $h_m \in H_m^q(L)$ и пусть

$$h_m = \eta(l^q \otimes 1_m), \quad l^q \in L^q, \quad dl^q \equiv 0 \pmod m,$$

* Это доказательство мы приводим лишь для независимости и полноты изложения, так как этот факт является хорошо известным предложением гомологической алгебры; он вытекает, в силу точности последовательностей $0 \to I \underset{m}{\to} I \underset{\varphi}{\to} I_m \to 0$ и $0 \to I_p \underset{\psi}{\to} I_{mp} \underset{\varphi}{\to} I_m \to 0$ и отсутствия элементов конечного порядка в группах $L^q$ (что позволяет эти последовательности тензорно умножить на $L^q$), из сказанного в конце § 3 главы IV книги (1).

т. е. $dl^q = ml^{q+1}$, $l^{q+1} \in L^{q+1}$; тогда $l^{q+1} \in \delta_0^m h_m$ по определению отображения $\delta_0^m$, так что

$$\eta l^{q+1} = \delta_0^m h_m = 0,$$

и, значит, $l^{q+1} = dl^{*q}$, $l^{*q} \in L^q$. Следовательно,

$$d(l^q - ml^{*q}) = dl^q - mdl^{*q} = ml^{q+1} - ml^{q+1} = 0,$$

т. е.

$$l^q - ml^{*q} \in \operatorname{Ker}(L^q \to L^{q+1});$$

полагая поэтому

$$\eta(l^q - ml^{*q}) = h_0$$

находим:

$$h_m = \pi_m^0 h_0,$$

ибо

$$(l^q - ml^{*q}) \otimes 1_m = l^q \otimes 1_m.$$

в) Пусть $m h_0 = 0$, $h_0 \in H_0^{q+1}(L)$ и пусть

$$h_0 = \eta\, l^{q+1}, \quad l^{q+1} \in L^{q+1}, \quad dl^{q+1} = 0;$$

тогда

$$ml^{q+1} \in \operatorname{Im}(L^q \to L^{q+1}),$$

т. е.

$$ml^{q+1} = dl^q, \quad l^q \in L^q.$$

Таким образом, $dl^q \equiv 0 \pmod m$ и, следовательно, можно положить

$$\eta(l^q \otimes 1_m) = h_m;$$

тогда, согласно определению граничного гомоморфизма, будем иметь:

$$h_0 = \delta_0^m h_m.$$

г) Пусть $\pi_m^{mp} h_{mp} = 0$, $h_{mp} \in H_{mp}^q(L)$ и пусть

$$h_{mp} = \eta(l^q \otimes 1_{mp}), \quad l^q \in L^q, \quad dl^q \equiv 0 \pmod{mp};$$

как и в п. а), находим:

$$l^q = dl^{q-1} + ml^{*q} \quad (l^{q-1} \in L^{q-1}, \quad l^{*q} \in L^q).$$

Следовательно,

$$mdl^{*q} = d(ml^{*q}) = dl^q - ddl^{q-1} \equiv 0 \pmod{mp}$$

или, сокращая на $m$ (в силу отсутствия кручения), $dl^{*q} \equiv 0 \pmod p$, так что можно положить

$$\eta(l^{*q} \otimes 1_p) = h_p;$$

тогда

$$h_{mp} = \omega_{mp}^p h_p,$$

ибо, по определению отображения $\omega$,

$$\omega_{mp}^p \eta(l^{*q} \otimes 1_p) = \eta(ml^{*q} \otimes 1_{mp}) = \eta((l^q - dl^{q-1}) \otimes 1_{mp}) = \eta(l^q \otimes 1_{mp}).$$

д) Пусть $\pi_p^0 \delta_0^m h_m = 0$, $h_m \in H_m^q(L)$ и пусть

$$h_m = \eta(l^q \otimes 1_m), \quad l^q \in L^q, \quad dl^q \equiv 0 \pmod m,$$

т. е. $dl^q = ml^{q+1}$ и, как в п. б),

$$\eta l^{q+1} = \delta_0^m h_m;$$

значит, $\pi_p^0 \eta l^{q+1} = 0$, а потому, как в п. а),

$$l^{q+1} = dl^{*q} + pl^{*q+1} \, (l^{*q} \in L^q, \ l^{*q+1} \in L^{q+1}) .$$

Следовательно,

$$d(l^q - ml^{*q}) = dl^q - mdl^{*q} = ml^{q+1} - m(l^{q+1} - pl^{*q+1}) = \\ = mpl^{*q+1} \equiv 0 \, (\text{mod}\, mp) ,$$

так что можно положить

$$\eta((l^q - ml^{*q}) \otimes 1_{mp}) = h_{mp} ;$$

тогда

$$h_m = \pi_m^{mp} h_{mp} ,$$

ибо

$$\eta((l^q - ml^{*q}) \otimes 1_m) = \eta(l^q \otimes 1_m) .$$

е) Пусть $\omega_{mp}^p h_p = 0$, $h_p \in H_p^{q+1}(L)$ и пусть

$$h_p = \eta(l^{q+1} \otimes 1_p), \quad l^{q+1} \in L^{q+1}, \ dl^{q+1} \equiv 0 \, (\text{mod}\, p) ;$$

тогда, согласно определению гомоморфизма $\omega$,

$$(ml^{q+1} \otimes 1_{mp}) \in \text{Im}\,(L^q \otimes 1_{mp} \to L^{q+1} \otimes 1_{mp}) ,$$

т. е., как отмечалось в § 3, п. 2,

$$ml^{q+1} = dl^q + mpl^{*q+1} \quad (l^q \in L^q, \ l^{*q+1} \in L^{q+1}) .$$

Следовательно,

$$m(l^{q+1} - pl^{*q+1}) = dl^q ,$$

откуда, согласно определению граничного гомоморфизма,

$$\delta_0^m \eta(l^q \otimes 1_m) = \eta(l^{q+1} - pl^{*q+1}),$$

а значит,

$$\pi_p^0 \delta_0^m \, \eta(l^q \otimes 1_m) = \eta((l^{q+1} - pl^{*q+1}) \otimes 1_p) = \eta(l^{q+1} \otimes 1_p) ,$$

т. е.

$$h_p = \pi_p^0 \delta_0^m h_m^* ,$$

где $h_m^* = \eta(l^q \otimes 1_m)$.

3. Так как последовательность (6) является точной, то

$$\text{Im}\,(H_m^q(L) \underset{\delta}{\to} H_0^{q+1}(L)) = \text{Ker}\,(H_0^{q+1}(L) \underset{m}{\to} H_0^{q+1}(L)) = {}_m[H_0^{q+1}(L)] ,$$

где ${}_m[H_0^{q+1}(L)]$, в согласии с ранее введенными обозначениями, есть подгруппа группы $H_0^{q+1}(L)$, состоящая из таких ее элементов $h$, для которых $mh = 0$. Точно так же,

$$\text{Ker}\,(H_0^q(L) \underset{\pi}{\to} H_m^q(L)) = \text{Im}\,(H_0^q(L) \underset{m}{\to} H_0^q(L)) = mH_0^q(L) ,$$

а потому фактор-группа $[H_0^q(L)]_m = H_0^q(L) / mH_0^q(L)$ изоморфно отображается на подгруппу группы $H_m^q(L)$, являющуюся образом группы $H_0^q(L)$ при гомоморфизме $\pi_m^0$. Таким образом, возникает пятичленная точная последовательность

$$0 \to [H_0^q(L)]_m \to H_m^q(L) \to {}_m[H_0^{q+1}(L)] \to 0 . \tag{8}$$

Так как все элементы группы ${}_m[H_0^{q+1}(L)]$ имеют порядки, являющиеся делителями числа $m$ и, значит, ограничены этим числом, то, по из-

вестной теореме Прюфера *, группа ${}_m[H_0^{q+1}(L)]$ распадается в прямую сумму циклических групп

$$ {}_m[H_0^{q+1}(L)] = \sum_\alpha I_{m_\alpha}^{(m,\alpha)}. $$

Порядки $m_\alpha$ этих циклических групп будут делителями числа $m$. Образующие элементы групп $I_{m_\alpha}^{(m,\alpha)}$ обозначим через $a_\alpha^{(m)}$. Они служат образующими группы ${}_m[H_0^{q+1}(L)]$ и единственными соотношениями для них будут

$$ m_\alpha a_\alpha^{(m)} = 0. $$

4. Покажем, прежде всего, что последовательность (8) при любом натуральном $m$ является расщепляющейся, т. е. построим расщепляющие отображения $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_m^0$; эти отображения нужно строить согласованно друг с другом, так как из полученных групп будут строиться системы.

Построение произведем индуктивно. Выбрав какое-нибудь простое число $p$, строим сначала отображение

$$ \tilde{\delta}_p^0 : {}_p[H_0^{q+1}(L)] \to H_p^q(L), $$

принимая за $\tilde{\delta}_p^0 a_\alpha^{(p)}$ какой-нибудь из элементов группы $H_p^q(L)$, переходящий в $a_\alpha^{(p)}$ при отображении $\delta_0^p$, и полагая

$$ \tilde{\delta}_p^0 \left( \sum_i \lambda_i a_{\alpha_i}^{(p)} \right) = \sum_i \lambda_i \tilde{\delta}_p^0 a_{\alpha_i}^{(p)}. $$

Так как в рассматриваемом случае все $m_\alpha$ равны $p$, а все элементы группы $H_p^q(L)$ имеют порядок $p$ (см. § 1, п. 5), то из

$$ \sum \lambda_i a_{\alpha_i}^{(p)} = \sum \lambda_i' a_{\alpha_i}^{(p)} $$

вытекает $\lambda_i \equiv \lambda_i' \pmod p$ и, значит,

$$ \tilde{\delta}_p^0 \left( \sum (\lambda_i - \lambda_i') a_{\alpha_i}^{(p)} \right) = p \tilde{\delta}_p^0 \left( \sum \frac{\lambda_i - \lambda_i'}{p} a_{\alpha_i}^{(p)} \right) = 0, $$

т. е.

$$ \tilde{\delta}_p^0 \left( \sum \lambda_i a_{\alpha_i}^{(p)} \right) = \tilde{\delta}_p^0 \left( \sum \lambda_i' a_{\alpha_i}^{(p)} \right), $$

так что наше отображение $\tilde{\delta}_p^0$ определено однозначным образом. Очевидно, оно будет расщепляющим отображением, т. е. $\delta_0^p \tilde{\delta}_p^0 = 1$.

Пусть отображение $\tilde{\delta}_{\tilde{m}}^0$, где $\tilde{m} = p^{k-1}$, уже построено. Тогда отображение $\tilde{\delta}_m^0$, где $m = p^k = \tilde{m}p$, строим так. Для тех образующих $a_\alpha^{(m)}$, порядки $m_\alpha$ которых $\leqslant \tilde{m}$, полагаем

$$ \tilde{\delta}_m^0 a_\alpha^{(m)} = \omega_m^{\tilde{m}} \tilde{\delta}_{\tilde{m}}^0 a_\alpha^{(m)}, $$

что имеет смысл, так как такие $a_\alpha^{(m)}$ лежат в подгруппе ${}_{\tilde{m}}[H_0^{q+1}(L)]$ группы ${}_m[H_0^{q+1}(L)]$, к которой применимо отображение $\tilde{\delta}_{\tilde{m}}^0$. Если же для образующей $a_\alpha^{(m)}$ будет $m_\alpha = m$, то за $\tilde{\delta}_m^0 a_\alpha^{(m)}$ принимаем один из элемен-

* См. ([6]), стр. 156 (речь здесь идет о примарной группе, но это не является ограничением, в силу сказанного на стр. 149 этой книги; к тому же нас интересует далее лишь случай примарной группы).

тов $h$ группы $H^q_m(L)$, для которых будет одновременно

$$\pi^m_{\widetilde{m}} h = \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} (pa^{(m)}_\alpha),$$
$$\delta^m_0 h = a^{(m)}_\alpha.$$

Существование такого элемента $h$ устанавливаем следующим образом. Так как

$$\pi^0_p \delta^{\widetilde{m}}_0 \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} (pa^{(m)}_\alpha) = \pi^0_p (pa^{(m)}_\alpha) = 0,$$

то, в силу точности последовательности (7) (где $m$ заменено на $\widetilde{m}$), найдется элемент $h' \in H^q_{\widetilde{m}}(L)$, для которого выполняется первое из этих условий:

$$\pi^m_{\widetilde{m}} h' = \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} (pa^{(m)}_\alpha).$$

Тогда, в силу (5),

$$p(a^{(m)}_\alpha - \delta^m_0 h') = pa^{(m)}_\alpha - \delta^{\widetilde{m}}_0 \pi^m_{\widetilde{m}} h' = pa^{(m)}_\alpha - \delta^{\widetilde{m}}_0 \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} (pa^{(m)}_\alpha) = 0,$$

а потому, вследствие точности последовательности (6),

$$a^{(m)}_\alpha - \delta^m_0 h' = \delta^p_0 u,$$

где $u \in H^q_p(L)$. Положив $h = h' + \omega^p_m u$, найдем, в силу § 1, п. 5, и формулы (5), что

$$\pi^m_{\widetilde{m}} h = \pi^m_{\widetilde{m}} h' + \pi^m_{\widetilde{m}} \omega^p_m u = \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} (pa^{(m)}_\alpha) + \omega^p_{\widetilde{m}} (pu) = \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} (pa^{(m)}_\alpha),$$
$$\delta^m_0 h = \delta^m_0 h' + \delta^m_0 \omega^p_m u = \delta^m_0 h' + \delta^p_0 u = a^{(m)}_\alpha,$$

т. е. элемент $h$ удовлетворяет поставленным условиям.

Для произвольного элемента $\sum_i \lambda_i a^{(m)}_{\alpha_i}$ группы ${}_m[H^{q+1}_0(L)]$ полагаем

$$\widetilde{\delta}^0_m \left(\sum_i \lambda_i a^{(m)}_{\alpha_i}\right) = \sum_i \lambda_i \widetilde{\delta}^0_m a^{(m)}_{\alpha_i}.$$

Такое определение однозначно, ибо если

$$\sum \lambda_i a^{(m)}_i = \sum \lambda'_i a^{(m)}_i,$$

то

$$\lambda_i \equiv \lambda''_i \,(\mathrm{mod}\, m_{\alpha_i}),$$

а тогда для тех $i$, для которых $m_{\alpha_i} \leqslant \widetilde{m}$, будет

$$(\lambda_i - \lambda_i') \widetilde{\delta}^0_m a^{(m)}_{\alpha_i} = (\lambda_i - \lambda'_i)\, \omega^{\widetilde{m}}_m \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} a^{(m)}_\alpha = \omega^{\widetilde{m}}_m \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} [(\lambda_i - \lambda'_i)\, a^{(m)}_\alpha] = 0,$$

а для тех $i$, для которых $m_{\alpha_i} = m$,

$$\left(\lambda_i - \lambda'_i\right) \widetilde{\delta}^0_{(m)} a^{(m)}_{\alpha_i} = m \frac{\lambda_i - \lambda'_i}{m} \widetilde{\delta}^0_{(m)} a^{(m)}_{\alpha_i} = 0,$$

так как все элементы $h$ группы $H^q_m(L)$ удовлетворяют условию $mh = 0$ (см. § 1, п. 5).

В случае $m_\alpha \leqslant \widetilde{m}$ имеем:

$$\delta^m_0 \widetilde{\delta}^0_m a^{(m)}_\alpha = \delta^m_0 \omega^{\widetilde{m}}_m \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} a^{(m)}_\alpha = \delta^{\widetilde{m}}_0 \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} a^{(m)}_\alpha = a^{(m)}_\alpha$$

в силу (5), а в случае $m_\alpha = m$ условие

$$\delta^m_0 \widetilde{\delta}^0_m a^{(m)}_\alpha = a^{(m)}_\alpha$$

выполняется по определению отображения $\widetilde{\delta}_m^0$. Поэтому для любого элемента $h = \sum \lambda_i a_{\alpha_i}^{(m)}$ группы ${}_m[H_0^{q+1}(L)]$ будет

$$\delta_0^m \widetilde{\delta}_m^0 h = h,$$

т. е. отображение $\widetilde{\delta}_m^0$ действительно будет расщепляющим для точной последовательности (8).

Отображение $\widetilde{\delta}_m^0$ построено теперь для всех чисел $m$, являющихся степенями простых чисел. Пусть $m$ — произвольное натуральное число и пусть $m = m_1 \ldots m_n$, где $m_i = p_i^{k_i}$, а $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Тогда, как известно, найдутся целые числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что

$$1 = \lambda_1 \frac{m}{m_1} + \ldots + \lambda_n \frac{m}{m_n}.$$

Полагаем

$$\widetilde{\delta}_m^0 h = \sum_i \lambda_i \omega_m^{m_i} \widetilde{\delta}_{m_i}^0 \left( \frac{m}{m_i} h \right).$$

Такое определение отображения $\delta_0^m$ имеет смысл, так как если

$$h \in {}_m[H_0^{q+1}(L)],$$

то

$$\frac{m}{m_i} h \in {}_{m_i}[H_0^{q+1}(L)].$$

Это отображение будет расщепляющим для последовательности (8), ибо

$$\delta_0^m \widetilde{\delta}_m^0 h = \sum_i \lambda_i \delta_0^m \omega_m^{m_i} \widetilde{\delta}_{m_i}^0 \left( \frac{m}{m_i} h \right) = \sum_i \lambda_i \delta_0^{m_i} \widetilde{\delta}_{m_i}^0 \left( \frac{m}{m_i} h \right) = \sum_i \lambda_i \frac{m}{m_i} h = h.$$

Так построенное отображение не зависит от выбора чисел $\lambda_i$, удовлетворяющих условию

$$1 = \sum \lambda_i \frac{m}{m_i}.$$

Действительно, если

$$1 = \sum \lambda_i \frac{m}{m_i} = \sum \lambda_i' \frac{m}{m_i},$$

то

$$\sum (\lambda_i - \lambda_i') \frac{m}{m_i} = 0,$$

а так как все члены этой суммы, кроме $i$-го, делятся на $m_i$, а число $\frac{m}{m_i}$ на $m_i$ не делится, то $\lambda_i - \lambda_i'$ должно делиться на $m_i$, т. е. $\lambda_i - \lambda_i' = m_i \varkappa_i$. Поэтому

$$\sum_i \lambda_i \omega_m^{m_i} \widetilde{\delta}_{m_i}^0 \left( \frac{m}{m_i} h \right) - \sum_i \lambda_i' \omega_m^{m_i} \widetilde{\delta}_{m_i}^0 \left( \frac{m}{m_i} h \right) =$$

$$= \sum_i (\lambda_i - \lambda_i') \omega_m^{m_i} \widetilde{\delta}_{m_i}^0 \left( \frac{m}{m_i} h \right) = \sum_i m_i \varkappa_i \omega_m^{m_i} \widetilde{\delta}_{m_i}^0 \left( \frac{m}{m_i} h \right) = \sum_i \varkappa_i \omega_m^{m_i} \widetilde{\delta}_{m_i}^0 (mh) = 0,$$

ибо $mh = 0$, так как $h \in {}_m[H_0^{q+1}(L)]$.

5. Переходим к рассмотрению гомоморфизмов $\pi^{m'}_{m}$ и $\omega^{m}_{m'}$ $(m / m')$, примененных вслед за построенными нами расщепляющими отображениями. Сперва рассматриваем гомоморфизмы $\pi^{m}_{\widetilde{m}}$ и $\omega^{\widetilde{m}}_{m}$, где $\widetilde{m} = p^{k-1}$, $m = p^k = \widetilde{m}p$, $p$ — простое число. Для тех $a^{(m)}_{\alpha}$, для которых $m_\alpha \leqslant \widetilde{m}$, в силу § 1, п. 5, имеем:

$$\pi^{m}_{\widetilde{m}} \widetilde{\delta}^0_m a^{(m)}_{\alpha} = \pi^{m}_{\widetilde{m}} \omega^{\widetilde{m}}_{m} \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} a^{(m)}_{\alpha} = p \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} a^{(m)}_{\alpha} = \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} (p a^{(m)}_{\alpha}),$$

а в случае $m_\alpha = m$ — равенство

$$\pi^{m}_{\widetilde{m}} \widetilde{\delta}^0_m a^{(m)}_{\alpha} = \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} \, (p a^{(m)}_{\alpha}),$$

справедливое по определению $\widetilde{\delta}^0_m$. Так как $a^{(m)}_{\alpha}$ являются образующими группы ${}_m[H^{q+1}_0(L)]$, то соотношение

$$\pi^{m}_{\widetilde{m}} \widetilde{\delta}^0_m h = \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} (ph)$$

справедливо для всех элементов $h$ этой группы. Далее, группа ${}_{\widetilde{m}}[H^{q+1}_0(L)]$ является подгруппой группы ${}_m[H^{q+1}_0(L)]$ и состоит из таких ее элементов $h = \sum\limits_i \lambda_i a^{(m)}_{\alpha_i}$, для которых $\widetilde{m}h = 0$, т. е. $\widetilde{m}\lambda_i \equiv 0 \pmod{m_{\alpha i}}$. Это не накладывает никаких ограничений на те $\lambda_i$, для которых $m_{\alpha_i} \leqslant \widetilde{m}$, если же $m_{\alpha_i} = m$, то соответствующее $\lambda_i$ должно делиться на $p$. Но в первом случае

$$\omega^{\widetilde{m}}_{m} \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} a^{(m)}_{\alpha_i} = \widetilde{\delta}^0_m a^{(m)}_{\alpha_i},$$

а во втором

$$\omega^{\widetilde{m}}_{m} \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} (p a^{(m)}_{\alpha_i}) = \omega^{\widetilde{m}}_{m} \pi^{m}_{\widetilde{m}} \widetilde{\delta}^0_m a^{(m)}_{\alpha_i} = p \widetilde{\delta}^0_m a^{(m)}_{\alpha_i} = \widetilde{\delta}^0_m (p a^{(m)}_{\alpha_i})$$

по определению $\widetilde{\delta}^0_m$ и в силу § 1, п. 5, а потому

$$\omega^{\widetilde{m}}_{m} \widetilde{\delta}^0_{\widetilde{m}} h = \widetilde{\delta}^0_m h$$

для всех $h \in {}_{\widetilde{m}}[H^{q+1}_0(L)]$.

Применяя рассмотренные гомоморфизмы несколько раз подряд, приходим (в силу § 1, п. 5) к формулам

$$\pi^{m'}_{m} \widetilde{\delta}^0_{m'} h = \widetilde{\delta}^0_m \left(\frac{m'}{m} h\right), \quad \omega^{m}_{m'} \widetilde{\delta}^0_m h = \widetilde{\delta}^0_{m'} h,$$

где $m$ и $m'$ — степени простого числа, причем $m / m'$. Пусть теперь $m$ и $m'$ — произвольные натуральные числа такие, что $m / m'$, и пусть $m' = m'_1 \cdots m'_n$, где $m'_i = p_i^{k'_i}$, $p_1, \ldots, p_n$ — отличные друг от друга простые числа, а $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ — целые числа, для которых

$$1 = \lambda'_1 \frac{m'}{m'_1} + \cdots + \lambda'_n \frac{m'}{m'_n}.$$

Пусть, далее, $m = p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}$, где $0 \leqslant k_i \leqslant k'_i$. Положим

$$m_i = p_i^{k_i}, \quad \lambda_i = \frac{m' m_i}{m'_i m} \lambda'_i = p_1^{k'_1 - k_1} \cdots p_{i-1}^{k'_{i-1} - k_{i-1}} p_{i+1}^{k'_{i+1} - k_{i+1}} \cdots p_n^{k'_n - k_n} \lambda'_i;$$

тогда

$$\sum \lambda_i \frac{m}{m_i} = \sum \lambda'_i \frac{m'}{m'_i} = 1.$$

Поэтому

$$\pi_m^{m'} \tilde{\delta}_{m'}^0 h = \sum_i \lambda_i' \pi_m^{m'} \omega_{m'}^{m_i'} \tilde{\delta}_{m_i'}^0 \left(\frac{m'}{m_i'} h\right) = \sum_i \lambda_i \frac{m' m_i}{m_i' m} \omega_m^{m_i} \pi_{m_i}^{m_i'} \tilde{\delta}_{m_i'}^0 \left(\frac{m'}{m_i'} h\right) =$$

$$= \sum_i \lambda_i \omega_m^{m_i} \left(\frac{m_i'}{m_i} \tilde{\delta}_{m_i}^0 \left(\frac{m'}{m_i'} h\right)\right) = \sum_i \lambda_i \omega_m^{m_i} \tilde{\delta}_{m_i}^0 \left(\frac{m}{m_i} \cdot \frac{m'}{m} h\right) = \tilde{\delta}_m^0 \left(\frac{m'}{m} h\right)$$

(в силу § 1, п. 5, ибо $(m_i', m) = m_i$) и, аналогично,

$$\omega_{m'}^m \tilde{\delta}_m^0 h = \sum_i \lambda_i \omega_{m'}^m \omega_m^{m_i} \tilde{\delta}_{m_i}^0 \left(\frac{m}{m_i} h\right) =$$

$$= \sum_i \lambda_i \omega_{m'}^{m_i} \tilde{\delta}_{m_i}^0 \left(\frac{m}{m_i} h\right) = \sum_i \lambda_i \omega_{m'}^{m_i'} \omega_{m_i'}^{m_i} \tilde{\delta}_{m_i}^0 \left(\frac{m}{m_i} \cdot h\right) =$$

$$= \sum_i \lambda_i \omega_{m'}^{m_i'} \tilde{\delta}_{m_i'}^0 \left(\frac{m}{m_i} h\right) = \sum_i \lambda_i' \frac{m' m_i}{m_i' m} \omega_{m'}^{m_i'} \tilde{\delta}_{m_i'}^0 \left(\frac{m}{m_i} h\right) = \sum_i \lambda_i' \omega_{m'}^{m_i'} \tilde{\delta}_{m_i'}^0 \left(\frac{'m}{m_i'} h\right) = \tilde{\delta}_m^{0'} h.$$

Согласно определению отображений $i_{m'}^m$ и $j_m^{m'}$ (см. § 2, п. 2) между подгруппами данной группы (в настоящем случае группы $H_0^{q+1}(L)$), последние два соотношения запишутся в виде:

$$\pi_m^{m'} \tilde{\delta}_{m'}^0 = \tilde{\delta}_m^0 j_m^{m'}, \quad \omega_{m'}^m \tilde{\delta}_m^0 = \tilde{\delta}_{m'}^0 i_{m'}^m.$$

Так как последовательность (8) является расщепляющей, то можно написать

$$H_m^q(L) \approx [H_0^q(L)]_m + {}_m[H_0^{q+1}(L)], \tag{9}$$

и если гомоморфизмы $\pi$ и $\omega$ считать примененными прямо к правой части этого изоморфизма, то для элементов второго прямого слагаемого, в силу вышесказанного, будем иметь:

$$\pi_m^{m'} = j_m^{m'}, \quad \omega_{m'}^m = i_{m'}^m.$$

В случае $m = 0$ формула (9) перестает быть справедливой — второе прямое слагаемое в этом случае отсутствует; мы будем заменять его тривиальной группой 0, состоящей лишь из нулевого элемента, а значит, и гомоморфизм $\pi_m^0$, примененный к этому слагаемому, будет тривиальным.

С другой стороны, первое прямое слагаемое формулы (9), в силу § 3, п. 3, отвечает при изоморфизме (9) естественной подгруппе группы $H_m^q(L)$, а именно подгруппе элементов вида $\pi_m^0 h$, где $h \in H_0^q(L)$, причем гомоморфизму $\pi_m^0 : H_0^q(L) \to H_m^q(L)$ в левую часть формулы (9) соответствует гомоморфизм $\varphi_m^0 : H_0^q(L) \to [H_0^q(L)]_m$ на первое прямое слагаемое

$$[H_0^q(L)]_m = H_0^q(L) \otimes I_m$$

ее правой части, определенный соотношением $\varphi_m^0 h = h \otimes 1_m$ (точнее было бы, таким образом, писать не $\varphi_m^0$, а $1 \otimes \varphi_m^0$, где $\varphi_m^0$ — гомоморфизм, определенный в § 1, п. 5). Далее,

$$\varphi_m^{m'} : [H_0^q(L)]_{m'} \to [H_0^q(L)]_m$$

и

$$\psi_{m'}^m : [H_0^q(L)]_m \to [H_0^q(L)]_{m'}$$

(точнее, $1 \otimes \varphi_m^{m'}$ и $1 \otimes \psi_{m'}^m$) — гомоморфизмы, определенные при $m / m'$

соотношениями

$$\varphi_m^{m'}(h \otimes 1_{m'}) = h \otimes 1_m, \quad \psi_{m'}^m(h \otimes 1_m) = \frac{m'}{m} h \otimes 1_{m'}$$

(см. § 1, п. 5), т. е.

$$\varphi_m^{m'}\varphi_{m'}^0 h = \varphi_m^0 h, \quad \psi_{m'}^m \varphi_m^0 h = \frac{m'}{m}\varphi_{m'}^0 h.$$

Сравнивая их с формулами

$$\pi_m^{m'}\pi_{m'}^0 h = \pi_m^0 h, \quad \omega_{m'}^m \pi_m^0 h = \frac{m'}{m}\pi_{m'}^0 h,$$

справедливыми для гомоморфизмов $\pi$ и $\omega$ (см. § 1, п. 5), убеждаемся, что при изоморфизме (9) гомоморфизмам $\pi_m^{m'}$ и $\omega_{m'}^m$ $(m / m')$, примененным к элементам первого прямого слагаемого, отвечают гомоморфизмы $\varphi_m^{m'}$ и $\psi_{m'}^m$.

Таким образом, спектр гомологий комплекса $L$ оказывается определенным целочисленными группами гомологий $H_0^q(L)$ и $H_0^{q+1}(L)$ как прямая сумма двух систем групп (§ 2, п. 1):

$$\{H_m^q(L);\ \pi, \omega\}_{m\geq 0} \approx \{[H_0^q(L)]_m;\ \varphi,\ \psi\} + \{{}_m[H_0^{q+1}(L)]';\ j,\ i\},$$

где

$${}_m[H_0^{q+1}(L)]' = {}_m[H_0^{q+1}(L)] \text{ при } m \neq 0,$$

и является тривиальной группой при $m = 0$. В силу формулы (4) и свойства дистрибутивности тензорного произведения систем (§ 2, п. 1), отсюда следует:

$$\begin{aligned} H^q(L,\ G) &= \{H_m^q(L);\ \pi;\ \omega\}_{m\geq 0} \otimes \{{}_mG;\ i,\ j\}_{m\geq 0} = \\ &= \{[H_0^q(L)]_m; \varphi, \psi\}_{m\geq 0} \otimes \{{}_mG; i, j\}_{m\geq 0} + \\ &+ \{{}_m[H_0^{q+1}(L)]';\ j, i\}_{m\geq 0} \otimes \{{}_mG;\ i,\ j\}_{m\geq 0}. \end{aligned} \tag{10}$$

Но

$$\{[H_0^q(L)]_m;\ \varphi;\ \psi\}_{m\geq 0} \otimes \{{}_mG;\ i,\ j\}_{m\geq 0} = H_0^q(L) \otimes G.$$

Действительно, группа, стоящая в правой части, имеет образующими всевозможные пары $h \otimes g$ $(h \in H_0^q(L),\ g \in G)$, а соотношениями — соотношения дистрибутивности, тогда как группа, стоящая в левой части, согласно определению тензорного произведения систем, имеет образующими, кроме соответствующих пар $h \hat{\otimes} g$, еще дополнительно пары $h_m \hat{\otimes} g_m$, где $h_m \in [H_0^q(L)]_m$, $g_m \in {}_mG$ $(m > 0)$, т. е. пары $\varphi_m^0 h \hat{\otimes} g_m$ $(h \in H_0^q(L))$, а кроме соотношений дистрибутивности для нее будут еще дополнительно иметься соотношения

$$\varphi_m^0 h \hat{\otimes} g_m = h \hat{\otimes} i_0^m g_m, \quad \varphi_m^{m'} h_{m'} \hat{\otimes} g_m = h_{m'} \hat{\otimes} i_{m'}^m g_m,$$
$$\psi_{m'}^m h_m \hat{\otimes} g_{m'} = h_m \hat{\otimes} j_m^{m'} g_{m'} \quad (m / m').$$

Но

$$h_m \hat{\otimes} g_m = \varphi_m^0 h \hat{\otimes} g_m = h \hat{\otimes} i_0^m g_m;$$

поэтому дополнительные образующие можно отбросить, так как они заменяются старыми, дополнительные же соотношения будут тогда выполняться автоматически: это ясно для дополнительных соотношений дис-

трибутивности, для остальных же это следует из того, что в силу

$$h_{m'} = \varphi^0_{m'} h, \quad h_m = \varphi^0_m h$$

они записываются в виде

$$\varphi^{m'}_m \varphi^0_{m'} h \hat{\otimes} g_m = \varphi^0_{m'} h \hat{\otimes} i^m_{m'} g_m \text{ и } \psi^m_{m'} \varphi^0_m h \hat{\otimes} g_{m'} = \varphi^0_m h \hat{\otimes} j^{m'}_m g_{m'},$$

а вследствие отмеченных выше свойств

$$\varphi^{m'}_m \varphi^0_{m'} = \varphi^0_{m'}, \quad \psi^m_{m'} \varphi^0_m = \frac{m'}{m} \varphi^0_{m'}$$

отображений $\varphi$ и $\psi$ и аналогичных вполне очевидных свойств

$$i^{m'}_0 i^m_{m'} = i^m_0, \quad i^m_0 j^{m'}_m = \frac{m'}{m} i^{m'}_0$$

отображений $i$ и $j$, обе части в каждом из этих последних двух равенств отвечают одной и той же старой образующей, а именно, $h \hat{\otimes} i^m_0 g_m$ в первом и $\frac{m'}{m} h \otimes i^{m'}_0 g_m$ (или $h \hat{\otimes} \frac{m'}{m} i^{m'}_0 g_m$) во втором случае.

С другой стороны, согласно формуле (3) (см. также Добавление I),

$$\{_m[H^{q+1}_0(L)]';\ j,\ i\}_{m>0} \otimes \{_mG;\ i,\ j\}_{m>0} =$$

$$= \{_m[H^{q+1}_0(L)];\ j,\ i\}_{m>0} \otimes \{_mG;\ i,\ j\}_{m>0} = H^{q+1}_0(L) * G.$$

Следовательно, формула (10) дает:

$$H^q(L, G) = H^q_0(L) \otimes G + H^{q+1}_0(L) * G,$$

т. е. формула (1) доказана.

6. Отметим, что, как это было и для спектра гомологий, целочисленные группы гомологий тоже универсальны не только для групп гомологий по различным группам коэффициентов, но и для гомоморфизмов этих групп, порожденных гомоморфными отображениями групп коэффициентов. Действительно, всякий гомоморфизм $\varphi: G \to G'$, как указывалось в § 3, п. 5, порождает гомоморфизм полных (а также естественных) систем этих групп $\varphi: \{_mG;\ i;\ j\} \to \{_mG';\ i,\ j\}$, а соответствующий гомоморфизм $\varphi: H^q(L,\ G) \to H^q(L,\ G')$ получается, если этот гомоморфизм $\varphi$ применить ко второму тензорному множителю в обоих прямых слагаемых правой части формулы (10).

Периодическое произведение двух групп, как уже отмечалось выше, является дважды ковариантным функтором, ибо гомоморфизмам

$$\varphi:\ G \to G', \quad \psi:\ H \to H'$$

соответствует естественный гомоморфизм

$$\varphi * \psi:\ G * H \to G' * H',$$

определяемый как гомоморфизм $\varphi \otimes \psi$ тензорных произведений естественных систем этих групп:

$$\{_mG;\ i,\ j\}_{m>0} \otimes \{_mH;\ j,\ i\}_{m>0} \to \{_mG';\ i,\ j\}_{m>0} \otimes \{_mH';\ i,\ j\}_{m>0}$$

(гомоморфизмы естественных систем, порожденные гомоморфизмами $\varphi$: $G \to G'$ и $\psi$: $H \to H'$ здесь снова обозначены через $\varphi$ и $\psi$). Поэтому искомый гомоморфизм

$$\varphi:\ H^q(L,\ G) \to H^q(L,\ G')$$

получается, если в правой части формулы (1) применить гомоморфизм $\varphi$ к группе $G$ в обоих прямых слагаемых и взять гомоморфизмы, порож-

даемые этим гомоморфизмом в тензорном произведении $H_0^q(L) \otimes G$ и в произведении кручения $H_0^{q+1}(L) * G$.

Однако в отличие от спектра гомологий целочисленные группы гомологий уже не будут обладать универсальностью для отображений $H^q(L, G) \to H^q(L', G)$, порожденных гомоморфизмами комплексов $L \to L'$, как показывает пример комплексов

$$L: 0 \to 0 \to I \underset{d}{\to} I \to 0, \quad L': 0 \to I \underset{d'}{\to} I \to 0 \to 0,$$

в которых дифференциальные гомоморфизмы $d$ и $d'$ в тех размерностях, где они нетривиальны, определяются условиями $d1 = 2$, $d'1 = 2$, а гомоморфные отображения $\theta: L \to L'$ и $\theta': L \to L'$ в единственной нетривиальной для них размерности $q = 2$ (группы комплексов $L$ и $L'$ предполагаем занумерованными числами 0, 1, 2, 3, 4) задаются соотношениями $\theta_2 1 = 1$, $\theta_2' 1 = 0$. Целочисленные группы гомологий этих комплексов не тривиальны лишь в размерности 3 для комплекса $L$ и в размерности 2 для комплекса $L'$ (а именно, $H^3(L) \approx H^2(L') \approx I_2$), а потому гомоморфизмы этих групп, порожденные отображениями $\theta$ и $\theta'$, тривиальны и, значит, одинаковы, тогда как соответствующие гомоморфизмы двумерных групп гомологий по модулю 2

$$H_2^2(L) \to H_2^2(L'),$$

т. е. $I_2 \to I_2$, различны, а именно,

$$\theta_2 I_2 = I_2, \quad \theta_2' I_2 = 0$$

(т. е. $\theta_2 1_2 = 1_2$, $\theta_2' 1_2 = 0$) *.

## Добавление I

Мы хотим здесь дать непосредственное доказательство того, что обычное определение периодического произведения, приведенное в § 1, п. 3, совпадает с определением при помощи формулы (3), используемым в настоящей работе.

Действительно, пусть $P$ — свободная группа, или даже только группа без элементов конечного порядка, а $Q$ — ее подгруппа, причем $P/Q = G$ Рассмотрим ядро отображения $Q \otimes H \to P \otimes H$, порожденного отображением вложения подгруппы $Q$ в группу $P$. Пусть

$$\rho = \sum_k q_k \underset{Q}{\otimes} h_k \quad (q_k \in Q, \quad h_k \in H, \quad k = 1, \ldots, s)$$

— какой-нибудь элемент этого ядра. Это значит, что

$$\sum_k q_k \otimes h_k = 0$$

(напоминаем, что $\otimes$ есть знак тензорного произведения элементов относительно всей группы $P$). Но тогда, в силу леммы § 3, п. 1, найдется конечно-порожденная подгруппа $A$ группы $P$, которая будет свободной группой из-за отсутствия в группе $P$ элементов конечного порядка, такая, что

$$q_k \in A \quad (k = 1, \ldots, s), \quad \sum_k q_k \underset{A}{\otimes} h_k = 0.$$

* Несколько более сложный пример получается при алгебраизации топологического примера, приведенного для несколько иной цели в конце § 1 нашей работы (7).

Пусть $B = A \cap Q$; это — тоже свободная группа с конечным числом образующих. Как известно *, свободные образующие $a_i^* (i = 1, \ldots, n)$ и $b_i^* (i = 1, \ldots, n')$ групп $A$ и $B$ можно выбрать так, чтобы

$$b_i^* = m_i^* a_i^* \quad (i \leqslant n'),$$

где $n$ — ранг группы $A$, $n'$ — ранг группы $B$, а $m_i^*$ — натуральные числа. Элементы $q_k$ лежат как в $A$, так и в $Q$, а значит, они являются элементами группы $B = A \cap Q$. Разложим их по образующим этой группы:

$$q_k = \sum_i \lambda_{ik} b_i^*$$

($\lambda_{ik}$ — целые числа). Тогда

$$\rho = \sum_k q_k \underset{Q}{\otimes} h_k = \sum_{i,\,k} \lambda_{ik} b_i^* \underset{Q}{\otimes} h_k = \sum_i b_i^* \underset{Q}{\otimes} h_i^*,$$

где $h_i^* = \sum_k \lambda_{ik} h_k$. Имеем:

$$0 = \sum_k q_k \underset{A}{\otimes} h_k = \sum_{i,\,k} \lambda_{ik} b_i^* \underset{A}{\otimes} h_k = \sum_{i,\,k} \lambda_{ik} m_i^* a_i^* \underset{A}{\otimes} h_k = \sum_i a_i^* \underset{A}{\otimes} m_i^* h_i^*,$$

а так как $a_i^*$ являются свободными образующими группы $A = I \times n$ и $A \otimes H = H \times n$, то отсюда следует, что $m_i^* h_i^* = 0$, т. е.

$$h_i^* \in {}_{m_i^*}H \quad (i = 1, \ldots, n').$$

Стало быть, для того чтобы было $\rho \in \operatorname{Ker}(Q \otimes H \to P \otimes H)$, необходимо, чтобы $\rho$ можно было представить в виде конечной суммы

$$\rho = \sum_k b_k \otimes h_k,$$

где $h_k \in {}_{m_k}H$, $m_k$ — натуральные числа, а $b_k$ — такие элементы группы $Q$, которые в группе $P \supset Q$ делятся на $m_k$, т. е. $b_k = m_k a_k$, $a_k \in P$, что можно также записать в виде

$$b_k \in Q \cap m_k P.$$

Очевидно, это условие будет и достаточным, так как в этом случае имеем:

$$\sum_k b_k \otimes h_k = \sum_k m_k a_k \otimes h_k = \sum_k a_k \otimes m_k h_k = 0.$$

Таким образом, искомое ядро $\operatorname{Ker}(Q \otimes H \to P \otimes H)$ есть подгруппа группы $Q \otimes H$, состоящая из элементов $\rho$, удовлетворяющих такому условию, а потому его можно построить, взяв в качестве образующих всевозможные пары $(b, h)$, где для какого-нибудь натурального $m$ будет

$$b \in Q \cap mP, \quad h \in {}_m H.$$

Вместо этого можно, добавив новые соотношения, рассматривать пары отвечающие различным значениям числа $m$, как различные образующие, обозначая их теперь в виде $(b, h)_m$.

Найдем соотношения, связывающие эти образующие. Ими, очевидно, будут прежде всего соотношения дистрибутивности при одинаковых $m$,

---

* См. ([6]), § 20, стр. 130.

т. е.

$$(b_1, h)_m + (b_2, h)_m = (b_1 + b_2, h)_m,$$
$$(b, h_1)_m + (b, h_2)_m = (b, h_1 + h_2)_m,$$

и, кроме того, идентифицирующие соотношения для различных $m$: если $m / m'$, $b \in Q \cap mP$, $b' \in Q \cap m'P$, $h \in {}_mH$, $h' \in {}_{m'}H$, то

$$(b', h)_m = (b', h)_{m'}, \quad \left(\frac{m'}{m} b, h'\right)_{m'} = \left(b, \frac{m'}{m} h'\right)_m.$$

Покажем, что эти соотношения образуют полную систему соотношений в рассматриваемой подгруппе группы $Q \otimes H$.

Действительно, пусть

$$\sum_k (b_k, h_k)_{m_k} = 0 \quad (b_k \in Q \cap m_k P, \quad h_k \in {}_{m_k}H)$$

есть какое-нибудь соотношение, справедливое для образующих этой подгруппы. Это значит, что

$$\sum_k b_k \underset{Q}{\otimes} h_k = 0.$$

Так как $b_k \in Q \cap m_k P$, то $b_k = m_k a_k$, где $a_k \in P$. Согласно лемме § 3, п. 1, найдется конечно-порожденная подгруппа $B \subset Q$, которая опять будет свободной группой, содержащая элементы $b_k$ и для которой

$$\sum_k b_k \underset{B}{\otimes} h_k = 0.$$

Пусть $A$ есть свободная подгруппа группы $P$, порожденная подгруппой $B$ и элементами $a_k$, и пусть в группах $A$ и $B$ снова выбраны свободные образующие $\overset{*}{a}_i$ и $\overset{*}{b}_i$, удовлетворяющие тому же условию $\overset{*}{b}_i = \overset{*}{m}_i \overset{*}{a}_i$, что и прежде. Тогда будем иметь:

$$b_k = \sum_i \lambda_{ik} \overset{*}{b}_i = \sum_i \lambda_{ik} \overset{*}{m}_i \overset{*}{a}_i,$$

где $\lambda_{ik}$ — целые числа. Так как $b_k = m_k a_k$, $a_k \in A$, а $\overset{*}{a}_i$ являются свободными образующими группы $A$, то отсюда следует, что

$$\lambda_{ik} \overset{*}{m}_i \equiv 0 \pmod{m_k},$$

т. е.

$$\lambda_{ik} = \lambda'_{ik} \frac{m_k}{\delta_{ik}},$$

где $\lambda'_{ik}$ — целые числа, а $\delta_{ik} = (\overset{*}{m}_i, m_k)$. Условие $\sum\limits_k b_k \underset{B}{\otimes} h_k = 0$ принимает теперь вид

$$\sum_{i,k} \lambda_{ik} \frac{m_k}{\delta_{ik}} \overset{*}{b}_i \underset{B}{\otimes} h_k = \sum_i \overset{*}{b}_i \underset{B}{\otimes} \left(\sum_k \lambda'_{ik} \frac{m_k}{\delta_{ik}} h_k\right) = 0,$$

а так как $\overset{*}{b}_i$ являются свободными образующими группы $B = I \times n'$, а $B \otimes H = H \times n'$, то отсюда следует, что

$$\sum_k \lambda'_{ik} \frac{m_k}{\delta_{ik}} h_k = 0.$$

Поэтому, преобразуя рассматриваемую сумму с помощью одних только соотношений указанных выше типов, получим:

$$\sum_k (b_k, h_k)_{m_k} = \sum_{i,k} \left(\lambda'_{ik} \frac{m_k}{\delta_{ik}} \overset{*}{b}_i, h_k\right)_{m_k} = \sum_{i,k} \left(\lambda'_{ik} \overset{*}{b}_i, \frac{m_k}{\delta_{ik}} h_k\right)_{\delta_{ik}} =$$
$$= \sum_{i,k} \left(\lambda'_{ik} \overset{*}{b}_i, \frac{m_k}{\delta_{ik}} h_k\right)_{\overset{*}{m}_i} = \sum_i \left(\overset{*}{b}_i, \sum_k \lambda'_{ik} \frac{m_k}{\delta_{ik}} h_k\right)_{\overset{*}{m}_i} = 0,$$

т. е. наше соотношение

$$\sum_k (b_k,\ h_k) = 0$$

действительно вытекает из указанной выше системы соотношений.

Каждому элементу $b \in Q \cap mP$ при фиксированном $m$ поставим в соответствие элемент $g$ группы $G = P/Q$, являющийся классом смежности, содержащим элемент $a$ группы $P$, для которого $ma = b$; ввиду отсутствия в группе $P$ элементов конечного порядка, элемент $a$, а значит, и содержащий его класс $g$, однозначно определяется элементом $b$, ибо из

$$ma = ma' = b$$

следует

$$m(a - a') = 0,$$

т. е. $a = a'$. Тогда $ma = b \in Q$, а значит $mg = 0$, т. е. $g \in {}_mG$. Соответствие зависит от $m$: если при том же $b \in Q \cap m'P$ заменить $m'$ на $m\,(m/m')$, то $g$ заменится на $\frac{m'}{m} g$, а одинаковым $g$ при переходе от $m$ к $m'$ соответствует замена $b$ на $\frac{m'}{m} b$.

Обратно, если $g \in {}_mG$, т. е. $g \in G$, $mg = 0$, а $a$ — какой-нибудь элемент группы $P$, содержащийся в классе $g$, то $b = ma$ есть элемент группы $Q$, а значит и группы $Q \cap mP$; если $a$ и $a'$ — два таких элемента, то $a - a' \in Q$, а потому для соответствующих элементов $b = ma$ и $b' = ma'$ при произвольном $h \in {}_mH$ будем иметь:

$$(b - b') \underset{Q}{\otimes} h = m(a - a') \underset{Q}{\otimes} h = (a - a') \underset{Q}{\otimes} mh = 0,$$

т. е. $b \underset{Q}{\otimes} h = b' \underset{Q}{\otimes} h$ и, значит,

$$(b,\ h)_m = (b',\ h)_m.$$

Поэтому группу, изоморфную группе $\operatorname{Ker}(Q \otimes H \to P \otimes H)$, можно получить, взяв в качестве образующих вместо пар $(b,\ h)_m$ пары $(g,\ h)_m$, где $g \in {}_mG$, $h \in {}_mH$, а в качестве соотношений — соотношения дистрибутивности при одинаковых $m$ для новых пар, т. е.

$$(g_1,\ h)_m + (g_2,\ h)_m = (g_1 + g_2,\ h)_m, \qquad (g,\ h_1)_m + (g,\ h_2)_m = (g,\ h_1 + h_2)_m,$$

и идентифицирующие соотношения для новых пар, соответствующие прежним: если $m/m'$, $g \in {}_mG$, $g' \in {}_{m'}G$, $h \in {}_mH$, $h' \in {}_{m'}H$, то

$$\left(\frac{m'}{m} g',\ h\right)_m = (g',\ h)_{m'}, \quad (g,\ h')_{m'} = \left(g,\ \frac{m'}{m} h'\right)_m {}^{*}.$$

Эти последние можно, воспользовавшись введенными в § 2, п. 2, отображениями $i^m_{m'}$ и $j^{m'}_m$, записать в виде

$$(j^{m'}_m g',\ h)_m = (g',\ i^m_{m'} h)_{m'}, \quad (i^m_{m'} g,\ h')_{m'} = (g,\ j^{m'}_m h')_m,$$

а тогда построенная группа, согласно определению тензорного произведения систем групп, есть

$$\{{}_mG;\ i,\ j\}_{m>0} \otimes \{{}_mH;\ j,\ i\}_{m>0},$$

* Такое определение периодического произведения принадлежит Эйленбергу и Маклейну [см. ([12]), п. 11].

т. е. это произведение естественно изоморфно группе $\mathrm{Ker}(Q \otimes H \to P \otimes H)$, которая в случае свободных групп $P$ и $Q$ обычно принимается за $G * H$ (одновременно получается независимость периодического произведения от выбора таких $P$ и $Q$).

Мы доказали несколько более сильное утверждение, так как у нас $P$ и $Q$ не обязаны быть свободными, а лишь не должны содержать элементов конечного порядка, однако этот факт элементарно выводится и без помощи наших рассуждений, если исходить из формулы (2). Достаточно рассмотреть комплекс без кручения $L: 0 \to Q \to P \to 0$ (где группы занумерованы слева направо числами 0, 1, 2, 3, а отображение $Q \to P$ есть отображение вложения). Для него

$$H_0^2(L) = 0$$

(ибо $\mathrm{Ker}(Q \to P) = 0$),

$$H^2(L,\ H) = \mathrm{Ker}(Q \otimes H \to P \otimes H),$$

$$H_0^3(L) = \mathrm{Ker}(P \to 0)/\mathrm{Im}(Q \to P) = P/Q = G,$$

а потому формула (2) (§ 2) дает:

$$\mathrm{Ker}(Q \otimes H \to P \otimes H) = G * H.$$

## Добавление II

Пусть $X$ есть какое-нибудь топологическое пространство. Отнесем этому пространству некоторый групповой комплекс $L$, который мы назовем комплексом его целочисленных коцепей.

Для этого рассмотрим множество всех его открытых мультипликативных покрытий $\Omega^\alpha$ в смысле работы ([8]). Как указано в названной работе (замечание в конце § 9, стр. 55), для построения групп когомологий пространства $X$ при рассмотрении подразделений покрытия $\Omega^\alpha$ достаточно ограничиться лишь точными подразделениями, где каждый элемент покрытия есть объединение содержащихся в нем элементов подразделения (ибо в каждое подразделение покрытия можно вписать точное подразделение этого покрытия), а тогда будет выполняться условие

$$S_\alpha^\beta S_\beta^\gamma = S_\alpha^\gamma,$$

а значит, и

$$\sigma_\gamma^\beta \sigma_\beta^\alpha = \sigma_\gamma^\alpha$$

($S_\alpha^\beta$ ставит в соответствие каждому элементу покрытия $\Omega^\beta$ наименьший содержащий его элемент покрытия $\Omega^\alpha$, а $\sigma_\beta^\alpha$ есть соответствующее отображение коцепей покрытия $\Omega^\alpha$ в коцепи покрытия $\Omega^\beta$). Поэтому в множестве всех $q$-мерных целочисленных коцепей (т. е. функций $f_\alpha^q$ из указанной работы) всевозможных мультипликативных покрытий $\Omega^\alpha$ пространства $X$ можно произвести разбиение на классы, приняв, что $f_\alpha^q$ и $f_\beta^q$ принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда найдется общее точное подразделение $\Omega^\gamma$ покрытий $\Omega^\alpha$ и $\Omega^\beta$, для которого

$$\sigma_\gamma^\alpha f_\alpha^q = \sigma_\gamma^\beta f_\beta^q.$$

Полученные классы естественно образуют группу, которую мы и примем за группу $L^q$ комплекса $L$.

Сравнивая теперь определение групп когомологий $H^q(X, G)$ пространства $X$ по группе коэффициентов $G$ с определениями настоящей работы, мы видим, что эти группы совпадают с группами гомологий $H^q(L, G)$ комплекса $L$ по группе $G$. Легко заключить далее, что группы $L^q$ не могут иметь элементов конечного порядка. Поэтому из результатов настоящей работы вытекает доказанная нами в работе ([2]) справедливость теоремы об универсальных коэффициентах в форме (1) для групп когомологий топологических пространств (в смысле Чеха или П. С. Александрова).

Отметим, что вместо мультипликативных покрытий с точными подразделениями можно рассматривать обычные покрытия, если ограничиться каноническими замкнутыми покрытиями (т. е. покрытиями в смысле работы ([9]), п. 8, элементы которых суть замыкания непересекающихся открытых множеств), образующими конфинальную часть системы всех замкнутых покрытий и для которых всегда

$$S_\alpha^\beta S_\beta^\gamma = S_\alpha^\gamma.$$

Можно использовать и произвольные покрытия с обычным определением вписанности, но тогда разбиение на классы, дающие элементы группы $L^q$, будет несколько более сложным.

Поступило
18.VI.1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cartan H. and Eilenberg S., Homological Algebra, Princeton, 1956.
[2] Бокштейн М., Тензорные произведения систем групп и теоремы об универсальных коэффициентах для гомологий и когомологий, Доклады Ак. наук СССР, 119, № 6 (1958), 1066—1069.
[3] Бокштейн М., Универсальные системы колец ∇-гомологий, Доклады Ак. наук СССР, 37, № 9 (1942), 275—278.
[4] Зейферт Г. и Трельфалль В., Топология, ГОНТИ, 1938.
[5] Бокштейн М., Гомологические инварианты топологического произведения двух пространств, Доклады Ак. наук СССР, 40, № 9 (1943), 387—390.
[6] Курош А. Г., Теория групп, Изд. 2, ГИТТЛ, 1953.
[7] Bockstein M., Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe, Матем. сборн., 9 (51): 2 (1941), 365—376.
[8] Александров П. С., Общая теория гомологии, Ученые записки МГУ, вып. 45 (1940), 3—60.
[9] Kurosch A., Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologischen Räume, Compositio math., 2 (1935), 471—476.
[10] Bockstein M., Sur le spectre d'homologie d'un complexe, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 247, № 3 (1958), 259—261.
[11] Bockstein M., Sur la formule des coefficients universels pour les groupes d'homologie, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 247, № 4 (1958), 396—398.
[12] Eilenberg S. and MacLane S., On the groups $H(\Pi, n)$, II, Ann. Math., 70, № 1 (1954), 49—139.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 565—594

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

# О СВОЙСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЛИНЕЙНЫХ АГРЕГАТОВ, ОБРАЗОВАННЫХ ИЗ ПОЛИНОМОВ ЯКОБИ, И ИХ ПРИМЕНЕНИИ К ВОПРОСУ О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ ЯКОБИ

(*Представлено академиком* **И. Н. Векуа**)

В работе изучаются свойства последовательностей линейных агрегатов, образованных из полиномов Якоби

$$P_{\nu_n}^{(\alpha,\beta)}(z) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\nu_n}=\tau<1.$$

Эти свойства применяются к исследованию полноты указанной системы полиномов Якоби на кривых в комплексной плоскости.

## Введение

Обозначим через $y_j(z,\lambda)$ $(j=1,\ 2,\ldots,s)$ какие-нибудь линейно-независимые решения уравнения

$$Dy\equiv\sum_{j=0}^{s} Q_j(z)\,y^{(s-j)}(z)=\lambda y, \tag{1}$$

где $Q_j(z)$ — некоторые аналитические функции и $\lambda$ — параметр (вообще комплексный). Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots$ — какая-нибудь последовательность значений параметра $\lambda$. В работе ([1]) указаны свойства последовательностей линейных агрегатов

$$P_n(z)=\sum_{k=1}^{p_n}\sum_{j=1}^{s} a_{kj}^{(n)}y_j(z,\ \lambda_k) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots), \tag{2}$$

которые равномерно сходятся в круге $|z-z_0|<r$, причем радиус $r$ предполагается больше определенной величины, зависящей от $\{\lambda_n\}$ и коэффициентов $Q_j(z)$. Например, показано, что если $y_j(z,\ \lambda_k)$ — целые функции и

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\lambda_k^{\frac{1}{s}}}=0, \tag{3}$$

то из равномерной сходимости последовательности (2) в некоторой области следует, что у предельной функции $P(z)$ область существования односвязна. В зависимости от $\{\lambda_n\}$ и $Q_j(z)$ эта область может иметь ту или иную форму: полуплоскость, полоса, внутренность эллипса, параболы и т. д.

Рассмотрим два примера. Пусть сперва

$$Dy \equiv y'' = \lambda y. \tag{4}$$

Здесь решениями являются функции $e^{\pm\sqrt{\lambda}z}$, последовательность (2) является последовательностью полиномов Дирихле, область существования предельной функции $P(z)$, если $\lambda_k > 0$ и выполняется условие (3),— вертикальная полоса; если последовательность (2) составлена только из функций $e^{-\sqrt{\lambda_k}z}$ (без функций $e^{\sqrt{\lambda_k}z}$), то соответствующая область — полуплоскость.

Пусть теперь

$$Dy \equiv (1-z^2)\,y'' + [\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)\,z]\,y' = \\ = -\nu(\nu+\alpha+\beta+1)\,y, \tag{5}$$

где $\alpha$, $\beta$ — действительные параметры. Уравнению (5) удовлетворяют полиномы Якоби $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$ (напомним, что их частными случаями являются полиномы Чебышева, полиномы Лежандра). Здесь

$$\lambda_k = -\nu_k(\nu_k+\alpha+\beta+1).$$

Если последовательность (2) образована из полиномов $P_{\nu_k}^{(\alpha,\beta)}(z)$ $(\alpha > -1,\ \beta > -1)$, причем $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k}{\nu_k} = 0$, то из равномерной сходимости этой последовательности в некоторой области следует, что область существования предельной функции есть внутренность некоторого эллипса с фокусами в точках $\pm 1$.

Доказательства указанных свойств основаны на рассмотрении оператора бесконечного порядка

$$M(y) = \sum_0^\infty a_k D^k y, \tag{6}$$

где $Dy$ — левая часть уравнения (1) и $D^k = D(D^{k-1})$. В случае (4) этот оператор имеет вид

$$M(y) = \sum_0^\infty a_k y^{(2k)}(z). \tag{7}$$

Оператор (7) — наиболее хорошо изученный среди операторов (6). По этой причине последовательности полиномов Дирихле лучше всего исследованы [см. ([2])].

Оператор (6) имеет смысл (ряд сходится) в точке $z_0$, если функция $y(z)$ регулярна в круге $|z-z_0| < r$, где $r$ больше некоторой величины. В силу этого теоремы относительно последовательностей (2) формулируются примерно так: если последовательность (2) равномерно сходится в круге $|z-z_0| < r$, то имеют место такие-то утверждения. Рассуждения связаны с кругом.

Оператор (7) имеет смысл в точках, удовлетворяющих меньшим требованиям. Например, если

$$\sum_0^\infty a_k z^{2k} = \prod_{k=1}^\infty\left(1-\frac{z^2}{\lambda_k^2}\right),$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\lambda_k} = \tau, \quad 0 \leqslant \tau < \infty,$$

то оператор (7) можно представить в интегральной форме, причем интегральное представление будет иметь смысл во всякой точке $z_0$, являющейся центром вертикального отрезка длиной $2\pi\tau$, на котором $y(z)$ регулярна. Вместо круга здесь берется только его вертикальный диаметр. По этой причине для последовательностей полиномов Дирихле удалось получить более сильные результаты. Так, если

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\lambda_k} = \tau,$$

то из равномерной сходимости последовательности

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} a_{nj}\, e^{-\lambda_j z} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

в области, содержащей вертикальный замкнутый отрезок длиной $2\pi\tau$, следует ее сходимость в полуплоскости.

Неясно, как этот результат можно распространить на последовательности (2) в общем случае. Не хватает интегрального представления для оператора (6). Не удается избавиться от круга — весьма грубой области в рассматриваемом вопросе.

В работе ([3]) удалось перенести указанный результат на последовательности (2) в случае, когда уравнение (1) имеет вид:

$$y'' + q(z)\, y = \lambda y, \tag{8}$$

где $q(z)$ — целая функция. В основе этого перенесения лежит тесная связь между решениями уравнения (4) и решениями уравнения (8), которая выражается формулой

$$f(z) = \varphi(z) + \int_{-z}^{z} K(z,\ t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{9}$$

Здесь $f(z)$ и $\varphi(z)$ — любые решения соответственно уравнений (8) и (4), удовлетворяющие в точке $z = 0$ одним и тем же начальным условиям, $K(z,\ t)$ — ядро, которое зависит только от $q(z)$. Оператор (9) рассматривался первоначально в действительной области. Б. Я. Левин показал [см. ([4])], что если $q(z)$ — целая функция, то ядро $K(z,\ t)$ — также целая функция своих аргументов.

Уравнение (8) — весьма частный случай уравнения (1). В частности уравнение (5) полиномов Якоби не имеет вида (8). Следовательно, задача более глубокого изучения последовательностей (2) в общем случае остается открытой.

Цель настоящей работы — решить указанную задачу относительно последовательностей агрегатов из полиномов Якоби. В этом случае [т. е. в случае уравнения (5)] удалось лучше, чем раньше, изучить оператор (6). Для оператора (6) получено новое представление, с помощью которого удалось освободиться от круга. Пусть

$$L(z) = \sum_{0}^{\infty} a_k z^k = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right),$$

где

$$\lambda_k = -\nu_k(\nu_k + \alpha + \beta + 1), \quad \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\nu_k} = \tau.$$

Тогда новое представление имеет смысл во всякой точке $z_0$, обладающей свойством: функция $y(z)$ регулярна на замкнутой дуге эллипса с фокусами в точках $\pm 1$ (проходящего через точку $z_0$), которая при конформном отображении внешности отрезка $[-1, +1]$ на внешность единичного круга переходит в дугу окружности с центром в начале раствора $2\pi\tau$, причем точка $z_0$ переходит при этом в середину дуги. Благодаря этому новому представлению получен (относительно последовательностей агрегатов из полиномов Якоби), в частности, следующий результат:

Если последовательность

$$f_m(z) = \sum_{k=1}^{p_m} a_{mk} P_{\nu_k}^{(\alpha,\beta)}(z) \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

равномерно сходится в области, содержащей вышеуказанную дугу эллипса, то она сходится внутри целого эллипса с фокусами в точках $\pm 1$.

Свойства последовательностей (10) применяются в конце работы к установлению условий полноты системы полиномов Якоби $\{P_{\nu_k}^{(\alpha,\beta)}(z)\}$ на кривых в комплексной плоскости подобно тому, как аналогичные свойства последовательностей полиномов Дирихле были применены в работе ([5]) к установлению условий полноты системы $\{z^{\lambda_k}\}$ на кривых в комплексной плоскости.

## § 1. Оценка $D^k y$

В работе ([6]) [см. также ([1])] для оператора $D^k y$ при условии, что $Dy$ имеет вид (1) (см. введение), приведена следующая оценка: если функция $y(z)$ и коэффициенты $Q_j(z)$ регулярны в круге $|z - a| \leqslant R$ и $M(R, y)$, $M(R, Q_j)$ — максимумы модулей функций $y(z)$ и $Q_j(z)$ в этом круге, то в точке $a$ — центре круга — имеет место оценка:

$$|D^k y| < \left(\frac{k}{R}\right)^{sk} A_k^k M(R, y),$$

где

$$A_k = \sum_{j=0}^{s} (s-j)! \left(\frac{R}{k}\right)^j M(R, Q_j).$$

В частном случае, когда $Q_0(z) \equiv 1$, при больших $k$ получаем:

$$|D^k y| < \left(\frac{k}{R}\right)^{sk} (s! + \varepsilon)^k M(R, y), \quad k > K(\varepsilon).$$

Эта оценка не является точной. Цель этого параграфа — получить для $D^k y$ более точную оценку [см. оценку (5)]. Ограничимся случаем $s = 2$, т. е. случаем

$$Dy \equiv y'' + Q_1(z)\, y' + Q_2(z)\, y. \tag{1}$$

В дальнейшем для обозначения того, что функция

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

имеет мажоранту

$$\varphi(z) = \sum_{0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

(все $b_n \geqslant 0$ и $|a_n| \leqslant b_n$), будем употреблять известную запись

$$f(z) \ll \varphi(z).$$

Пусть, по-прежнему, функция $y(z)$ и коэффициенты $Q_j(z)$ $(j=1, 2)$ регулярны в круге $|z-a| \leqslant R$ и $M(R, y)$, $M(R, Q_j)$ — максимумы модулей указанных функций в этом круге. Положим

$$N = \max [M(R, Q_1),\ M(R, Q_2)].$$

В круге $|z-a| < R$ имеем:

$$y(z) \ll \frac{M(R, y)}{1 - \frac{z-a}{R}} = T(z),$$

$$Q_j(z) \ll \frac{N}{1 - \frac{z-a}{R}} = q(z).$$

Рассмотрим оператор

$$AT = T' + q(z)T.$$

Мы имеем:

$$A^2T = A(AT) = T'' + 2q(z)T' + [q'(z) + q^2(z)]T.$$

Так как

$$T(z) \gg y(z), \quad 2q(z) \gg Q_1(z),$$

$$q'(z) + q^2(z) \gg Q_2(z),$$

то

$$A^2T \gg Dy.$$

Отсюда получим:

$$D^k y \ll A^{2k} T. \tag{2}$$

Положим

$$K(z) = \exp\Big(-\int_a^z q(t)\,dt\Big),$$
$$T(z) = K(z)\varphi(z). \tag{3}$$

Функции $K(z)$ и $\varphi(z)$ регулярны в круге $|z-a| < R$. Легко проверить, что

$$AT = K(z)\varphi'(z)$$

и, следовательно,

$$A^{2k}T = K(z)\varphi^{(2k)}(z).$$

В силу этого, принимая во внимание (2), находим:

$$D^k y \ll K(z)\,\varphi^{(2k)}(z). \tag{4}$$

Воспользуемся соотношением (4) для получения искомой оценки для $D^k y$. Пусть $r < R$. Имеем:

$$B = \max_{|z-a|\leqslant r}\left|\int_a^z q(t)\,dt\right| = NR\ln\frac{1}{1-\frac{r}{R}},$$

$$\left|\frac{1}{K(z)}\right| \leqslant e^B = \frac{1}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^{NR}}, \quad |z-a|\leqslant r$$

На основании этого, согласно формуле (3), получаем:

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{M(R, y)}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^{NR+1}}, \quad |z-a|\leqslant r.$$

Отсюда, по формуле Коши, найдем:

$$|\varphi^{(2k)}(a)| \leqslant \frac{(2k)!}{r^{2k}}\,\frac{M(R, y)}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^{NR+1}}.$$

Учитывая, что в точке $a$ — центре круга — значение $K(a) = 1$, и принимая во внимание (4), заключаем окончательно, что

$$|D^k y(a)| \leqslant \frac{(2k)!}{r^{2k}}\,\frac{M(R, y)}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^{NR+1}}. \tag{5}$$

Итак, если $y(z)$ и $Q_j(z)$ регулярны в круге $|z-a|\leqslant R$ и в этом круге максимумы модулей указанных функций не превосходят соответственно $M(R, y)$ и $N$, то в точке $a$ при любом $r < R$ имеет место оценка (5).

## § 2. Область определения оператора $M(y)$

Рассмотрим оператор

$$M(y) = \sum_0^\infty a_k D^k y, \tag{1}$$

где

$$Dy \equiv y'' + Q_1(z)\,y' + Q_2(z)\,y.$$

Будем предполагать, что коэффициенты $a_k$ таковы, что характеристическая функция

$$L(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$$

— целая функция порядка $\frac{1}{2}$ конечного типа $\sigma$. Тогда имеем:

$$|a_k| < \left(\frac{\sigma e + \varepsilon}{2k}\right)^{2k}, \quad k > K(\varepsilon). \tag{2}$$

Отсюда, на основании оценки (5) из § 1, получим:

$$|a_k D^k y| < \left(\frac{\sigma+\varepsilon'}{r}\right)^{2k} \frac{M(R, y)}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^{NR+1}}, \quad k > K(\varepsilon'). \tag{3}$$

Таким образом, оператор $M(y)$ определен (ряд (1) сходится) во всякой точке, обладающей свойством: функция $y(z)$ и коэффициенты $Q_j(z)$ регулярны в круге с центром в этой точке радиуса больше $\sigma$. В достаточно малой окрестности всякой такой точки ряд (1) сходится равномерно и

$$|M(y)| < PM(R, y), \tag{4}$$

где постоянная $P$ не зависит от $y(z)$.

Замечание. Пусть имеется последовательность операторов $M_n(y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, порожденных характеристическими функциями

$$L_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k,$$

удовлетворяющими условию

$$|L_n(z)| < e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^{\frac{1}{2}}}, \quad |z| > r_0(\varepsilon),$$

где $r_0(\varepsilon)$ — одно и то же для всех $n$. Из этого условия следует, что коэффициенты $a_k^{(n)}$ удовлетворяют неравенству вида (2), причем число $K(\varepsilon)$ — одно и то же для всех $n$. Предположим, что $\{L_n(z)\}$ сходится к функции

$$L(z) = \sum_0^{\infty} a_k z^k.$$

Тогда $a_k^{(n)} \to a_k$ при $n \to \infty$ (и любом фиксированном $k$). В силу этого получим, что если функция $y(z)$ регулярна в круге $|z - a| < R$, где $R > \sigma$, то в достаточно малой окрестности точки $a$ равномерно

$$\lim_{n \to \infty} M_n(y) = M(y);$$

в частности, если $L_n(z) \to L(z) \equiv 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} M_n(y) = y(z).$$

## § 3. Область определения оператора $N(y)$

Рассмотрим оператор

$$N(y) = \sum_0^{\infty} a_k D^k y, \tag{1}$$

где

$$Dy \equiv (1 - z^2) y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2) z] y'.$$

Здесь коэффициент при второй производной не равен тождественно единице. Поэтому к оператору (1) полученные выше результаты непосредственно не применимы.

Перейдем от независимого переменного $z$ к новому независимому переменному $t$ согласно формуле

$$t = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}). \tag{2}$$

Имеем:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\,\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{z^2-1}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{z}{(z^2-1)\sqrt{z^2-1}}\,\frac{dy}{dt}$$

и потому

$$Dy \equiv -\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(\alpha+\beta+1)(e^t+e^{-t}) - 2(\beta-\alpha)}{e^t - e^{-t}}\,\frac{dy}{dt}\right\} \equiv -\widetilde{D}y.$$

Здесь $\widetilde{D}y$ имеет нужный вид:

$$\widetilde{D}y = \frac{d^2y}{dt^2} + Q_1(t)\frac{dy}{dt} + Q_2(t)\,y. \tag{2'}$$

Кроме того,

$$D^2y = D(Dy) = -\widetilde{D}(-\widetilde{D}y) = \widetilde{D}^2y$$

и вообще

$$D^ky = (-1)^k\,\widetilde{D}^ky. \tag{3}$$

Функция $w = z + \sqrt{z^2-1}$ конформно отображает внешность отрезка $[-1, +1]$ в плоскости переменного $z$ на внешность единичного круга в плоскости переменного $w$. Кривую (часть гиперболы), которая при этом отображается в луч $|w| > 1$, $\arg w = \alpha$, обозначим через $\Gamma$. При отображении $t = \ln w$ внешность единичного круга, разрезанная вдоль луча $|w| > 1$, $\arg w = \alpha$, перейдет в полуполосу

$$\operatorname{Re}(t) > 0, \quad \alpha < \operatorname{Im}(t) < \alpha + 2\pi. \tag{4}$$

Отсюда видно, что функция (2) осуществляет конформное отображение внешности отрезка $[-1,1]$ в плоскости $z$, разрезанной вдоль кривой $\Gamma$, на полуполосу в плоскости $t$; при этом эллипс с выколотой точкой на $\Gamma$ с фокусами в точках $\pm 1$ переходит в вертикальный отрезок длиной $2\pi$.

Согласно (3),

$$N(y) = \sum_0^\infty a_k D^k y = \sum_0^\infty (-1)^k a_k \widetilde{D}^k y = M(y),$$

и к оператору $M(y)$ применимы результаты предыдущего параграфа. Учитывая, что у коэффициента $Q_1(t)$ $(Q_2(t) \equiv 0)$ оператора $\widetilde{D}y$ особые точки расположены на мнимой оси, получим относительно $N(y)$ следующее утверждение.

Пусть характеристическая функция

$$L(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

— целая порядка $\frac{1}{2}$ и конечного типа $\sigma$. Пусть $a$ — точка плоскости $z$, не лежащая на отрезке $[-1, +1]$, и $b$ — ее образ при отображении (2).

Пусть, наконец, $E(a, r)$ — область плоскости $z$, лежащая вне отрезка $[-1, +1]$, которая при отображении (2) переходит в круг $|t-b|<r$ с центром в точке $b$ радиуса $r$. Если $r>\sigma$ и функция $y(z)$ регулярна в области $E(a, r)$, то в достаточно малой окрестности точки $a$ ряд (1) сходится равномерно и, следовательно, оператор $N(y)$ в точке $a$ определен.

В дальнейшем характеристическая функция $L(z)$ будет иметь вид (см. введение)

$$L(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right), \tag{5}$$

где

$$\lambda_k=-\nu_k(\nu_k+\alpha+\beta+1),$$

а $\nu_k$ — целые положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\nu_k}=\tau.$$

При этих предположениях $L(z)$ — целая функция порядка $\frac{1}{2}$ и типа $\sigma=\pi\tau$. Кроме того, при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях $z$ и любом $\varepsilon>0$ [см. ([2]), стр. 167]

$$|L(z)|<e^{\varepsilon|z|^{\frac{1}{2}}},\quad |z|>r_0(\varepsilon),\quad z<0. \tag{6}$$

В следующем параграфе для оператора $N(y)$ при условии (6) будет получено интегральное представление, которое имеет смысл в более широкой области, чем представление (1) в форме ряда.

## § 4. Интегральное представление оператора $N(y)$ в частном случае

Обозначим через $K_0$ эллипс в плоскости $z$ с фокусами в точках $\pm 1$, который при отображении

$$t=\ln(z+\sqrt{z^2-1}) \tag{1}$$

переходит в вертикальный отрезок, расположенный справа от мнимой оси на расстоянии, равном $\sigma$. Пусть точка $z$ лежит вне $K_0$. Этой точке соответствует область $E(z, r)$ с $r>\sigma$. Границу области обозначим через $C$. Предположим, что функция $y(z)$ регулярна на контуре $C$ и внутри контура $C$. Имеем:

$$y(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{y(\xi)\,d\xi}{\xi-z},$$

в силу чего

$$N(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_C y(\xi)N_z\left(\frac{1}{\xi-z}\right)d\xi, \tag{2}$$

где

$$N_z\left(\frac{1}{\xi-z}\right) \tag{3}$$

обозначает результат действия оператора $N$ на функцию $\frac{1}{\xi - z}$ как функцию переменного $z$. Цель этого и следующего параграфов — выяснить, для каких функций $y(z)$ и в каких точках $z$ имеет смысл интегральное представление (2).

Выясним, где функция (3) является аналитической как функция переменного $\xi$.

Пусть $\xi$ лежит вне области $E(z, R)$ с $R > \sigma$ и пусть $r < R$. Согласно оценке (3) § 2 и соотношению (3) § 3 имеем:

$$|a_k D^k y(z)| < \left(\frac{\sigma + \varepsilon}{r}\right)^{2k} \frac{M(R, y)}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{NR+1}}, \quad k > K(\varepsilon), \tag{4}$$

где $y(z) = \frac{1}{\xi - z}$, $M(R, y)$ — максимум модуля $y(\eta)$ в области $E(z, R)$, $N$ — максимум модуля коэффициента $Q_1(t)$ оператора $\widetilde{D}y$ [см. формулу (2') § 3] в круге с центром в точке $t$ ($t$ — образ точки $z$ при отображении (1)) радиуса $R$. Так как $D^k y$ — аналитические функции переменного $\xi$ при всех $\xi \neq z$, то из последней оценки видно, что если $R > \sigma$ (а тогда и $r$ можно считать больше $\sigma$), то ряд

$$N_z\left(\frac{1}{\xi - z}\right) = \sum_0^\infty a_k D^k y, \quad y = \frac{1}{\xi - z},$$

сходится равномерно и, следовательно, функция (3) — аналитическая функция переменного $\xi$ при всех $\xi$, лежащих вне $E(z, \sigma)$ (из оценки (4) видно также, что когда $\xi$ лежит вне области $E(a, \sigma)$, то функция (3) регулярна относительно переменного $z$ в достаточно малой окрестности точки $a$).

Область $E(z, \sigma)$ пересекается с эллипсом $\gamma_z$, проходящим через точку $z$ и имеющим фокусы в точках $\pm 1$, по дуге $l_z$, которая при отображении (1) переходит в вертикальный отрезок длиной $2\sigma$ с центром в соответствующей точке $t$. Покажем, что при условии (6) предыдущего параграфа функция (3) как функция переменного $\xi$ регулярна всюду вне дуги $l_z$.

Рассмотрим два случая. Пусть сначала точка $\xi$ (она лежит вне области $E(z, \sigma)$) расположена вне эллипса $\gamma_z$. Имеем при $\alpha > -1$, $\beta > -1$ [см. ([7]), стр. 79]:

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum h_\nu P_\nu^{(\alpha, \beta)}(z)\, Q_\nu^{*(\alpha, \beta)}(\xi), \tag{5}$$

где

$$h_\nu = \frac{2\nu + \alpha + \beta + 1}{2^{\alpha+\beta}} \; \frac{\Gamma(\nu + 1)\,\Gamma(\nu + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\nu + \alpha + 1)\,\Gamma(\nu + \beta + 1)} = O(\nu) \quad \text{при } \nu \to \infty, \tag{6}$$

$$Q_\nu^{*(\alpha, \beta)}(\xi) = (\xi - 1)^\alpha (\xi + 1)^\beta Q_\nu^{(\alpha, \beta)}(\xi)$$

и $Q_\nu^{(\alpha, \beta)}(\xi)$ — некоторое вполне определенное решение уравнения полиномов Якоби, линейно не зависимое от полинома $P_\nu^{(\alpha, \beta)}(\xi)$. Функция

$Q_\nu^{*(\alpha,\beta)}(\xi)$ регулярна и однозначна вне отрезка $[-1, +1]$. Заметим, что вне любой замкнутой кривой, охватывающей отрезок $[-1, +1]$, равномерно [см. (7), стр. 190,219]

$$|P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)| = [1 + o(1)]^\nu |z^*|^\nu, \tag{7}$$

$$|Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(\xi)| = [1 + o(1)]^\nu |\xi^*|^{-\nu}, \tag{8}$$

где $z^*$ и $\xi^*$ — точки, в которые переходят $z$ и $\xi$ при преобразовании $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ внешности отрезка $[-1, +1]$ на внешность единичного круга. В рассматриваемом случае $|z^*| < |\xi^*|$.

Воспользуемся тем, что

$$N(P_\nu^{(\alpha,\beta)}) = L(\mu_\nu) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z), \quad \mu_\nu = -\nu(\nu + \alpha + \beta + 1).$$

В силу этого, принимая во внимание формулу (5), получим:

$$N_z\left(\frac{1}{\xi - z}\right) = \sum h_\nu L(\mu_\nu) P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z) Q_\nu^{*(\alpha,\beta)}(\xi). \tag{9}$$

На основании неравенства (6) предыдущего параграфа,

$$|L(\mu_\nu)| < e^{o(\nu)}.$$

Учитывая это, а также условия (6), (7) и (8), мы видим, что ряд (9) сходится относительно $\xi$ всюду вне эллипса $\gamma_z$ (равномерно на любом замкнутом множестве из этой области). Значит, функция (3) как функция $\xi$ регулярна вне эллипса $\gamma_z$.

Рассмотрим теперь второй случай, когда точка $\xi$ лежит внутри эллипса $\gamma_z$. Запишем (при $-\alpha > -1$, $-\beta > -1$) формулу, аналогичную формуле (5):

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum g_\nu P_\nu^{(-\alpha,-\beta)}(\xi) Q_\nu^{*(-\alpha,-\beta)}(z). \tag{10}$$

Отметим, что $Q_\nu^{*(-\alpha,-\beta)}(z)$ удовлетворяет уравнению [см. (7), стр. 60]:

$$(1 - z^2) y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2) z] y' = -(\nu + 1)(\nu - \alpha - \beta) y,$$

в левой части которого находится наш оператор $Dy$ (функция $Q_\nu^{*(\alpha,\beta)}(z)$ не удовлетворяет уравнению $Dy = \lambda y$, у которого в левой части находился бы именно наш оператор $Dy$, по этой причине и пришлось воспользоваться функциями $Q_\nu^*$ с параметрами $-\alpha$, $-\beta$).

Мы имеем:

$$N\{Q_\nu^{*(-\alpha,-\beta)}\} = L(\mu_\nu^*) Q_\nu^{*(-\alpha,-\beta)}(z), \quad \mu_\nu^* = -(\nu + 1)(\nu - \alpha - \beta),$$

и потому, используя формулу (10), получим:

$$N_z\left(\frac{1}{\xi - z}\right) = \sum g_\nu L(\mu_\nu^*) P_\nu^{(-\alpha,-\beta)}(\xi) Q_\nu^{*(-\alpha,-\beta)}(z). \tag{11}$$

На основании этого убеждаемся (подобно тому, как это было в случае соотношения (9)), что функция (3) регулярна как функция $\xi$ внутри эллипса $\gamma_z$.

Итак, мы доказали, что функция (3) регулярна вне эллипса $\gamma_z$, внутри $\gamma_z$ и всюду на эллипсе $\gamma_z$ вне дуги $l_z$. Следовательно, она регулярна всюду вне дуги $l_z$.

Нетрудно убедиться в том, что функция (3) как функция переменного $z$ регулярна вне дуги $l_\xi$, если $\xi$ лежит вне эллипса $K_0$.

Обратимся теперь к оператору (2). Наши сведения относительно области регулярности ядра (3) позволяют утверждать следующее:

Для того чтобы правая часть формулы (2) имела смысл в точке $z$, достаточно предположить, что функция $y(\xi)$ регулярна в какой-либо области, содержащей дугу $l_z$. При этом если функция $y(\xi)$ действительно регулярна в такой области, то $N(y)$ представляет собой функцию, аналитическую в достаточно малой окрестности точки $z$.

Замечание. Для дальнейшего нам надо выяснить, где ограничена функция (3). С этой целью обратимся к оценке (4), в которой $y(z)=\frac{1}{\xi-z}$ и $N$ — максимум модуля коэффициента

$$Q_1(t)=\frac{(\alpha+\beta+1)(e^t+e^{-t})-2(\beta-\alpha)}{e^t-e^{-t}}$$

в круге с центром в точке $t$ ($t$ — образ точки $z$ при отображении (1)) радиуса $R$. При больших $\operatorname{Re}(t)$ (большим $\operatorname{Re}(t)$ соответствуют большие $|z|$) величина $N$ ограничена. Пусть $R_1>\sigma$. Выберем числа $R$ и $r$ так, чтобы $R_1>R>r>\sigma$. Пусть $\xi$ лежит вне области $E(z, R_1)$. Величина $M(R, y)$ — максимум модуля функции $y(z)=\frac{1}{\xi-z}$ в области $E(z, R)$ — ограничена при больших $|z|$. Отсюда, в силу оценки (4), выводим, что при больших $|z|$, когда $\xi$ лежит вне области $E(z, R_1)$ при $R_1>\sigma$, функция (3) ограничена:

$$\left|N_z\left(\frac{1}{\xi-z}\right)\right|<A. \tag{12}$$

Из формул (9) и (11), принимая во внимание оценки (7) и (8), видно, что свойство (12) имеет место также, если выполняются условия

$$\left|\frac{z^*}{\xi^*}\right|<q<1 \quad \text{или} \quad \left|\frac{\xi^*}{z^*}\right|<q<1. \tag{13}$$

Рассмотрим отображение

$$\eta=\ln(\xi+\sqrt{\xi^2-1}). \tag{14}$$

Как и выше, пусть при этом отображении точке $z$ соответствует точка $t$. Обозначим через $C_t^*$ границу прямоугольника постоянных размеров (его стороны параллельны осям координат) с центром в точке $t$, у которого вертикальная сторона имеет длину $2\sigma+\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Этой границе (она расположена в плоскости $\eta$) соответствует, в силу отображения (14), контур $C_z$ в плоскости $\xi$. Когда точка $\eta$ лежит на горизонтальных сторонах $C_t^*$, то точка $\xi$ лежит вне области $E(z, R_1)$ при подходящем $R_1>\sigma$. Когда точка $\eta$ лежит на вертикальных сторонах $C_t^*$, то точка $\xi$ удовлетворяет условиям (13). Следовательно, при больших $|z|$, если $\xi$ лежит вне контура $C_z$ или на контуре $C_z$, имеет место неравенство (12).

## § 5. Интегральное представление оператора $N(y)$ в общем случае

Полученные результаты установлены пока в предположении, что точка $z$ лежит вне эллипса $K_0$. Сейчас мы покажем, что эти результаты

верны в общем случае, т. е. для любой точки $z$, не лежащей на отрезке $[-1, +1]$.

Убедимся сначала, что функция $N_z\left(\frac{1}{\xi - z}\right)$ как функция $z$ регулярна вне дуги $l_\xi$; при этом мы считаем, что точка $\xi$ не лежит на отрезке $[-1, +1]$.

Пусть $z_0$ — точка, расположенная вне дуги $l_\xi$ и вне отрезка $[-1, +1]$. Нам надо показать, что указанная функция регулярна в точке $z_0$.

Обозначим через $\eta$ и $t_0$ образы точек $\xi$ и $z_0$ при отображении

$$t = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}). \tag{1}$$

Выберем целое положительное число $n$ так, чтобы $\frac{\sigma}{n} < \operatorname{Re}(t_0)$, $\frac{\sigma}{n} < \operatorname{Re}(\eta)$. Функцию $L(z)$ представим в виде произведения функций $L_1(z)$, $L_2(z)$, ..., $L_n(z)$, из которых каждая имеет порядок $\frac{1}{2}$ и тип $\sigma_1 = \frac{\sigma}{n}$ и, кроме того, при больших по абсолютной величине отрицательных $z$ и любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$|L_s(z)| < e^{\varepsilon |z|^{\frac{1}{2}}}, \quad |z| > r_0(\varepsilon)$$

(условию (6) § 3).

В дальнейшем у нас функция $L(z)$ будет иметь вид:

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right),$$

причем

$$\lambda_k = -\nu_k(\nu_k + \alpha + \beta + 1), \quad \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\nu_k} = \tau = \frac{\sigma}{\pi}.$$

В качестве $L_s(z)$ можно, например, взять функцию

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_k}\right),$$

где $\mu_k = \lambda_{s+kn}$. Очевидно, она удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Обозначим через $N_s(y)$ оператор, порожденный функцией $L_s(z)$ подобно тому, как оператор $N(y)$ порожден функцией $L(z)$. Оператор $N$ представляет собой произведение операторов $N_1, N_2, \ldots, N_n$. Для оператора $N_s(y)$ роль эллипса $K_0$, связанного с оператором $N(y)$, играет эллипс $K_1$ с фокусами в $\pm 1$, который при отображении (1) переходит в вертикальный отрезок, лежащий справа от мнимой оси на расстоянии $\sigma_1 = \frac{\sigma}{n}$.

Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = N_1\left(\frac{1}{\xi - z}\right).$$

Так как $\xi$ лежит вне эллипса $K_1$, то, по доказанному, функция $f_1(z)$ регулярна вне дуги $l_1$ (эллипса $\gamma_\xi$), которая при отображении (1) пере-

ходит в вертикальный отрезок длиной $2\sigma_1$ с центром в точке $\eta$. А тогда, в силу вышеизложенного, функция

$$f_2(z) = N_2(f_1)$$

будет аналитической вне $K_1$ и вне дуги $l_2$ (эллипса $\gamma_\xi$), которая при отображении (1) переходит в отрезок длиной $4\sigma_1$ с центром в точке $\eta$. Продолжая рассуждать таким образом, получим, что функция

$$N\left(\frac{1}{\xi - z}\right) = f_n(z) = N_n(f_{n-1})$$

регулярна вне $K_1$ и вне дуги $l_n = l_\xi$. В частности, она регулярна в точке $z_0$. Но точка $z_0$ была произвольной точкой, не принадлежащей отрезку $[1, +1]$. Следовательно, если $\xi$ не лежит на отрезке $[-1, +1]$, то функция

$$N_z\left(\frac{1}{\xi - z}\right) \tag{2}$$

как функция $z$ регулярна всюду вне отрезка $[-1, +1]$ и вне дуги $l_\xi$.

Рассмотрим теперь функцию (2) как функцию переменного $\xi$. Из только что полученного результата следует, что если $z$ не лежит на отрезке $[-1, +1]$, то она (как функция от $\xi$) регулярна вне отрезка $[-1, +1]$ и вне дуги $l_z$. Но из формулы (11) предыдущего параграфа видно, что исследуемая функция регулярна и в точках отрезка $[-1, +1]$.

Таким образом, функция (2) как функция $\xi$ регулярна всюду вне дуги $l_z$.

Этот вывод мы сейчас используем для окончательного выяснения того, где имеет смысл изучаемый нами оператор

$$N(y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C y(\xi)\, N_z\left(\frac{1}{\xi - z}\right) d\xi. \tag{3}$$

Непосредственно убеждаемся в следующем:

Для того чтобы оператор (3) имел смысл в точке $z$, достаточно потребовать, чтобы функция $y(\xi)$ была аналитической в некоторой области, содержащей дугу $l_z$.

Замечание. Пусть имеется последовательность операторов $N_m(y)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, порожденных характеристическими функциями

$$L_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(m)} z^k,$$

удовлетворяющими условиям:

1) $|L_m(z)| < e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^{\frac{1}{2}}}$, $|z| > r_0(\varepsilon)$;
2) $|L_m(-x)| < e^{\varepsilon x}$, $x > r_0(\varepsilon)$, где $r_0(\varepsilon)$ — одно и то же для всех $m$;
3) $\lim\limits_{m\to\infty} L_m(z) = L(z)$.

Из условий 2), 3) и формул (9), (11) предыдущего параграфа следует, что если $\xi$ принадлежит любому замкнутому множеству, лежащему внутри эллипса $\gamma_a$ или вне его, а $z$ — достаточно малой окрестности

точки $a$, то равномерно при $m \to \infty$

$$N_m\left(\frac{1}{\xi - z}\right) \to N\left(\frac{1}{\xi - z}\right); \tag{4}$$

в частности, если $L_m(z) \to L(z) \equiv 1$, то

$$N_m\left(\frac{1}{\xi - z}\right) \to \frac{1}{\xi - z}. \tag{5}$$

Из условия 1), если учесть замечание § 2, следует, что свойства (4) и (5) имеют место, когда $\xi$ принадлежит замкнутому множеству из внешности дуги $l_a$, а $z$ — достаточно малой окрестности точки $a$.

На основании свойств (4) и (5), принимая во внимание формулу (3), заключаем, что если функция $y(\xi)$ регулярна в области, содержащей дугу $l_a$, то в достаточно малой окрестности точки $a$ равномерно

$$\lim_{m\to\infty} N_m(y) = N(y);$$

в частности, если $L(z) \equiv 1$, то

$$\lim_{m\to\infty} N_m(y) = y(z).$$

Если функции $L_m(z)$ удовлетворяют только условиям 1) и 2), то можно утверждать, что в достаточно малой окрестности точки $a$ последовательность $\{N_m(y)\}$ равномерно ограничена.

В заключение параграфа перечислим свойства операторов типа (3) (некоторые из них уже приводились):

1) $N(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1N(y_1) + C_2N(y_2)$.

2) Если $\{y_n(\xi)\}$ равномерно сходится к $y(\xi)$ в области, содержащей дугу $l_a$, то в достаточно малой окрестности точки $a$

$$\lim_{n\to\infty} N(y_n) = N(y).$$

3) Если $y(z)$ — решение уравнения $Dy = \lambda y$, то

$$N(y) = L(\lambda)\, y(z);$$

в частности, это имеет место для $y = P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$ и $y = Q_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$ с $\lambda = -\nu(\nu + \alpha + \beta + 1)$.

4) Если $N_m(y)$ и $N(y)$ — операторы, порожденные функциями $L_m(z)$ и $L(z)$, удовлетворяющими условиям 1), 2), 3) замечания, и если функция $y(\xi)$ регулярна в области, содержащей дугу $l_a$, то в достаточно малой окрестности точки $a$ равномерно

$$\lim_{m\to\infty} N_m(y) = N(y);$$

в частности, если $L(z) \equiv 1$, то

$$\lim_{m\to\infty} N_m(y) = y(z);$$

если функции $L_m(z)$ удовлетворяют лишь условиям 1), 2), то в достаточно малой окрестности $a$ последовательность функций $\{N_m(y)\}$ равномерно ограничена.

5) Произведению характеристических функций соответствует произведение операторов: если $L(z) = L_1(z)\, L_2(z)$, то $N(y) = N_1\{N_2(y)\}$.

## § 6. Свойства решений уравнения $N(y)=0$

Пусть $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k, \ldots$ — последовательность целых положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\nu_k} = \tau. \tag{1}$$

Положим $\lambda_k = -\nu_k(\nu_k+\alpha+\beta+1)$ и

$$L_{p,q}(z) = \prod_{k=p}^{q}{}' \left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Обозначим через $N_{p,q}(y)$ оператор, порожденный характеристической функцией $L_{p,q}(z)$. Рассмотрим уравнение

$$N(y) = N_{1,\infty}(y) = 0. \tag{2}$$

В силу условия (1) левая часть уравнения (2) имеет смысл в точке $a$, если функция $y(z)$ регулярна в области, содержащей дугу $l_a$. По этой причине будем предполагать, что функция $y(z)$ регулярна в некоторой области $G$, содержащей дугу $l_a$, и в достаточно малой окрестности $G_0$ точки $a$ удовлетворяет уравнению (2).

Имеем (в силу свойства 5) операторов):

$$N_{1,\infty}(y) = N_{1,n}\{N_{n+1,\infty}(y)\} = 0.$$

Отсюда [см. ([1]), § 3] находим:

$$N_{n+1,\infty}(y) = \sum_{j=1}^{n} [a_{nj}P_{\nu_j}(z) + b_{nj}Q_{\nu_j}(z)] \tag{3}$$

(для краткости пишем $P_\nu$ вместо $P_\nu^{(\alpha,\beta)}$ и $Q_\nu$ вместо $Q_\nu^{(\alpha,\beta)}$), где $a_{nj}$ и $b_{nj}$ — постоянные. Функции $L_{n+1,\infty}(z)$ удовлетворяют условиям 1), 2), 3) замечания из предыдущего параграфа, причем

$$\lim_{n\to\infty} L_{n+1,\infty}(z) = 1.$$

Поэтому (на основании свойства 4) операторов) в окрестности $G_0$ точки $a$ равномерно

$$y(z) = \lim_{n\to\infty} N_{n+1,\infty}(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} [a_{nj}P_{\nu_j}(z) + b_{nj}Q_{\nu_j}(z)]. \tag{4}$$

Итак, нами получена

ТЕОРЕМА 1. *Решение $y(z)$ уравнения* (2) *представляется в форме* (4).

Покажем, что в представлении (4) коэффициенты $a_{nj}$ и $b_{nj}$ имеют следующую структуру:

$$a_{nj} = a_j L_{n+1,\infty}(\lambda_j), \quad b_{nj} = b_j L_{n+1,\infty}(\lambda_j). \tag{5}$$

С этой целью наряду с формулой (3) запишем формулу

$$N_{m+1,\infty}(y) = \sum_{j=1}^{m} [a_{mj}P_{\nu_j}(z) + b_{mj}Q_{\nu_j}(z)],$$

где $m>n$. Подействуем на левую и правую части этой формулы оператором $N_{n+1,m}$, тогда получим:

$$N_{n+1,\infty}(y) = \sum_{j=1}^{m} [a_{mj}P_{\nu_j}(z) + b_{mj}Q_{\nu_j}(z)]\, L_{n+1,m}(\lambda_j).$$

Сравнивая это выражение с выражением (3), находим:

$$a_{nj} = a_{mj} L_{n+1,\, m}(\lambda_j), \quad b_{nj} = b_{mj} L_{n+1,\, m}(\lambda_j),$$

или

$$a_{mj} = \frac{a_{nj}}{L_{n+1,m}(\lambda_j)}, \qquad b_{mj} = \frac{b_{nj}}{L_{n+1,m}(\lambda_j)}.$$

Правые части при $m \to \infty$ имеют пределы, следовательно, левые части также имеют пределы; обозначим их соответственно через $a_j$ и $b_j$:

$$a_j = \frac{a_{nj}}{L_{n+1,\infty}(\lambda_j)}, \quad b_j = \frac{b_{nj}}{L_{n+1,\infty}(\lambda_j)}.$$

Отсюда получаем искомые формулы (5).

С помощью (5) агрегат (3) принимает вид:

$$N_{n+1,\,\infty}(y) = \sum_{j=1}^{n} [a_j P_{\nu_j}(z) + b_j Q_{\nu_j}(z)]\, L_{n+1,\,\infty}(\lambda_j). \tag{6}$$

Оценим коэффициенты $a_j$ и $b_j$. Для этого на левую и правую части формулы (6) подействуем оператором $N_{1,\,n-1}$; мы получим:

$$N_n(y) = [a_n P_{\nu_n}(z) + b_n Q_{\nu_n}(z)]\, L_n(\lambda_n), \tag{7}$$

где

$$L_n(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right)$$

и $N_n$ — оператор, порожденный функцией $L_n(z)$. Продифференцируем равенство (7):

$$\frac{d}{dz} N_n(y) = [a_n P'_{\nu_n}(z) + b_n Q'_{\nu_n}(z)]\, L_n(\lambda_n). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что функции $L_n(z)$ удовлетворяют условиям 1) и 2) замечания из § 5. Поэтому, на основании свойства 4) операторов, в достаточно малой окрестности $G_0$ точки $a$

$$|N_n(y)| < A, \quad \left|\frac{d}{dz} N_n(y)\right| < A, \tag{9}$$

где $A$ — постоянная. Заметим еще, что так как

$$\sqrt{|\lambda_{n+1}|} - \sqrt{|\lambda_n|} \geqslant h > 0,$$

то [см. ([8]), в конце note II]

$$L_n(\lambda_n) = \exp[o(\nu_n)].$$

В силу этого, из равенств (7) и (8), имея в виду (9), находим:

$$a_n P_{\nu_n}(z) + b_n Q_{\nu_n}(z) = \exp[o(\nu_n)], \quad a_n P'_{\nu_n}(z) + b_n Q'_{\nu_n}(z) = \exp[o(\nu_n)].$$

Из этой системы, воспользовавшись для $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ оценками (7) и (8) из § 4, получим [см. ([1]), стр. 230] искомые оценки:

$$|a_n| < \frac{\exp[o(\nu_n)]}{|z^*|^{\nu_n}}, \quad |b_n| < |z^*|^{\nu_n} \exp[o(\nu_n)], \tag{10}$$

где $z^* = z + \sqrt{z^2 - 1}$ — образ точки $z$ при преобразовании внешности отрезка $[-1, +1]$ на внешность единичного круга ($z$ — любая точка из окрестности $G_0$ точки $a$).

На основании оценок (10) заключаем, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j P_{\nu_j}(z) \tag{11}$$

сходится (равномерно) внутри некоторого эллипса $\gamma_1$ с фокусами в $\pm 1$, причем точка $a$ лежит внутри $\gamma_1$, а ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j Q_{\nu_j}(z) \tag{12}$$

сходится вне некоторого эллипса $\gamma_2$ с фокусами в $\pm 1$, причем точка $a$ лежит вне $\gamma_2$. Ряды (11) и (12) одновременно сходятся в кольце между эллипсами $\gamma_1$ и $\gamma_2$. Покажем, что

$$y(z) = \sum_{j=1}^{\infty} [a_j P_{\nu_j}(z) + b_j Q_{\nu_j}(z)]. \tag{13}$$

В самом деле, обозначив правую часть (13) через $f(z)$, запишем:

$$N_{n+1,\infty}(f) = \sum_{j=1}^{n} [a_j P_{\nu_j}(z) + b_j Q_{\nu_j}(z)]\, L_{n+1,\infty}(\lambda_j).$$

Следовательно, имея в виду формулу (6), получаем:

$$N_{n+1,\infty}(f) = N_{n+1,\infty}(y).$$

Устремив здесь $n$ к $\infty$, в пределе будем иметь:

$$f(z) = y(z),$$

т. е. равенство (13) установлено.

Таким образом, нами доказана, следующая

ТЕОРЕМА 2. *Решение $y(z)$ уравнения $N(y) = 0$ есть сумма решения* (11), *регулярного внутри эллипса $\gamma_1$ (с фокусами в $\pm 1$), и решения* (12), *регулярного вне эллипса $\gamma_2$ (также с фокусами в $\pm 1$); следовательно, решение $y(z)$ регулярно в кольце между $\gamma_1$ и $\gamma_2$.*

Легко убедиться, что на каждой замкнутой дуге эллипса $\gamma_1$ или $\gamma_2$, которая при отображении

$$t = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \tag{14}$$

переходит в вертикальный отрезок длиной $2\pi\tau$, у решения $y(z)$ есть по крайней мере одна особая точка.

Предположим, что $y(z)$ — решение уравнения (2) — регулярно и ограничено в криволинейном полуканале $S$, который при отображении (14) переходит в криволинейную полуполосу $S^*$ шириной (в вертикальном направлении) $2\delta > 2\pi\tau$, простирающуюся неограниченно слева направо (точка $z$ при этом удаляется в бесконечность, а полуканал $S$ асимптотически приближается к криволинейному углу раствора $2\delta$).

Покажем, что в этих условиях все $a_j = 0$ и $y(z)$ представляется рядом (12).

Пусть $\Gamma^*$ — средняя линия полуполосы $S^*$, а $\Gamma$ — соответствующая линия полуканала $S$. Пусть, далее, $C_t^*$ — граница прямоугольника постоянных размеров (его стороны параллельны координатным осям) с центром в точке $t \in \Gamma^*$, обладающего тем свойством, что длина его вертикальной стороны больше $2\pi\tau$ и при движении центра $t$ вдоль $\Gamma^*$ он не выходит

из полуполосы $S^*$. В силу отображения (14), контуру $C_t^*$ в плоскости $t$ соответствует контур $C_z$ в плоскости $z$. Контур $C_z$ содержится в $S$, а точка $z$ лежит на линии $\Gamma$. На основании (7) имеем:

$$[a_n P_{\nu_n}(z) + b_n Q_{\nu_n}(z)] L_n(\lambda_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z} y(\xi) N_n\left(\frac{1}{\xi - z}\right) d\xi. \tag{15}$$

На контуре $C_z$ функция $N_n\left(\frac{1}{\xi - z}\right)$ как функция $\xi$ ограничена (см. замечание в конце § 4):

$$\left| N_n\left(\frac{1}{\xi - z}\right)\right| < A.$$

По условию, решение $y(\xi)$ ограничено в полуканале $S$, в частности оно ограничено на контуре $C_z$, каково бы ни было $z \in \Gamma$. Следовательно, из равенства (15) выводим:

$$|[a_n P_{\nu_n}(z) + b_n Q_{\nu_n}(z)] L_n(\lambda_n)| < B = \text{const}, \quad z \in \Gamma.$$

Устремив здесь $z$ вдоль $\Gamma$ к $\infty$ и заметив, что при этом $P_{\nu_n}(z) \to \infty$, $Q_{\nu_n}(z) \to 0$, в пределе получим:

$$a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Итак, нами получена

ТЕОРЕМА 3. *Если решение $y(z)$ уравнения* (2) *регулярно и ограничено в полуканале $S$, то*

$$y(z) = \sum_1^\infty b_j Q_{\nu_j}(z).$$

## § 7. Свойства последовательностей линейных агрегатов

В этом параграфе мы изучим некоторые свойства последовательности

$$f_m(z) = \sum_{j=1}^{p_m} [a_{mj} P_{\nu_j}(z) + b_{mj} Q_{\nu_j}(z)] \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

относительно которой известно только то, что она равномерно сходится в некоторой области $G$, содержащей дугу эллипса $l_a$ (как и прежде, считаем $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{k}{\nu_k} = \tau$).

ТЕОРЕМА 4. *Если последовательность* (1) *равномерно сходится в области $G$, содержащей дугу эллипса $l_a$, то она равномерно сходится внутри некоторого кольца, ограниченного эллипсами $\gamma_1$ и $\gamma_2$ с фокусами в точках $\pm 1$.*

Для доказательства подействуем на левую и правую части равенства (1) оператором $N_n$ (введенным в § 6); тогда в некоторой окрестности $G_0$ точки $a$ получим:

$$[a_{mn} P_{\nu_n}(z) + b_{mn} Q_{\nu_n}(z)] L_n(\lambda_n) = N_n(f_m). \tag{2}$$

Присоединим к этому равенству очевидное равенство

$$[a_{mn} P'_{\nu_n}(z) + b_{mn} Q'_{\nu_n}(z)] L_n(\lambda_n) = \frac{d}{dz} N_n(f_m). \tag{3}$$

Правые части в соотношениях (2) и (3) в окрестности $G_0$ ограничены:

$$|N_n(f_m)| < A, \quad \left|\frac{d}{dz} N_n(f_m)\right| < A$$

($A$ не зависит ни от $m$, ни от $n$), поскольку последовательность $\{f_m(z)\}$ ограничена внутри области $G$, а последовательность $\{N_n(y)\}$, как мы видели в предыдущем параграфе, ограничена в достаточно малой окрестности точки $a$, если функция $y(z)$ ограничена в области $G$. Поэтому (подобно тому, как это мы делали в § 6) из системы равенств (2) и (3) можно получить оценки:

$$|a_{mn}| < \frac{\exp[o(\nu_n)]}{|z^*|^{\nu_n}}, \quad |b_{mn}| < |z^*|^{\nu_n} \exp[o(\nu_n)] \tag{4}$$

(правые части не зависят от $m$), аналогичные оценкам (10) из § 6. В них $z^*$ — образ точки $z$ при преобразовании внешности отрезка $[-1, +1]$ на внешность единичного круга, причем $z$ — любая точка из окрестности $G_0$ точки $a$.

Из оценок (4), если учесть оценки (7) и (8) § 4 для $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$, следует, что последовательность агрегатов (1) ограничена внутри некоторого кольца (содержащего точку $a$), ограниченного эллипсами $\gamma_1$ и $\gamma_2$ с фокусами в точках $\pm 1$. Так как последовательность (1), по условию, равномерно сходится внутри области $G$, то, следовательно, она равномерно сходится внутри указанного кольца. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *В условиях предыдущей теоремы последовательность*

$$\varphi_m(z) = \sum_{j=1}^{p_m} a_{mj} P_{\nu_j}(z) \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

*равномерно сходится внутри эллипса $\gamma_1$ (точка $a$ лежит внутри $\gamma_1$), а последовательность*

$$\psi_m(z) = \sum_{j=1}^{p_m} b_{mj} Q_{\nu_j}(z) \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

*равномерно сходится вне эллипса $\gamma_2$ (точка $a$ лежит вне $\gamma_2$).*

Чтобы доказать эту теорему, обратимся к равенству (2). Его правая часть при $m \to \infty$ имеет предел. Тогда этим свойством должна обладать и левая часть. Следовательно, существуют пределы

$$\lim_{m\to\infty} a_{mn} = a_n, \quad \lim_{m\to\infty} b_{mn} = b_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Числа $a_n$ и $b_n$, очевидно, удовлетворяют неравенствам вида (4), ибо их правые части не зависят от $m$. На основании этих неравенств заключаем, что ряд

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j P_{\nu_j}(z)$$

равномерно сходится внутри некоторого эллипса $\gamma_1$ с фокусами в $\pm 1$ (точка $a$ лежит внутри $\gamma_1$), а ряд

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j Q_{\nu_j}(z)$$

— вне некоторого эллипса $\gamma_2$ также с фокусами в $\pm 1$ (точка $a$ лежит вне $\gamma_2$). Рассмотрим разности

$$\varphi_m(z) - \varphi(z), \quad \psi_m(z) - \psi(z).$$

Из оценок (4) и соотношений (7) выводим, что первая разность равномерно стремится к нулю внутри $\gamma_1$, а вторая — вне $\gamma_2$. Это и доказывает теорему.

## § 8. О полноте системы многочленов Якоби на кривых в комплексной плоскости

Пусть $L$ — неограниченная кривая с конечным числом ветвей, удаляющихся в бесконечность ($L$ может состоять из нескольких (конечного числа) связных кусков), не имеющая петель и разбивающая плоскость на конечное число односвязных бесконечных областей $G_1, G_2, \ldots, G_m$. Пусть $L$ спрямляема в любой конечной части плоскости, причем если $s(z)$ — длина дуги связного куска, отсчитываемая от какой-нибудь точки куска до его точки $z$ (предполагаем, что при больших $|z|$ функция $s(z)$ есть однозначная функция от $|z|$), то $ds(z) \leqslant M d|z|$, где $M$ — постоянная. Допустим, далее, что на $L$ задана непрерывная вещественная функция $p(z)$ такая, что при больших $|z|$

$$p(z) \geqslant p_0(|z|) = p_0(a) + \int_a^{|z|} \frac{\omega(t)}{t}\, dt,$$

где $\omega(t) \geqslant 0$ и $\omega(t)$ монотонно стремится к бесконечности при $t \to +\infty$. Предположим, наконец, что каждая область $G_i$ содержит внутри себя угол $\Delta_i$ раствора $\frac{\pi}{\alpha_i}$, $\frac{1}{2} < \alpha_i < \infty$ (с вершиной не обязательно в начале).

М. М. Джрбашян установил (формулировка нижеследующей теоремы приведена в его работе ([9]), а полное доказательство в работе ([10])), что если в этих условиях

$$\int^{\infty} \frac{p_0(r)\, dr}{r^{1+\omega}} = \infty, \quad \omega = \max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m), \tag{1}$$

то на $L$ в классе $L_2[p(z)]$ функций $f(z)$ таких, что

$$\int_L e^{-p(z)} |f(z)|^2\, ds < \infty, \tag{2}$$

система полиномов является полной в том смысле, что

$$\inf_{\{Q\}} \int_L e^{-p(z)} |f(z) - Q(z)|^2\, ds = 0, \tag{3}$$

где $Q(z)$ — всевозможные полиномы.

Эта теорема в работе ([5]) была обобщена на тот случай, когда в условии (3) $Q(z)$ — не произвольный многочлен, а произвольная конечная линейная комбинация функций из системы $\{z^{\lambda_n}\}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — целые положительные числа. Был установлен следующий результат.

Пусть $\{\mu_n\} = \{n\} - \{\lambda_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu_n} = \tau.$$

Пусть, далее, каждый из углов $\Delta_i$ (предположения относительно кривой $L$ и функции $p(z)$ остаются прежними) имеет раствор $\frac{\pi}{\alpha_i} > 2\pi\tau$, а один из углов, например $\Delta_1$, имеет вершину в начале (в окрестности начала угол $\Delta_1$ может быть криволинейным, лишь бы его раствор был больше $2\pi\tau$). Если выполняется условие (1), где

$$\omega > \max(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m), \quad \frac{1}{\beta_i} = \frac{1}{\alpha_i} - 2\tau,$$

то система $\{z^{\lambda_n}\}$ на кривой $L$ в классе $L_2[p(z)]$ полна в смысле (3).

Метод доказательства этого результата представляет собой объединение метода М. М. Джрбашяна интегрального преобразования Коши [см. ([10])] и метода использования дифференциальных уравнений бесконечного порядка.

Следует сказать, что М. М. Джрбашян и И. О. Хачатрян в работе ([11]) уже рассматривали вопрос о полноте системы $\{z^{\lambda_n}\}$, причем у них $\lambda_n$ — не обязательно целые. Однако у них $L$ — не произвольная кривая из того класса, о котором говорилось выше, а пара лучей, выходящих из начала. Кроме того, метод исследования в названной работе иной.

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос о полноте системы многочленов Якоби $\{P_{\mu_n}^{(\alpha,\beta)}(z)\}$ на кривой $L$ в комплексной плоскости. Метод исследования аналогичен методу, примененному в работе ([5]). Мы применяем метод М. М. Джрбашяна интегрального преобразования Коши и используем уравнение $N(y) = 0$, о котором шла речь в предыдущих параграфах, и свойства его решений.

Пусть, как и выше, $L$ — неограниченная кривая с конечным числом ветвей, удаляющихся в бесконечность, не имеющая петель и разбивающая плоскость на конечное число односвязных областей $G_1, G_2, \ldots, G_m$. В отличие от предыдущего дополнительно предположим, что в состав $L$ не входит отрезок $[-1, +1]$ и никакая часть этого отрезка вместе с $L$ не образует петель. Пусть $L$ спрямляема в любой конечной части плоскости, причем если $s(z)$ — длина дуги связного куска от какой-нибудь его точки до точки $z$, то (при больших $|z|$) $ds(z) \leqslant Md|z|$, где $M$ — постоянная. Допустим далее, что на $L$ задана непрерывная вещественная функция $p(z)$ такая, что при больших $|z|$

$$p(z) \geqslant p_0(|z|) = p_0(a) + \int_a^{|z|} \frac{\omega(t)}{t}\,dt,$$

где $\omega(t) \geqslant 0$ и $\omega(t) \uparrow +\infty$. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\{\nu_n\} = \{n\} - \{\mu_n\}$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\nu_n} = \tau. \tag{4}$$

*Пусть, далее, каждая область $G_i$ содержит угол $\Delta_i$ раствора $\frac{\pi}{\alpha_i} > 2\pi\tau$, а одна из областей, например область $G_1$, содержит в себе область $E$, простирающуюся до отрезка $[-1, +1]$, которая при конформном отображении внешности отрезка $[-1, +1]$ на внешность единичного круга переходит в обрезанный угол (вообще криволинейный) раствора больше $2\pi\tau$, ограниченный дугой единичного круга и расположенными вне этого круга частями двух криволинейных лучей, выходящих из начала и образующих угол раствора больше $2\pi\tau$. Будем считать, что вдали от начала область $E$ совпадает с углом $\Delta_1$. Тогда если выполняется условие*

$$\int^{\infty} \frac{p_0(r)\,dr}{r^{1+\omega}} = \infty, \tag{5}$$

*где*

$$\omega > \max(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m), \qquad \frac{1}{\beta_i} = \frac{1}{\alpha_i} - 2\tau,$$

*то система полиномов Якоби $\{P_{\mu_n}^{(\alpha,\beta)}(z)\}$ $(-1 < \alpha,\ \beta < +1)$ в классе функций $f(z)$ со свойством (2) будет полна на $L$ в смысле (3), где $Q(z)$ — всевозможные конечные линейные комбинации полиномов Якоби из рассматриваемой системы.*

## § 9. Доказательство теоремы

Для доказательства полноты искомой системы полиномов Якоби на $L$ в классе (2) в смысле (3) (см. предыдущий параграф) надо показать, что из условий

$$\int_L e^{-p(z)}\overline{f(z)}\,P_{\mu_n}^{(\alpha,\beta)}(z)\,ds = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где $f(z)$ принадлежит классу (2) § 8 (функция $\overline{f(z)}$ также ему принадлежит), следует, что

$$f(z) \equiv 0$$

(равна нулю почти всюду).

Итак, пусть выполняются условия (1). Рассмотрим функцию (интегральное преобразование Коши)

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{-p(z)}\,\overline{f(z)}}{z-w}\,ds. \tag{2}$$

В каждой области $G_j$ она представляет собой некоторую аналитическую функцию $F_j(w)$. Мы имеем [см. ([7]), стр. 79]:

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu P_\nu(z)\,Q_\nu^*(w) + R_n^*(z, w), \tag{3}$$

где $h_\nu$ — некоторые постоянные, $P_\nu(z)$ — полином Якоби $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(z)$ (в дальнейшем будем для него употреблять именно эту краткую запись),

$$Q_\nu^*(w) = (w-1)^\alpha (w+1)^\beta Q_\nu(w),$$

$Q_\nu(w)$ — решение дифференциального уравнения полиномов Якоби, линейно не зависимое от $P_\nu(z)$,

$$R_n^*(z, w) =$$

$$= \frac{2^{-\alpha-\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \frac{P_{n+1}(z)Q_n^*(w) - P_n(z)Q_{n+1}^*(w)}{z-w}.$$

Функции $Q_\nu^*(w)$ имеют особые точки в $\pm 1$, однако они однозначны вне отрезка $[-1, +1]$.

В силу (3), принимая во внимание условия (1), получим для функции (2) представление

$$F(w) = \sum_{\nu_k \leqslant n} a_k Q_{\nu_k}^*(w) + r_n^*(w),$$

где $\{\nu_k\} = \{k\} - \{\mu_k\}$ и

$$r_n^*(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{-p(z)} \overline{f(z)} R_n^*(z, w)\, ds.$$

Для дальнейшего вместо функции $F_j(w)$ удобнее рассмотреть в области $G_j$ функцию

$$\Phi_j(w) = (w-1)^{-\alpha}(w+1)^{-\beta} F_j(w) =$$
$$= \sum_{\nu_k \leqslant n} a_k Q_{\nu_k}(w) + r_n(w). \tag{4}$$

Здесь

$$r_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{-p(z)} \overline{f(z)} R_n(z, w)\, ds, \tag{5}$$

а

$$R_n(z, w) =$$

$$= \frac{2^{-\alpha-\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+2} \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \frac{P_{n+1}(z)Q_n(w) - P_n(z)Q_{n+1}(w)}{z-w}. \tag{6}$$

Нам необходимо в соотношении (4) освободиться от первого слагаемого в правой части. С этой целью возьмем оператор $N(y)$, порожденный характеристической функцией

$$L(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right), \quad \lambda_j = -\nu_j(\nu_j + \alpha + \beta + 1),$$

и подействуем им на левую и правую части указанного соотношения. Так как

$$N[Q_{\nu_k}(w)] = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

то

$$\varphi_j(w) = N[\Phi_j(w)] = N[r_n(w)]. \tag{7}$$

Выясним, где функция $\varphi_j(w)$ регулярна. Пусть $K_j$ — угол, внутренний к углу $\Delta_j$ (у $K_j$ и $\Delta_j$ общая биссектриса), раствор которого меньше

раствора угла $\Delta_j$ на $2\pi\tau+\varepsilon_1$, где положительное число $\varepsilon_1$ выберем следующим образом. В условии теоремы величина $\omega$ равна

$$\max(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)+\varepsilon_0,$$

где $\frac{1}{\beta_j}=\frac{1}{\alpha_i}-2\tau$ и $\varepsilon_0$ — некоторое положительное число. Раствор угла $K_j$ равен

$$\frac{\pi}{\alpha_j}-2\pi\tau-\varepsilon_1=\frac{\pi}{\beta_j}-\varepsilon_1=\frac{\pi}{\gamma_j}.$$

Выберем $\varepsilon_1$ столь малым, чтобы выполнялось условие

$$\max(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)<\omega. \tag{8}$$

При отображении

$$t=\ln(w+\sqrt{w^2-1}) \tag{9}$$

при больших $|w|$, очевидно, $t\approx\ln 2w$) угол $\Delta_j$ переходит в область $\Delta_j^*$ плоскости $t$, которая при больших $\operatorname{Re}(t)$ асимптотически близка к горизонтальной полосе шириной $\frac{\pi}{\alpha_j}$, а угол $K_j$ — в область $K_j^*$, близкую в упомянутом смысле к горизонтальной полосе шириной $\frac{\pi}{\gamma_j}$. Точки области $K_j^*$ при больших $\operatorname{Re}(t)$ отстоят от границы области $\Delta_j^*$ на расстояние, большее $\pi\tau+\varepsilon_2$, $\varepsilon_2<\frac{\varepsilon_1}{2}$. Поэтому оператором $N$ законно действовать на функцию $\Phi_j(w)$ в угле $K_j$ при всех достаточно больших $|w|$. Не нарушая общности рассуждений (в случае надобности с самого начала выбираем угол $K_j$ расположенным далеко от точки 0), можно считать, что оператором $N$ законно действовать на $\Phi_j(w)$ во всем угле $K_j$. В силу сказанного, функция $\varphi_j(w)$ регулярна в угле $K_j$.

О функции $\varphi_1(w)$ можно сказать большее. По условию теоремы область $G_1$ содержит в себе область $E$, которая при отображении (9) перейдет в криволинейную полуполосу $E^*$ шириной (в вертикальном направлении) $2\pi\tau+\delta$, где $\delta>0$. Обозначим через $E_1^*$ полуполосу, внутреннюю к $E^*$ (у них общая средняя линия) шириной $\frac{\delta}{2}$. Точки этой новой полуполосы отстоят в вертикальном направлении от границы полуполосы $E^*$ на расстояние, большее $\pi\tau+\frac{\delta}{4}$. Можно утверждать, что функция $\varphi_1(w)$ регулярна в области $E_1$, которая соответствует области $E_1^*$ в силу соответствия (9). Существенно отметить, что область $E_1$ простирается с одной стороны до отрезка [—1,1].

Найдем оценку модуля функции $\varphi_j(w)$ в угле $K_j$. Пусть $C_t^*$ — граница прямоугольника фиксированных размеров (со сторонами, параллельными осям координат) с центром в точке $t$, у которого вертикальная сторона имеет длину, равную $2\pi\tau+\varepsilon_2$ (число $\varepsilon_2$ введено выше). Пусть $C_w$ — контур, соответствующий $C_t^*$ при отображении (9). Он образован дугами двух эллипсов с фокусами в $\pm1$ (эти дуги соответствуют вертикальным сторонам контура $C_t^*$) и дугами двух гипербол (эти дуги соответствуют горизонтальным сторонам контура $C_t^*$). Когда $w$ велико по модулю, дуги эллипсов близки к дугам окружностей с центром в начале, причем

если их радиусы $\rho_1$ и $\rho_2$ ($\rho_2 > \rho_1$), то

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} < q = \text{const}. \tag{10}$$

Дуги гипербол при больших $|w|$ близки к отрезкам лучей, выходящих из начала. Согласно (7), имеем:

$$\varphi_j(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_w} r_n(\xi)\, N_w\left(\frac{1}{\xi - w}\right) d\xi, \quad w \in K_j.$$

На контуре $C_w$ (см. замечание в конце § 4)

$$\left| N_w\left(\frac{1}{\xi - w}\right)\right| < A,$$

где $A$ — постоянная, не зависящая от $w$. Поэтому (учитывая, что у контура $C_w$ длина есть $O(|w|)$), получим:

$$|\varphi_j(w)| < O(|w|) \max_{\xi \in C_w} |r_n(\xi)|, \quad w \in K_j. \tag{11}$$

Оценим модуль функции $r_n(\xi)$. Для этого, имея в виду формулу (5), оценим сперва выражение (6) для $w \in \Delta_j$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что для точек из $\Delta_j$ выполняется условие $|w| > 2$.

Имеем (см. формулу (8) § 4):

$$|Q_\nu(w)| = [1 + o(1)]^\nu\, |w^*|^{-\nu}, \quad w^* = w + \sqrt{w^2 - 1}, \quad |w| > 2.$$

В силу того, что при таких $w$ отношение $\left|\frac{w}{w^*}\right|$ ограничено, находим:

$$|Q_\nu(w)| < \frac{q^\nu}{|w|^\nu}, \quad q = \text{const}. \tag{12}$$

На основании этого, учитывая, что числовой коэффициент в формуле (6) есть $O(n)$, из формулы (6) получим:

$$|R_n(z, w)| < \frac{p^n}{|w|^n}\,[\,|P_n(w)| + |P_{n+1}(z)|, \quad w \in \Delta_j.$$

Мы здесь считали (это не ограничивает общности рассуждений), что точки угла $\Delta_j$ отстоят от границы области $G_j$ на расстояние, большее единицы, в силу чего $|z - w| > 1$.

Принимая во внимание последнюю оценку, из соотношения (5) находим:

$$|r_n(w)| < \frac{p^n}{|w|^n}\int\limits_L e^{-p(z)}\, |\overline{f(z)}|\, [\,|P_n(z)| + |P_{n+1}(z)|\,]\, ds.$$

Представляя подынтегральную функцию в виде произведения двух множителей:

$$u = e^{-\frac{1}{2}p(z)}\, |\overline{f(z)}| \text{ и } v = e^{-\frac{1}{2}p(z)}\, [\,|P_n(z)| + |P_{n+1}(z)|\,],$$

применяя неравенство Буняковского и учитывая условие (2) § 8, по-

лучим:

$$|r_n(w)| < c\frac{p^n}{|w|^n}\left\{\int\limits_L e^{-p(z)}\left[|P_n(z)| + |P_{n+1}(z)|\right]^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad w\in\Delta_j. \qquad (13)$$

Рассмотрим интеграл, заключенный в фигурных скобках. Обозначим его через $I_n$. По свойству контура $L$, при больших по модулю $z\in L$ имеем:

$$ds < Md|z| = Mdr, \quad |z| = r > r_0$$

(считаем, что $r_0 > 2$). Кроме того, при $|z| > 2$ (см. формулу (7) § 4):

$$|P_\nu(z)| = [1+o(1)]^\nu |z^*|^\nu, \quad z^* = z+\sqrt{z^2-1},$$

или, так как отношение $\left|\frac{z^*}{z}\right|$ ограничено,

$$|P_\nu(z)| < \delta^\nu |z|^\nu, \quad |z| > 2.$$

Учтем еще, что, по условию теоремы, $p(z)\geqslant p_0(r)$. На основании всего этого,

$$I_n < \delta^{2n}\left\{c_1 r_0^{2n+2} + c_2\int\limits_{r_0}^{+\infty} e^{-p_0(r)}r^{2n+2}dr\right\}$$

или, поскольку

$$\int\limits_{r_0}^{+\infty} e^{-p_0(r)}r^{2n+2}dr > \int\limits_{r_0}^{r_0+1} e^{-p_0(r)}r^{2n+2}dr > c_3 r_0^{2n+2},$$

$$I_n < c_4\delta^{2n}m_{2n+2},$$

где

$$m_k = \int\limits_{r_0}^{+\infty} e^{-p_0(r)}r^k dr. \qquad (14)$$

С помощью найденной оценки получаем из (13):

$$|r_n(w)| < \frac{\delta_1^n}{|w|^n}\sqrt{m_{2n+2}}, \quad w\in\Delta_j. \qquad (15)$$

Вернемся теперь к неравенству (11). Отметим, что когда $w\in K_j$, контур $C_w$ не выходит из угла $\Delta_j$. Кроме того, точки $\xi$ контура $C_w$ удовлетворяют условию (см. неравенство (10))

$$\alpha_1|\xi| < |w| < \alpha_2|\xi|.$$

В силу этого, из неравенства (11), на основании (15), находим следующую оценку для функции $\varphi_j(w)$:

$$|\varphi_j(w)| < \gamma^{n+1}\frac{\sqrt{m_{2n+2}}}{|w|^{n-1}} = |w|^2 : \frac{\left(\frac{|w|}{\gamma}\right)^{n+1}}{\sqrt{m_{2n+2}}}, \quad w\in K_j.$$

Эта оценка верна при любом $n$ (левая часть не зависит от $n$). Поэтому если положить

$$T(r) = \max_{n\geqslant 1}\frac{r^n}{\sqrt{m_{2n}}},$$

то

$$\left|\frac{\varphi_j(w)}{w^2}\right| < \frac{1}{T\left(\frac{|w|}{\gamma}\right)}, \quad w \in K_j. \tag{16}$$

М. М. Джрбашян показал [см. ([10]), стр. 358, основная предварительная теорема], что если

$$p_0(r) = p_0(a) + \int_a^r \frac{\omega(t)}{t}\,dt, \quad \omega(t) \uparrow +\infty,$$

то функция $T(r)$ (числа $m_k$, посредством которых она определяется, имеют вид (14)) при больших $r$ удовлетворяет условию

$$\ln T(r) > \sigma p_0(r),$$

где $\sigma$ — некоторая положительная постоянная. На основании этого результата, из (16) получаем искомую оценку:

$$\left|\frac{\varphi_j(w)}{w^2}\right| < \exp\left\{-\sigma p_0\left(\frac{|w|}{\gamma}\right)\right\}, \quad w \in K_j. \tag{17}$$

Вспомним, что угол $K_j$ имеет раствор $\frac{\pi}{\gamma_j}$, а функция $p_0(r)$ удовлетворяет соотношению (5) из § 8:

$$\int \frac{p_0(r)\,dr}{r^{1+\omega}} = \infty,$$

причем, согласно (8), $\omega > \gamma_j$. В этих условиях характеризуемое неравенством (17) столь быстрое убывание функции $\varphi_j(w)$ возможно только тогда (см. рассуждение на стр. 363 в работе ([10])), когда $\varphi_j(w) = 0$.

Согласно (7), имеем:

$$N[\Phi_j(w)] = 0, \quad w \in K_j. \tag{18}$$

В случае $j = 1$ уравнение (18) имеет место не только в угле $K_1$, но в большей области $E_1$, простирающейся до отрезка $[-1, +1]$. Из представления (4) при учете оценок (12) и (13) следует, что функция $\Phi_j(w)$ ограничена в угле $\Delta_j$. Угол $\Delta_j$ имеет раствор больше $2\pi\tau$. Поэтому, согласно теореме 3, функция $\Phi_j(w)$ как решение уравнения (18) регулярна вне некоторого эллипса с фокусами в точках $\pm 1$ и изображается там рядом

$$\Phi_j(w) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j Q_{\nu_j}(w).$$

Функция $\Phi_1(w)$, поскольку она регулярна в области $E$, простирающейся до отрезка $[-1, +1]$ и имеющей соответствующие размеры (о чем говорится в условии теоремы), регулярна всюду вне отрезка $[-1, +1]$ (см. теорему 2).

Мы имеем:

$$F_j(w) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j Q^*_{\nu_j}(w).$$

Учитывая оценку (12), а также то, что функции $Q^*_{\nu_j}(w)$ однозначны вне отрезка $[-1, +1]$, заключаем, что бесконечно удаленная точка является для функции $F_j(w)$ либо полюсом, либо регулярной точкой. Поэтому

при больших $|w|$

$$F_j(w) \approx \frac{\text{const}}{|w|^p}. \tag{19}$$

Докажем, что

$$F_1(w) = F_2(w) = \ldots = F_m(w).$$

Пусть $\mu(z)$ — угол, образуемый касательной к $L$ в точке $z$ с положительным направлением действительной оси. Согласно (2),

$$F_j(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{-p(z)}\,\overline{f(z)}\,e^{-i\mu(z)}\,dz}{z-w}.$$

Если $\Gamma$ — кусок $L$, к одной стороне которого примыкает область $G_k$, а к другой стороне — область $G_s$, то, по известному свойству интеграла типа Коши, почти всюду на $\Gamma$

$$e^{-p(z)}\overline{f(z)}\,e^{-i\mu(z)} = \pm[F_k(z) - F_s(z)],$$

откуда следует:

$$\overline{f(z)} = \pm[F_k(z) - F_s(z)]\,e^{i\mu(z)}e^{p(z)}. \tag{20}$$

Если бы $F_k(z) - F_s(z) \not\equiv 0$, то, согласно (19), при больших $|z|$

$$F_k(z) - F_s(z) \approx \frac{\text{const}}{|z|^p}$$

и тогда функция $f(z)$, имея вид (20), не удовлетворяла бы условию

$$\int\limits_L |f(z)|^2 e^{-p(z)}\,ds < \infty.$$

Значит,

$$F_1(w) = F_2(w) = \ldots = F_m(z).$$

Функция $F_1(w)$ регулярна всюду вне отрезка $[-1, +1]$. Вне этого отрезка регулярны и совпадают между собой все функции $F_j(w)$. В силу (20), отсюда выводим, что почти всюду на $L$

$$f(z) \equiv 0.$$

Это полностью доказывает теорему.

В заключение остановимся на вопросе, случайным или неслучайным является требование, чтобы в состав кривой $L$ не входил отрезок $[-1, +1]$. Утверждаем, что в состав $L$ отрезок $[-1, +1]$ не включен по существу. Рассмотрим, например, случай, когда аппроксимация производится полиномами Лежандра ($\alpha = \beta = 0$).

Известно, что полиномы Лежандра ортогональны на $[-1, +1]$:

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

Исходя из этого, покажем, что если отрезок $[-1, +1]$ входит в $L$, то из равенств (6) не следует, что $f(z) \equiv 0$. Построим функцию $f(z)$ следующим образом. Пусть $\overline{f(z)}$ равна нулю всюду на $L$ вне отрезка $[-1, +1]$, а на этом отрезке пусть она равна

$$P_\nu(z)\,e^{p(z)}, \quad \nu \notin \{\mu_n\}.$$

Тогда левая часть равенства (6) примет вид

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu(x)\, P_{\mu_n}(x)\, dx;$$

она равна нулю, хотя $f(z) \not\equiv 0$. Это и доказывает наше утверждение.

Поступило
11. X. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Леонтьев А. Ф., О последовательностях линейных агрегатов, образованных из решений дифференциальных уравнений, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 22 (1958), 201—242.

[2] Леонтьев А. Ф., Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, т. 39, 1951.

[3] Леонтьев А. Ф., К вопросу о последовательностях линейных агрегатов, образованных из решений дифференциальных уравнений, Матем. сборн., 48 (90): 2 (1959), 129—136.

[4] Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.

[5] Леонтьев А. Ф., О полноте системы $\{z^{\lambda_k}\}$ на кривых в комплексной плоскости, Доклады Ак. наук СССР, 121, № 5 (1958), 797—800.

[6] Klimczak W. I., Differential operators of infinite order, Duke Math. J., 20, № 2 (1953), 295—319.

[7] Szegö G., Orthogonal polynomials, Am. Math. Soc., Colloquim publications, XXIII, 1939.

[8] Bernstein V., Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.

[9] Джрбашян М. М., Метрические признаки полноты полиномов при взвешенном приближении на бесконечных кривых, Доклады Ак. наук СССР, 98, № 5 (1954), 713—716.

[10] Джрбашян М. М., Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Матем. сборн., 36(78): 3 (1955), 353—440.

[11] Джрбашян М. М. и Хачатрян И. О., О полноте системы функций $\{z^{\lambda_n}\}$ в комплексной области при взвешенно-квадратической аппроксимации, Доклады Ак. наук СССР, 110, № 6 (1956), 914—917.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 595—612

Ю. А. БРУДНЫЙ

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ВНЕШНОСТИ ОТРЕЗКА И ПОЛУОСИ

(*Представлено академиком* И. Н. Векуа)

Работа посвящена теории приближений функций с заданным модулем непрерывности при помощи целых функций конечной степени.

## § 1. Введение

Известная теорема Джексона утверждает, что если функция $f(x)$, заданная на $[-1,1]$, имеет там $r$ производных и $\omega_r(t)$ — модуль непрерывности $r$-й производной, то существует последовательность многочленов

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

удовлетворяющих неравенству

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^r}\,\omega_r\left(\frac{1}{n}\right); \quad x \in [-1,1], \tag{1}$$

где $C$ — постоянная, не зависящая от $x$ и $n$.

Таким образом, по заданным дифференциальным свойствам функции $f(x)$ можно судить о скорости ее приближения многочленами. Однако если пытаться по скорости приближения функции $f(x)$ многочленами определить ее дифференциальные свойства, то из неравенства (1) можно сделать вывод о дифференциальных свойствах $f(x)$ лишь внутри $[-1,1]$, но не на всем $[-1,1]$. Это связано с тем обстоятельством, что при использовании известного метода С. Н. Бернштейна для доказательства обратных теорем приходится опираться на следующую теорему.

*Если $P_n(x)$ — многочлен степени не выше $n$ и $|P_n(x)| \leqslant M$ на $[-1,1]$, то*

$$|P'_n(x)| \leqslant \min\left\{\frac{Mn}{\sqrt{1-x^2}},\ Mn^2\right\}. \tag{2}$$

Таким образом, точки $\pm 1$ (концы) и внутренние точки играют существенно различную роль в неравенстве (2), в то время как в неравенстве (1) все точки равноправны. Именно это обстоятельство и препятствует получению обратных теорем на всем отрезке $[-1, +1]$. Поэтому для того чтобы получить законченную теорию приближения функций многочленами на отрезке $[-1,1]$, необходимо заменить неравенство (1) более

точным, учитывающим различие концов и внутренних точек. Это было сделано А. Ф. Тиманом ([2]), получившим следующую теорему.

*Если функция* $f(x)$, *заданная на* $[-1,1]$, *имеет там* $r$-*ю производную, то существует константа* $C$, *не зависящая от* $x$ *и* $n$, *такая, что для любого* $n = 1, 2, \ldots$ *найдется обыкновенный многочлен* $P_n(x)$ *степени не выше* $n$, *удовлетворяющий при* $x \in [-1,1]$ *неравенству*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{|x|}{n}\right)^r \omega_r\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{|x|}{n^2}\right). \tag{3}$$

В дальнейшем А. Ф. Тиман получил обратные теоремы, решающие вопрос о дифференциальных свойствах $f(x)$ на всем $[-1,1]$, если $f(x)$ удовлетворяет на $[-1,1]$ неравенству (3) [см. ([2])]. Несколько раньше обратные теоремы были получены В. К. Дзядыком для частного случая $\omega_r(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ [см. ([4])]. Этим была построена законченная теория приближения многочленами на отрезке функций, принадлежащих классам $W^{(r)}H_\omega$.

Если теперь перейти к рассмотрению приближения целыми функциями функций, заданных на неограниченном совершенном множестве $E$ оси $x$, то здесь имеют место теоремы, подобные теореме Джексона (не учитывающие граничных точек множества $E$), и неравенства, подобные неравенству (2) [см. ([5])]. Поэтому и здесь для построения законченной теории необходимо получить усиление теоремы Джексона, подобное теореме А. Ф. Тимана.

В настоящей работе мы строим теорию приближения для случая, когда $E$ есть внешность отрезка $[-1,1]$ и полуось $(0, \infty)$ и когда приближаются функции из классов $W^r H_\omega$. В § 2 устанавливаются прямые теоремы для случая $E = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, в § 3 — некоторые неравенства, необходимые для получения обратных теорем, в § 4 — обратные теоремы для этого случая, наконец в § 5 — прямые и обратные теоремы для случая полуоси.

Выражаю глубокую благодарность А. Ф. Тиману за постановку задачи и внимание, которое он проявил к моей работе.

## § 2. Прямая теорема для случая внешности отрезка

При доказательстве прямой теоремы мы будем пользоваться некоторыми специальными ядрами * вида

$$K(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \varphi(v)\, e^{iuv}\, dv,$$

где функция $\varphi(v)$ обладает свойствами:

1) $\varphi(-v) = \varphi(v), \quad -1 \leqslant v \leqslant 1,$
2) $\varphi(0) = 1,$
3) $\varphi(1) = \varphi'(1) = \ldots = \varphi^{(p-1)}(1) = 0,$
4) $\varphi''(0) = \varphi^{(IV)}(0) = \ldots = \varphi^{(2q)}(0) = 0, \; 2q < p-2.$

Такое ядро назовем ядром вида $\{p, q\}$. Очевидно, $K(u)$ есть четная

* Идея применения этих ядер для доказательства теоремы А. Ф. Тимана принадлежит Н. И. Ахиезеру.

целая функция степени $\leqslant 1$ со свойствами:

1′) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(u)\,du = \varphi(0) = 1$, так как $\varphi^*(v) = \begin{cases} \varphi(v), & |v| \leqslant 1, \\ 0, & |v| > 1 \end{cases}$

есть преобразование Фурье $K(u)$.

2′) $K(u) = O\left(\frac{1}{1+|u|^p}\right)$ при $|u| \to \infty$. Действительно,

$$K(u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \varphi(v)\, e^{iuv}\, dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\varphi(v)\frac{e^{iuv}}{iu} - \varphi'(v)\frac{e^{iuv}}{(iu)^2} + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}\varphi^{(p-1)}(v)\, e^{iuv}}{(iu)^p}\right]_{-1}^{+1} +$$

$$+ \frac{(-1)^p}{2\pi(iu)^p}\int\limits_{-1}^{+1} \varphi^{(p)}(v) e^{iuv} dv = \frac{(-1)^p}{2\pi(iu)^p}\int\limits_{-1}^{+1}\varphi^{(p)}(v)\, e^{iuv}\, dv = O\left(\frac{1}{1+|u|^p}\right).$$

3′) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(u)\, u^m\, du = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, 2q+1)$. Так как $2q+1 \leqslant p-2$,

то все написанные интегралы сходятся. Мы имеем:

$$\frac{d^m}{dt^m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(u)\, e^{iut}\, du = (-i)^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(u)\, u^m\, du = \varphi^{(m)}(0) = 0$$

$$(m = 1, 2, \ldots, 2q+1),$$

так как функция $\varphi(v)$ четная и удовлетворяет условию 3).

Будем рассматривать на всей оси приближения с помощью ядер $K(u)$ вида

$$G_\sigma(f; u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{t}{\sigma}\right) K(t)\, dt.$$

Нетрудно видеть, что при $p \geqslant 2$ $G_\sigma(f; u)$ есть целая функция степени $\leqslant \sigma$, четная, когда четна функция $f(t)$.

Пусть $E$ обозначает множество $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ и пусть $f(x)$ имеет на $E$ $r$ равномерно непрерывных и ограниченных производных, причем модуль непрерывности $r$-й производной $\omega(f^{(r)}; t) \equiv \omega(t)$. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Каково бы ни было $\sigma > 0$, существует целая функция $G_\sigma(f; x)$ степени не выше $\sigma$ такая, что при $x \in E$*

$$|f(x) - G_\sigma(f; x)| \leqslant C_r\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right), \qquad (4)$$

*где $C_r$ не зависит от $x$ и $\sigma$.*

Доказательство. Двузначная функция $w = \sqrt{z^2-1}$ отображает множество $E$ комплексной плоскости $z$ на ось $-\infty < w < \infty$ комплексной плоскости $w$. Обратная функция $z = \sqrt{w^2+1}$ также двузначна. Поэтому начнем доказательство с того случая, когда $f(x)$ четна на $E$. В случае, если $z$ находится на оси $x$, будем писать $x$ вместо $z$ и $u$ вместо $w$. Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(u) = f\left(\sqrt{u^2+1}\right),$$

которая однозначна (так как $f(x)$ четна) и четна на оси. Тогда четной будет и целая функция

$$G_\sigma(\tilde{f}; u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(u + \frac{t}{\sigma}\right) K(t)\, dt.$$

Таким образом,

$$G_\sigma(\widetilde{f}; u) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i u^{2i}$$

и поэтому если вместо $u$ подставить $\sqrt{x^2-1}$, то функция $G_\sigma(f; x) = G_\sigma(\widetilde{f}, \sqrt{x^2-1})$ будет однозначной и целой функцией степени $\sigma$. Следовательно $(u=\sqrt{x^2-1})$,

$$|f(x) - G_\sigma(f; x)| = |\widetilde{f}(u) - G_\sigma(\widetilde{f}; u)| =$$
$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \widetilde{f}\left(u + \frac{t}{\sigma}\right) - \widetilde{f}(u) \right\} K(t)\, dt \right|.$$

Полагая $\sqrt{\left(u+\frac{t}{\sigma}\right)^2+1} = y$, $\sqrt{u^2+1} = x$ (берем арифметическое значение корней), получим:

$$\widetilde{f}\left(u+\frac{t}{\sigma}\right) - \widetilde{f}(u) = f(y) - f(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{(y-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + K_r,$$

где

$$|K_r| = \left| \frac{f^{(r)}(x+\theta(y-x))}{r!}(y-x)^r - \frac{f^{(r)}(x)}{r!}(y-x)^r \right| \leqslant \frac{|y-x|^r}{r!}\,\omega(|y-x|).$$

Поэтому

$$|f(x) - G_\sigma(f; x)| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^k K(t)\, dt \right| +$$
$$+ \frac{1}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} |y-x|^r \omega(|y-x|)\, |K(t)|\, dt. \qquad (5)$$

Далее,

$$y - x = \sqrt{\left(u+\frac{t}{\sigma}\right)^2+1} - \sqrt{u^2+1} = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{\nu!} \frac{t^\nu}{\sigma^\nu} \frac{d^\nu}{du^\nu}\left(\sqrt{1+u^2}\right) + R_{p+1},$$

где

$$R_{p+1} = \frac{t^{p+1}}{(p+1)!\,\sigma^{p+1}} \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}\left(\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{x=u+\theta\frac{t}{\sigma}}$$

Легко доказывается индукцией по $\nu$, что

$$\frac{d^\nu}{du^\nu}\left(\sqrt{1+u^2}\right) = \frac{P_\nu(u)}{(1+u^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}},$$

где $P_\nu(u)$ — многочлен степени $\leqslant \nu$. Следовательно, эти производные при $\nu \geqslant 1$ ограничены на всей оси. Итак,

$$y - x = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{\nu!} \frac{t^\nu}{\sigma^\nu} \gamma_\nu(u) + \frac{t^{p+1}}{(p+1)!\,\sigma^{p+1}} \gamma_{p+1}(u, t),$$

где все функции $\gamma_0$ ограничены на всей оси. Если положить $p = 2r+4-k$, то получим:

$$(y-x)^k = \sum_{\nu=1}^{2r+2} \frac{t^\nu}{\sigma^\nu} \gamma_{\nu,k}(u) + \frac{(|t|^{i_k}+1)}{\sigma^{2r+3}} \gamma_k(u, t),$$

где все $\gamma$ ограничены на всей оси, $i_k = (2r+4-k)k \leqslant (r+2)^2$. Поэтому если выбрать ядро типа $\{(r+2)^2+2,\ r+1\}$, то при $k \leqslant r$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^k K(t)\,dt \right| = \left| \sum_{\nu=1}^{2r+2} \frac{\gamma_{\nu,k}(u)}{\sigma^\nu} \int_{-\infty}^{\infty} t^\nu K(t)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(|t|^{i_k}+1)}{\sigma^{2r+3}} \gamma_k(u,t) K(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(|t|^{i_k}+1)}{\sigma^{2r+3}} \gamma_k(u,t) K(t)\,dt \right| \leqslant \frac{C_{k,r}}{\sigma^{2r+3}},$$

так как

$$K(t) = O\left(\frac{1}{|t|^{(r+2)^2+2}+1}\right).$$

Значит, из (5) получим:

$$|f(x) - G_\sigma(f;x)| \leqslant \frac{C'_r(f)}{\sigma^{2r+3}} + \frac{1}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} |y-x|^r \omega(|y-x|) |K(t)|\,dt.$$

Так как

$$y - x = \frac{t}{\sigma} \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} + \frac{t^2}{\sigma^2} \gamma_2(u,t),$$

то

$$|y-x|^r \omega(|y-x|) \leqslant C''_r (|t|+1)^{2r+2} \left(\frac{|u|}{\sigma\sqrt{1+u^2}} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{|u|}{\sigma\sqrt{1+u^2}} + \frac{1}{\sigma^2}\right) =$$

$$= C''_r (|t|+1)^{2r+2} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Поэтому окончательно имеем:

$$|f(x) - G_\sigma(f;x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C'_r(f)}{\sigma^{2r+3}} + \frac{C''_r}{r!} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} (|t|+1)^{2r+2} |K(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_r \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Для случая четной функции $f(x)$ теорема доказана.

Пусть теперь $f(x)$ нечетна на $E$. Рассмотрим целую функцию $g(x)$ степени $\leqslant 1$, обладающую следующими свойствами:

1) $g(x)$ нечетна на $E$,
2) $C_1 \leqslant |g(x)| \leqslant C_2$, если $x \in E$,
3) $\left|\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right| \leqslant C_3$, если $x \in E$, $\nu = 1, 2, \ldots, r$.

(В качестве такой функции можно взять $y(x) = \int_0^x \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t^2}\,dt.$)

Рассмотрим функцию $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Эта функция четна и имеет $r$ производных

$$F^{(\nu)}(x) = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} f^{(i)}(x) \frac{d^{\nu-i}}{dx^{\nu-i}}\left(\frac{1}{g(x)}\right), \quad \nu = 0, 1, \ldots, r,$$

которые, в силу свойств 1) — 3) функции $g(x)$, ограничены и равномерно непрерывны на $E$. Далее,

$$F^{(r)}(x) = f^{(r)}(x)\frac{1}{g(x)} + \sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i} f^{(i)}(x)\frac{d^{r-i}}{dx^{r-i}}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{f^{(r)}(x)}{g(x)} + B(x),$$

где $B(x)$ имеет ограниченную производную на $E$. Поэтому если $|x_1 - x_2|$ достаточно мало, то

$$|F^{(r)}(x_1) - F^{(r)}(x_2)| \leqslant \frac{1}{|g(x_1)|}|f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)| + f^{(r)}(x_2)\left|\frac{1}{g(x_1)} - \frac{1}{g(x_2)}\right| +$$
$$+ |B(x_1) - B(x_2)| \leqslant C_1\omega(|x_1 - x_2|) + C_4|x_1 - x_2| \leqslant C_5\omega(|x_1 - x_2|),$$

где $\omega(t) \equiv \omega(f^{(r)};\ t)$. Здесь мы воспользовались тем, что если $\delta$ достаточно мало, то найдется такое $C$, что $\omega(\delta) \geqslant C\delta$.

Итак,

$$\omega(F^{(r)};\ t) \leqslant C'\omega(t),$$

где $C'$ — абсолютная постоянная. Поэтому

$$|F(x) - G_\sigma(F;\ x)| \leqslant C'C_r\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right),$$

откуда

$$|f(x) - g(x)G_\sigma(F;\ x)| \leqslant C'C_r|g(x)|\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Так как $g(x)\cdot G_\sigma(F;\ x)$ — целая функция степени $\sigma + 1$, то, полагая $G_\sigma(f;\ x) = g(x)G_{\sigma-1}(F;\ x)$ и учитывая, что $C'C_r|g(x)| \leqslant C'C_r\ C_2 = C$, получим:

$$|f(x) - G_\sigma(f;\ x)| \leqslant C\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Пусть, наконец, $f(x)$ — произвольная функция, имеющая на $E$ $r$ равномерно непрерывных производных, и $\omega(f^{(r)};\ t) \equiv \omega(t)$. Тогда

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} - \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f_1(t) + f_2(t).$$

При этом $\omega(f_1^{(r)};\ t) \leqslant \omega(t)$ и $\omega(f_2^{(r)};\ t) \leqslant \omega(t)$. Поэтому если, по предыдущему, мы найдем $G_\sigma(f_1;\ t)$ и $G_\sigma(f_2;\ t)$, то

$$G_\sigma(f;\ x) = G_\sigma(f_1;\ x) + G_\sigma(f_2,\ x)$$

будет давать искомое уклонение от $f(x)$. Теорема доказана.

Как видно из доказательства, теорема справедлива, если $E_{a,b}$ есть внешность произвольного отрезка $(a,\ b)$. Сформулируем теорему в общем случае.

ТЕОРЕМА 2. *Если $f(x)$ имеет на $E_{a,b}$ $r$ равномерно непрерывных и ограниченных производных и $\omega(f^{(r)};\ t) \equiv \omega(t)$, то для любого $\sigma > 0$ существует целая функция $G_\sigma(f;\ x)$ степени не выше $\sigma$ такая, что при $x \in E_{a,b}$*

$$|f(x) - G_\sigma(f,\ x)| \leqslant C_r\left(\frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{\sigma\left|x - \frac{a+b}{2}\right|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{(x-a)(x-b)}}{\sigma\left|x - \frac{a+b}{2}\right|} + \frac{1}{\sigma^2}\right), \quad (6)$$

*где $C_r$ не зависит от $x$ и $\sigma$.*

## § 3. Некоторые неравенства

Пусть $f_\sigma(u)$ — целая функция степени не выше $\sigma$ и $\varphi(u) \geqslant 0$ — такая ограниченная на $-\infty < u < \infty$ функция, что

$$|f_\sigma(u)| \leqslant \varphi(u). \tag{7}$$

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 3. *При выполнении условия* (7) *имеет место неравенство*

$$|f'_\sigma(u)| \leqslant C_r \sigma \{\varphi(u) + I_{r,\sigma}(\varphi; u)\}, \tag{8}$$

*где*

$$I_{r,\sigma}(\varphi; u) = \frac{1}{\gamma_{r,\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+u) \left(\frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)^{2r} dt - \varphi(u)$$

*при* $\sigma \to \infty$ *стремится к нулю, если* $\varphi(u)$ *непрерывна,* $r \geqslant 1$, *а*

$$\gamma_{r,\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)^{2r} dt, \quad C_r = \frac{(2r+1)^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r} dt.$$

Доказательство. Для всякой целой функции $\psi_\sigma(u) \in L_2(-\infty, \infty)$ степени не выше $\sigma$ имеет место представление

$$\psi_\sigma(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\sigma(t-u) \frac{\sin \sigma t}{t} dt. \tag{9}$$

В самом деле, по теореме Палей — Винера,

$$\psi_\sigma(u) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \psi(t) e^{iut} dt,$$

где $\psi(t) \in L_2(-\sigma, \sigma)$. Далее, преобразование Фурье функции $\frac{\sin \sigma t}{t}$ есть

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |t| \leqslant \sigma, \\ 0, & |t| > \sigma. \end{cases}$$

Остается только применить теорему о свертке. Из (9) получим:

$$\psi'(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-u) \left\{\left(\frac{\sin \sigma t}{t}\right)'\right\} dt = \frac{\sigma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-u)\, g(t)\, dt,$$

где

$$g(t) = g(t, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\sin \sigma t}{t}\right)'.$$

Отметим, что $|g(t)| \leqslant 1$. Так как

$$B_{(2r+1)\sigma}(u) = f_\sigma(u) \left(\frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)^{2r}$$

есть целая функция степени не выше $(2r+1)\sigma$, то, по предыдущему,

$$B'_{(2r+1)\sigma}(u) = \frac{(2r+1)^2 \sigma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(t-u) \left(\frac{\sin \sigma(t-u)}{\sigma(t-u)}\right)^{2r} g(t)\, dt.$$

При $u = 0$

$$B'_{(2r+1)\sigma}(0) = f'_\sigma(0),$$

поэтому

$$f_\sigma'(0)=\frac{(2r+1)^2}{\pi}\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\sigma(t)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r}g(t)\,dt. \tag{10}$$

Применяя (10) к целой функции $f_\sigma(u+t)$, где $u$ фиксировано, получим:

$$f_\sigma'(u)=\frac{(2r+1)^2}{\pi}\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\sigma(u+t)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r}g(t)\,dt. \tag{11}$$

Далее, пользуясь (11) и (7), находим:

$$|f_\sigma'(u)|\leqslant\frac{(2r+1)^2}{\pi}\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_\sigma(u+t)|\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(2r+1)^2}{\pi}\sigma^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t+u)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r}dt=$$

$$=\frac{(2r+1)^2}{\pi}\sigma^2\gamma_{r,\sigma}\left\{\varphi(u)+\frac{1}{\gamma_{r,\sigma}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t+u)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r}dt-\varphi(u)\right\},$$

где

$$\gamma_{r,\sigma}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r}dt=\frac{1}{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r}dt.$$

Таким образом,

$$|f_\sigma'(u)|\leqslant C_r\sigma\{\varphi(u)+I_{r,\sigma}(\varphi,\ u)\}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 3 выводим

Следствие. *Если $\varphi(x)$ — четная на $E$ неотрицательная функция и для целой функции $f_\sigma(x)$ имеет место неравенство*

$$|f_\sigma(x)|\leqslant\varphi(x)\ \textit{при}\ x\in E,\quad \sigma\geqslant 1,$$

*то*

$$|f_\sigma'(x)|\leqslant\frac{C_r'\sigma|x|}{\sqrt{x^2-1}}\{\varphi(x)+I_{r,\sigma}(\widetilde{\varphi};\ x)\}, \tag{12}$$

*где $\widetilde{\varphi}(u)=\varphi(\sqrt{u^2+1})$, $I_{r,\sigma}(\widetilde{\varphi};\ x)=I_{r,\sigma}(\widetilde{\varphi};\ u)$ при $u=\sqrt{x^2-1}$ и $I_{r,\sigma}(\widetilde{\varphi};x)$ однозначна, так как $I_{r,\sigma}(\widetilde{\varphi};\ u)$ четна.*

Доказательство. Пусть сначала $f_\sigma(x)$ четна на $E$. Тогда $\widetilde{f}_\sigma(u)=f_\sigma(\sqrt{u^2+1})$ — целая функция степени не выше $\sigma$ и $|\widetilde{f}_\sigma(u)|\leqslant\widetilde{\varphi}(u)$.

Из (8) получим:

$$|\widetilde{f}_\sigma'(u)|=\left|f_\sigma'(x)\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right|\leqslant C_r\sigma\{\widetilde{\varphi}(u)+I_{r,\sigma}(\widetilde{\varphi};\ u)\}=C_r\sigma\{\varphi(x)+I_{r,\sigma}(\widetilde{\varphi};\ x)\}.$$

Этим неравенство (12) доказано. Если же $f_\sigma(x)$ — нечетная на $E$ целая функция, а $y(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2}dt$, то $\frac{f_\sigma(x)}{y(x)}$ — четная на $E$ целая функция и, по предыдущему,

$$\left|\frac{f_\sigma'(x)}{y(x)}+f_\sigma(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y(x)}\right)\right|\leqslant\frac{C_r\sigma(x)}{\sqrt{x^2-1}}\left\{\frac{\varphi(x)}{x}+I_{r,\sigma}\left(\frac{\widetilde{\varphi}(u)}{\sqrt{1+u^2}};\ x\right)\right\},$$

откуда

$$|f_\sigma'(x)| \leqslant \frac{C_r \sigma |x|}{\sqrt{x^2-1}} \left\{\varphi(x) + y(x) I_{r,\sigma}\left(\frac{\widetilde{\varphi}(u)}{\widetilde{y}(u)};\, x\right)\right\} + \left| f_\sigma(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y(x)}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_r \sigma(x)}{\sqrt{x^2-1}} \left\{\varphi(x) + y(x) I_{r,\sigma}\left(\frac{\widetilde{\varphi}(u)}{\widetilde{y}(u)};\, x\right)\right\} + C_1 \varphi(x).$$

Кроме того,

$$y(x) I_{r,\sigma}\left(\frac{\widetilde{\varphi}(u)}{\widetilde{y}(u)};\, x\right) = \frac{\widetilde{y}(u)}{\gamma_{r,\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{\varphi}(u+t)}{\widetilde{y}(u+t)} \left(\frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)^{2r} dt - \varphi(x) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2}{\gamma_{r\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(u+t) \left(\frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)^{2r} dt - \varphi(x) = I_{r,\sigma}(\widetilde{\varphi},\, x).$$

Поэтому

$$|f_\sigma'(x)| \leqslant \frac{C_r' \sigma(x)}{\sqrt{x^2-1}} \{\varphi(x) + I_{r,\sigma}(\widetilde{\varphi};\, x)\}, \quad x \in E.$$

В общем случае

$$f_\sigma(x) = f_{\sigma,1}(x) + f_{\sigma,2}(x),$$

где $f_{\sigma,1}(x)$ четна, $f_{\sigma,2}(x)$ нечетна и обе функции по модулю не превышают $\varphi(x)$. Следствие доказано.

Перейдем к установлению важного неравенства, играющего основную роль при доказательстве обратных теорем. Отметим, что приводимая ниже теорема как по формулировке, так и по методу доказательства подобна неравенству для многочленов, установленному нами ранее в работе ([6]).

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\omega(t)$ — модуль непрерывности и $f_\sigma(x)$ — целая функция степени не выше $\sigma$. Если на $E$ выполняется неравенсто*

$$|f_\sigma(x)| \leqslant \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right) \quad (r = 0, 1, \ldots), \tag{13}$$

*то*

$$|f_\sigma'(x)| \leqslant C \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{r-1} \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right), \tag{14}$$

*где $C$ — постоянная, не зависящая от $f$, $\sigma$ и $x$.*

Доказательство. Полагая в следствии к теореме 3

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right),$$

получим:

$$|f_\sigma'(x)| \leqslant \frac{C_{r+1}' \sigma|x|}{\sqrt{x^2-1}} \{\varphi(x) + I_{r+1,\sigma}(\widetilde{\varphi};\, x)\}.$$

Покажем, что

$$|I_{r+1,\sigma}(\widetilde{\varphi};\, x)| = \left|\frac{1}{\gamma_{r+1,\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(u+t) \left(\frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2} dt - \varphi(x)\right| \leqslant A_r \varphi(x).$$

Для этого достаточно оценить интеграл

$$\frac{1}{\gamma_{r+1,\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(u+t) \left(\frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2} dt.$$

Воспользуемся неравенствами

$$(\delta_1+\delta_2)^r\,\omega(\delta_1+\delta_2)\leqslant 2^{r+1}(\delta_1^r\,\omega(\delta_1)+\delta_2^r\,\omega(\delta_2))\quad(r\geqslant 0),$$

$$\frac{|u_1+u_2|}{\sqrt{1+(u_1+u^2)^2}}\leqslant\frac{|u_1|}{\sqrt{1+u_1^2}}+\frac{|u_2|}{\sqrt{1+u_2^2}}.$$

Второе из них очевидно, первое можно доказать следующим образом:

$$(\delta_1+\delta_2)^r\,\omega(\delta_1+\delta_2)=(\delta_1+\delta_2)^{r+1}\frac{\omega(\delta_1+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2}\leqslant$$

$$\leqslant 2^r\left(\delta_1^{r+1}\frac{\omega(\delta_1+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2}+\delta_2^{r+1}\frac{\omega(\delta_1+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2}\right)\leqslant 2^{r+1}\left(\delta_1^{r+1}\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1}+\delta_2^{r+1}\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_2}\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\frac{\omega(a)}{a}\leqslant 2\frac{\omega(b)}{b}$, если $b<a$. Отсюда следует:

$$\tilde\varphi(u+t)=\left(\frac{|u+t|}{\sigma\sqrt{(u+t)^2+1}}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^r\omega\left(\frac{|u+t|}{\sigma\sqrt{(u+t)^2+1}}+\frac{1}{\sigma^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{r+1}\tilde\varphi(u)+2^{r+1}\tilde\varphi(t),$$

$$\frac{1}{\gamma_{r+1,\,\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde\varphi(u+t)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2}dt\leqslant\frac{2^{r+1}}{\gamma_{r+1,\,\sigma}}\tilde\varphi(u)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2}dt+$$

$$+\frac{2^{r+1}}{\gamma_{r+1,\,\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde\varphi(t)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2}dt=2^{r+1}\varphi(x)+\frac{2^{r+1}}{\gamma_{r+1,\,\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde\varphi(t)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2}dt.$$

Остается оценить последний интеграл:

$$\frac{1}{\gamma_{r+1,\,\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde\varphi(t)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2}dt=\frac{2}{\gamma_{r+1,\,\sigma}}\int_0^{\infty}\tilde\varphi(t)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2}dt=$$

$$=\frac{2}{\gamma_{r+1,\,\sigma}}\left(\int_0^{\frac{1}{\sigma}}+\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty}\right)\tilde\varphi(t)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2}dt=I_1+I_2,$$

$$I_1=\frac{2}{\gamma_{r+1,\,\sigma}}\int_0^{\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^r\omega\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{\sigma^2}\right)\left(\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2}dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{r+1}}{\gamma_{r+1,\,\sigma}}\frac{1}{\sigma^{2r}}\,\omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\int_0^{\frac{1}{\sigma}}dt=\frac{2^{r+1}}{\frac{1}{\sigma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r+2}dt}\frac{1}{\sigma^{2r}}\,\omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\frac{1}{\sigma}=$$

$$=A_r'\,\frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}{\sigma^{2r}}\leqslant A_r'\,\varphi(x);$$

$$I_2 = \frac{2}{\gamma_{r+1,\,\sigma}} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{\sigma^2}\right)\left(\frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)^{2r+2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\gamma_{r+1,\,\sigma}} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{r+1} \frac{\omega\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{\sigma^2}\right)}{\frac{t}{\sigma\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{\sigma^2}} \frac{dt}{\sigma^{2r+2}\, t^{2r+2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\gamma_{r+1,\,\sigma}} \frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}{\frac{1}{\sigma^2}} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{r+1} \frac{dt}{\sigma^{2r+2}\, t^{2r+2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\sigma^2 \omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}{\frac{1}{\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r+2} dt} 2^{r+1} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \frac{t^{r+1}\, dt}{\sigma^{r+1}\, \sigma^{2r+2}\, t^{2r+2}} =$$

$$= \frac{2^{r+3}}{r \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2r+2} dt} \sigma^3 \omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \frac{\sigma^r}{\sigma^{3r+3}} = A_r'' \frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}{\sigma^{2r}} \leqslant A_r' \varphi(x).$$

Собрав вместе все оценки, получим:

$$|I_{r+1,\,\sigma}(\widetilde{\varphi};\ x)| \leqslant A_r \varphi(x).$$

Эта оценка вместе с предыдущим неравенством дает:

$$|f_\sigma'(x)| \leqslant B_r \frac{\sigma |x|}{\sqrt{x^2-1}} \varphi(x). \tag{15}$$

Если $x \in E_\sigma = \left(-\infty,\ -\sqrt{1+\frac{1}{\sigma^2}}\right] \cup \left[\sqrt{1+\frac{1}{\sigma^2}},\ \infty\right)$, то из (15) получаем:

$$|f_\sigma'(x)| \leqslant \frac{B_r \sigma |x|}{\sqrt{x^2-1}} \varphi(x) \leqslant B_r' \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma |x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{r-1} \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma |x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Таким образом, для $x \in E_\sigma$ теорема доказана.

Пусть теперь $x \in E_\sigma$. Тогда

$$|f_\sigma'(x)| \leqslant B_r' \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma |x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{r-1} \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma |x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right) \leqslant 2B_r' \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma |x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{r} \sigma^2 \omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right),$$

т. е. при $x \in E_\sigma$

$$\left| \frac{f_\sigma'(x)}{\left(\frac{1}{\sigma |x|} \sqrt{x^2 - 1 - \frac{1}{\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r} \right| \leqslant B_r'' \sigma^2 \omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right). \tag{16}$$

Функция $\psi(z) = \sqrt{z^2 - 1 - \frac{1}{\sigma^2}}$ (двузначная) отображает $E_\sigma$ на ось $\operatorname{Im} v = 0$ комплексной плоскости $w$. Поэтому при $x \in E_\sigma$

$$\sin \sigma\psi(x) + 2 \geqslant 1.$$

Рассмотрим многозначную функцию комплексного переменного

$$g(z) = \frac{f_\sigma'(z)}{\left(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{z^2-1-\frac{1}{\sigma^2}}{z^2}}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^r (\sin\sigma\psi(z)+2)}.$$

Выберем ту ветвь функции $g(z)$, которая получается, если $\sqrt{z}>0$ при $z\geqslant 0$. Тогда при $z\in\overline{E}_\sigma$ эта ветвь не имеет особенностей, так как знаменатель не обращается в нуль, а при $|z|\to\infty$

$$|f_\sigma'(z)|\leqslant Ce^{\sigma|y|} \quad (y=\operatorname{Im} z), \quad |\sin\sigma\psi(z)|\sim e^{\sigma|y|}, \quad |g(z)|=O(1).$$

Особые точки $g(z)$ есть $z=\pm\sqrt{1+\frac{1}{\sigma^2}}$. Поэтому если применить теорему о максимуме модуля к этой ветви в области, состоящей из плоскости с удаленным множеством $E_\sigma$, то, учитывая, что на границе области, в силу (16),

$$|g(z)|\leqslant B_r''\sigma^2\omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right),$$

получим:

$$|g(z)|\leqslant B_r''\sigma^2\omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

всюду в плоскости $z$. Таким образом, если $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{1+\frac{1}{\sigma^2}}$, то

$$|f_\sigma'(x)|\leqslant\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^r(|\sin\sigma\psi(x)|+2)\,B_r''\sigma^2\omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant(\operatorname{sh}1+2)\,B_r''\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^r\sigma^2\omega\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_r\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^{r-1}\omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}+\frac{1}{\sigma^2}\right).$$

так как

$$|\sin\sigma\psi(x)|=\left|\operatorname{sh}\sigma\sqrt{1+\frac{1}{\sigma^2}-x^2}\right|\leqslant\operatorname{sh}1 \text{ при } 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{1+\frac{1}{\sigma^2}}.$$

Итак, неравенство (14) доказано для всех $x\in E$.

## § 4. Обратные теоремы для случая внешности отрезка

Предположим, что для некоторой функции $f(x)$, заданной на $E=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, выполняется неравенство (4). Пользуясь неравенствами § 3, установим, какими дифференциальными свойствами обладает $f(x)$.

ТЕОРЕМА 5. *Если для функции $f(x)$, заданной на $E$, при некотором модуле непрерывности $\omega(h)$ и любом $\sigma>0$ можно указать целую функцию $G_\sigma(x)$ степени не выше $\sigma$ такую, что при $x\in E$*

$$|f(x)-G_\sigma(x)|\leqslant\omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}+\frac{1}{\sigma^2}\right), \tag{17}$$

*то существует постоянная $C$, не зависящая от $h$ и такая, что*

$$\omega(f;\ h) \leqslant Ch\int_h^2 \frac{\omega(u)}{u^2}\,du, \quad 0 < h \leqslant \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Для доказательства воспользуемся известным методом С. Н. Бернштейна. Пусть $0 < \frac{1}{[\sigma+1]} \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{[\sigma]}$ и $1 \leqslant x - \delta \leqslant x$. Тогда ($\Delta_\delta K(x) = K(x) - K(x-\delta)$)

$$|\Delta_\delta f(x) - \Delta_\delta G_{2^{m+1}}(x)| \leqslant |f(x-\delta) - G_{2^{m+1}}(x-\delta)| + |f(x) - G_{2^{m+1}}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\omega\left(\frac{1}{2^{m+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} + \frac{1}{2^{m+1}}\right)\right).$$

Поэтому при любом $x \in E$ и $\sigma \geqslant 2$ найдется такое число

$$m = m(x,\ \sigma) = \begin{cases} \left[\frac{1}{2}\log_2 \sigma\right], & \text{если } 1 \leqslant |x| \leqslant 1 + \frac{2}{\sigma}, \\ \left[\log_2\left(\frac{\sigma\sqrt{x^2-1}}{|x|}\right)\right], & \text{если } |x| > 1 + \frac{2}{\sigma}, \end{cases}$$

что

$$|\Delta_\delta f(x) - \Delta_\delta G_{2^{m+1}}(x)| \leqslant 2\omega\left(\frac{2}{\sigma}\right). \tag{19}$$

Кроме того, при $x \in E$ имеем:

$$\begin{gathered} |G'_{2^{m+1}}(x)| \leqslant |G'_2(x)| + \sum_{k=1}^{m} |G'_{2^{k+1}}(x) - G'_{2^k}(x)|, \\ |G_{2^{k+1}}(x) - G_{2^k}(x)| \leqslant 2\omega\left(\frac{1}{2^k}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} + \frac{1}{2^k}\right)\right). \end{gathered} \tag{20}$$

Первое неравенство (20) очевидно, второе получается прибавлением и вычитанием $f(x)$ под знаком модуля. Поэтому из теоремы 4 при $r = 0$ выводим:

$$|G'_{2^{k+1}}(x) - G'_{2^k}(x)| \leqslant C_1\left[\frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right]^{-1} \omega\left(\frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|} + \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right). \tag{21}$$

При $|x| \leqslant 1 + \frac{2}{\sigma}$ из (23) получим:

$$|G'_{2^{k+1}}(x) - G'_{2^k}(x)| \leqslant G_2\, 2^{2k}\, \omega(2^{-2k})$$

и, в силу (20),

$$|G'_{2^{m+1}}(x)| \leqslant C_3 \sum_{k=1}^{m} 2^{2k}\,\omega(2^{-2k}) \leqslant C_4 \sum_{k=1}^{2^{2m}} \omega\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant C_4 \sum_{k=1}^{[\sigma]} \omega\left(\frac{1}{k}\right),$$

так как

$$2^{2k}\,\omega(2^{-2k}) \leqslant C \sum_{\nu=2^{2k-2}+1}^{2^{2k}} \omega\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Если же $|x| > 1 + \frac{2}{\sigma}$, то положим $q = \left[\log_2 \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\right]$. Из (21) получим, что для всех $k \leqslant q$ справедливы неравенства:

$$|G'_{2^{k+1}}(x) - G'_{2^k}(x)| \leqslant C_5\, 2^{2k}\, \omega(2^{-2k}),$$

а при $k > q$

$$|G'_{2^{k+1}}(x) - G'_{2^k}(x)| \leqslant C_6\, 2^k \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\, \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2^k |x|}\right).$$

Поэтому из (20) при $x \geqslant 1 + \frac{1}{\sigma}$ будем иметь:

$$|G'_{2^{m+1}}(x)| \leqslant C_5 \sum_{k=1}^{q} 2^{2k}\, \omega(2^{-2k}) + C_6 \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} \sum_{k=q+1}^{m} 2^k\, \omega\left(2^{-k}\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \sum_{k=1}^{2^{2q}} \omega\left(\frac{1}{k}\right) + C_8 \sum_{k=q}^{m} 2^{k+q}\, \omega(2^{-k-q}) \leqslant C_7 \sum_{k=1}^{2^{2q}} \omega\left(\frac{1}{k}\right) + C_9 \sum_{k=1}^{2^{m+q}} \omega\left(\frac{1}{k}\right).$$

Для рассматриваемых значений $x$

$$2^{m+q} = 2^m \cdot 2^q \leqslant \frac{[\sigma]\sqrt{x^2-1}}{|x|}\, \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} = [\sigma],$$

поэтому

$$|G'_{2^{m+1}}(x)| \leqslant C_{10} \sum_{k=1}^{[\sigma]} \omega\left(\frac{1}{k}\right).$$

Тогда из (19) получим:

$$|\Delta_\delta f(x)| \leqslant |\Delta_\delta G_{2^{m+1}}(x)| + 2\omega\left(\frac{2}{\sigma}\right) \leqslant |G'_{2^{m+1}}(\eta)|\, \delta + 2\omega\left(\frac{2}{\sigma}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{11}}{[\sigma]} \sum_{k=1}^{[\sigma]} \omega\left(\frac{1}{k}\right) + 2\omega\left(\frac{2}{\sigma}\right).$$

Но

$$\omega\left(\frac{2}{\sigma}\right) \leqslant \omega\left(\frac{2}{[\sigma]}\right) \leqslant \frac{2}{[\sigma]} \sum_{k=1}^{[\sigma]} \omega\left(\frac{1}{k}\right),$$

поэтому

$$\omega(f; \delta) \leqslant \frac{C_{12}}{[\sigma]} \sum_{k=1}^{[\sigma]} \omega\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{C_{12}\, \omega(1)}{[\sigma]} + \frac{C_{12}}{[\sigma]} \sum_{k=1}^{[\sigma]-1} \omega\left(\frac{1}{k+1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_{12} \left\{\frac{1}{[\sigma]} \int_1^2 \frac{\omega(u)}{u^2}\, du + \frac{1}{[\sigma]} \sum_{k=1}^{[\sigma]-1} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{\omega(u)}{u^2}\, du\right\} \leqslant C\delta \int_\delta^2 \frac{\omega(u)}{u^2}\, du,$$

так как $\omega(u)$ монотонна и $\frac{1}{[\sigma+1]} < \delta \leqslant \frac{1}{[\sigma]}$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 5 *и*

$$h\int_h^2 \frac{\omega(u)}{u^2}\,du = O(\omega(h)),$$

*то*

$$\omega(f; h) = O(\omega(h)).$$

Докажем следующую теорему, обратную теореме 1 (для $r \geqslant 1$).

ТЕОРЕМА 6. *Если для функции* $f(x)$, *заданной на* $E$, *при некотором модуле непрерывности, удовлетворяющем условию* $\int_0^1 \frac{\omega(u)}{u}\,du < \infty$, *и при любом* $\sigma > 0$ *можно указать целую функцию* $G_\sigma(x)$ *степени не выше* $\sigma$, *такую, что при* $x \in E$

$$|f(x) - G_\sigma(x)| \leqslant \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|} + \frac{1}{\sigma^2}\right), \tag{22}$$

*то* $f(x)$ *имеет на* $E$ $r$ *равномерно непрерывных и ограниченных производных и*

$$\omega(f^{(r)}; h) \leqslant C\left\{h\int_h^2 \frac{\omega(u)}{u^2}\,du + \int_0^h \frac{\omega(u)}{u}\,du\right\}. \tag{23}$$

Доказательство. В силу (22),

$$f(x) = G_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (G_{2^{k+1}}(x) - G_{2^k}(x)).$$

Продифференцируем формально это равенство $i \leqslant r$ раз:

$$f^{(i)}(x) = G_1^{(i)}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (G_{2^{k+1}}^{(i)}(x) - G_{2^k}^{(i)}(x)).$$

В силу теоремы 4, учитывая, что

$$|G_{2^{k+1}}(x) - G_{2^k}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2^k|x|} + \frac{1}{2^{2k}}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2^k|x|} + \frac{1}{2^{2k}}\right),$$

получим:

$$|G_{2^{k+1}}^{(i)}(x) - G_{2^k}^{(i)}(x)| \leqslant 2C_i\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2^k|x|} + \frac{1}{2^{2k}}\right)^{r-i} \omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2^k|x|} + \frac{1}{2^{2k}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C_i \frac{1}{{}^{k(r-i)}}\,\omega\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

Поэтому продифференцированный ряд при $i < r$ сходится равномерно и $f(x)$ имеет $r-1$ производную, $r-2$ первые из которых ограничены и равномерно непрерывны. Чтобы показать, что $f(x)$ имеет $r$-ю ограниченную производную (а значит, и равномерно непрерывную $r-1$-ю произ-

водную), достаточно показать, что сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{2^k}\right)$. Но так как

$$\omega\left(\frac{1}{2^k}\right)\leqslant\frac{1}{2^k}\sum_{\nu=1}^{2^k}\omega\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{2^k}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{\nu=1}^{2^k}\omega\left(\frac{1}{\nu}\right)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{\nu}\right)\sum_{2^k\geqslant\nu}\frac{1}{2^k}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,\omega\left(\frac{1}{\nu}\right)\leqslant 2\omega(1)+4\sum_{\nu=2}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{1}{\nu-1}}\frac{\omega(u)}{u}\,du=2\omega(1)+4\int\limits_{0}^{1}\frac{\omega(u)}{u}\,du<\infty.$$

Оценим $\omega(f^{(r)};\delta)$. Имеем:

$$f^{(r)}(x)=G^{(r)}_{2^{m+1}}(x)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(G^{(r)}_{2^{k+1}}(x)-G^{(r)}_{2^k}(x)\right),$$

где, как и раньше,

$$m=m(x,\sigma)=\begin{cases}\left[\frac{1}{2}\log_2\sigma\right], & \text{если } |x|\leqslant 1+\frac{2}{\sigma},\\ \left[\log_2\frac{\sigma\sqrt{x^2-1}}{|x|}\right], & \text{если } |x|>1+\frac{2}{\sigma}.\end{cases}$$

Таким образом, при $0<\frac{1}{[\sigma+1]},\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{[\sigma]},\ 1\leqslant x-\delta\leqslant x,$

$$|\Delta_\delta f^{(r)}(x)|\leqslant|\Delta_\delta G^{(r)}_{2^{m+1}}(x)|+\sum_{k=m+1}^{\infty}|\Delta_\delta G^{(r)}_{2^{k+1}}(x)-\Delta_\delta G^{(r)}_{2^k}(x)|.$$

Так как

$$|G^{(r)}_{2^{k+1}}(x)-G^{(r)}_{2^k}(x)|\leqslant C_r\,\omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2^k|x|}+\frac{1}{2^{2k}}\right),$$

то, аналогично тому, как это сделано в теореме 5, получим:

$$|\Delta_\delta G^{(r)}_{2^{m+1}}(x)|\leqslant C_0\delta\int\limits_{\delta}^{2}\frac{\omega(u)}{u^2}\,du.$$

Поэтому

$$|\Delta_\delta f(x)|\leqslant C_0\delta\int\limits_{\delta}^{2}\frac{\omega(u)}{u^2}\,du+C_1\sum_{k=m+1}^{\infty}\omega\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2^k|x|}+\frac{1}{2^{2k}}\right).$$

Остается оценить последний ряд. При $|x|>1+\frac{2}{\sigma}$ имеем:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{2^k|x|}+\frac{1}{2^{2k}}\right)\leqslant C_2\sum_{k=m+1}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{2^k}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_1\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^k-2^m}\sum_{\nu=2^m+1}^{2^k}\omega\left(\frac{1}{\nu}\right)=C_1\sum_{\nu=2^{m+1}+1}^{\infty}\omega\left(\frac{1}{\nu}\right)\sum_{2^k\geqslant\nu}\frac{1}{2^k-2^m}\leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{\nu=2^{m+1}+1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\,\omega\left(\frac{1}{\nu}\right) \leqslant C_3 \sum_{\nu=2^{m+1}+1}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{1}{\nu-1}} \frac{\omega(u)}{u}\,du =$$

$$= C_3 \int\limits_0^{2^{-m-1}} \frac{\omega(u)}{u}\,du \leqslant C_4 \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(u)}{u}\,du.$$

Здесь мы пользуемся тем, что $C'\delta \leqslant 2^{-m-1} \leqslant C''\delta$. При $|x| \leqslant 1 + \frac{2}{\sigma}$ оценки аналогичны. Собирая вместе эти оценки, получим требуемое неравенство.

Следствие. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы* 6 *и*

$$h\int\limits_h^2 \frac{\omega(u)}{u^2}\,du = O(\omega(h)), \quad \int\limits_0^h \frac{\omega(u)}{u}\,du = O(\omega(h)), \tag{24}$$

*то у функции $f(x)$ существует $r$ равномерно непрерывных и ограниченных на $E$ производных и для $f^{(r)}(x)$ имеем:*

$$\omega(f^{(r)}; h) = O(\omega(h)).$$

Таким образом, для модулей, удовлетворяющих условиям (24), теорема 1 вместе со следствием дают полную характеристику дифференциальных свойств $f(x)$ (в отношении порядка). Модулями, удовлетворяющими условиям (24), являются, например, модули $\omega(\delta) = \delta^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$.

## § 5. Приближение на полуоси

Перейдем к случаю полуоси $E = [0, \infty)$.

Естественным аппаратом приближения в этом случае являются целые функции порядка $\frac{1}{2}$ нормального типа. Следуя С. Н. Бернштейну [1], будем называть такие функции функциями конечной полустепени. Если тип такой функции есть $\sigma$, то будем говорить, что $G_\sigma(x)$ есть функция полустепени $\sigma$. При приближении такими функциями приходится отказаться от равномерного приближения и ограничиться приближением, равномерным на каждом конечном интервале. Во всем остальном теория приближения на полуоси вполне аналогична теории приближения на внешности отрезка. Доказательства приводимых ниже теорем получаются буквальным повторением доказательств соответствующих теорем для случая внешности отрезка. Поэтому все доказательства мы опускаем, ограничиваясь лишь формулировкой.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $f(x)$ имеет на $E$ $r$ равномерно непрерывных и ограниченных производных и $\omega(f^{(r)}; h) \equiv \omega(h)$; тогда при любом $\sigma > 0$ найдется целая функция $G_\sigma(f; x)$ полустепени не выше $\sigma$, такая, что при $x \in E$*

$$|f(x) - G_\sigma(f; x)| \leqslant C_r \left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\right),$$

*где $C_r$ не зависит от $x$ и $\sigma$.*

ТЕОРЕМА 8. *Если $f_\sigma(x)$ — целая функция конечной полустепени не выше $\sigma$, для которой на $E$ выполняется неравенство*

$$|f_\sigma(x)| \leqslant \left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right) \quad (r=0,1,\ldots),$$

*то для $f'_\sigma(x)$ на $E$ выполняется неравенство*

$$|f'_\sigma(x)| \leqslant C\left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^{r-1} \omega\left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right),$$

*где $C$ не зависит от $x$ и $\sigma$.*

ТЕОРЕМА 9. *Если для функции $f(x)$, заданной на $E$, при некотором модуле непрерывности $\omega(h)$ и при любом $\sigma>0$ можно указать целую функцию $G_\sigma(x)$ полустепени не выше $\sigma$, такую, что при $x\in E$*

$$|f(x)-G_\sigma(x)| \leqslant \omega\left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right),$$

*то существует постоянная $C$, не зависящая от $h$ и такая, что*

$$\omega(f;h) \leqslant Ch\int_h^2 \frac{\omega(u)}{u^2}\,du, \quad 0<h\leqslant\frac{1}{2}.$$

ТЕОРЕМА 10. *Если для функции $f(x)$, заданной на $E$, при некотором модуле непрерывности $\omega(h)$, удовлетворяющем условию $\int_0^1 \frac{\omega(u)}{u}\,du<\infty$, и при любом $\sigma>0$ можно указать целую функцию $G_\sigma(x)$ полустепени не выше $\sigma$, такую, что*

$$|f(x)-G_\sigma(x)| \leqslant \left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^r \omega\left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

*при $x\in E$, $r\geqslant 1$, то $f(x)$ имеет на $E$ $r$ равномерно непрерывных и ограниченных производных и*

$$\omega(f^{(r)};h) \leqslant C\left\{h\int_h^2 \frac{\omega(u)}{u^2}\,du+\int_0^h \frac{\omega(u)}{u}\,du\right\}, \quad 0<h\leqslant\frac{1}{2}.$$

Поступило
12.VI.1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Функции конечной степени и функции конечной полустепени, Соч., т. 2, М., 1954.

[2] Тиман А. Ф., Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси, Доклады Ак. наук СССР, 78, № 1 (1951), 17—20.

[3] Тиман А. Ф., Обратные теоремы конструктивной теории функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 5 (1957), 762—765.

[4] Дзядык В. К., О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip $\alpha$ ($0<\alpha<1$) на конечном отрезке вещественной оси, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 20 (1956), 623—642.

[5] Ахиезер Н. И. и Левин Б. Я., Неравенства для производных, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна, Доклады Ак. наук СССР, 117, № 5 (1957), 735—738.

[6] Брудный Ю. А., Приближение целыми функциями на внешности отрезка и полуоси, Доклады Ак. наук СССР, 124, № 4 (1959), 739—742.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 613—634

В. М. ИВАНОВА и А. А. ИВАНОВ

# ПРОСТРАНСТВА СМЕЖНОСТИ И БИКОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(*Представлено академиком* П. С. Александровым)

В работе вводятся пространства смежности, являющиеся обобщением пространств близости, и исследуется связь между ними и бикомпактными расширениями топологических пространств.

В настоящей работе дается обобщение понятия пространства близости, принадлежащего В. А. Ефремовичу, и результата Ю. М. Смирнова ([4]), установившего непосредственную связь между пространствами близости и бикомпактными хаусдорфовыми расширениями. Обобщение понятия пространства близости осуществляется здесь в двух направлениях. Во-первых, за счет замены аксиомы Б5, являющейся, по существу, аксиомой отделимости, более слабой аксиомой [Б5], удается ввести понятие близости, имеющее смысл для пространств класса $T_1$. Во-вторых, вводится понятие отношения смежности (пространства смежности), являющееся естественным обобщением отношения близости (пространства близости) в том смысле, что отношение близости является отношением для пар подмножеств топологического пространства, а отношение смежности является отношением для конечных систем подмножеств топологического пространства. Обобщение понятия близости и введение понятия отношения смежности (пространства смежности) позволило получить более общие, чем у Ю. М. Смирнова, результаты, устанавливающие, с одной стороны, непосредственную связь между пространствами близости и главными бикомпактными расширениями топологических пространств класса $T_1$ и, с другой стороны,— связь между пространствами смежности и правильными бикомпактными расширениями.

## Глава 1. Пространства смежности и пространства близости

Будем говорить, что на пространстве $E \in T_1$ задано *отношение смежности* $\sigma$ для конечных систем замкнутых множеств $E$, если относительно каждой такой системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ можно сказать, находится ли она в этом отношении (имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$), или нет (не имеет места $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$), и если это отношение удовлетворяет аксиомам:

(С1) Если системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$ и $\{F_1', F_2', \ldots, F_q'\}$ состоят из одних и тех же множеств, взятых в различном порядке, возможно с повторе-

ниями, то $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ и $\sigma(F'_1, F'_2, \ldots, F'_q)$ имеют или не имеют места одновременно.

(C2) Если имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ и $\{F'_1, F'_2, \ldots, F'_p\}$ — произвольная подсистема $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, то имеет место $\sigma(F'_1, F'_2, \ldots, F'_p)$.

(C3) Если $F_0 \subset F'_0$ и имеет место $\sigma(F_0, F_1, \ldots, F_n)$, то имеет место и $\sigma(F'_0, F_1, \ldots, F_n)$.

(C4) Если имеет место $\sigma(F_0 \cup F'_0, F_1, F_2, \ldots, F_n)$, то имеет место либо $\sigma(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n)$, либо $\sigma(F'_0, F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

(C5) Если среди множеств системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ есть пустое множество, то $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ не имеет места.

(C6). $\sigma(x, F)$, где $x$ — одноточечное множество, имеет место тогда и только тогда, когда $x \in F$.

Если для системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, то будем говорить, что эта система является *системой σ-смежности* или, если это не приведет к путанице, просто *системой смежности*.

Докажем некоторые простые следствия аксиом смежности.

(C7) Если $F_i \subset F'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, то имеет место $\sigma(F'_1, F'_2, \ldots, F'_n)$.

Доказательство можно провести индукцией по числу тех $i$, для которых $F_i \neq F'_i$, с использованием (C1) и (C3).

(C8) Если $\sum_i = \{F_i^j\}_{j=1}^{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — конечные замкнутые покрытия $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, то найдутся такие $j_1, j_2, \ldots, j_n$, что имеет место $\sigma(F_1^{j_1}, F_2^{j_2}, \ldots, F_n^{j_n})$

Положим

$$\Phi_i = \bigcup_{j=1}^{\alpha_i} F_i^j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как $F_i \subset \Phi_i$ и имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, то, в силу (C7), имеет место $\sigma(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$. Доказательство завершается индукцией по $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ с использованием (C1) и (C4).

(C9) Если $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \Lambda$, то $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — система смежности.

Пусть $x \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i$. В силу (C6), имеет место $\sigma(x, x)$ и, следовательно, в силу (C1), имеет место $\sigma(x, x, \ldots, x)$, где $x$ повторено $n$ раз. Так как $x \subset F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то, в силу (C7), имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

Приведем примеры отношений смежности.

1. Отношение смежности $\sigma_{\text{п}}$. Определим $\sigma_{\text{п}}$ следующим условием: $\sigma_{\text{п}}(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \Lambda$.

Проверим выполнение аксиом (C1) — (C6).

(C1): Пусть системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$ и $\{F_1', F_2', \ldots, F_q'\}$ состоят из одних и тех же множеств, взятых в различном порядке, возможно с повторениями. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{p} F_i = \bigcap_{i=1}^{q} F_i'$$

и, следовательно, $\sigma_\text{п}(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ и $\sigma_\text{п}(F_1', F_2', \ldots, F_q')$ имеют или не имеют места одновременно.

(C2): Пусть $\{F_1', \ldots, F_2', \ldots, F_p'\}$ — произвольная подсистема $\{F_1, F_2, \ldots \ldots, F_n\}$ и имеет место $\sigma_\text{п}(F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \subset \bigcap\limits_{i=1}^{p} F_i'$, и так как $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \Lambda$, то $\bigcap\limits_{i=1}^{p} F_i' \neq \Lambda$; следовательно, имеет место $\sigma_\text{п}(F_1', F_2', \ldots, F_p')$.

(C3): Пусть имеет место $\sigma_\text{п}(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ и $F_0 \subset F_0'$. Тогда $\bigcap\limits_{i=0}^{n} F_i \subset F_0' \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$, и так как $\bigcap\limits_{i=0}^{n} F_i \neq \Lambda$, то $F_0' \cap \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \Lambda$; следовательно, имеет место $\sigma_\text{п}(F_0', F_1, \ldots, F_n)$.

(C4): Пусть имеет место $\sigma_\text{п}(F_0 \cup F_0', F_1, \ldots, F_n)$. Тогда

$$(F_0 \cup F_0') \cap \bigcap_{i=1}^{n} F_i = \left(F_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \cup \left(F_0' \cap \bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \neq \Lambda;$$

таким образом, либо

$$F_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \Lambda,$$

либо

$$F_0' \cap \bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \Lambda,$$

следовательно, имеет место либо $\sigma_\text{п}(F_0, F_1, \ldots, F_n)$, либо $\sigma_\text{п}(F_0', F_1, \ldots, F_n)$.

(C5): Если среди множеств системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ есть пустое множество, то $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i = \Lambda$, и, следовательно, $\sigma_\text{п}(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ не имеет места.

(C6): Пусть имеет место $\sigma_\text{п}(x, F)$. Тогда $(x) \cap F \neq \Lambda$ и, следовательно, $x \in F$.

Пусть $x \in F$. Тогда $(x) \cap F \neq \Lambda$ и, следовательно, имеет место $\sigma_\text{п}(x, F)$.

Введенное отношение смежности $\sigma_\text{п}$ будем называть *смежностью по пересечениям.*

2. Отношение смежности $\sigma_{\mathfrak{B}}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — замкнутый базис $E$, содержащий все конечные суммы и пересечения своих элементов, все одноточечные и пустое множества. Определим отношение смежности $\sigma_{\mathfrak{B}}$ следующим условием:

$\sigma_{\mathfrak{B}}(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда для лю-

бых базисных множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$, содержащих $F_1, F_2, \ldots, F_n$ соответственно, $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \neq \Lambda$.

Проверим выполнение аксиом (C1) — (C6).

(C1): Пусть системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$ и $\{F'_1, F'_2, \ldots, F'_q\}$ состоят из одних и тех же замкнутых множеств, взятых в различном порядке, возможно с повторениями, и имеет место $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_1, F_2, \ldots, F_p)$. Если $B'_1, B'_2, \ldots, B'_q$ — произвольные базисные множества, содержащие соответственно $F'_1, F'_2, \ldots, F'_q$, то мы сможем найти такие базисные множества $B''_i$, что

$$F'_i \subset B''_i \subset B'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

и $B''_i = B''_j$, если $F'_i = F'_j$. Это можно сделать, взяв, например, пересечения $B'_i$ для совокупностей $i$, являющихся индексами совпадающих множеств $F'_i$. Далее можно найти систему таких базисных множеств $B_1, B_2, \ldots, B_p$, выбирая их среди $B''_i$, что $F_i \subset B_i$ и

$$\bigcap_{i=1}^{p} B_i = \bigcap_{i=1}^{q} B''_i \subset \bigcap_{i=1}^{q} B'_i.$$

Так как $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ имеет место, то $\bigcap_{i=1}^{p} B_i \neq \Lambda$, следовательно,

$$\bigcap_{i=1}^{q} B'_i \neq \Lambda,$$

т. е. имеет место $\sigma_{\mathfrak{B}}(F'_1, F'_2, \ldots, F'_q)$. Такое же рассуждение можно провести, меняя местами $\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$ и $\{F'_1, F'_2, \ldots, F'_q\}$; следовательно, $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_1, F_2, \ldots, F_p)$ и $\sigma_{\mathfrak{B}}(F'_1, F'_2, \ldots, F'_q)$ имеют или не имеют места одновременно.

(C2): Пусть $\{F'_1, F'_2, \ldots, F'_p\}$ — произвольная подсистема $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ и имеет место $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Если $B'_1, B'_2, \ldots, B'_p$ — произвольные базисные множества, содержащие соответственно $F'_1, F'_2, \ldots, F'_p$, то мы можем построить систему базисных множеств $B_1, B_2, \ldots, B_n$, взяв соответствующие $B'_i$ для тех $F_i$, которые входят в систему $\{F'_1, F'_2, \ldots, F'_p\}$, и произвольные базисные надмножества для тех $F_i$, которые не входят в $\{F'_1, F'_2, \ldots, F'_p\}$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i \subset \bigcap_{i=1}^{p} B'_i,$$

и так как $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \neq \Lambda$, то

$$\bigcap_{i=1}^{p} B'_i \neq \Lambda,$$

следовательно, имеет место $\sigma_{\mathfrak{B}}(F'_1, F'_2, \ldots, F'_p)$.

(C3): Пусть имеет место $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ и $F_0 \subset F'_0$. Если $B_0, B_1, \ldots, B_n$ — произвольные базисные множества, содержащие соответ-

ственно $F_0'$, $F_1$, $F_2, \ldots, F_n$, то они содержат также соответственно $F_0$, $F_1$, $F_2, \ldots, F_n$ и $\bigcap\limits_{i=0}^{n} B_i \neq \Lambda$, т. е. имеет место $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_0', F_1, \ldots, F_n)$.

(C4): Пусть имеет место $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_0 \cup F_0', F_1, \ldots, F_n)$. Если бы не имели места ни $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_0, F_1, \ldots, F_n)$, ни $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_0', F_1, \ldots, F_n)$, то нашлись бы базисные множества $B_0'$, $B_1', \ldots, B_n'$, $B_0''$, $B_1'', \ldots, B_n''$, содержащие соответственно $F_0$, $F_1, \ldots, F_n$, $F_0'$, $F_1, \ldots, F_n$ такие, что

$$\bigcap_{i=0}^{n} B_i' = \Lambda, \quad \bigcap_{i=0}^{n} B_i'' = \Lambda.$$

Положив

$$B_0 = B_0' \cup B_0'', \quad B_i = B_i' \cap B_i'' \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

мы получили бы систему базисных множеств $B_0$, $B_1, \ldots, B_n$, содержащих соответственно $F_0 \cup F_0'$, $F_1$, $F_2, \ldots, F_n$, такую, что

$$\bigcap_{i=0}^{n} B_i = (B_0' \cup B_0'') \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i' \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i'' = \left(\bigcap_{i=0}^{n} B_i' \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i''\right) \cap \left(\bigcap_{i=0}^{n} B_i'' \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i'\right) = \Lambda.$$

Но это противоречит тому, что $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_0 \cup F_0', F_1, \ldots, F_n)$ имеет место, следовательно, наше предположение неверно и имеет место либо $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_0, F_1, \ldots, F_n)$, либо $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_0', F_1, \ldots, F_n)$.

(C5): Пусть среди множеств системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ имеется пустое множество. Тогда в качестве базисных множеств $B_1$, $B_2, \ldots, B_n$, содержащих соответственно $F_1$, $F_2, \ldots, F_n$, можно взять такие, что одно из $B$ пусто, следовательно, мы будем иметь $\bigcap\limits_{i=1}^{n} B_i = \Lambda$, и $\sigma_{\mathfrak{B}}(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ не имеет места.

(C6): Пусть имеет место $\sigma_{\mathfrak{B}}(x, F)$. В качестве $B_1$ возьмем $(x)$, в качестве $B_2$ — произвольное базисное множество, содержащее $F$. Так как $B_1 \cap B_2 = (x) \cap B_2 \neq \Lambda$, то $x \in B_2$, т. е. $x$ содержится в любом базисном множестве, содержащем $F$, и, следовательно, $x \in F$.

Пусть $x \in F$ и $B_1$, $B_2$ — произвольные базисные множества, содержащие соответственно $x$ и $F$. Тогда $x \in B_1 \cap B_2 \neq \Lambda$ т. е. $\sigma_{\mathfrak{B}}(x, F)$ имеет место.

Введенное отношение смежности $\sigma_{\mathfrak{B}}$ будем называть *смежностью по базису* $\mathfrak{B}$.

Наряду с отношениями смежности для конечных систем замкнутых множеств мы будем рассматривать также отношения близости для пар замкнутых множеств.

Будем говорить, что на топологическом пространстве $E \in T_1$ задано *отношение близости* $\delta$ для пар замкнутых множеств, если относительно каждой такой пары $\{F_1, F_2\}$ можно сказать, находится ли она в этом отношении (имеет место $\delta(F_1, F_2)$) или нет (не имеет места $\delta(F_1, F_2)$) и если это отношение удовлетворяет аксиомам:

(Б1) Для любой пары $\{F_1, F_2\}$ $\delta(F_1, F_2)$ и $\delta(F_2, F_1)$ имеют или не имеют места одновременно.

(Б2) $\delta(F_1 \cup F_1', F_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место либо $\delta(F_1, F_2)$, либо $\delta(F_1', F_2)$.

(Б3) $\delta(x, F)$, где $x$ — одноточечное множество, имеет место тогда и только тогда, когда $x \in F$.

(Б4) Если хоть одно из множеств $F_1$, $F_2$ пусто, то $\delta(F_1, F_2)$ не имеет места.

Если для множеств $F_1$, $F_2$ имеет место отношение $\delta(F_1, F_2)$, то будем говорить, что они *δ-близки* или, если это не приведет к путанице, просто *близки*.

ТЕОРЕМА 1. *Любое отношение смежности рассматриваемое на множестве пар замкнутых множеств, является отношением близости.*

Пусть $\sigma$ — отношение смежности на $E \in T_1$. Определим отношение $\delta$, положив $\delta(F_1, F_2) = \sigma(F_1, F_2)$. То, что $\delta$ является отношением близости на $E$, т. е. что $\delta$ удовлетворяет аксиомам (Б1) — (Б4), является, как легко показать, непосредственным следствием аксиом (С1) — (С6).

Будем в дальнейшем говорить, что отношение смежности $\sigma$ и отношение близости $\delta$ *согласованы*, если $\delta$ является ограничением $\sigma$.

Примеры отношений близости:

1. $\delta_{\text{п}}$, являющееся ограничением $\sigma_{\text{п}}$.

2. $\delta_{\mathfrak{B}}$, являющееся ограничением $\sigma_{\mathfrak{B}}$.

3. Если $E$ вполне регулярно, то можно определить отношение близости $\delta_f$, для которого $\delta_f(F_1, F_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда $F_1$ и $F_2$ не отделимы непрерывной функцией (не существует на $E$ непрерывной функции, принимающей значения между 0 и 1, которая равна 0 на $F_1$ и 1 — на $F_2$).

Выполнение аксиом (Б1) — (Б4) для $\delta_f$ проверяется без труда.

Рассмотрим множество отношений смежности на $E$, согласованных с одним и тем же отношением близости $\delta$. Введем на этом множестве частичное упорядочение, положив $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$, если любая система $\sigma_1$-смежности является системой $\sigma_2$-смежности. Это частичное упорядочение будем называть *естественным*.

ТЕОРЕМА 2. *В естественно упорядоченном множестве отношений смежности на $E$, согласованных с определенным отношением близости $\delta$, есть наибольший и наименьший элементы.*

Пусть на $E$ задано некоторое отношение близости $\delta$. Определим на $E$ отношения $\sigma_0$ и $\sigma_1$.

$\sigma_0(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда для любой системы $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ замкнутых конечных покрытий множеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$ можно выбрать по одному элементу из каждого покрытия так, что выбранные множества будут попарно δ-близки.

$\sigma_1(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие δ-близкие множества $\Phi_1$ и $\Phi_2$ (возможно совпадающие), что каждое $F_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ содержит либо $\Phi_1$, либо $\Phi_2$.

Покажем, что $\sigma_0$ является отношением смежности.

(С1): Пусть системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$ и $\{F_1', F_2', \ldots, F_q'\}$ состоят из одних и тех же множеств, взятых в различном порядке, возможно с повторениями, и имеет место $\sigma_0\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$. Для того чтобы показать,

что в этом случае имеет место и $\sigma_0(F_1', F_2', \ldots, F_q')$, надо убедиться в том, что для любой системы конечных замкнутых покрытий $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_q'$ множеств $F_1', F_2', \ldots, F_q'$ можно выбрать по одному элементу из каждого покрытия так, что выбранные множества будут попарно $\delta$-близки.

Заметим, что это утверждение достаточно доказать для любой системы конечных замкнутых покрытий множеств $F_i'$, в которой одинаковые множества имеют одинаковые покрытия. Это следует из того, что для любой системы $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_q'$ конечных замкнутых покрытий множеств $F_1', F_2', \ldots, F_q'$ найдется такая система $\Sigma_1'', \Sigma_2'', \ldots, \Sigma_q''$ покрытий упомянутого выше специального вида, что каждое $\Sigma_i''$ будет вписано в $\Sigma_i'$ (если перейти, например, к пересечениям покрытий $\Sigma_i'$ одинаковых $F_i'$), и если мы сможем выбрать по одному элементу из каждого $\Sigma_i''$ так, что выбранные множества будут попарно близки, то, в силу вписанности $\Sigma_i''$ в $\Sigma_i'(i = 1, 2, \ldots, q)$ и аксиомы (Б2), мы сможем выбрать из каждого $\Sigma_i'$ по одному элементу таким образом, что выбранные множества будут попарно близки.

Пусть $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_q'$ — система замкнутых конечных покрытий специального вида множеств $F_1', F_2', \ldots, F_q'$ соответственно. По этой системе можно образовать систему $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ покрытий множеств $F_1, F_2, \ldots, F_p$, выбирая для каждого $F_i$ покрытие $\Sigma_j'$ множества $F_j'$, равного $F_i$. При этом будут использованы все различные среди $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_q'$ покрытия, так как $\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$ и $\{F_1', F_2', \ldots, F_q'\}$ состоят из одного и того же набора множеств. Так как имеет место $\sigma_0(F_1, F_2, \ldots, F_p)$, то из каждого $\Sigma_i$ можно выбрать по одному элементу так, чтобы выбранные множества были попарно близки. Каждое из $\Sigma_i'$ совпадает по крайней мере с одним из $\Sigma_j$, следовательно, в нем есть выбранные из $\Sigma_j$ элементы и, таким образом, из каждого $\Sigma_i'$ можно выбрать по одному элементу так, что выбранные множества будут попарно близки.

(С2) непосредственно следует из того, что всякая подсистема попарно близких множеств является системой попарно близких множеств.

(С3): Пусть имеет место $\sigma_0(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ и $F_0 \subset F_0'$. Любая система $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ покрытий множеств $F_0', F_1, \ldots, F_n$ является одновременно системой покрытий $F_0, F_1, \ldots, F_n$ и, в силу того, что имеет место $\sigma_0(F_0, F_1, \ldots, F_n)$, из каждого $\Sigma_i$ можно выбрать по одному элементу так, что выбранные множества будут попарно близки, т. е. имеет место $\sigma_0(F_0', F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

(С4): Пусть имеет место $\sigma_0(F_0 \cup F_0', F_1, \ldots, F_n)$ и допустим, что не имеет места ни $\sigma_0(F_0, F_1, \ldots, F_n)$, ни $\sigma_0(F_0', F_1, \ldots, F_n)$. Тогда должны найтись системы покрытий $\Sigma_0', \Sigma_1', \ldots, \Sigma_n'$ множеств $F_0, F_1, \ldots, F_n$ и $\Sigma_0'', \Sigma_1'', \ldots, \Sigma_n''$ множеств $F_0', F_1, \ldots, F_n$ такие, что ни в первой, ни во второй системах нельзя найти по элементу из каждого покрытия так, чтобы выбранные элементы были попарно близки. Образуем систему покрытий $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ множеств $F_0 \cup F_0', F_1, \ldots, F_n$, взяв в качестве $\Sigma_0$ объеди-

нение $\Sigma_0'$ и $\Sigma_0''$, а в качестве $\Sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — пересечение покрытий $\Sigma_i''$ и $\Sigma_i'$. Так как имеет место $\sigma_0(F_0 \cup F_0', F_1, F_2, \ldots, F_n)$, то из каждого $\Sigma_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ можно выбрать по одному элементу так, что выбранные множества будут попарно близки. Элемент, выбранный из $\Sigma_0$, принадлежит либо $\Sigma_0'$, либо $\Sigma_0''$. Пусть, для определенности, он принадлежит $\Sigma_0'$. Тогда $\Sigma_0'$, $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ образуют такую систему покрытий множеств $F_0$, $F_1, \ldots, F_n$, что из каждого покрытия можно выбрать по одному элементу, а выбранные множества будут попарно близки. Но эта система состоит из покрытий, вписанных в соответствующие покрытия $\Sigma_0'$, $\Sigma_1', \ldots, \Sigma_n'$, для которых аналогичный выбор невозможен, что, в силу (Б2), приводит к противоречию, опровергающему наше предположение.

(С5): Пусть среди множеств системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ есть пустое множество. Возьмем $\Sigma_i = \{F_i\}$; так как среди $F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть пустое множество, то они не могут быть все попарно близки, т. е. $\sigma_0(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ не имеет места.

Мы не будем специально доказывать выполнение (С6) для $\sigma_0$, а перейдем к доказательству согласованности $\sigma_0$ и $\delta$, откуда, в частности, будет следовать и (С6).

Если имеет место $\sigma_0(F_1, F_2)$, то имеет место и $\delta(F_1, F_2)$, так как можно взять $\Sigma_1 = \{F_1\}$, $\Sigma_2 = \{F_2\}$.

Если имеет место $\delta(F_1, F_2)$ и $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ — произвольные покрытия соответственно $F_1$, $F_2$, причем

$$\Sigma_1 = \{F_1^j\}_j, \quad \Sigma_2 = \{F_2^j\}_j,$$

то, по естественному обобщению (Б2), аналогичному (С8), найдутся $F_1^{j_1}$, $F_2^{j_2}$ такие, что имеет место $\delta(F_1^{j_1}, F_2^{j_2})$ и, таким образом, имеет место $\sigma_0(F_1, F_2)$.

Покажем, что $\sigma_0$ — наименьшее, согласованное с $\delta$, отношение смежности.

Пусть $\sigma$ — произвольное отношение смежности на $E$, согласованное с $\delta$, и $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — система $\sigma$-смежности. Если $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ — произвольная система замкнутых конечных покрытий $F_1, F_2, \ldots, F_n$, то, в силу (С8), можно выбрать по одному элементу из каждого $\Sigma_j$ так, что выбранные множества образуют систему $\sigma$-смежности и, в частности, будут попарно $\sigma$-смежны. Так как $\sigma$ согласовано с $\delta$, то выбранные множества будут попарно $\delta$-близки и, следовательно, система $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ будет являться системой $\sigma_0$-смежности.

Перейдем к изучению отношения $\sigma_1$. Покажем, что $\sigma_1$ является отношением смежности.

(С1): Пусть системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$ и $\{F_1', F_2', \ldots, F_q'\}$ состоят из одних и тех же множеств, взятых в различном порядке, возможно с повторениями, и имеет место $\sigma_1(F_1, F_2, \ldots, F_p)$, т. е. существуют такие $\delta$-близкие $\Phi_1$ и $\Phi_2$, что каждое из $F_i$ содержит либо $\Phi_1$, либо $\Phi_2$. Так как системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$ и $\{F_1', F_2', \ldots, F_q'\}$ состоят из одних и тех же множеств, то каждое $F_i'$ также содержит либо $\Phi_1$, либо $\Phi_2$, следовательно, $\sigma_1(F_1', F_2', \ldots, F_q')$ имеет место.

(С2): Если система $\{F_1', F_2', \ldots, F_q'\}$ является подсистемой $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ и имеет место $\sigma_1(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, т. е. существуют $\delta$-близкие $\Phi_1$ и $\Phi_2$ такие, что каждое $F_i$ содержит либо $\Phi_1$, либо $\Phi_2$, то каждое $F_i'$ содержит либо $\Phi_1$, либо $\Phi_2$, следовательно, $\sigma_1(F_1', F_2', \ldots, F_q')$ имеет место.

(С3): Если имеет место $\sigma_1(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ и $F_0 \subset F_0'$, то найдутся $\delta$-близкие $\Phi_1$ и $\Phi_2$ такие, что каждое $F_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ содержит либо $\Phi_1$, либо $\Phi_2$, следовательно, каждое из $F_0', F_1, F_2, \ldots, F_n$ содержит либо $\Phi_1$, либо $\Phi_2$, т. е. $\sigma_1(F_0', F_1, \ldots, F_n)$ имеет место.

(С4): Пусть имеет место $\sigma_1(F_0 \cup F_0', F_1, \ldots, F_n)$, т. е. существуют $\delta$-близкие $\Phi_1$ и $\Phi_2$ такие, что все множества $F_0 \cup F_0', F_1, \ldots, F_n$ содержат либо $\Phi_1$, либо $\Phi_2$. Пусть, для определенности, $F_0 \cup F_0'$ содержит $\Phi_1$. Так как множества $\Phi_1 = (F_0 \cap \Phi_1) \cup (F_0' \cap \Phi_1)$ и $\Phi_2$ $\delta$-близки, то, в силу (Б2), $\delta$-близки либо $F_0 \cap \Phi_1$ и $\Phi_2$, либо $F_0' \cap \Phi_1$ и $\Phi_2$. Пусть, для определенности, $F_0 \cap \Phi_1 = \Phi_1'$ и $\Phi_2$ $\delta$-близки. Тогда каждое множество системы $\{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$ содержит по крайней мере одно из $\delta$-близких множеств $\Phi_1'$ и $\Phi_2$, т. е. $\sigma_1(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ имеет место.

(С5): Если среди множеств системы $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ есть пустое множество и каждое из них содержит либо множество $\Phi_1$, либо множество $\Phi_2$, то одно из $\Phi_1$, $\Phi_2$ должно быть пусто, следовательно, $\Phi_1$ и $\Phi_2$ не могут быть $\delta$-близки, т. е. $\sigma_1(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ не имеет места.

Мы не будем опять специально доказывать выполнение (С6) для $\sigma_1$, а сразу докажем согласованность $\sigma_1$ с $\delta$, откуда, в частности, будет следовать и (С6).

Если имеет место $\delta(F_1, F_2)$, то в качестве $\Phi_1$ и $\Phi_2$ можно взять $F_1$ и $F_2$, т. е. $\sigma_1(F_1, F_2)$ имеет место. Если имеет место $\sigma_1(F_1, F_2)$, то найдутся $\delta$-близкие $\Phi_1$, $\Phi_2$ такие, что $F_1$ и $F_2$ содержат либо $\Phi_1$, либо $\Phi_2$. Если $F_1$ и $F_2$ содержат одно и то же $\Phi_i$, то $F_1 \cap F_2 \neq \Lambda$, и имеет место $\delta(F_1, F_2)$; если же $F_1$ и $F_2$ содержат различные $\Phi_i$, то без нарушения общности можно считать, что $\Phi_1 \subset F_1$, $\Phi_2 \subset F_2$, и так как имеет место $\delta(\Phi_1, \Phi_2)$, то имеет место и $\delta(F_1, F_2)$.

Покажем, что $\sigma_1$ — наибольшее, согласованное с $\delta$, отношение смежности.

Пусть $\sigma$ — произвольное, согласованное с $\delta$, отношение смежности и $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — система $\sigma_1$-смежности, т. е. существуют $\delta$-близкие $\Phi_1$ и $\Phi_2$ такие, что каждое $F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ содержит либо $\Phi_1$, либо $\Phi_2$. Перенумеруем $F_i$ так, что $F_1, F_2, \ldots, F_p$ содержат $\Phi_1$, а $F_{p+1}, \ldots, F_n$ содержат $\Phi_2$. Из $\delta(\Phi_1, \Phi_2)$ следует $\sigma(\Phi_1, \Phi_2)$, и, в силу (С1), имеет место $\sigma(\Phi_1, \Phi_1, \ldots, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_2)$, где $\Phi_1$ повторено $p$ раз, а $\Phi_2$ повторено $n - p$ раз, откуда, в силу (С3), следует $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_p, F_{p+1}, \ldots, F_n)$.

Этим завершается доказательсто теоремы 2.

Из теоремы 2 следует, в частности, что каждое отношение близости на $E$ может быть продолжено до отношения смежности. Из всех таких отношений смежности особое место занимает минимальное $\sigma_0$, которое мы будем называть также главным отношением смежности.

Можно привести примеры отношений близости $\delta$ на некоторых топологических пространствах, для которых наибольшее и наименьшее отношения смежности $\sigma_1$ и $\sigma_0$, согласованные с $\delta$, совпадают и, следова-

тельно, имеется единственное отношение смежности, согласованное с $\delta$. Существуют также примеры отношений близости, для которых единственными, согласованными с ними, отношениями смежности являются наибольшее или наименьшее и они не совпадают. Однако общим случаем является тот, когда, кроме наибольшего и наименьшего, имеются отличные от них отношения смежности, согласованные с заданным отношением близости.

В заключение рассмотрим связь введенных здесь понятий отношений смежности и близости с введенным ранее В. А. Ефремовичем ([4]) понятием пространства близости.

Заметим, прежде всего, что различие между нашим определением отношения близости и определением В. А. Ефремовича имеет место в двух пунктах.

1. Отношение близости по В. А. Ефремовичу определяется для любых (не обязательно замкнутых) пар подмножеств $E$. Это отношение близости определяет и топологию $E$.

2. Среди аксиом В. А. Ефремовича имеется аксиома Б5: для любых неблизких множеств $A$ и $B$ существуют такие множества $C$ и $D$, что $C \cup D = E$, $A$ не близко $D$, $B$ не близко $C$.

Первое различие не имеет принципиального характера, ибо любое наше отношение близости, как мы увидим дальше, может быть естественным образом продолжено до отношения близости любых подмножеств $E$ так, что топология $E$, определяемая этим более общим отношением близости, совпадает с первоначальной. Учитывая это, мы можем также ввести понятие пространства близости.

Будем говорить, что на множестве $E$ определено *общее отношение близости* $\delta$, если относительно каждой пары $\{A_1, A_2\}$ подмножеств $E$ можно сказать, находится ли она в этом отношении (имеет место $\delta(A_1, A_2)$) или нет (не имеет места $\delta(A_1, A_2)$), и если это отношение удовлетворяет аксиомам:

[Б1]. Если имеет место $\delta(A_1, A_2)$, то имеет место $\delta(A_2, A_1)$.

[Б2] $\delta(A_1 \cup A_1', A_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда имеет место либо $\delta(A_1, A_2)$, либо $\delta(A_1', A_2)$.

[Б3] $\delta(x, y)$, где $x$, $y$ — точки $E$, имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$.

[Б4] Если $A = \Lambda$, то $\delta(E, A)$ не имеет места.

[Б5] Если $A'$ содержит только точки $E$, близкие $A$, и имеет место $\delta(x, A')$, то имеет место $\delta(x, A)$.

Определим на $E$ операцию замыкания, положив $\overline{A} = \{x \mid \delta(x, A)\}$. Нетрудно проверить, что эта операция замыкания превращает $E$ в топологическое пространство класса $T_1$ и ограничение $\delta$ до отношения $\delta'$ двух любых замкнутых множеств пространства $E$ является отношением близости.

ТЕОРЕМА 3. *Произвольное общее отношение близости $\delta'$ на множестве $E$ определяет топологическое пространство $E \in T_1$ и отношение близости $\delta$ на $E$, являющееся ограничением $\delta'$.*

Проверим выполнение аксиом замыкания.

1. $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$. Если $x \in \overline{A_1 \cup A_2}$, то имеет место $\delta'(x, A_1 \cup A_2)$

и, в силу [Б2], имеет место либо $\delta'(x, A_1)$, либо $\delta'(x, A_2)$, т. е. либо $x \in \bar{A}_1$, либо $x \in \bar{A}_2$. Если $x \in \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$, то либо $x \in \bar{A}_1$, либо $x \in \bar{A}_2$, т. е. имеет место либо $\delta'(x, A_1)$, либо $\delta'(x, A_2)$, но, в силу [Б2], имеет место $\delta'(x, A_1 \cup A_2)$, следовательно, $x \in \overline{A_1 \cup A_2}$.

2. $A \subset \bar{A}$. Если $x \in A$, то из $\delta'(x, x)$, в силу [Б2], следует $\delta'(x, A)$ и, таким образом, $x \in \bar{A}$.

3. $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$. Достаточно показать, что $\overline{(\bar{A})} \subset \bar{A}$. Пусть $x \in \overline{(\bar{A})}$, т. е. имеет место $\delta'(x, \bar{A})$; тогда, в силу [Б5], имеет место $\delta'(x, A)$, т. е. $x \in \bar{A}$.

4. $\bar{\Lambda} = \Lambda$. Не существует $x \in E$ такого, что имеет место $\delta'(x, A)$ следовательно, $\bar{\Lambda} = \Lambda$.

Из аксиомы [Б3] следует, что $\overline{(x)} = (x)$, т. е. $E \in T_1$.

Выполнение аксиом (Б1) — (Б3) для $\delta$ является непосредственным следствием выполнения аксиом [Б1] — [Б5] для $\delta'$. Проверим выполнение аксиомы (Б4). Мы имеем:

$$F = \bar{F} = \{x \mid \delta'(x, F)\} = \{x \mid \delta(x, F)\}. \qquad (*)$$

Если имеет место $\delta(x, F)$, то, в силу (*), $x \in F$; если $x \in F$, то, снова в силу (*), имеет место $\delta(x, F)$.

ТЕОРЕМА 4. *Произвольное отношение близости $\delta$ на топологическом пространстве $E \in T_1$ может быть продолжено до общего отношения близости, определяющего на $E$ первоначальную топологию.*

Пусть $\delta$ — отношение близости на $E$. Продолжим его до общего отношения близости $\delta'$, считая, что $\delta'(A, B)$ имеет место, если имеет место $\delta(\bar{A}, \bar{B})$. Тогда аксиомы [Б1] — [Б4] являются следствиями аксиом (Б1) — (Б4), аксиома же [Б5] выполняется по самому определению $\delta'$.

Покажем, что $\delta'$ определяет на $E$ первоначальную топологию. Обозначим через $\bar{A}^E$ и $\bar{A}^{\delta'}$ операции замыкания, определяемые соответственно первоначальной топологией $E$ и общим отношением смежности $\delta'$. Тогда

$$\bar{A}^{\delta'} = \{x, \delta'(x, A)\} = \{x \mid \delta(x, \bar{A}^E)\} = \bar{A}^E,$$

т. е. действительно эти операции замыкания совпадают.

Теоремы 3 и 4 делают естественным следующее определение.

Топологическое пространство $E \in T_1$ будем называть *пространством близости*, если на нем задано определенное отношение близости для пар замкнутых множеств.

Легко заметить, что любое пространство близости в смысле В. А. Ефремовича является пространством близости в нашем смысле. Однако второе различие между нашим определением отношения близости и определением В. А. Ефремовича, требующего выполнения аксиомы Б5, является принципиальным. Аксиома Б5 является, по существу, аксиомой отделимости, она резко сужает класс пространств, на которых можно определить отношение близости по В. А. Ефремовичу (это класс вполне регулярных пространств).

В дальнейшем мы будем называть отношения близости, удовлетворяющие аксиоме Б5, *хаусдорфовыми* и пространства близости в смысле В. А. Ефремовича — пространствами *хаусдорфовой близости*.

Подобно тому, как мы продолжали любое отношение близости до общего отношения близости, можно продолжать отношения смежности

для систем замкнутых множеств до общих отношений смежности для систем любых подмножеств. При этом будут справедливы теоремы, аналогичные теоремам 3 и 4, что делает естественным следующее определение.

Топологическое пространство $E \in T_1$ будем называть *пространством смежности*, если на нем задано определенное отношение смежности для конечных систем замкнутых множеств.

Можно сказать, имея в виду теорему 2, что любое пространство близости может быть доопределено до пространства смежности и что любое пространство смежности является уточнением некоторого пространства близости.

## Глава 2. Бикомпактные расширения топологических пространств

В имеющейся литературе по теории расширений топологических пространств [см. ([1]), ([2]), ([3])] обычно применяется в той или иной форме метод центрированных систем. Мы используем здесь другой метод, представляющийся нам более удобным, рассматривая вместо центрированных систем системы смежности.

Пусть $\sigma$ — некоторое отношение смежности на топологическом пространстве $E \in T_1$. Систему замкнутых подмножеств $E$ будем называть *системой $\sigma$-смежности* или просто *системой смежности*, если любая ее конечная подсистема является системой $\sigma$-смежности.

Любая система смежности содержится в некоторой максимальной, ибо, как легко заметить, свойство системы быть системой смежности индуктивно. Очевидно также, что любая центрированная система является системой смежности, однако максимальная центрированная система может и не быть максимальной системой смежности.

Рассмотрим некоторые свойства максимальных систем смежности.

ЛЕММА 1. *Пусть $\beta$ — максимальная система смежности, $F \in \beta$ и $F \subset F'$; тогда $F' \in \beta$.*

Рассмотрим $\beta' = \beta \cup \{F'\}$ и покажем, что $\beta'$ является системой смежности. Если $F_1, F_2, \ldots, F_n$ принадлежат $\beta'$ и все отличны от $F'$, то они принадлежат $\beta$, следовательно, имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Если среди $F_1, F_2, \ldots, F_n$ есть $F'$, то, заменив все $F_i$, равные $F'$, на $F$, мы получим систему $\{F_1', F_2', \ldots, F_n'\}$, все элементы которой принадлежат $\beta$, и имеет место $\sigma(F_1', F_2', \ldots, F_n')$. Так как $F_i' \subset F_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, то отсюда снова следует $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

Таким образом, $\beta'$ является системой смежности, и в силу максимальности $\beta$ имеем $\beta = \beta'$, т. е. $F' \in \beta$.

ЛЕММА 2. *Пусть $\beta$ — максимальная система смежности и $\sum_{j=1}^{n} F_j \in \beta$; тогда хоть одно из $F_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежит $\beta$.*

Достаточно, очевидно, доказать это утверждение для $n = 2$. Пусть $F \cup F' \in \beta$. Если $F$ не принадлежит $\beta$, то существуют $F_1, F_2, \ldots, F_p$ из $\beta$ такие, что $\sigma(F, F_1, \ldots, F_p)$ не имеет места. Если и $F'$ не принадлежит $\beta$, то найдутся также такие $F_1', F_2', \ldots, F_q'$, что и $\sigma(F', F_1', \ldots, F_q')$ не имеет места. Тогда не будет иметь места ни

$\sigma(F, F_1, \ldots, F_p, F_1', \ldots, F_q')$, ни $\sigma(F', F_1, \ldots, F_p, F_1', \ldots, F_q')$ и, следовательно, не будет иметь места $\sigma(F \cup F', F_1, \ldots, F_p, F_1', \ldots, F_q')$, чего не может быть, так как $F \cup F'$ и все $F_i$ и $F_i'$ принадлежат $\beta$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 3. *Совокупность всех замкнутых множеств, содержащих $x \in E$, является максимальной системой смежности.*

Пусть $\beta = \{F \mid x \in F\}$. Так как $\beta$ — центрированная система, то она является системой смежности. Если $\beta \subset \beta'$ и $F \in \beta'$, то имеет место $\sigma(x, F)$, откуда следует, что $x \in F$ и $F \in \beta$, т. е. $\beta$ действительно есть максимальная система смежности.

Будем называть систему смежности *исчезающей*, если пересечение всех ее элементов пусто.

Пусть на $E$ задано определенное отношение смежности $\sigma$. Обозначим через $\widetilde{\sigma E}$ совокупность всех исчезающих максимальных систем $\sigma$-смежности. Сумму $E$ и $\widetilde{\sigma E}$ обозначим через $\sigma E$:

$$\sigma E = E \cup \widetilde{\sigma E}.$$

Пусть, далее, $\widetilde{\Phi}_F$ — совокупность всех исчезающих максимальных систем $\sigma$-смежности, имеющих $F$ в качестве своего элемента. Положим

$$\Phi_F = F \cup \widetilde{\Phi}_F.$$

ЛЕММА 4. *Для любых замкнутых в $E$ множеств $F$ и $F'$ имеем*

$$\Phi_{F \cup F'} = \Phi_F \cup \Phi_{F'}.$$

Очевидно достаточно показать, что

$$\widetilde{\Phi}_{F \cup F'} = \widetilde{\Phi}_F \cup \widetilde{\Phi}_{F'}.$$

Если $\beta \in \widetilde{\Phi}_{F'} \cup \widetilde{\Phi}_{F'}$, то либо $\beta \in \widetilde{\Phi}_F$, либо $\beta \in \widetilde{\Phi}_{F'}$. Пусть, для определенности, $\beta \in \widetilde{\Phi}_F$; тогда $F \in \beta$ и $F \cup F' \in \beta$, следовательно,

$$\beta \in \widetilde{\Phi}_{F \cup F'}.$$

Если $\beta \in \widetilde{\Phi}_{F \cup F'}$, то $F \cup F' \in \beta$, следовательно, по лемме 2, либо $F$, либо $F'$ принадлежит $\beta$, откуда следует, что $\beta$ принадлежит либо $\widetilde{\Phi}_F$, либо $\widetilde{\Phi}_{F'}$ и, таким образом,

$$\beta \in \widetilde{\Phi}_F \cup \widetilde{\Phi}_{F'}.$$

ЛЕММА 5. $\Phi_{(x)} = (x)$.

Мы имеем:

$$\Phi_{(x)} = (x) \cup \widetilde{\Phi}_{(x)}.$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\widetilde{\Phi}_{(x)} = \Lambda.$$

Это следует из того, что всякая система смежности, содержащая $(x)$ в качестве элемента, не может быть исчезающей. Пусть $\beta$ — система смежности и $(x) \in \beta$. Тогда для любого $F \in \beta$ имеет место $\sigma(x, F)$, откуда следует, что $x \in F$, т. е.

$$x \in \bigcap_{F \in \beta} F \neq \Lambda.$$

Введем на $\sigma E$ топологию, взяв совокупность всех множеств $\Phi_F$ в качестве замкнутого базиса (это возможно в силу леммы 4). Рассмотрим некоторые свойства $\sigma E$.

ЛЕММА 6. $\sigma E \in T_1$.

Надо доказать, что любое одноточечное множество $\sigma E$ замкнуто.

Любая точка $\sigma E$ принадлежит либо $E$, либо $\widetilde{\sigma E}$. Если эта точка $x \in E$, то $(x) = \Phi_{(x)}$ замкнуто. Если эта точка $\beta \in \widetilde{\sigma E}$, то мы покажем, что

$$(\beta) = \bigcap_{F \in \beta} \Phi_F.$$

$\beta \in \bigcap_{F \in \beta} \Phi_F$, так как $\beta \in \Phi_F$, если $F \in \beta$. Покажем, что в этом пересечении нет других точек $\sigma E$. В самом деле, если бы ему принадлежала точка $x \in E$, то $x$ принадлежала бы всем $F \in \beta$, а этого быть не может. Если бы, с другой стороны, ему принадлежала точка $\beta' \in \widetilde{\sigma E}$, то из $\beta' \in \bigcap_{F \in \beta} \Phi_F$ мы получили бы $\beta' \in \Phi_F$ для всех $F \in \beta$ и, следовательно, $F \in \beta'$ для всех $F \in \beta$, т. е. $\beta \subset \beta'$ или $\beta = \beta'$.

ЛЕММА 7. *$\sigma E$ является бикомпактным расширением $E$.*

Нам надо доказать три утверждения:

1. $E$ — подпространство $\sigma E$;
2. $E$ плотно в $\sigma E$;
3. $\sigma E$ бикомпактно.

1. Достаточно показать, что пересечения с $E$ всех базисных замкнутых множеств пространства $\sigma E$ образуют замкнутый базис $E$, а это утверждение следует из равенства

$$\Phi_F \cap E = F.$$

2. $\overline{E}^{\sigma E} = \sigma E$, так как единственным базисным множеством $\sigma E$, содержащим $E$, является $\Phi_E = E \cup \widetilde{\Phi}_E$, а $\widetilde{\Phi}_E = \widetilde{\sigma E}$, ибо $E$ является элементом любой исчезающей максимальной системы смежности.

3. Пусть $\alpha$ — произвольная максимальная центрированнная система базисных замкнутых множеств $\sigma E$. Положим

$$\beta = \{F \mid \Phi_F \in \alpha\}.$$

$\beta$ — система смежности. Действительно, пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n$ принадлежат $\beta$, тогда $\Phi_{F_1}, \Phi_{F_2}, \ldots, \Phi_{F_n}$ принадлежат $\alpha$ и, следовательно, их пересечение не пусто:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \Phi_{F_i} = \bigcap_{i=1}^{n} (F_i \cup \widetilde{\Phi}_{F_i}) = (\bigcap_{i=1}^{n} F_i) \cup (\bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{\Phi}_{F_i}) \neq \Lambda.$$

Если не пусто первое слагаемое, то имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Если первое слагаемое пусто, то не пусто второе слагаемое и найдется

$$\beta' \in \bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{\Phi}_{F_i}.$$

Но тогда $F_i \in \beta'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, таким образом, опять имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

$\beta$ — максимальная система смежности. Действительно, пусть $F_0$ — замкнутое множество в $E$ и $\beta \cup \{F_0\}$ — система смежности. Тогда для

любых $F_1, F_2, \ldots, F_n$, принадлежащих $\beta$, имеет место $\sigma(F_0, F_1, \ldots, F_n)$. Если $\bigcap\limits_{i=0}^{n} F_i \neq \Lambda$, то

$$\bigcap_{i=0}^{n} \Phi_{F_i} \neq \Lambda,$$

если же $\bigcap\limits_{i=0}^{n} F_i = \Lambda$, то существует максимальная исчезающая система смежности $\beta'$, содержащая все $F_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, следовательно, $\beta' \in \Phi_{F_i}$, т. е.

$$\bigcap_{i=0}^{n} \Phi_{F_i} \neq \Lambda.$$

Отсюда следует, что $\alpha \cup \{\Phi_{F_0}\}$ — центрированная система, следовательно, $\Phi_{F_0} \in \alpha$, т. е. $F_0 \in \beta$.

Пересечение всех элементов $\alpha$ можно записать следующим образом:

$$\bigcap_{F \in \beta} \Phi_F = \bigcap_{F \in \beta} (F \cup \widetilde{\Phi}_F) = (\bigcap_{F \in \beta} F) \cup (\bigcap_{F \in \beta} \widetilde{\Phi}_F).$$

Оно не пусто, так как если пусто первое слагаемое, то $\beta$ — исчезающая максимальная система смежности, $\beta \in \widetilde{\Phi}_F$ $(F \in \beta)$, следовательно, $\beta \in \bigcap\limits_{F \in \beta} \widetilde{\Phi}_F$, т. е. не пусто второе слагаемое. Этим завершается доказательство леммы.

Построенное нами по $\sigma$ бикомпактное расширение $\sigma E$ пространства $E$ будем называть *$\sigma$-расширением.* В качестве примеров $\sigma$-расширений можно привести расширения $\sigma_{\mathfrak{B}} E$ и $\sigma_{\text{п}} E$, которые, как в этом можно легко убедиться, эквивалентны известным $(\omega, \mathfrak{B})$-расширениям и $\omega$-расширению $E$ [см. ([3])].

ЛЕММА 8. *Замыкания подмножеств $E$ в $\sigma E$ образуют замкнутый базис $\sigma E$.*

Пусть $H$ — произвольное замкнутое в $E$ множество. Любое базисное множество $\Phi_F$ содержит $H$ тогда и только тогда, когда $H \subset F$, так как $\Phi_F = F \cup \widetilde{\Phi}_F$ и $\widetilde{\Phi}_F \cap E = \Lambda$. Отсюда следует, что $\Phi_H$ — наименьшее из всех базисных замкнутых множеств пространства $\sigma E$, содержащих $H$, т. е. $\overline{H}^{\sigma E} = \Phi_H$. Таким образом, множество замыканий всех подмножеств $E$ совпадает с $\{\Phi_F\}_F$ и является базисом $\sigma E$.

ЛЕММА 9. *$\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\sigma E} \neq \Lambda.$$

Пусть $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\sigma E} = \bigcap_{i=1}^{n} \Phi_{F_i} = \bigcap_{i=1}^{n} (F_i \cup \widetilde{\Phi}_{F_i}) = (\bigcap_{i=1}^{n} F_i) \cup (\bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{\Phi}_{F_i}).$$

Если пусто первое слагаемое, то существует исчезающая максимальная система смежности $\beta$, содержащая все $F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\beta \in \widetilde{\Phi}_{F_i}$, следовательно, $\beta \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \widetilde{\Phi}_{F_i}$, т. е. не пусто второе слагаемое:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\sigma E} \neq \Lambda.$$

Пусть теперь

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\sigma E} \neq \Lambda;$$

тогда либо

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \Lambda$$

и, значит, имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, либо

$$\bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{\Phi}_{F_i} \neq \Lambda$$

и найдется

$$\beta \in \bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{\Phi}_{F_i}, \quad F_i \in \beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. опять имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

Лемма 8 показывает, что обращение леммы 7 не имеет, вообще говоря, места, так как не во всяком бикомпактном расширении $E'$ пространства $E$ замыкания подмножеств $E$ образуют замкнутый базис $E'$.

Будем называть расширение $E' \in T_1$ (не обязательно бикомпактное) *правильным*, если замыкания подмножеств $E$ в $E'$ образуют замкнутый базис $E'$.

ТЕОРЕМА 5. *Любое правильное бикомпактное расширение пространства $E \in T_1$ эквивалентно некоторому его $\sigma$-расширению.*

Пусть $E' \in T_1$ — правильное бикомпактное расширение $E$. Определим на $E$ отношение смежности $\sigma$, считая, что $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{E'} \neq \Lambda.$$

То, что это отношение действительно является отношением смежности, т. е. удовлетворяются аксиомы (С1) — (С6), проверяется без особого труда. Мы можем теперь построить бикомпактное расширение $\sigma E$ пространства $E$. Покажем, что $E'$ и $\sigma E$ являются эквивалентными расширениями $E$, т. е. существует топологическое отображение $\psi: E'$ на $\sigma E$, тождественное на $E$. Положим $\psi(x) = x$, если $x \in E$. Пусть $x \in E' \setminus E$. Рассмотрим систему $\beta$ замкнутых подмножеств $E$, замыкания которых в $E'$ содержат точку $x$:

$$\beta = \{F \mid x \in \overline{F}^{E'}\}.$$

$\beta$ — система смежности, так как если $F_1, F_2, \ldots, F_n$ принадлежат $\beta$, то

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{E'} \neq \Lambda$$

и, следовательно, имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

$\beta$ — максимальная система смежности. Действительно, пусть $F_0$ таково, что $\beta \cup \{F_0\} = \beta'$ — система смежности. Тогда, по определению $\sigma$, совокупность замыканий множеств, входящих в $\beta'$, является центрированной системой и, в силу бикомпактности $E'$, имеет непустое пересечение. Но уже пересечение замыканий элементов $\beta$, в силу правильности расширения $E'$, содержит только точку $x$, следовательно, $x \in \overline{F}_0^{E'}$ и $F_0 \in \beta$.

$\beta$ — исчезающая максимальная система смежности, так как

$$\bigcap_{F \in \beta} F \subset \bigcap_{F \in \beta} \overline{F}^{E'},$$

а последнее пересечение содержит только точку $x \bar{\in} E$. Таким образом, $\beta \in \widetilde{\sigma E}$ и мы положим $\psi(x) = \beta$.

Мы определили отображение $\psi: E' \to \sigma E$, тождественное на $E$.

$\psi$ — отображение $E'$ на $\sigma E$, так как если $\beta$ — произвольная исчезающая максимальная система смежности, то совокупность замыканий в $E'$ элементов $\beta$ образует центрированную систему и в силу бикомпактности $E'$ имеет непустое пересечение, содержащее точку $x$ из $E' \setminus E$ ($\beta$ — исчезающая система), $\beta \subset \psi(x)$ и, в силу максимальности $\beta$, $\beta = \psi(x)$.

$\psi$ — взаимно однозначное отображение, так как если $\psi(x) = \psi(x') \in E$, то, по определению $\psi$, $x = \psi(x) = \psi(x') = x'$; если же $\psi(x) = \psi(x') = \beta \in \widetilde{\sigma E}$, то $x$ и $x'$ принадлежат пересечению $\bigcap\limits_{F \in \beta} \overline{F}^{E'}$, состоящему только из одной точки, и, следовательно, опять $x = x'$.

Остается доказать, что $\psi$ — топологическое отображение. Для этого достаточно убедиться в том, что при отображении $\psi$ некоторый базис $E'$ переходит в базис $\sigma E$. Так как $E'$ — правильное расширение $E$, то совокупность $\{\overline{F}^{E'}\}_F$, где $F$ — произвольное замкнутое подмножество $E$, образует базис $E'$. Мы покажем, и этим доказательство будет завершено, что

$$\psi(\overline{F}^{E'}) = \Phi_F = F \cup \widetilde{\Phi}_F.$$

Если $x \in \overline{F}^{E'}$ и $x \in E$, то

$$\psi(x) = x \in F;$$

если же $x \in \overline{F}^{E'}$ и $x \bar{\in} E$, то $F \in \beta = \psi(x)$ и $\beta \in \widetilde{\Phi}_F$.

Пусть

$$\psi(x) \in F \cup \widetilde{\Phi}_F.$$

Если $\psi(x) \in F$, то $x = \psi(x) \in F$ и $\psi(x) \in \psi(\overline{F}^{E'})$; если же $\psi(x) = \beta \in \widetilde{\Phi}_F$, то $F \in \beta$, $x \in \overline{F}^{E'}$ и

$$\beta = \psi(x) \in \psi(\overline{F}^{E'}).$$

Непосредственным следствием лемм 6 — 9 и теоремы 5 является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех правильных бикомпактных расширений пространства $E$, определенных с точностью до эквивалентности, и множеством всех отношений смежности на $E$. Каждому отношению смежности $\sigma$ сопоставляется при этом расширение $\sigma E$, каждому правильному бикомпактному расширению $E'$ пространства $E$ сопоставляется такое отношение смежности $\sigma$ на $E$, что $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{E'} \neq \Lambda.$$

Теорема 6 показывает, что задание любого отношения смежности на $E \in T_1$ эквивалентно заданию некоторого его правильного бикомпактного расширения. Таким образом, задание любого пространства смежно-

сти эквивалентно заданию топологического пространства класса $T_1$ и некоторого его правильного бикомпактного расширения.

Среди всех отношений смежности мы выделили особый класс главных отношений смежности. Будем называть определяемые ими бикомпактные расширения *главными расширениями*. Главные расширения обладают некоторыми специальными свойствами.

Будем говорить, что система $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ замкнутых множеств некоторого топологического пространства обладает свойством $\Sigma$, если для любой системы конечных замкнутых покрытий $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ множеств $F_1, F_2, \ldots, F_n$ можно выбрать по одному элементу из каждого $\Sigma_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ так, что выбранные множества будут иметь попарно непустое пересечение.

ТЕОРЕМА 7. *Правильное бикомпактное расширение $E'$ пространства $E \in T_1$ является главным расширением $E$ тогда и только тогда, когда любая система $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ замкнутых подмножеств $E'$, обладающая свойством $\Sigma$, имеет непустое пересечение.*

Пусть $E' = \sigma E$ — главное расширение $E$ и $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ — система замкнутых подмножеств $\sigma E$, обладающая свойством $\Sigma$. Рассмотрим систему $\alpha$, состоящую из всех замкнутых подмножеств $E$, замыкания которых в $\sigma E$ содержат хоть одно из $\Phi_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$.

Покажем, что $\alpha$—система $\sigma$-смежности. Чтобы доказать это, надо убедиться в том, что каждая конечная подсистема $\alpha$ есть система $\sigma$-смежности. Покажем это сначала для систем $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ частного вида, в которых

$$\Phi_i \subset \overline{F}_i^{E'} \quad (i = 1,2, \ldots, n).$$

Пусть $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_n'$ — произвольные замкнутые конечные покрытия $F_1, F_2, \ldots, F_n$ в $E$; тогда $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, образованные из замыканий элементов $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_n'$, соответственно, являются покрытиями $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, и так как $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ обладает свойством $\Sigma$, то можно выбрать по одному элементу из каждого $\Sigma_i$ так, что выбранные множества будут иметь попарно непустое пересечение. Это значит, что можно выбрать по одному элементу из каждого $\Sigma_i'$ так, что выбранные множества будут попарно $\sigma$-смежны и, таким образом, имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

Пусть теперь $\{F_1, F_2, \ldots, F_p\}$ — произвольная конечная подсистема $\alpha$. Образуем систему $\{\Phi_1', \Phi_2', \ldots, \Phi_p'\}$, состоящую из множеств, принадлежащих системе $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$, возможно с повторениями (не обязательно всех $\Phi_i$), такую, что $\Phi_i' \subset \overline{F}_i^{E'}$. Нетрудно показать, что система $\{\Phi_1', \Phi_2', \ldots, \Phi_p'\}$ также обладает свойством $\Sigma$, и мы возвращаемся к уже рассмотренному случаю. Так как $\alpha$ — система $\sigma$-смежности, то существует максимальная система $\sigma$-смежности $\beta$, содержащая $\alpha$:

$$\bigcap_{F \in \beta} F \subset \bigcap_{F \in \alpha} F \subset \bigcap_{F \in \alpha} \overline{F}^{E'} = \bigcap_{i=1}^{n} \Phi_i.$$

Если $\bigcap\limits_{F\in\beta} F \neq \Lambda$, то и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \Phi_i \neq \Lambda$. Если же $\bigcap\limits_{F\in\beta} F = \Lambda$, то $\beta$ — исчезающая максимальная система смежности и для любого $F\in\beta$ $\beta\in\Phi_F = \overline{F}^{E'}$, т. е.

$$\beta\in\bigcap_{F\in\beta}\overline{F}^{E'}\subset\bigcap_{i=1}^{n}\Phi_i\neq\Lambda.$$

Пусть теперь $E' = \sigma E$ не является главным расширением $E$, т. е. $\sigma$ — не главное отношение смежности. Тогда существует система $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ замкнутых множеств $E$, которая не является системой $\sigma$-смежности, и в то же время для каждой системы $\Sigma_1', \Sigma_2', \ldots, \Sigma_n'$ конечных замкнутых в $E$ покрытий $F_1, F_2, \ldots, F_n$ можно выбрать по одному элементу из каждого $\Sigma_i'$ так, что выбранные множества будут попарно $\sigma$-смежны. Покажем, что система $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$, где $\Phi_i = \overline{F}_i^{E'}$, обладает свойством $\Sigma$.

Пусть $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ — произвольные конечные замкнутые в $E'$ покрытия $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$:

$$\Sigma_i = \left\{\Phi_i^j\right\}_{j=1}^{\alpha_i}.$$

$\Sigma_i' = \left\{\Phi_i^j \cap E\right\}_{j=1}^{\alpha_i}$ образует покрытие $F_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ и $\overline{\Sigma}_i = \left\{\overline{F_i^j}^{E'}\right\}_{j=1}^{\alpha_i}$ образует покрытие $\Phi_i$ $(F_i^j = \Phi_i^j \cap E)$. $\overline{\Sigma}_i$ вписано в $\Sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В силу выбора $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$, из каждого покрытия $\Sigma_i'$ можно взять по одному элементу так, что выбранные множества будут попарно $\sigma$-смежны, откуда следует возможность выбора по одному элементу из каждого $\overline{\Sigma}_i$ так, чтобы выбранные множества имели попарно непустое пересечение и, в силу вписанности $\overline{\Sigma}_i$ в $\Sigma_i$, возможность аналогичного выбора для систем $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$. Таким образом, система $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ действительно обладает свойством $\Sigma$ и в то же время

$$\bigcap_{i=1}^{n}\Phi_i = \Lambda,$$

так как $\Phi_i = \overline{F}_i^{E'}$ и $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ не имеет места.

ТЕОРЕМА 8. *Если $\sigma E$ — главное расширение $E$ и $x_1, x_2$ — произвольные точки $\sigma E$ $(x_1 \neq x_2)$, то существуют такие замкнутые в $E$ множества $F_1$ и $F_2$, что $x_1 \in \overline{F}_1^{\sigma E}$, $x_2 \in \overline{F}_2^{\sigma E}$ и*

$$\overline{F}_1^{\sigma E} \cap \overline{F}_2^{\sigma E} = \Lambda.$$

Доказательство в общих чертах аналогично той части доказательства теоремы 7, в которой предполагается, что $\sigma E$ — главное расширение $E$.

Пусть точки $x_1, x_2$ в $\sigma E$ таковы, что если $x_1 \in \overline{F}_1^{\sigma E}$, $x_2 \in \overline{F}_2^{\sigma E}$, где $F_1$, $F_2$ — замкнутые множества $E$, то

$$\overline{F}_1^{\sigma E} \cap \overline{F}_2^{\sigma E} \neq \Lambda.$$

Рассмотрим систему $\alpha$ всех замкнутых подмножеств $E$, замыкания которых в $\sigma E$ содержат либо $x_1$, либо $x_2$, и покажем, что $\alpha$ является системой $\sigma$-смежности. Пусть $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — конечная система множеств, принадлежащих $\alpha$, и $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ — произвольные конечные замкнутые в

$E$ покрытия $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Среди элементов каждого $\Sigma_i$ найдется хоть один такой, что его замыкание в $\sigma E$ содержит либо $x_1$, либо $x_2$. Таким образом, из каждого $\Sigma_i$ мы сможем выбрать по одному элементу так, что замыкания в $\sigma E$ выбранных множеств содержат либо $x_1$, либо $x_2$. Но это означает, что замыкания выбранных множеств имеют попарно непустое пересечение (если $\overline{F}_{i_1}^{\sigma E}$ и $\overline{F}_{i_2}^{\sigma E}$ содержат одну и ту же точку $x_1$ или $x_2$, то она принадлежит и их пересечению, если же $x_1 \in \overline{F}_{i_1}^{\sigma E}$, $x_2 \in \overline{F}_{i_2}^{\sigma E}$, то, в силу выбора точек $x_1$, $x_2$, $\overline{F}_{i_1}^{\sigma E} \cap \overline{F}_{i_2}^{\sigma E} \neq \Lambda$), т. е. выбранные множества попарно $\sigma$-смежны, а так как $\sigma E$ — главное расширение $E$, то имеет место $\sigma(F_1, F_2, \ldots, F_n)$. Обозначим через $\beta_1$, $\beta_2$ совокупности замкнутых подмножеств $E$, замыкания которых в $\sigma E$ содержат соответственно $x_1$, $x_2$. Тогда $\beta_1 \subset \alpha$, $\beta_2 \subset \alpha$ и, в силу максимальности $\beta_1$ и $\beta_2$, имеем $\beta_1 = \alpha$, $\beta_2 = \alpha$, т. е. $\beta_1 = \beta_2$ и $x_1 = x_2$.

Заметим, что свойство главных расширений, о котором идет речь в теореме 7, характеризует главные расширения, в то время как свойство главных расширений, о котором идет речь в теореме 8, их не характеризует, ибо можно привести пример $\sigma$-расширения некоторого пространства $E$, которое не является главным расширением $E$ и все же обладает этим свойством.

В теореме 6 мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством всех правильных бикомпактных расширений пространства $E \in T_1$ и множеством всех отношений смежности на $E$. Ранее нами было выяснено, что между отношениями близости на $E$ и отношениями смежности на $E$ нет естественного взаимно однозначного соответствия, класс отношений смежности богаче. Однако можно установить такое соответствие между множеством всех отношений близости и множеством всех главных отношений смежности на $E$, при котором отношение близости и соответствующее ему главное отношение смежности согласованы. Ввиду этого непосредственным следствием теоремы 6 будет являться следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 9. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех главных бикомпактных расширений пространства $E \in T_1$, определенных с точностью до эквивалентности, и множеством всех отношений близости на $E$. При этом каждому отношению близости $\delta$ сопоставляется расширение $\sigma_0 E$ ($\sigma_0$ — главное отношение смежности, согласованное с $\delta$), каждому главному бикомпактному расширению $E'$ сопоставляется такое отношение близости $\delta$ на $E$, что $\delta(F_1, F_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\overline{F}_1^{E'} \cap \overline{F}_2^{E'} \neq \Lambda$.*

Теорема 9 показывает, что задание любого отношения близости на $E \in T_1$ эквивалентно заданию некоторого его главного бикомпактного расширения. Таким образом, задание любого пространства близости эквивалентно заданию топологического пространства и некоторого его главного бикомпактного расширения.

Представляет интерес сравнение этого результата с установленным Ю. М. Смирновым ([4]) взаимно однозначным соответствием между пространствами хаусдорфовой близости на $E$ и бикомпактными хаусдорфовыми расширениями пространства $E$. Априори не ясно, совпадает ли

это соответствие в общей области задания с соответствием, установленным нами. Легко заметить, что Ю. М. Смирнов сопоставляет каждому отношению хаусдорфовой близости $\delta$ на $E$ некоторое $\sigma$-расширение $E$, где $\sigma$ согласовано с $\delta$. Однако пространство $E$ может иметь много таких $\sigma$-расширений и для того, чтобы показать идентичность соответствий, надо доказать, что в обоих случаях любой хаусдорфовой близости $\delta$ сопоставляется одно и то же расширение. Но, в силу теоремы 7, любое хаусдорфово бикомпактное расширение $E$ является главным расширением, так как любая система замкнутых множеств $\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ бикомпактного хаусдорфова пространства, обладающая свойством $\Sigma$, имеет непустое пересечение.

Замечание. Заметив, что каждое хаусдорфово бикомпактное расширение пространства $E$ является главным, мы убедились в совпадении обоих взаимно однозначных соответствий (на общей области задания) между множеством всех таких расширений пространства $E$ и множеством всех отношений хаусдорфовой близости на $E$. Из наших рассуждений соответствующая теорема Ю. М. Смирнова не вытекает, однако мы можем продолжить их и дать новое доказательство этой теоремы. Для этого нам остается показать, что если $\sigma E$ — главное расширение $E$ и $\delta$ — отношение близости на $E$, согласованное с $\sigma$, то $\sigma E \in T_2$ тогда и только тогда, когда $\delta$ — отношение хаусдорфовой близости.

Если $\delta$ — отношение хаусдорфовой близости и $x_1$, $x_2$ — произвольные точки $\sigma E\,(x_1 \neq x_2)$, то, по теореме 8, в $E$ существуют замкнутые множества $F_1$, $F_2$ такие, что $x_1 \in \overline{F}_1^{\sigma E}$, $x_2 \in \overline{F}_2^{\sigma E}$ и

$$\overline{F}_1^{\sigma E} \cap \overline{F}_2^{\sigma E} = \Lambda.$$

Так как

$$\overline{F}_1^{\sigma E} \cap \overline{F}_2^{\sigma E} = \Lambda,$$

то $\delta(F_1, F_2)$ не имеет места, и, в силу Б5, найдутся замкнутые в $E$ множества $H_1$, $H_2$ такие, что $H_1 \cup H_2 = E$ и не имеет места ни $\delta(F_1, H_2)$, ни $\delta(F_2, H_1)$. Значит,

$$\overline{H}_1^{\sigma E} \cup \overline{H}_2^{\sigma E} = \sigma E, \quad x_1 \overline{\in} \overline{H}_2^{\sigma E}, \quad x_2 \overline{\in} \overline{H}_1^{\sigma E}$$

и $G_1 = \sigma E \setminus \overline{H}_2^{\sigma E}$, $G_2 = \sigma E \setminus \overline{H}_1^{\sigma E}$ являются непересекающимися окрестностями точек $x_1$, $x_2$, т. е. $\sigma E \in T_2$.

Если, с другой стороны, $\sigma E \in T_2$ и $F_1$, $F_2$ — замкнутые подмножества $E$ такие, что $\delta(F_1, F_2)$ не имеет места, то

$$\overline{F}_1^{\sigma E} \cap \overline{F}_2^{\sigma E} = \Lambda$$

и в $\sigma E$ существуют непересекающиеся окрестности $G_1$, $G_2$ множеств $\overline{F}_1^{\sigma E}$, $\overline{F}_2^{\sigma E}$. Следовательно, положив

$$H_1 = (\sigma E \setminus G_2) \cap E,$$
$$H_2 = (\sigma E \setminus G_1) \cap E,$$

получим:

$$H_1 \cup H_2 = E, \quad \overline{F}_1^{\sigma E} \cap \overline{H}_2^{\sigma E} = \Lambda, \quad \overline{F}_2^{\sigma E} \cap \overline{H}_1^{\sigma E} = \Lambda,$$

т. е. не имеет места ни $\delta(F_1, H_2)$, ни $\delta(F_2, H_1)$ и, таким образом, $\delta$ является отношением хаусдорфовой близости.

Поступило
7.VI.1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров П. С., О бикомпактных расширениях топологических пространств, Матем. сборн., 5 (47): 2 (1939), 403—423.
[2] Фомин С. В., К теории расширений топологических пространств, Матем. сборн., 8 (50) : 2 (1940), 285—294.
[3] Шанин Н. А., О специальных расширениях топологических пространств, Доклады Ак. наук СССР, 38, № 1 (1943), 7—11.
[4] Смирнов Ю. М., О пространствах близости, Матем. сборн., 31 (73) : 3 (1952), 543—574.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 635—636

**Исправления к статье Л. П. Старченко**

## «О ПОСТРОЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СОВМЕСТНО НОРМАЛЬНЫХ С ДАННОЙ»

**(Известия Академии наук СССР, серия математическая, т. 22, № 6 (1958), стр. 757—770)**

В статье «О построении последовательностей, совместно нормальных с данной» результаты § 3 и § 4 неверны. Результаты § 1 и § 2 верны, однако необходимо внести следующие поправки:

Стр. 761: 4-ю строку сверху надо читать так: «равномерно распределена в единичном кубе $2s$-мерного пространства».

Стр. 762: начиная с 9-й строки сверху до стр. 763, 14-й строки сверху включительно, текст заменить следующим: «Пусть $l \geqslant 2$ — натуральное. Осуществим построение $l$ последовательностей, совместно нормальных с данной последовательностью (19), для чего мы будем «перекашивать» исходную последовательность с возрастающей силой. В первой строке каждого ряда записана данная нормальная последовательность (19), а $i$-я последовательность испытывает в каждом ряду перекос на $(i-1)r$ знаков, где $r$ — номер ряда $(i = 1, 2, 3, \ldots, l)$:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots\ldots, \varepsilon_{\Phi(2)-1}, \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots\ldots, \varepsilon_{\Phi(2)-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots\ldots\ldots, \varepsilon_{\Phi(2)-1}, \end{array}\right\} \text{0 ряд}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{\Phi(2)}, \ldots, \varepsilon_{2\Phi(2)}, {}'\varepsilon_{2\Phi(2)+1}, \ldots, \varepsilon_{4\Phi(2)+2}, {}'\varepsilon_{4\Phi(2)+3}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(4)}-1}, \\ \varepsilon_{\Phi(2)+1}, \ldots, \varepsilon_{2\Phi(2)+1}, \varepsilon_{2\Phi(2)+2}, \ldots, \varepsilon_{4\Phi(2)+3}, \varepsilon_{4\Phi(2)+4}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(4)}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{\Phi(2)+l-1}, \ldots, \varepsilon_{2\Phi(2)+l-1}, \varepsilon_{2\Phi(2)+l}, \ldots, \varepsilon_{4\Phi(2)+l+1}, \varepsilon_{4\Phi(2)+l+2}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(4)}+l-2} \end{array}\right\} \text{1 ряд}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{\overline{\Phi(4)}}, \ldots, \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}}, {}'\varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}+1}, \ldots, \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+2}, {}'\varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+3}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(6)}-1}, \\ \varepsilon_{\overline{\Phi(4)}+2}, \ldots, \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}+2}, \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}+3}, \ldots, \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+4}, \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+5}, \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(6)}+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{\overline{\Phi(4)}+2l-2}, \ldots, \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}+2l-2}, \varepsilon_{2\overline{\Phi(4)}+2l-1}, \ldots, \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+2l}, \varepsilon_{4\overline{\Phi(4)}+2l+1}, \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots, \varepsilon_{\overline{\Phi(6)}+2l-3}, \end{array}\right\} \text{2 ряд}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

где

$$\Phi(2) = \overline{\Phi(2)} = \Phi(l),$$

$$\overline{\Phi(2j)} = 2^{\nu_j}\,\overline{\Phi(2j-2)} + 2^{\nu_j} - 1 \quad (j = 2, 3, 4, \ldots),$$

а $\nu_j$ — любое натуральное число, для которого

$$\Phi(lj) \leqslant 2^{\nu_j}\,\overline{\Phi(2j-2)} + 2^{\nu_j} - 2.$$

Тогда

$$\overline{\Phi(2j)} > \Phi(lj).$$

Докажем, что построенные последовательности образуют систему совместно нормальных последовательностей. Возьмем $k$-столбцевую матрицу ($k$ фиксировано):

$$\overline{\Delta}_k = \begin{pmatrix} \Delta_k \\ \Delta_k^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta_k^{(l-1)} \end{pmatrix}$$

Пусть

$$X = 2^{\nu}\,\overline{\Phi(2s)} + 2^{\nu} - 1,$$

где $\nu = 0, 1, \ldots, \nu_{s+1} - 1$. Обозначим через $G_X$ число появлений $\overline{\Delta}_k$ в гусенице ранга $k$ длиной $X$ выписанной системы последовательностей, и пусть $s \geqslant k$».

Стр. 763: на 13-й строке снизу слова «... функции $\Phi(s)$...» следует читать так: «... функции $\Phi(ls)$...».

На стр. 764, в конце § 1 надо добавить следующее: «Осуществим теперь построение бесконечного количества последовательностей, совместно нормальных с данной (19). Построим одну последовательность, совместно нормальную к последовательности (19):

$$\begin{matrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_s, \ldots \\ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_s, \ldots \end{matrix} \qquad (19')$$

Последовательность (19′) является нормальной последовательностью, в которой знаки берутся из алфавита, состоящего из $q^2$ элементов (знаком считается каждый столбец). К последовательности (19′) строим совместно нормальную последовательность, состоящую из $g^2$ знаков:

$$\begin{matrix} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_s, \ldots \\ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_s, \ldots \\ \varepsilon_1^1, \varepsilon_2^1, \varepsilon_3^1, \ldots, \varepsilon_s^1, \ldots \\ \delta_1^1, \delta_2^1, \delta_3^1, \ldots, \delta_s^1, \ldots \end{matrix} \qquad (19'')$$

Последовательность (19″) можно рассматривать как последовательность из $g^4$ знаков и т. д.».

Выражаю благодарность Ю. Н. Шахову, указавшему на ошибки в моей работе.

*Л. П. Старченко*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 637—642

И. М. ВИНОГРАДОВ

# К ВОПРОСУ О ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ $G(n)$

Улучшена верхняя граница для $G(n)$ в проблеме Варинга.

Обозначения. $n$ — целое, $n \geqslant 3$, $\nu = \frac{1}{n}$; $c, c_0, c_1, \ldots$ — какие-либо положительные, зависящие только от $n$. Предполагается, что они выбраны достаточно большими. $k, k_0, k_1, \ldots$ — целые положительные, зависящие только от $n$; $\varepsilon$ — произвольно малое положительное постоянное, меньшее 1; $\theta$ — число с условием $|\theta| \leqslant 1$.

При $B > 0$ обозначение $A \ll B$ показывает, что $|A| \ll cB$.

Говоря о значениях $x$, лежащих в интервале длиною $h$, мы имеем в виду, что все эти значения удовлетворяют одному и тому же условию вида $a < x \leqslant a + h$.

Применяем символ $G(n)$ Hardy — Littlewood'a, обозначающий наименьшее $k_1$, которому можно сопоставить $c_0$ с условием, что уравнение

$$N = x_1^n + \cdots + x_{k_1}^n$$

разрешимо в целых неотрицательных $x_1, \ldots, x_{k_1}$ при любом целом $N$, превосходящем $c_0$.

В гл. IV книги (1) я вывел неравенство

$$G(n) < 3n \ln n + 11n.$$

В настоящей работе я показываю, что видоизменение доказательства гл. IV книги (1) при помощи идеи, примененной в работе (2), приводит к более точному (для достаточно больших $n$) неравенству, имеющему вид

$$G(n) < 2n \ln n + \Phi(n),$$

где, при неограниченно возрастающем $n$, $\Phi(n)$ растет как величина порядка более низкого, чем $n \ln n$.

ЛЕММА 1. *Пусть* $k_0 \geqslant 6$, $k = 2k_0$, $r_0$ — *целое,*

$$r = 2r_0, \quad r \geqslant [6{,}5\, k^2 \ln 12 k^2],$$

$Y_0$ — *целое*, $Y_0 > 0$, $y_1, \ldots, y_r$ *независимо друг от друга пробегают значения* $1, \ldots, Y_0$ *и* $\eta_s$ *определяется равенством*

$$\eta_s = y_1^s + \cdots + y_{r_0}^s - y_{r_0+1}^s - \cdots - y_r^s.$$

*Тогда для числа* $V$ *решений системы* $\eta_k = l_k, \ldots, \eta_1 = l_1$ *имеем*

$$V \ll Y_0^{r - \frac{k(k+1)}{2}}.$$

Доказательство. Эта лемма есть следствие лемм 6 и 7 статьи (3).

ЛЕММА 2. *Пусть* $M, X, N, Y$ — *целые*, $X>0$, $Y>0$,

$$S=\sum_{x=M}^{M+X-1}\sum_{y=N}^{N+Y-1}\xi(x)\eta(y)e^{2\pi ix\Phi(y)},$$

$$\sum_{x=M}^{M+X-1}|\xi(x)|^2=K,\quad \sum_{y=N}^{N+Y-1}|\eta(y)|=Y',\quad \max|\eta(y)|=\eta,$$

*причем* $\Phi(y)$ *для рассматриваемых значений* $y$ *принимает вещественные значения.*

a. *Пусть*

$$\Phi(y)=\frac{ay+\psi(y)}{q},\quad (a,q)=1,\quad q>0,\quad \lambda\geqslant 0,$$

*причем когда* $y$ *пробегает не более чем* $q$ *последовательных значений, то разность между наибольшим и наименьшим из соответствующих значений* $\Phi(y)$ *не превосходит* $\lambda$. *Тогда*

$$|S|<\sqrt{KY'\eta((2\lambda+6)X+3q)(Yq^{-1}+1)}\,.$$

b. *Пусть* $A\geqslant 2\beta>2$, *причем для любых соседних* $y_1$ *и* $y_1+1$ *из рассматриваемых значений* $y$ *имеем*

$$\frac{1}{A}\leqslant\Phi(y_1+1)-\Phi(y_1)\leqslant\frac{\beta}{A}\,.$$

*Тогда*

$$|S|<\sqrt{KY'\eta(4X+3A)(Y\beta A^{-1}+1)}\,.$$

Доказательство. Эта лемма есть следствие лемм 10, b и 10, c гл. 1 книги ([1]).

Пусть $n\geqslant 170000$, $N$ — целое, $N\geqslant c_1$,

$$P=[N^{\nu}],\quad X_0=[\sqrt{P}],\quad Y_0=[\sqrt{X_0}],\quad \tau=2nP^{n-1},\quad \tau_0=X_0^{n-0,5},$$
$$\gamma=0{,}25\,(1-0{,}5\,\nu),\quad R=[X_0^{1-0,5\nu}].$$

Всякое число $\alpha$ интервала

$$-\tau_0^{-1}\leqslant\alpha\leqslant-\tau_0^{-1}+1$$

можно представить в виде

$$\alpha=\frac{a}{q}+z,\quad (a,q)=1,\quad 0<q\leqslant\tau_0,\quad 0\leqslant a<q,\quad |z|\leqslant\frac{1}{q\tau_0}\,. \tag{1}$$

Интервалы, включающие все $\alpha$ указанного вида с условиями

$$q\leqslant P^{\gamma},\quad |z|\leqslant\frac{1}{q\tau}\,,$$

мы назовем основными интервалами. Оставшиеся интервалы мы назовем дополнительными. Нетрудно показать, что основные интервалы не содержат общих значений $\alpha$.

Сохраняя обозначения леммы 1 и предполагая, что $k<n$, полагаем

$$A_0=(X_0+y_1)^n+\cdots+(X_0+y_{r_0})^n-(X_0+y_{r_0+1})^n-\cdots-(X_0+y_r)^n.$$

Находим:

$$A_0 = X_0^{n-1}U_1 + \cdots + X_0U_{n-1} + U_n,$$

$$U_s = \binom{n}{s}\eta_s, \quad -r_0n^sY_0^s < U_s \leqslant r_0n^sY_0^s,$$

причем, согласно лемме 1, число решений системы $U_1 = z_1, \ldots, U_k = z^k$ будет

$$\ll Y_0^{r-\frac{k(k+1)}{2}}.$$

Рассмотрим сумму

$$B_0 = X_0^{n-1}z_1 + \cdots + X_0^{n-k}z_k,$$

где $z_s$ пробегает все целые числа интервала $-r_0n^sY^s < z_s \leqslant r_0n^sY^s$. Нетрудно видеть, что в интервале длиною $X_0^{n-k}$ лежит

$$\ll 1 \frac{Y_0^2}{X_0}\cdot\frac{Y_0^3}{X_0}\cdots\frac{Y_0^k}{X_0} = Y_0^{\frac{k(k+1)}{2}-1}X_0^{-k+1}$$

значений $B_0$. Поэтому в интервале длиною $X_0^{n-k_0-0,5}$ лежит

$$\ll X_0^{k_0-0,5}Y_0^{\frac{k(k+1)}{2}-1}X_0^{-k+1}Y_0^{r-\frac{k(k+1)}{2}} \ll Y_0^rX_0^{-k_0}$$

значений $A_0$.

Пусть $k_2 > 2n$. Рассмотрим числа

$$X_1 = [X_0^\delta], \quad X_2 = [X_0^{\delta^2}], \ldots, X_{k_2} = [X_0^{\delta^{k_2}}], \quad \delta = \frac{n-k_0-0,5}{n-0,5}$$

($c_1$ можно выбрать настолько большим, чтобы было $X_{k_2} > c_2$, где $c_2$ достаточно велико). Соответственно каждому $X_j$ полагаем $Y_j = [\sqrt{X_j}]$ и рассматриваем числа $A_j$, составленные аналогично числам $A_0$. Рассматривая сумму

$$W = A_0 + A_1 + \cdots + A_{k_2-1},$$

легко убеждаемся, что в интервал длиною $X_{k_2-1}^{n-k_0-0,5}$ попадает

$$\ll (YY_0\ldots Y_{k_2-1})^r(X_0X_1\ldots X_{k_2-1})^{-k_0} \ll (Y_0Y_1\ldots Y_{k_2-1})^rX_0^{-(n-0,5)(1-\delta^{k_2})}$$

значений $W$.

Пусть $v$ пробегает простые числа интервала $R < v \leqslant 2R$, а $w$ пробегает числа

$$(X_0+h_0)^n + (X_1+h_1)^n + \cdots + (X_{k_2-1}+h_{k_2-1})^n$$

при условии, что $h_s$ пробегает значения $1, \ldots, Y_s$.

Рассмотрим сумму

$$Q_\alpha = \sum_v\sum_w e^{2\pi i\alpha v^n w}.$$

Считая, что $r_0 = 2r_1$, $r_1 = [2k^2 \ln 12 k^2]$, находим:

$$|Q_\alpha|^{r_0} \ll R^{r_0 - 1} V, \quad V = \sum_v \sum_x \xi(x) e^{2\pi i \alpha v^n x}, \tag{2}$$

где $x$ при некоторых целых $M$ и $X$, удовлетворяющих условиям

$$M \ll X_0^{n-0,5}, \quad X \ll X_0^{n-0,5},$$

пробегает целые числа интервала $M \leqslant x \leqslant M + X - 1$, а сумма

$$\sum_{x=M}^{M+X-1} |\xi(x)|^2$$

есть не что иное, как число решений $W = 0$.

Оценим сумму $V$ для значений $\alpha$, принадлежащих дополнительным интервалам. Представляя $\alpha$ в форме (1), мы можем рассматривать лишь случай $z > 0$ (в противном случае можно рассматривать сумму, сопряженную с $V$).

Сначала рассмотрим случай $q > P^\gamma$; при этом применим утверждение а леммы 2. Число $\eta(y)$ решений сравнения $v^n \equiv y \pmod q$ удовлетворяет условию

$$\eta(y) \ll \left(\frac{R}{q} + 1\right) q^\varepsilon.$$

При этом сумму $V$ можно представить в виде

$$V = \sum_x \sum_{y=0}^{q-1} \eta(y) e^{2\pi i x \frac{ay + \psi(y)}{q}},$$

где разность между наибольшим и наименьшим значениями $\psi(y)$ не превосходит 1. Поэтому можно положить $\lambda = 1$. Далее, можно считать, что $Y = q$, $Y' < R$. Кроме того, как уже отмечено выше, $K$ есть не что иное, как число решений $W = 0$ и, следовательно,

$$K \ll (Y_0 Y_1 \ldots Y_{k_2 - 1})^r X_0^{-(n-0,5)(1-\delta^{k_2})}.$$

Поэтому

$$V \ll \sqrt{KR\left(\frac{R}{q} + 1\right) q^\varepsilon X_0^{n-0,5}},$$

$$V \ll R (Y_0 Y_1 \ldots Y_{k_2-1})^{r_0} X_0^{-0,25(1-0,5\nu)+0,5(n-0,5)\delta^{k_2}} q^{0,5\varepsilon}. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим случай $q \leqslant P^\gamma$. Имеем:

$$\frac{1}{q\tau} \leqslant z \leqslant \frac{1}{q\tau_0}. \tag{4}$$

Часть суммы $V$, отвечающая при данном $s$, выбранном среди чисел $0, \ldots, q-1$, значениям $v$ вида $qt + s$, представится суммою

$$\sum_x \sum_t e^{2\pi i x \Phi(t)}, \quad \Phi(t) = \frac{as^n}{q} + z(qt + s)^n,$$

где $t$ пробегает некоторые целые числа с условием $R < qt + s \leqslant 2R$.

К последней сумме применим утверждение b леммы 2. С увеличением $t$ на 1 $\Phi(t)$ увеличивается на некоторое число вида

$$nz(qt+q\theta+s)^{n-1}q,$$

лежащее между $A^{-1}$ и $2^{n-1}A^{-1}$, где $A=(nzR^{n-1}q)^{-1}$. Поэтому можно положить $\beta=2^{n-1}$. Кроме того, из (4) следует, что $R\ll A\ll X_0^{n-0,5}$. Очевидно, $X$ и $K$ остаются теми же, что и в предыдущем случае. Кроме того, можно считать, что

$$Y\ll\frac{R}{q}, \quad Y'\ll\frac{R}{q}, \quad \eta=1.$$

Поэтому

$$V\ll\sqrt{KRqX_0^{n-0,5}},$$

откуда опять получаем оценку (3).

Из (2) теперь находим:

$$Q_\alpha\ll Q'X_0^\rho, \quad \rho=\frac{-0,25\,(1-0,5\,\nu)+0,5\,(n-0,5)\,\delta^{k_2}+\varepsilon n}{r_0},$$

где $Q'$ — число слагаемых суммы $Q_\alpha$.

Способом, указанным в гл. IV книги ([1]), взяв $k_3$, превосходящее $n$, можно построить числа $u$, лежащие в интервале $(0,2\,P)^n<u<(0,5\,P)^n$ ($c_1$ достаточно велико), не равные между собою, причем каждое будет суммою $k_3$ слагаемых вида $\xi^n$, где $\xi$ — целое положительное число. При этом для числа $U$ значений $u$ будем иметь:

$$U\gg P^{n-n(1-\nu)^{k_3}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I(N)=\int\limits_{-\tau_0^{-1}}^{-\tau_0^{-1}+1}L_\alpha^{4n}Q_\alpha S_\alpha^2e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha, \quad L_\alpha=\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i\alpha x^n}, \quad S_\alpha=\sum_u e^{2\pi i\alpha u}.$$

Посредством таких же рассуждений, как в главе IV книги ([1]), убедимся, что часть $I_0(N)$ интеграла $I(N)$, отвечающая основным интервалам, удовлетворяет условию

$$I_0(N)\gg P^{3n}Q'U^2.$$

Для части $I_1(N)$ того же интеграла, отвечающей дополнительным интервалам, находим:

$$I_1(N)\ll P^{4n}Q'X_0^\rho\int\limits_0^1|S_\alpha|^2\,d\alpha\ll P^{3n}Q'U^2P^{0,5\rho-n(1-\nu)^{k_3}}.$$

Полагая

$$k_0=[0,5\ln n], \quad k_2=3n,$$
$$k_3=[n(\ln n+2\ln\ln n+\ln\ln\ln n+3)],$$

отсюда найдем:

$$I_1(N) \ll P^{3n} Q' U^2 P^{-\varkappa},$$

где $\varkappa$ — положительное, зависящее только от $n$.

Следовательно, $I(N) > 0$ ($c_1$ достаточно велико). Но $I(N)$ есть число представлений $N$ в виде суммы $4n + k_2 + 2k_3$ слагаемых вида $\xi^n$, где $\xi$ — целое положительное число. При этом

$$4n + k_2 + 2k_3 < n(2 \ln n + 4 \ln \ln n + 2 \ln \ln \ln n + 13).$$

Поэтому

$$G(n) < n(2 \ln n + 4 \ln \ln n + 2 \ln \ln \ln n + 13).$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило
17. VI. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXIII, 1947.

[2] Виноградов И. М., Две теоремы из аналитической теории чисел, Труды Тбилисск. матем. ин-та, 5 (1938), 153—180.

[3] Виноградов И. М., Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15 (1951), 109—130.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 643—660

Е. Ф. МИЩЕНКО, Л. С. ПОНТРЯГИН

# ВЫВОД НЕКОТОРЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

В работе доказываются асимптотические формулы для решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в окрестности «точек срыва».

В работе (1) вычислены формальные асимптотические разложения решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x}^i &= f^i(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^l), \\ \dot{y}^j &= g^j(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^l) \end{aligned} \qquad (i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, l) \tag{1}$$

в окрестности «точки срыва», т. е. точки, где

$$\det\left\|\frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha}\right\| = 0.$$

Эти разложения (см. формулы (1.50), (2.30), (3.5) работы (1)) были затем существенно использованы как в самой работе (1), так и в работе (2). Однако доказательств того, что вычисленные формальные разложения действительно приближают истинные решения системы (1) с указанной точностью, в работе (1) не приведено. Здесь мы приводим эти доказательства. При этом мы всюду пользуемся терминологией и обозначениями работы (1).

Линейным преобразованием координат система (1) в окрестности точки срыва может быть приведена к виду:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\dot{\xi}^1 &= (\xi^1)^2 + \eta^1 + b^1_{\beta'}\eta^{\beta'} + c^1_\beta\xi^1\eta^\beta + d^1_1(\xi^1)^3 + e^1_{\alpha'}\xi^1\xi^{\alpha'} + \cdots \equiv \Phi^1(\xi, \eta), \\ \varepsilon\dot{\xi}^i &= a^i_{\alpha'}\xi^{\alpha'} + b^i_\beta\eta^\beta + c^i_0(\xi^1)^2 + d^i_1(\xi^1)^3 + e^i_{\alpha'}\xi^1\xi^{\alpha'} + \cdots \equiv \Phi^i(\xi, \eta), \\ \dot{\eta}^j &= \delta^j_1 + \alpha^j_1\xi^1 + \cdots \equiv \psi^j(\xi, \eta) \quad (i = 2, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, l), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем все собственные числа матрицы $\|a^i_{\alpha'}\|$ имеют отрицательные действительные части. При $-p \leqslant \xi^1 \leqslant p$ ($p$ — малое, не зависящее от $\varepsilon$ положительное число) величину $\xi^1$ можно принять за независимую переменную и вместо системы (2) рассматривать систему

$$\frac{d\xi^i}{d\xi^1} = \frac{\Phi^i(\xi, \eta)}{\Phi^1(\xi, \eta)}, \quad \frac{d\eta^j}{d\xi^1} = \varepsilon\frac{\psi^j(\xi, \eta)}{\Phi^i(\xi, \eta)}, \quad i = 2, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{3}$$

Доказательства того, что формальные разложения решений системы (3), найденные в работе (1), представляют с вполне определенной точностью

истинные решения этой системы, проводятся по-разному на каждом из трех участков изменения переменного $\xi^1: -p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$, $-\sigma_1 \leqslant \xi^1 \leqslant \sigma_2$, $\sigma_2 \leqslant \xi^1 \leqslant p$, $\sigma_1 = \varepsilon^{\frac{2}{7}}$, $\sigma_2 = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$. Однако основная идея этих доказательств одна и та же для всех трех участков. Эта идея состоит в построении «трубы». Формальное приближение окружается узкой замкнутой окрестностью $U$, которую мы называем трубой; диаметр трубы зависит от $\varepsilon$ и при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю как некоторая положительная степень $\varepsilon$. Мы доказываем, что если начальную точку решения системы (3) взять в трубе $U$, то на всем протяжении соответствующего участка это решение не выйдет из трубы. С этой целью граница трубы $U$ конструируется так, чтобы некоторые из ее «стенок» были функциями Ляпунова для системы уравнений (2), т. е. пересекались бы траекториями системы (2) при возрастании $t$ в определенном направлении, именно снаружи внутрь трубы. При построении трубы мы используем на всех участках положительно определенную квадратичную форму $W(z^2, \ldots, z^k)$ — функцию Ляпунова для линейной системы

$$\dot{z}^i = a^i_{\alpha'} z^{\alpha'}, \quad i = 2, \ldots, k, \tag{4}$$

удовлетворяющую неравенству

$$W'_{(4)}(z^2, \ldots, z^k) < -\rho W(z^2, \ldots, z^k), \quad \rho > 0 \tag{5}$$

[см. работу ([3])].

## § 1. Доказательство справедливости асимптотических разложений решений системы (1) на участке $-p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$

На участке изменения независимого переменного $-p < \xi^1 < -\sigma_1$ введем новые криволинейные координаты по формулам:

$$\begin{gathered} \xi^1 = \xi^1, \quad \varphi^i = \Phi^i(\xi, \gamma_l), \quad i = 1, \ldots, k, \\ \gamma_l^j = \gamma_l^j, \quad j = 2, \ldots, l. \end{gathered} \tag{1.1}$$

В этих координатах система уравнений (2) запишется так:

$$\left.\begin{gathered} \varepsilon\dot{\xi}^1 = \varphi^1, \quad \varepsilon\dot{\varphi}^1 = 2\xi^1\varphi^1 + K^1(\xi^1, \varphi^\alpha, \gamma_l^\beta, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{\varphi}^i = a^i_{\alpha'}\varphi^{\alpha'} + K^i(\xi^1, \varphi^\alpha, \gamma_l^\beta, \varepsilon), \quad \dot{\gamma}_l^j = G^j(\xi^1, \varphi^\alpha, \gamma_l^\beta, \varepsilon) \\ (i = 2, \ldots, k, \quad j = 2, \ldots, l), \end{gathered}\right\} \tag{1.2}$$

причем функции $K^i(\xi^1, \varphi^\alpha, \gamma_l^\beta, \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, k$, не содержат членов, линейных относительно $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$; члены, линейные относительно величин $\xi^1, \gamma_l^2, \ldots, \gamma_l^e$, в функции $K^i$ входят с коэффициентом $\varepsilon$; функция $K^1$ содержит слагаемое $1 \cdot \varepsilon$. Систему уравнений (1.2) коротко перепишем так:

$$\begin{gathered} \varepsilon\dot{\xi}^1 = \varphi^1, \quad \varepsilon\dot{\varphi}^i = F^i(\xi^1, \varphi^\alpha, \gamma_l^\beta, \varepsilon), \quad \dot{\gamma}_l^j = G^j(\xi^1, \varphi^\alpha, \gamma_l^\beta, \varepsilon) \\ (i = 1, \ldots, k, \quad j = 2, \ldots, l). \end{gathered} \tag{1.2'}$$

Наряду с системой (1.2) рассмотрим следующую неавтономную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^i}{d\xi^1} &= \frac{F^i(\xi^1, \varphi^\alpha, \eta^\beta, \varepsilon)}{\varphi^1}, \\ \frac{d\eta^j}{d\xi^1} &= \varepsilon \frac{G^j(\xi^1, \varphi^\alpha, \eta^\beta, \varepsilon)}{\varphi^1}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

которую для удобства перепишем так:

$$\begin{aligned} \varphi^1 \cdot \varphi^{i\prime} &= F^i(\xi^1, \varphi^\alpha, \eta^\beta, \varepsilon), \\ \varphi^1 \cdot \eta^{j\prime} &= \varepsilon G^j(\xi^1, \varphi^\alpha, \eta^\beta, \varepsilon). \end{aligned} \tag{1.3$'$}$$

Построим теперь формально следующие суммы:

$$\begin{aligned} \varphi^{i,\,2} &= \varepsilon\varphi_1^i(\xi^1) + \varepsilon^2\varphi_2^i(\xi^1), \qquad i = 1, \ldots, k, \\ \eta^{j,\,1} &= \eta_0^j(\xi^1) + \varepsilon\eta_1^j(\xi^1), \qquad j = 2, \ldots, l, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где функции $\varphi_1^i, \varphi_2^i, \eta_0^j, \eta_1^j$ определяются из соотношений, которые получаются, если суммы (1.4) подставить в правую и левую части уравнений (1.3′) и приравнять затем коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$. Непосредственно проведя выкладки, без труда убедимся, что полученные таким образом соотношения действительно дают возможность определить последовательно функции $\varphi_1^i, \varphi_2^i, \eta_0^j, \eta_1^j$. При этом выяснится, что

$$\left.\begin{array}{c} \varphi_1^1 \text{ имеет в нуле полюс первого порядка:} \\ \varphi_1^1 = \dfrac{r^1}{\xi^1} + \cdots; \\ \eta_0^j \text{ имеет в нуле нуль третьего порядка:} \\ \eta_0^j = b^j(\xi^1)^3 + \cdots; \\ \varphi_1^{\alpha'} \text{ имеет в нуле нуль первого порядка:} \\ \varphi_1^{\alpha'} = r^{\alpha'}\xi^1 + \cdots; \\ \varphi_2^1 \text{ имеет в нуле полюс четвертого порядка:} \\ \varphi_2^1 = \dfrac{R^1}{(\xi^1)^4} + \cdots; \\ \varphi_2^{\alpha'} \text{ имеет в нуле полюс первого порядка:} \\ \varphi_2^{\alpha'} = \dfrac{R^{\alpha'}}{\xi^1} + \cdots; \\ \eta_1^j \text{ имеет в нуле особенность типа } \ln|\xi^1|: \\ \eta_1^j = p^j(\xi^1)\ln|\xi^1|, \quad p^j(0) \neq 0. \end{array}\right\} \tag{1.4$'$}$$

Отметим тут же некоторые тождества, которыми мы неоднократно воспользуемся в дальнейшем и которые сразу же следуют из определе-

ния функций $\varphi_1^i$, $\varphi_2^i$, $\eta_0^j$, $\eta_1^j$ и из формул (1.4′):

$$\varphi^{i,2} \cdot \varphi^{1,2'} \equiv F^i(\xi^1, \varphi^{\alpha,2}, \eta^{\beta,1}, \varepsilon) + \Delta^i(\xi^1, \varepsilon), \tag{1.4″}$$

причем $\Delta^1(\xi^1, \varepsilon)$ имеет величину порядка $\frac{\varepsilon^3}{(\xi^1)^6}$, а $\Delta^i(\xi^1, \varepsilon)$ для $i = 2, \ldots, k$ имеет величину порядка $\frac{\varepsilon^3}{(\xi^1)^4}$.

ТЕОРЕМА 1. *Всякое решение системы уравнений* (1.3)

$$\varphi^i = \varphi^i(\xi^1, \varepsilon), \quad \eta^j = \eta^j(\xi^1, \varepsilon), \tag{1.5}$$

*удовлетворяющее начальным условиям*

$$\begin{aligned} &\varphi^i(-p, \varepsilon) - \varphi^{i,2}(-p, \varepsilon) = O(\varepsilon), \\ &\eta^j(-p, \varepsilon) - \eta^{j,1}(-p, \varepsilon) = O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{1.6}$$

*на участке* $-p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$, *может быть представлено в виде*

$$\begin{aligned} &\varphi^i = \varphi^{i,2}(\xi^1, \varepsilon) + M^i(\xi^1, \varepsilon), \\ &\eta^j = \eta^{j,1}(\xi^1, \varepsilon) + N^j(\xi^1, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1.6′}$$

*где функции* $M^i(\xi^1, \varepsilon)$, $N^j(\xi^1, \varepsilon)$ *на всем этом участке имеют величину порядка* $\varepsilon$ (*или более высокого порядка*).

Доказательству этой теоремы предпошлем некоторые определения. Назовем *трубой* $U_1$ совокупность точек пространства $(\xi^1, \varphi^1, \ldots, \varphi^k, \eta^2, \ldots, \eta^l)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$|\varphi^1 - \varphi^{1,2}| \leqslant \varepsilon M_1, \quad |\eta^j - \eta^{j,1}| \leqslant \varepsilon P_1, \quad j = 2, \ldots, l,$$
$$W(\varphi^2 - \varphi^{2,2}(\xi^1), \ldots, \varphi^k - \varphi^{k,2}(\xi^1)) \leqslant \varepsilon N_1,$$

где $M_1$, $N_1$, $P_1$ — положительные константы, не зависящие от $\varepsilon$. Совокупность точек трубы $U_1$, выделяемых уравнением

$$|\varphi^1 - \varphi^{1,2}| = \varepsilon M_1,$$

назовем $\varphi_1$-стенкой и обозначим через $U_1^{\varphi_1}$; совокупность точек трубы $U_1$, выделяемых уравнением

$$W(\varphi^2 - \varphi^{2,2}(\xi^1), \ldots, \varphi^k - \varphi^{k,2}(\xi^1)) = \varepsilon^2 N_1^2,$$

назовем $w$-стенкой и обозначим через $U_1^w$.

ЛЕММА 1. *На участке* $-p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$ *стенки* $U_1^{\varphi_1}$ *и* $U_1^w$ *трубы* $U_1$ *при достаточно больших* $M_1$ *и* $N_1$ *являются поверхностями без контакта для системы уравнений* (1.2) *и все траектории системы* (1.2), *начинающиеся на стенках* $U_1^{\varphi_1}$ *и* $U_1^w$, *при возрастании* $t$ *входят в трубу* $U_1$.

Доказательство. Вычислим производную в силу системы уравнений (1.2) в произвольной точке стенки $U_1^{\varphi_1}$ при $-p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$. Пусть эта точка лежит, например, на поверхности

$$\varphi^1 - \varphi^{1,2}(\xi^1) = \varepsilon M_1. \tag{1.7}$$

Производная в силу системы (1.2) на поверхности (1.7) равна $\left(\text{с точностью до множителя } \frac{1}{\varepsilon}\right)$

$$F^1(\xi^1, \varphi^{1,2}+\varepsilon M_1, \varphi^{\alpha',2}+\theta^{\alpha'}\varepsilon N_1, \eta_l^{\beta',1}+\widetilde{\theta}^{\beta'}\varepsilon P_1)-\varphi^{1,2'}(\varphi^{1,2}+\varepsilon M_1). \quad (1.8)$$

Разность (1.8) можно переписать так:

$$F^1(\xi^1, \varphi^{1,2}, \varphi^{\alpha',2}, \eta^{\beta',1})-\varphi^{1,2}\cdot\varphi^{1,2'}+\widetilde{\Delta}^1(\xi^1, \varepsilon) \quad (1.9)$$

или, принимая во внимание тождество (1.4), так:

$$-\Delta^1(\xi^1, \varepsilon)+\widetilde{\Delta}^1(\xi^1, \varepsilon). \quad (1.10)$$

Как уже отмечалось раньше, слагаемое $\Delta^1(\xi^1, \varepsilon)$ имеет на указанном участке изменения переменного $\xi^1$ величину порядка $\frac{\varepsilon^3}{(\xi^1)^6}$; в члене же $\widetilde{\Delta}^1(\xi^1, \varepsilon)$ доминирует, как легко подсчитать, слагаемое $2\xi^1\cdot M_1\cdot\varepsilon$. Таким образом, при достаточно большом $M_1$ вычисляемая производная отрицательна: стенка $U_1^{\varphi_1}$ пересекается траекториями системы (1.2) снаружи внутрь трубы $U_1$.

Положим, для краткости,

$$\Delta\varphi^i=\varphi^{i,2}-\varphi^i, \quad i=2, \ldots, k. \quad (1.11)$$

Очевидно, имеем:

$$\frac{d(\Delta\varphi^i)}{dt}=\frac{d}{d\xi^1}[\varphi^{i,2}-\varphi^i)]\cdot\frac{1}{\varepsilon}\varphi^1=\frac{1}{\varepsilon}[\varphi^{i,2'}-\varphi^{i'}]\varphi^1.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(\Delta\dot{\varphi}^i)=\varphi^1\cdot\varphi^{i,2'}-F^i(\xi^1, \varphi^1, \varphi^{\alpha'}, \eta^{\beta'}, \varepsilon)$$

или иначе

$$\varepsilon(\Delta\dot{\varphi}^i)=\varphi^{1,2}\cdot\varphi^{i,2'}-F^i(\xi^1, \varphi^1, \varphi^{\alpha'}, \eta_l^{\beta'}, \varepsilon)+\varphi^{i,2'}(\varphi^1-\varphi^{1,2}).$$

Но, по определению функции $\varphi^{i,2}$,

$$\varepsilon(\Delta\dot{\varphi}^i)=F^i(\xi^1, \varphi^{1,2}, \varphi^{\alpha',2}, \eta_l^{\beta',1}, \varepsilon)-F^i(\xi^1, \varphi^1, \varphi^{\alpha'}, \eta_l^{\beta'}, \varepsilon)+ \\ +\Delta^i(\xi^1, \varepsilon)+\varphi^{i,2'}(\varphi^{1,2}-\varphi^1), \quad (1.12)$$

где $\Delta^i(\xi^1, \varepsilon)$ имеет величину порядка $\frac{\varepsilon^3}{(\xi^1)^4}$. Принимая во внимание, что

$$F^i(\xi^1, \varphi^1, \varphi^{\alpha'}, \eta^{\beta'}, \varepsilon)=a^i_{\alpha'}\varphi^{\alpha'}+K^i(\xi^1, \varphi^1, \varphi^{\alpha'}, \eta_l^{\beta'}, \varepsilon),$$

отсюда получаем:

$$\varepsilon(\Delta\dot{\varphi}^i)=a^i_{\alpha'}\Delta\varphi^{\alpha'}+[K^i(\xi^1, \varphi^{1,2}, \varphi^{\alpha',2}, \eta^{\beta',1}, \varepsilon)- \\ -K^i(\xi^1, \varphi^1, \varphi^{\alpha'}, \eta^{\beta'}, \varepsilon)]+\Delta^i(\xi^1, \varepsilon)+\varphi^{i,2'}(\varphi^{1,2}-\varphi^1). \quad (1.13)$$

Обозначая сумму членов, заключенных в фигурные скобки, через $R^i$, перепишем систему (1.13) более коротко:

$$\varepsilon(\Delta\dot{\varphi}^i)=a^i_{\alpha'}\Delta\varphi^{\alpha'}+R^i. \quad (1.14)$$

Таким образом, изменение переменных $\xi^1$, $\varphi^1$, $\Delta\varphi^{\alpha'}$, $\eta^{\beta'}$ управляется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\dot{\xi}^1 &= \varphi^1, \\ \varepsilon\dot{\varphi}^1 &= F^1(\varepsilon^1, \varphi^1, \varphi^{\alpha', 2} - \Delta\varphi^{\alpha'}, \eta^{\beta'}, \varepsilon), \\ \varepsilon(\Delta\dot{\varphi}^i) &= a^i_{\alpha'}\Delta\varphi^{\alpha'} + R^i, \\ \dot{\eta}^j &= G^j(\xi^1, \varphi^1, \varphi^{\alpha', 2} - \Delta\varphi^{\alpha'}, \eta^{\beta'}) \\ (i &= 2, \ldots, k, \quad j = 2, \ldots, l). \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

Вычислим теперь производную в силу системы уравнений (1.15) в произвольной точке стенки $U_1^w$. Если учтем неравенство (6), то получим:

$$W'_{(1.15)}(\Delta\varphi^2, \ldots, \Delta\varphi^k) < -\rho\varepsilon N_1^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\partial W}{\partial\Delta\varphi^{\alpha'}}\right| | R^{\alpha'} |. \tag{1.16}$$

Но

$$\left|\frac{\partial W}{\partial\Delta\varphi^{\alpha'}}\right| < L \cdot \varepsilon N_1, \tag{1.17}$$

где $L$ — положительная константа. Далее, нетрудно убедиться, что при $-p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$

$$| R^{\alpha'} | < R \cdot N_1 \cdot | \xi^1 | \cdot \varepsilon \tag{1.18}$$

($R$ — положительная константа). Таким образом, при достаточно большом $N_1$

$$W'_{(1.15)}(\Delta\varphi^2, \ldots, \Delta\varphi^k) < 0. \tag{1.19}$$

Лемма 1 доказана.

Переходим к оценкам для функций $\eta^j(\xi^1, \varepsilon)$ на участке $(-p_1, -\sigma_1)$. Пусть

$$\eta^j(\xi^1, \varepsilon) = \eta^{j, 1}(\xi^1, \varepsilon) + \Delta\eta^j, \quad j = 2, \ldots, l. \tag{1.20}$$

Очевидно, функции $\Delta\eta^j$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\Delta\eta^{j'} = \varepsilon\frac{G^j(\xi', \varphi^\alpha, \eta^{\beta, 1} + \Delta\eta^\beta)}{\varphi^1} - [\eta^{j, 1}]'. \tag{1.21}$$

Легко убедиться, что в трубе $U_1$ при $-p \leqslant \xi^1 \leqslant -\sigma_1$ справедлива следующая оценка:

$$\left|\frac{\varepsilon G^j(\xi^1, \varphi^\alpha, \eta^{\beta, 1} + \Delta\eta^\beta)}{\varphi^1} - [\eta^{j, 1}]'\right| < \frac{\varepsilon^2 \cdot A}{(\xi^1)^4} + \varepsilon(\xi^1)^2 \cdot B, \tag{1.22}$$

где $A$ и $B$ — константы, $A$ не зависит от $M_1$, $N_1$ и $P_1$. Из этой оценки и из леммы 1 без труда выводится справедливость асимптотических разложений (1.6).

## § 2. Доказательство справедливости разложений решений системы (1) на участке $-\sigma_1 \leqslant \xi^1 \leqslant \sigma_2$

Здесь систему уравнений (2) запишем в новых переменных:

$$\begin{gathered}\xi^1 = \mu u^1, \quad \xi^i = \mu^2 u^i, \quad i = 2, \ldots, k, \quad \eta^1 = \mu^2 v^1, \\ \eta^j = \mu^3 v^j, \quad j = 2, \ldots, l, \quad t = \mu^2 \tau, \quad \varepsilon = \mu^3. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du^1}{d\tau} = (u^1)^2 + v^1 + \mu\,(b^1_{\beta'} v^{\beta'} + c^1_1 u^1 + d^1_1 (u^1)^3 + e^1_{\alpha'} u^1 u^{\alpha'}) + \mu^2 F^1, \\ &\mu\,\frac{du^i}{d\tau} = a^i_{\alpha'} u^{\alpha'} + b^i_1 v^1 + c^i_0 (u^1)^2 + \mu\,(b^1_{\beta'} v^{\beta'} - d^1_1 (u^1)^3 + c^1_1 u^1 v^1 + \\ &\qquad\qquad + e^i_{\alpha'} u^1 u^{\alpha'}) + \mu^2 F^i, \\ &\frac{dv^1}{d\tau} = 1 + \mu \alpha^1_1 u^1 + \mu^2 \Phi^1, \\ &\frac{dv^j}{d\tau} = \alpha^j_1 u^1 + \mu \Phi^j \\ &\qquad (i = 2, \ldots, k, \quad j = 2, \ldots, l), \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

или, более коротко,

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}^1 &= \varphi^1 (u^\alpha, v^\beta, \mu), \\ \mu \dot{u}^i &= \varphi^i (u^\alpha, v^\beta, \mu), \\ \dot{v}^j &= \psi^j (u^\alpha, v^\beta, \mu) \end{aligned}\right\} \tag{2.2'}$$

(всюду в этом параграфе точкой мы обозначаем дифференцирование по $\tau$).

На участке $-\frac{\sigma_1}{\mu} \leqslant u^1 \leqslant \frac{\sigma_2}{\mu}$ (в который перейдет участок $(-\sigma_1, \sigma_2)$ при замене $\xi^1 = \mu u^1$) наряду с системой уравнений (2.2) мы будем рассматривать систему

$$\left.\begin{aligned} \mu\,\frac{du^i}{du^1} &= \frac{\varphi^i (u^\alpha, v^\beta, \mu)}{\varphi^1 (u^\alpha, v^\beta, \mu)}, \quad i = 2, \ldots, k, \\ \frac{dv^j}{du^1} &= \frac{\psi^j (u^\alpha, v^\beta, \mu)}{\varphi^1 (u^\alpha, v^\beta, \mu)}, \quad j = 1, \ldots, l. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

В работе ([1]) была формально сконструирована система функций

$$\left.\begin{aligned} v^{j,1} &= v^1_0 (u^1) + \mu v^1_1 (u^1), \\ v^{j,0} &= v^j_0 (u^1), \\ u^{i,1} &= u^i_0 (u^1) + \mu u^i_1 (u^1), \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

относительно которой мы докажем следующее предложение.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое решение*

$$\begin{aligned} v^j &= v^j (u^1, \mu), \quad j = 1, \ldots, l, \\ u^i &= u^i (u^1, \mu), \quad i = 2, \ldots, k, \end{aligned} \tag{2.5}$$

*системы уравнений* (2.3), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$\left.\begin{aligned} v^1\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}, \mu\right) - v^{1,1}\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}, \mu\right) &= O(\mu), \\ v^j\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}, \mu\right) - v_0^j\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}\right) &= O(1), \\ u^i\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}, \mu\right) - u^{i,1}\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}\right) &= O(\mu) \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

*на участке* $-\frac{\sigma_1}{\mu} \leqslant u^1 \leqslant \frac{\sigma_2}{\mu}$, *можно представить в следующем виде*:

$$\left.\begin{aligned} v^1 &= v^{1,1} + r^1(u^1, \mu), \\ v^j &= v^{j,0} + r^j(u^1, \mu), \\ u^i &= u^{i,1} + s^i(u^1, \mu), \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

*причем на всем этом участке*

$$|r^1(u^1, \mu)| < N\mu, \quad |s^i(u^1, \mu)| < M\sqrt{\mu}, \quad |r^j(u^1, \mu)| < P, \quad j \geqslant 2. \qquad (2.8)$$

Перейдем еще раз к новым переменным, полагая

$$v^j = v^j, \quad j = 1, \ldots, l, \quad u^1 = u^1, \quad \mu x^i = u^i - u_0^i(u^1), \quad i = 2, \ldots, k. \qquad (2.9)$$

Относительно переменных $u^1, v^1, \ldots, v^l, x^2, \ldots, x^k$ получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}^1 &= (u^1)^2 + v^1 + \mu\left(b^1_{\beta'} v^{\beta'} + c^1_1 u^1 v^1 + d^1_1 (u^1)^3 + e^1_{\alpha'}(u^{\alpha'} + \mu x^{\alpha'}) u^1\right) + \mu^2 \cdot \widetilde{F}^1, \\ \mu(\mu \dot{x}^i) &= a^i_{\alpha'}(\mu x^{\alpha'} + u_0^{\alpha'}) + b^i_1 v^1 + c^i_0 (u^1)^2 + \mu\left(e^i_{\beta'} v^{\beta'} + c^i_1 u^1 v^1 + \right. \\ &\quad \left. + d^i_1 (u^1)^3 + e^i_{\alpha'} u^1 (\mu x^{\alpha'} + u_0^{\alpha'}) - u_0^{i'}((u^1)^2 + v^1)\right) + \mu^2 \widetilde{F}^i, \\ \dot{v}^1 &= 1 + \mu \alpha^1_1 u^1 + \mu^2 \widetilde{\Phi}^1, \quad \dot{v}^j = \alpha^j_1 u^1 + \mu \widetilde{\Phi}^j \\ &(i = 2, \ldots, k, \quad j = 2, \ldots, l). \end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

Преобразуя правые части $k-1$ уравнений $\mu(\mu \dot{x}^i) = \cdots$ и затем сокращая на $\mu$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}^1 &= \varphi^1(u^1, u_0^{\alpha'} + \mu x^{\alpha'}, v^\beta, \mu), \\ \mu \dot{x}^i &= A^i(x^{\alpha'}, u^1) + \frac{1}{\mu} b^i_1 (v^1 - v^1_0 - \mu v^1_1) + b^i_{\beta'}(v^{\beta'} - v_0^{\beta'}) + \\ &\quad + c^i_1 u^1 (v^1 - v^1_0) - u_0^{i'}(v^1 - v^1_0) + \mu \dot{e}^i_{\alpha'} u^1 u^{\alpha'} + \cdots, \\ \dot{v}^1 &= 1 + \mu \alpha^1_1 u^1 + \mu^2 \widetilde{\Phi}^1, \\ \dot{v}^j &= \alpha^j_1 u^1 + \mu \widetilde{\Phi}^j. \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Здесь мы положили

$$\begin{aligned} A^i(x^{\alpha'}, u^1) &= \alpha^i_{\alpha'} x^{\alpha'} + b^i_1 v^1 + b^i_{\beta'} v_0^{\beta'} + c^i_1 u^1 v^1_0 + d^i_1 (u^1)^3 + \\ &\quad + e^i_{\alpha'} u^1 u^{\alpha'} - [(u^1)^2 + v^1_0] u_0^{i'}, \quad i = 2, \ldots, k. \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Сразу же отметим, что из самого определения функций $u_1^{\alpha'}(u^1)$ следует, что

$$A^i(u_1^{\alpha'}(u^1), u^1) \equiv 0. \tag{2.13}$$

Систему уравнений (2.11) окончательно перепишем в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}^1 &= \varphi^1(u^1, u^{\alpha'} + \mu x^{\alpha'}, v^\beta, \mu), \\ \mu\dot{x}^i &= A^i(x^{\alpha'}, u^1) + B^i(u^1, x^{\alpha'}, v^\beta, \mu) + C^i(u^1, x^{\alpha'}, v^\beta, \mu), \\ \dot{v}^1 &= 1 + \mu\alpha_1^1 u^1 + \mu^2\widetilde{\Phi}^1, \\ \dot{v}^j &= \alpha_1^j u^1 + \mu\widetilde{\Phi}^j. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Входящие сюда функции $B^i(u^1, x^{\alpha'}, v^{\beta'}, \mu)$ определяются формулами:

$$B^i(u^1, x^{\alpha'}, v^\beta, \mu) = \frac{1}{\mu} b_1^i(v^1 - v_0^1 - \mu v_1^1) + b_{\beta'}^i(v^{\beta'} - v_0^{\beta'}) + \\ + c_1^i u^1(v^1 - v_0^1) + u_0^{i'}(v^1 - v_0^1), \quad i = 2, \ldots, k. \tag{2.15}$$

Введем вспомогательную систему линейных дифференпиальных уравнений

$$\mu\dot{x}^i = A^i(x^{\alpha'}, u^1), \quad i = 2, \ldots, k. \tag{2.16}$$

Положение равновесия системы (2.16), как это видно из формулы (2.12), зависит от переменного $u^1$, которое мы будем пока считать параметром. Разрешая уравнения $A^i(x^{\alpha'}, u^1) = 0$ относительно $x^i$, найдем это положение равновесия:

$$x^i = u_1^i(u^1), \quad i = 2, \ldots, k. \tag{2.17}$$

Непосредственно видно, что $u_1^i(u^1)$ при больших положительных и при больших отрицательных значениях $u^1$ имеют порядок $O((u^1)^3)$.

Так как все собственные значения матрицы $\| a_{\alpha'}^i \|$ имеют отрицательные действительные части, то для линейной системы дифференциальных уравнений (2.16) можно построить положительно определенную квадратичную форму — функцию Ляпунова

$$W(x^2 - u_1^2(u^1), \ldots, x^k - u_1^k(u^1))$$

с коэффициентами, не зависящими от $u^1$, удовлетворяющую следующему неравенству:

$$W'_{(2.16)} < -\rho\frac{1}{\mu} \cdot W, \quad \rho > 0. \tag{2.18}$$

Назовем трубой $U_2$ совокупность точек $(u^1, \ldots, u^k, v^1, \ldots, v^l)$ пространства $R$, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} \quad W(u^2 - u^{2,1}(u^1), \ldots, u^k - u^{k,1}(u^1)) \leqslant \mu M_2^2, \\ &\text{b)} \quad |v^1 - v^{1,1}(u^1)| \leqslant \mu N_2, \\ &\text{c)} \quad |v^j - v^{j,0}(u^1)| \leqslant P_2, \quad j \geqslant 2, \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

где $M_2$, $N_2$, $P_2$ — константы.

Множество точек трубы $U_2$, выделяемых уравнением

$$W(u^2-u^{2,1}(u^1),\ \ldots\ ,\ u^k-u^{k,1}(u^1))=\mu M_2^2, \qquad (2.20)$$

назовем $w$-стенкой и обозначим через $U_2^w$. Множество точек трубы $U_2$, выделяемых уравнением

$$|\,v^1-v^{1,1}(u^1)\,|=\mu N_2, \qquad (2.20')$$

назовем $v^1$-стенкой и обозначим через $U_2^{v_1}$.

ЛЕММА 2. *На участке* $-\frac{\sigma_1}{\mu}\leqslant u^1\leqslant\frac{\sigma_2}{\mu}$ *стенка* $U_2^w$ *трубы* $U_2$ *при достаточно большом* $M_2$ *является поверхностью без контакта для системы уравнений* (2.2) *и все траектории системы* (2.2), *начинающиеся на этой стенке, при возрастании* $\tau$ *входят в трубу* $U_2$.

Доказательство. Прежде всего обратим внимание на то, что в силу (2.9) уравнение (2.20) можно переписать так:

$$W(x^2-u_1^2(u^1),\ \ldots\ ,\ x^k-u_1^k(u^1))=\frac{1}{\mu}M_2^2. \qquad (2.21)$$

Для доказательства леммы 2 достаточно поэтому убедиться, что производная в силу системы уравнений (2.14) в произвольной точке поверхности (2.21) при $v^1,\ \ldots\ ,\ v^l$, удовлетворяющих неравенствам b) и c) (2.19), и при $-\frac{\sigma_1}{\mu}\leqslant u^1\leqslant\frac{\sigma_2}{\mu}$ отрицательна. Вычислим эту производную. Имеем:

$$W'_{(2.14)}=W'_{(2.16)}+\frac{\partial W}{\partial u^1}\cdot\varphi^1+\frac{1}{\mu}\frac{\partial W}{\partial x^{\alpha'}}[B^{\alpha'}+C^{\alpha'}].$$

Следовательно, в силу (2.18),

$$W'_{(2.14)}<-\frac{1}{\mu}\rho W+\left|\frac{\partial W}{\partial u^1}\right|\cdot|\varphi^1|+\frac{1}{\mu}\left|\frac{\partial W}{\partial x^{\alpha'}}\right|\{|B^{\alpha'}|+|C^{\alpha'}|\}. \qquad (2.22)$$

Оценим величины $\frac{\partial W}{\partial u^1}$, $\frac{\partial W}{\partial x^{\alpha'}}$, $\varphi^1$, $|B^{\alpha'}|+|C^{\alpha'}|$, входящие в правую часть неравенства (2.22) на стенке $U_2^w$ и при $-\frac{\sigma_1}{\mu}\leqslant u^1\leqslant\frac{\sigma_2}{\mu}$. Прежде всего очевидно, что

$$\left|\frac{\partial W}{\partial x^{\alpha'}}\right|<p\cdot M\frac{1}{\sqrt{\mu}},\quad p=\text{const}. \qquad (2.23)$$

Далее, легко видеть, что

$$\left|\frac{\partial W}{\partial u^1}\right|\cdot|\varphi^1|<q\cdot M\cdot\mu^{-\frac{11}{6}},\quad q=\text{const}. \qquad (2.24)$$

Наконец,

$$|C^{\alpha'}|+|B^{\alpha'}|<r\cdot\mu^{-\frac{1}{3}},\quad r=\text{const}. \qquad (2.25)$$

Принимая во внимание неравенства (2.23), (2.24) и (2.25), из (2.22) получим:

$$W'_{(2.14)} < -\frac{1}{\mu^2}\rho M_2^2 + qM_2\frac{1}{\mu^{\frac{11}{6}}} + \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu}}M_2\cdot p\cdot r\frac{1}{\sqrt[3]{\mu}}. \qquad (2.26)$$

Таким образом, при достаточно большом $M_2$

$$W'_{(2.14)} < 0,$$

что и доказывает лемму 2.

Чтобы получить оценки для функций $v^j(u^1, \mu)$, $j = 1, \ldots, l$, разобьем участок $\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}, \frac{\sigma_2}{\mu}\right)$ точкой $\frac{\sigma_2'}{\mu} = \mu^{-\frac{1}{4}}$ на две части: $\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}, \frac{\sigma_2'}{\mu}\right)$ и $\left(\frac{\sigma_2'}{\mu}, \frac{\sigma_2}{\mu}\right)$.

ЛЕММА 3. *На участке* $-\frac{\sigma_1}{\mu} \leqslant u^1 \leqslant \frac{\sigma_2'}{\mu}$ *стенка* $U_2^{v_1}$ *трубы* $U_2$ *при достаточно большом* $N_2$ *является поверхностью без контакта для системы уравнений* (2.2) *и все траектории системы* (2.2), *начинающиеся на этой стенке, при возрастании* $\tau$ *входят в трубу* $U_2$.

Для доказательства этой леммы покажем, что производная в силу системы уравнений (2.2) на части стенки $U_2^{v_1}$, выделяемой уравнением

$$v^1 = v^{1,1} + \mu N_2, \qquad (2.27)$$

отрицательна, а на части стенки $U_2^{v_1}$, выделяемой уравнением

$$v^1 = v^{1,1} - \mu N_2, \qquad (2.28)$$

положительна. Вычислим, например, производную в произвольной точке части стенки $U_2^{v_1}$, выделяемой уравнением (2.27). С точностью до положительного множителя эта производная равна

$$\frac{\psi^1(u^1, u^{\alpha', 1} + \theta^{\alpha'}\sqrt{\mu}M_2, v^{1,1} + \mu N_2, v^{\beta', 0} + \widetilde{\theta}^{\beta'}P_2, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha', 1} + \theta^{\alpha'}\sqrt{\mu}M_2, v^{1,1} + \mu N_2, v^{\beta', 0} + \widetilde{\theta}^{\beta'}P_2, \mu)} - [v^{1,1}]',$$
$$-1 \leqslant \theta^{\alpha'}, \widetilde{\theta}^{\beta'} \leqslant 1. \qquad (2.28')$$

Разность (2.28) перепишем развернуто:

$$\frac{\psi'(u^1, u^{\alpha', 1}, v^{1,1}, v^{\beta', 0}, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha', 1}, v^{1,1}, v^{\beta', 0}, \mu)} - [v^{1,1}]' +$$
$$+\left[\frac{\psi^1(u^1, u^{\alpha', 1} + \theta^{\alpha'}\sqrt{\mu}M_2, v^{1,1} + \mu N_2, v^{\beta', 0} + \widetilde{\theta}^{\beta'}P_2}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha', 1} + \theta^{\alpha'}\sqrt{\mu}M_2, v^{1,1} + \mu N_2, v^{\beta', 0} + \widetilde{\theta}^{\beta'}P_2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\psi^1(u^1, u^{\alpha', 1}, v^{1,1}, v^{\beta', 0}, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha', 1}, v^{1,1}, v^{\beta', 0}, \mu)}\right]. \qquad (2.29)$$

Но по самому определению функции $v^{1,1}$ в разложении разности

$$\frac{\psi^1(u^1, u^{\alpha', 1}, v^{1,1}, v^{\beta', 0}, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha', 1}, v^{1,1}, v^{\beta', 0}, \mu)} - [v^{1,1}]' \qquad (2.30)$$

по степеням $\mu$ коэффициенты при $\mu^0$ и $\mu^1$ исчезнут. Доминирующим членом на участке $-\frac{\sigma_1}{\mu} \leqslant u^1 \leqslant \frac{\sigma_2'}{\mu}$ будет коэффициент при $\mu^2$, который имеет вид:

$$\frac{H^1(u^1)}{[(u^1)^2 + v_0^1(u^1)]^2}, \tag{2.31}$$

причем

$$\begin{aligned} H^1(u^1) &= O((u^1)^7)_{u^1 \to -\infty}, \\ H^1(u^1) &= O((u^1)^4)_{u^1 \to +\infty}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Далее, производя разложение разности, заключенной в квадратные скобки в соотношении (2.29), убедимся, что на указанном участке доминирующим членом в этой разности при достаточно большом $N_2$ (зависящем лишь от $P_2$ и не зависящем от $M_2$) будет слагаемое

$$\mu \frac{-N_2}{[(u^1)^2 + v_0^1]^2}. \tag{2.33}$$

Таким образом, при достаточно большом $N_2$ производная в силу системы уравнений (2.2) в произвольной точке части стенки $U_2^{v_1}$, выделяемой уравнением (2.27) на участке $-\frac{\sigma_1}{\mu} \leqslant u^1 \leqslant \frac{\sigma_2'}{\mu}$, отрицательна. Лемма 3 доказана.

Положим теперь

$$\Delta v^j = v^j - v^{j,0}, \quad j = 2, \ldots, l. \tag{2.34}$$

Система дифференциальных уравнений, управляющая изменением функций $\Delta v^j$, такова:

$$\Delta v^{j\prime} = \frac{\psi^j(u^1, u^{\alpha'}, v^1, v^{\beta',0} + \Delta v^{\beta'}, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha'}, v^1, v^{\beta',0} + \Delta v^{\beta'}, \mu)} - v^{j,0\prime}. \tag{2.35}$$

ЛЕММА 4. *На участке* $-\frac{\sigma_1}{\mu} \leqslant u^1 < \frac{\sigma_2'}{\mu}$ *при* $u^{\alpha'}$, $v^1$, *удовлетворяющих неравенствам* a) *и* b) (2.19), *функции* $\Delta v^j$ *ограничены некоторой константой, не зависящей от* $M_2$ *и* $N_2$, *если начальные значения этих функций* $\Delta v^j\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}\right)$ *ограничены константой, не зависящей от* $M_2$ *и* $N_2$.

Доказательство. Заменим уравнение (2.35) интегральным уравнением

$$\Delta v^j = \Delta v^j\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}\right) + \int_{\frac{-\sigma_1}{\mu}}^{u_1} \left[\frac{\psi^j(u^1, u^{\alpha'}, v^1, v^{\beta',0} + \Delta v^{\beta'}, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha'}, v^1, v^{\beta',0} + \Delta v^{\beta'}, \mu)} - v^{j,0\prime}\right] du^1. \tag{2.36}$$

Положим $\Delta v^j\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}\right) = \Delta_0^j$ и

$$\Delta_k^j = \Delta_0^j + \int_{\frac{-\sigma_1}{\mu}}^{u^1} \left[\frac{\psi^j(u^1, u^{\alpha'}, v^1, v^{\beta',0} + \Delta_{k-1}^{\beta'}, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha'}, v^1, v^{\beta',0} + \Delta_{k-1}^{\beta'}, \mu)} - v^{j,0\prime}\right] du^1. \tag{2.37}$$

Оценим разность $\Delta_1^j - \Delta_0^j$ при $u^{\alpha'}$, $v^1$, $u^1$, удовлетворяющих неравенствам, упомянутым в формулировке леммы 4. Очевидно, имеем:

$$| \Delta_1^j - \Delta_0^j | \leqslant \left| \int\limits_{\frac{-\sigma_1}{\mu}}^{u^1} \frac{\psi^j(u^1, u^{\alpha', 1} + \theta^{\alpha'}\sqrt{\mu}M_2, v^{1,1} + \tilde{\theta}^1\mu N_2, v^{\beta', 0} + \Delta_0^{\beta'})}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha', 1} + \theta^{\alpha'}\sqrt{\mu}M_2, v^{1,1} + \tilde{\theta}^1\mu N_2, v^{\beta', 0} + \Delta_0^{\rho'})} - \right.$$
$$\left. - \frac{\psi^j(u^1, u^{\alpha', 1}, v^{1,1}, v^{\beta', 0}, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha', 1}, v^{1,1}, v^{\beta', 0}, \mu)} du^1 \right| + \left| \int\limits_{\frac{-\sigma_1}{\mu}}^{u^1} \left[ \frac{\psi^j(u^1, u^{\alpha', 1}, v^{1,1}, v^{\beta', 0}, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha', 1}, v^{1,1}, v^{\beta', 0}, \mu)} - v^{j, 0'} \right] du^1 \right|. \tag{2.38}$$

Учитывая, что в разности, стоящей под знаком интеграла во втором слагаемом (2.38), при разложении по степеням $\mu$ свободный член пропадет, а коэффициент $\Gamma^j(u^1)$ при $\mu$ имеет асимптотику:

$$\begin{gathered} \Gamma^j(u^1) = O(1)_{u^1 \to +\infty}, \\ \Gamma^j(u^1) = O((u^1)^6)_{u^1 \to -\infty}, \end{gathered} \tag{2.39}$$

легко оценить второе слагаемое, стоящее в правой части неравенства (2.39). Первое слагаемое оценивается элементарно. Не проводя подробно всех вычислений, сразу выпишем окончательный результат:

$$| \Delta_1^j - \Delta_0^j | < A, \quad A = \text{const}, \tag{2.40}$$

причем $A$ не зависит от $M_2$, $N_2$. Предполагая, что неравенство

$$| \Delta_k^j - \Delta_{k-1}^j | < Ad^{k-1}, \tag{2.41}$$

где $d < 1$ — некоторая положительная константа, уже доказано, без труда докажем, что

$$| \Delta_{k+1}^j - \Delta_k^j | < Ad^k. \tag{2.42}$$

Таким образом, последовательность

$$\Delta_0^j, \ \Delta_1^j, \ \ldots, \ \Delta_k^j, \ \ldots \tag{2.43}$$

сходится и ее предел ограничен. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. *На участке* $\frac{\sigma_2'}{\mu} \leqslant u^1 \leqslant \frac{\sigma_2}{\mu}$ *при* $u^{\alpha'}$, $\alpha' = 2, \ldots, k$, *удовлетворяющих неравенству* а) (2.19), *функции* $v^1(u^1, \mu)$, $v^{\beta'}(u^1, \mu)$ *с начальными условиями*

$$\begin{gathered} v^1\left(\frac{\sigma_2'}{\mu}, \mu\right) - v^{1,1}\left(\frac{\sigma_2'}{\mu}\right) = O(\mu), \\ v^{\beta'}\left(\frac{\sigma_2'}{\mu}, \mu\right) - v^{\beta', 0}\left(\frac{\sigma_2'}{\mu}\right) = O(1) \end{gathered} \tag{2.44}$$

*удовлетворяют соотношениям*

$$
\begin{aligned}
&| v^1(u^1, \mu) - v^{1,1}(u^1) | < N_2\mu, \\
&| v^{\beta'}(u^1, \mu) - v^{\beta', 0}(u^1) | < P_2,
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

*где $N_2$, $P_2$ — положительные константы, не зависящие от $M_2$.*

Доказательство. Положим опять

$$
\begin{aligned}
&\Delta v^1 = v^1 - v^{1,1}, \\
&\Delta v^{\beta'} = v^{\beta'} - v^{\beta', 0}, \quad \beta' = 2, \ldots, l.
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

Функции $\Delta v^1, \ldots, \Delta v^l$ удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\Delta v^1 = \Delta_0^1 + \int\limits_{\frac{\sigma_2}{\mu}}^{u^1} \left[ \frac{\psi^1(u^1, u^{\alpha'}, v^{1,1} + \Delta v^1, v^{\beta', 0} + \Delta v^{\beta'}, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha'}, v^{1,1} + \Delta v^1, v^{\beta', 0} + \Delta v^{\beta'}, \mu)} - v^{1,1'} \right] du^1, \\
&\Delta v^{\beta'} = \Delta_0^{\beta'} + \int\limits_{\frac{\sigma_2}{\mu}}^{u^1} \left[ \frac{\psi^{\beta'}(u^1, u^{\alpha'}, v^{1,1} + \Delta v^1, v^{\beta', 0} + \Delta v^{\beta'}, \mu)}{\varphi^1(u^1, u^{\alpha'}, v^{1,1} + \Delta v^1, v^{\beta', 0} + \Delta v^{\beta'}, \mu)} - v^{\beta', 0'} \right] du^1.
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

Пользуясь асимптотическими свойствами и определением функций $v^{1,1}, \ldots, v^{l,0}$, без труда обнаружим, что при $u^{\alpha'}$, удовлетворяющих ограничениям, упомянутым в формулировке леммы, справедливы неравенства:

$$
\begin{aligned}
&| \Delta_1^1 - \Delta_0^1 | < D\mu, \\
&| \Delta_1^j - \Delta_0^j | < r < 1; \quad j \geqslant 2,
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

где $D$ — некоторая константа, не зависящая от $M_2$. Строя затем последовательные приближения, как и при доказательстве леммы 4, и производя соответствующие оценки, найдем, что

$$
| \Delta_k^j - \Delta_{k-1}^j | < (D\mu)^{k-1},
$$

откуда сразу следует справедливость леммы 5. Совокупность лемм 2, 3, 4, 5 гарантирует справедливость теоремы 2.

## § 3. Доказательство справедливости асимптотических разложений решений системы (3) на участке $(\sigma_2, p)$

В этом параграфе будет доказана справедливость формул

$$
\gamma_l^j(\xi^1, \varepsilon) = \gamma_l^j(\sigma_2, \varepsilon) + \varepsilon \int\limits_{\sigma_2}^{\xi^1} \frac{\psi^j(\xi^1, B_0^{\alpha'}(\xi^1)^2, 0, \ldots, 0)\, d\xi^1}{\Phi^1(\xi^1, B_0^{\alpha'}(\xi^1)^2, 0, \ldots, 0)} + O(\varepsilon) \tag{3.1}
$$

на участке $(\sigma_2, p)$. Пусть

$$
\xi^i = \xi_0^i(\xi^1), \quad i = 2, \ldots, k,
$$

— решение системы уравнений

$$
\frac{d\xi^i}{d\xi^1} = \frac{\Phi^i(\xi, 0)}{\Phi^1(\xi, 0)}, \quad i = 2, \ldots, k, \tag{3.2}
$$

определенное при $\xi^1 > 0$ и стремящееся к нулю при $\xi^1 \to 0$. Легко видеть, что

$$\xi_0^i(\xi^1) = B_0^i(\xi^1)^2 + \ldots, \tag{3.3}$$

где многоточием заменены члены более высокого порядка относительно $\xi^1$, а числа $B_0^i$ находятся из системы алгебраических линейных уравнений

$$a_{\alpha'}^i B_0^{\alpha'} + c_0^i = 0, \quad i = 2, \ldots, k.$$

Положим

$$\Delta\xi^i = \xi^i - \xi_0^i(\xi^1), \quad i = 2, \ldots, k. \tag{3.4}$$

Изменение переменных $\xi^1, \Delta\xi^2, \ldots, \Delta\xi^k$ управляется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon\dot{\xi}^1 = \Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta),\\
&\varepsilon(\Delta\dot{\xi}^i) = \left[\frac{\Phi^i(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)} - \frac{\Phi^i(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0)}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0)}\right]\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta),\\
&\dot{\eta}^j = \psi^j(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta),\\
&(i = 2, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, l).
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Для наших целей правые части уравнений $\varepsilon(\Delta\dot{\xi}^i) = \ldots$ удобно привести к некоторому специальному виду. Проведем нужные преобразования и оценки. Прежде всего очевидно, что

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\Delta\dot{\xi}^i) &= [\Phi^i(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta) - \Phi^i(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0)] + \\
&+ \Phi^i(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0)\cdot\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)\cdot\left[\frac{1}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)} - \frac{1}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0)}\right].
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Но

$$\begin{aligned}
&\Phi^i(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta) - \Phi^i(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0) = \\
&= a_{\alpha'}^i \Delta\xi^{\alpha'} + G^i(\xi^1, \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta), \quad i = 2, \ldots, k,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$G^i(\xi^1, \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta) = \Phi^i(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta) - \Phi^i(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0) - a_{\alpha'}^i\Delta\xi^{\alpha'}. \tag{3.8}$$

Второе слагаемое в правой части системы (3.6) обозначим для краткости через $H^i(\xi^1, \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)$. Тогда система (3.5) перепишется в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon\dot{\xi}^1 = \Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta),\\
&\varepsilon(\Delta\dot{\xi}^i) = a_{\alpha'}^i\Delta\xi^{\alpha'} + G^i(\xi^1, \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta) + H^i(\xi^1, \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta),\\
&\dot{\eta}^j = \psi^j(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)\\
&(i = 2, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, l).
\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Возьмем вспомогательную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\varepsilon(\Delta\dot{\xi}^i) = a^i_{\alpha'}\Delta\xi^{\alpha'}, \quad i = 2, \ldots, k. \tag{3.10}$$

Возьмем, далее, функцию Ляпунова для системы (3.10) — $W(\Delta\xi^2, \ldots, \Delta\xi^k)$ — положительно определенную квадратичную форму переменных $\Delta\xi^2, \ldots, \Delta\xi^k$, удовлетворяющую неравенству

$$W'_{(3.10)} < -\frac{1}{\varepsilon}\rho W, \tag{3.11}$$

где $\rho$ — некоторая положительная константа. Назовем трубой $U_3$ множество точек пространства $(\xi^1, \Delta\xi^2, \ldots, \Delta\xi^k, \ldots, \gamma_l^e)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$W(\Delta\xi^2, \ldots, \Delta\xi^k) \leqslant \left[R\cdot\varepsilon^{\frac{4}{9}}\right]^2, \quad |\gamma_l^j| \leqslant L\varepsilon^{\frac{2}{3}}, \tag{3.12}$$

где $R$ и $L$ — положительные константы. Множество точек трубы $U_3$, выделяемых уравнением

$$W(\Delta\xi^2, \ldots, \Delta\xi^k) = \left[R\cdot\varepsilon^{\frac{4}{9}}\right]^2, \tag{3.13}$$

назовем $w$-стенкой и обозначим это множество через $U_3^w$.

ЛЕММА 6. *На участке $\sigma_2 \leqslant \xi^1 \leqslant p$ стенка $U_3^w$ трубы $U_3$ при достаточно большом $R$ является поверхностью без контакта для системы уравнений* (3.9) *и все траектории системы* (3.9), *начинающиеся на этой стенке, при возрастании $t$ входят в трубу $U_3$.*

При доказательстве этой леммы будут использованы оценки сверху для функций $G^j(\xi^1, \Delta\xi^\alpha, \gamma_l^\beta)$ и $H^i(\xi^1, \Delta\xi^\alpha, \gamma_l^\beta)$, при $\sigma_2 \leqslant \xi^1 \leqslant p$, в трубе $U_3$. Выведем эти оценки. Очевидно, имеем:

$$|G^i(\xi^1, \Delta\xi^\alpha, \gamma_l^\beta)| < p\cdot\xi^1\cdot\varepsilon^{\frac{4}{9}}, \quad i = 2, \ldots, k, \tag{3.14}$$

где $p > 0$ — константа (зависит от $R$).

Далее,

$$|H^i(\xi^1, \Delta\xi^\alpha, \gamma_l^\beta)| \leqslant |\Phi^i(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0)|\cdot|\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \gamma_l^\beta)| \times \\ \times \left|\frac{1}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)} - \frac{1}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0)}\right|. \tag{3.15}$$

Нетрудно подсчитать, что в трубе $U_3$

$$|H^i(\xi^1, \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta) < q\cdot\xi^1\cdot\varepsilon^{\frac{4}{9}}, \tag{3.16}$$

где $q > 0$ — константа.

Доказательство леммы 6. Производная в силу системы уравнений (3.9) в произвольной точке стенки $U_3^w$ равна

$$W'_{(3.9)} = W'_{(3.10)} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial W}{\partial\xi^{\alpha'}}(G^{\alpha'} + H^{\alpha'}).$$

Учитывая неравенства (3.11), (3.14), (3.16), отсюда сразу же получаем:

$$W'_{(3.9)} < -\frac{1}{\varepsilon}\rho\left[R\varepsilon^{\frac{4}{9}}\right]^2 + \frac{1}{\varepsilon}R\varepsilon^{\frac{4}{9}}\cdot r\cdot\xi^1\cdot\varepsilon^{\frac{4}{9}},$$

где $r$ — константа; следовательно, при достаточно большом $R$ имеем:

$$W'_{(3.9)}(\Delta\xi^2, \ldots, \Delta\xi^k) < 0,$$

что и доказывает лемму.

Докажем теперь, что при

$$W(\Delta\xi^2, \ldots, \Delta\xi^k) \leqslant \left[R\varepsilon^{\frac{4}{9}}\right]^2$$

функции $\eta^j(\xi^1, \varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\eta^j(\xi^1, \varepsilon)| < L\varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

Система дифференциальных уравнений, управляющая изменением функций $\eta^j(\xi^1, \varepsilon)$, такова:

$$\eta^{j\prime} = \varepsilon\frac{\psi^j(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)}, \quad j = 1, \ldots, l. \tag{3.17}$$

Решение системы (3.17) будем строить методом последовательных приближений

$$\eta^j_{k+1} = \eta^j(\sigma_2, \varepsilon) + \varepsilon\int_{\sigma_2}^{\xi^1}\frac{\psi^j(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta_k^\beta)}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta_k^\beta)}d\xi^1, \tag{3.18}$$

отправляясь от

$$\eta^j_0(\xi^1, \varepsilon) \equiv \eta^j(\sigma_2, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right). \tag{3.19}$$

Прежде всего без большого труда получаем:

$$|\eta^j_1 - \eta^j_0| < \varepsilon\left|\int_{\sigma_2}^{\xi^1}\frac{\psi^j(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta_0^\beta)}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta_0^\beta)}d\xi^1\right| <$$

$$< M\cdot\varepsilon\left|\int_{\sigma_2}^{\xi^1}\frac{d\xi^1}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta_0^\beta)}\right| < MN\varepsilon\left|\int_{\sigma_2}^{\xi^1}\frac{d\xi^1}{(\xi^1)^2}\right| < 2MN\frac{\varepsilon}{\sigma_2}. \tag{3.20}$$

Таким образом,

$$|\eta^j_1 - \eta^j_0| < 2MN\varepsilon^{\frac{7}{9}}. \tag{3.21}$$

Положив $2MN = d$, предположим, что доказаны неравенства

$$|\eta^j_k - \eta^j_{k-1}| < \left(d\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)^{k+1}, \tag{3.22}$$

и оценим $\eta^j_{k+1} - \eta^j_k$. Имеем:

$$|\eta^j_{k+1} - \eta^j_k| \leqslant \varepsilon\cdot\max|\eta^j_k - \eta^j_{k-1}|\,M\cdot\left|\int_{\sigma_2}^{\xi^1}\frac{d\xi^1}{[\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \tilde{\eta}^\beta)]^2}\right| <$$

$$< \varepsilon 2MN\left(d\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)^{k+1}\frac{1}{\sigma_2^3} = \left(d\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)^{k+2}. \tag{3.23}$$

Таким образом, последовательные приближения

$$\eta_0^j(\xi^1, \varepsilon),\ \eta_1^j(\xi^1, \varepsilon), \ldots, \eta_n^j(\xi^1, \varepsilon), \ldots, \qquad j = 1, \ldots, l,$$

сходятся и их предел имеет порядок $\varepsilon^{\frac{2}{9}}$. Теперь уже сразу устанавливается справедливость асимптотической формулы

$$\eta^1(\xi^1, \varepsilon) = \eta^j(\sigma_2, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\sigma_2}^{\xi^1} \frac{\psi^j(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0, \ldots, 0)\, d\xi^1}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0, \ldots, 0)} + Q^j(\xi^1, \varepsilon),$$

где $Q^j \approx \varepsilon$. Действительно,

$$\eta^j(\xi^1, \varepsilon) = \eta^j(\sigma_2, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\sigma_2}^{\xi^1} \frac{\psi^j(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0, \ldots, 0)}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0, \ldots, 0)}\, d\xi^1 +$$
$$+ \varepsilon \int_{\sigma_2}^{\xi^1} \left[ \frac{\psi^j(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)}{\Phi^1(\xi^1, \xi_0^\alpha + \Delta\xi^\alpha, \eta^\beta)} - \frac{\psi^j(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0, \ldots, 0)}{\Phi_1(\xi^1, \xi_0^\alpha, 0, \ldots, 0)} \right] d\xi^1.$$

Но при $\Delta\xi^\alpha \approx \varepsilon^{\frac{4}{9}}$, $\eta^\beta \approx \varepsilon^{\frac{2}{3}}$ последнее слагаемое, как легко видеть, имеет порядок $O(\varepsilon)$.

Поступило
11.III. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Понтрягин Л. С., Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 605—626.

[2] Мищенко Е. Ф., Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 21 (1957), 627—654.

[3] Понтрягин Л. С., Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд. МГУ, 1956.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 661—676

В. С. ВЛАДИМИРОВ и А. А. ЛОГУНОВ

# ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

(*Представлено академиком* Н. Н. Боголюбовым)

Методом Боголюбова с помощью интегрального представления Иоста — Лемана — Дайсона дается обобщение и усиление основной теоремы Н. Н. Боголюбова об аналитических свойствах обобщенных функций, удовлетворяющих основным принципам квантовой теории поля. Полученные результаты используются для доказательства дисперсионных соотношений для более широкого класса физических процессов.

## § 1. Введение и формулировка результатов

В последние годы в связи с обоснованием дисперсионных соотношений в теоретической физике [см. (1)] возникла математическая проблема об аналитическом продолжении обобщенных функций, удовлетворяющих некоторым условиям, обычным для квантовой теории поля: лоренцовская инвариантность, причинность и спектральные условия.

Чтобы иметь возможность сформулировать основной результат этой работы, мы предварительно приведем некоторые необходимые в дальнейшем определения и обозначения, используемые в теории обобщенных функций и квантовой теории поля.

Обобщенной функцией $f$ в смысле Соболева — Шварца [см. (2), (3)] будем называть всякий линейный непрерывный функционал $(f, \varphi)$ над пространством $S$ Шварца [см. (3), (4)], или, что то же, на введенных Боголюбовым классах $C(r, s; n)$ [см., например, (5)]; при этом для обобщенной функции $f$ будем употреблять обозначения:

$$f(x), \quad (f, \varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Условимся говорить, что некоторое выражение

$$f(z, x), \quad z = (z_1, z_2, \ldots, z_m), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

является обобщенной функцией относительно (вещественных) переменных $x$ и аналитической в области $G$ относительно (комплексных) переменных $z$,

если при всех $\varphi$ из $S$ выражение $\int f(z, x)\varphi(x)\,dx$ есть голоморфная функция в области $G$.

Под аналитическим продолжением обобщенной функции $f(x)$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, из вещественной области $G_0$ в комплексную область $G$ мы будем понимать голоморфную в $G$ функцию $f(x+iy)$, обладающую следующими свойствами:

1) при каждом фиксированном $y$ $f(x+iy)$ полиномиально ограничена относительно $x$ для тех $x$, при которых $x+iy \in G$, т. е. принадлежит пространству $\theta_M$ [см. ([3])];

2) для любой функции $\varphi$ из $S$, носитель которой заключен в области $G_0$, имеет место предельное соотношение

$$\int f(x+iy)\varphi(x)\,dx \to \int f(x)\varphi(x)dx, \quad y\to 0, \quad x+iy\in G.$$

Условимся об обозначениях. Через $x, k, p, \ldots$ будем обозначать вещественные или комплексные точки четырехмерного пространства (4-вектора), например

$$x=(x_0, x_1, x_2, x_3)=(x_0, \vec{x}), \quad \vec{x}=(x_1, x_2, x_3),$$
$$k=(k_0, k_1, k_2, k_3)=(k_0, \vec{k})=p+iq=(p_0+iq_0, \vec{p}+i\vec{q}).$$

Символами $xk$, $x^2$, $\vec{x}\vec{k}$ и $\vec{x}^2$ будем обозначать формы:

$$xk=x_0k_0-\vec{x}\vec{k}, \quad x^2=x_0^2-\vec{x}^2, \quad \vec{x}\vec{k}=\sum_{1\leqslant s\leqslant 3} x_s k_s, \quad \vec{x}^2=\sum_{1\leqslant s\leqslant 3} x_s^2.$$

Через $|\vec{x}|$, $|\vec{p}|, \ldots$ обозначаются длины соответствующих векторов. Символами $x \lessdot 0$, $x \gtrdot 0$ будем обозначать области:

$$x \lessdot 0, \quad \text{если} \quad x_0<0 \quad \text{или} \quad x^2<0,$$
$$x \gtrdot 0, \quad \text{если} \quad x_0>0 \quad \text{или} \quad x^2<0.$$

Наконец, преобразование Фурье $\tilde{f}(p)$ обобщенной функции $f(x)$ определим по формуле

$$\tilde{f}(p)=\int f(x)\,e^{ipx}\,dx, \quad dx=dx_0\,dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

В том случае, если обобщенная функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ четырех 4-векторов обладает свойством трансляционной инвариантности,

$$f(x_1+a, x_2+a, x_3+a, x_4+a)=f(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

то ее преобразование Фурье $\tilde{f}(p_1, p_2, p_3, p_4)$,

$$\int f(x_1, \ldots, x_4)\,e^{i(p_1x_1+\ldots+p_4x_4)}\,dx_1\ldots dx_4=(2\pi)^4\,\delta(p_1+\ldots+p_4)\,\tilde{f}(p_1, \ldots, p_4),$$

также обладает свойством трансляционной инвариантности и сосредоточено на многообразии

$$p_1+p_2+p_3+p_4=0. \tag{1.1}$$

Основной результат настоящей работы может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть даны четыре обобщенные трансляционно-инвариантные функции четырех 4-векторов*

$$F_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad i, j = r, a,$$

*обладающие следующими свойствами:*

a) $F_{ij}$ *инвариантны относительно преобразований из ортохронной * группы Лоренца (лоренцовская инвариантность).*

b) $F_{ij}$ *удовлетворяют условиям причинности:*

$$\begin{aligned} F_{rr} &= 0, \quad \text{если} \quad x_1 \leqslant x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \leqslant x_4, \\ F_{ra} &= 0, \quad \text{если} \quad x_1 \leqslant x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \geqslant x_4, \\ F_{ar} &= 0, \quad \text{если} \quad x_1 \geqslant x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \leqslant x_4, \\ F_{aa} &= 0, \quad \text{если} \quad x_1 \geqslant x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \geqslant x_4. \end{aligned}$$

c) *Для* $F_{ij}$ *выполняются спектральные условия:*

$$\widetilde{F}_{rj} = \widetilde{F}_{aj}, \quad \text{если} \quad p_1^2 < (M+\mu)^2, \quad p_3^2 < \gamma_1^2\mu^2, \quad j = r, a,$$

$$\widetilde{F}_{ir} = \widetilde{F}_{ia}, \quad \text{если} \quad p_2^2 < (M+\mu)^2, \quad p_4^2 < \gamma_2^2\mu^2, \quad i = r, a,$$

$$\widetilde{F}_{ij} = 0, \quad \text{если} \quad (p_1+p_3)^2 < (M+\mu)^2 \ \text{или} \ p_{10}+p_{30} < 0, \quad i, j = r, a,$$

*где предполагается, что* $\gamma_j > 1$, $M + \mu \geqslant \gamma_j \mu > 0$, $j = 1, 2$.

*Тогда можно построить функцию* $\Phi(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5; t)$, *обладающую следующими свойствами:*

1) *Функция* $\Phi$ — *обобщенная относительно вещественной переменной* $t$ *и обращается в нуль при* $t < \frac{1}{2}(M+\mu) = t_0$.

2) *При каждом* $t \geqslant t_0$ *функция* $\Phi$ *голоморфна относительно* $z = (z_1, z_2, \ldots, z_5)$ *в некоторой области* $D_t$. *Область* $D_t$ *содержит все точки вида:*

$$z_1 = M^2, \quad z_2 = M^2, \quad z_3 = \tau + \tau_1^0, \quad z_4 = \tau + \tau_2^0, \quad z_5 = -4\Delta^2, \tag{1.2}$$

*где* $\tau$ — *любое вещественное число, меньшее или равное нулю, а* $\Delta^2$ *пробегает внутренность эллипса*

$$A(t,\tau) + B(t,\tau)\cos\delta + iC(t,\tau)\sin\delta, \quad 0 \leqslant \delta < 2\pi. \tag{1.3}$$

*Функции* $A$, $B$ *и* $C$ *имеют следующий вид:*

$$A(t,\tau) = \frac{1}{4}\varphi^2(t, \tau+\tau_1^0) + \frac{1}{4}\varphi^2(t, \tau+\tau_2^0) - \left(\frac{\tau_1^0 - \tau_2^0}{8t}\right)^2,$$

$$B(t,\tau) = \frac{1}{2}\psi(t, \gamma_1, \tau+\tau_1^0)\,\psi(t, \gamma_2, \tau+\tau_2^0) +$$

* Под ортохронной группой Лоренца мы понимаем полную группу Лоренца [см., например, ([6])].

$$+\frac{1}{2}\sqrt{\psi^2(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^0)-\varphi^2(t,\tau+\tau_1^0)}\sqrt{\psi^2(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^0)-\varphi^2(t,\tau+\tau_2^0)},$$

$$C(t,\tau)=\frac{1}{2}\psi(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^0)\sqrt{\psi^2(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^0)-\varphi^2(t,\tau+\tau_2^0)}+$$
$$+\frac{1}{2}\psi(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^0)\sqrt{\psi^2(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^0)-\varphi^2(t,\tau+\tau_1^0)},$$

*где*

$$\varphi^2(t,\tau)=\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2-M^2, \tag{1.4}$$

$$\psi(t,\gamma,\tau)=\begin{cases}\sqrt{\varphi^2(t,\tau)+\dfrac{(2M+\mu)(\gamma^2\mu^2-\tau)}{4t^2-(M+\mu-\gamma\mu)^2}\mu}, \text{ если } \tau\geqslant\gamma\mu\left(M+\mu-\dfrac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right),\\ \dfrac{(2M+\mu)\mu}{4t}+\dfrac{1}{4t}\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau}\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau},\\ \qquad \text{если } \tau\leqslant\gamma\mu\left(M+\mu-\dfrac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right).\end{cases} \tag{1.5}$$

*Здесь предполагается, что числа* $M$, $\mu$, $\gamma_j$ *и* $\tau_j^0$ *выбраны такими, что функция* $\psi$ *положительна при всех* $\tau\leqslant 0$ *и* $t\geqslant t_0$ (*при* $\tau_j^0>\mu^2$ *функция* $\varphi^2$ *может стать отрицательной*).

3) *Для вещественных* $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ *из многообразия* (1.1), *для которых величины*

$$z_1=p_1^2,\quad z_2=p_2^2,\quad z_3=p_3^2,\quad z_4=p_4^2,\quad z_5=(p_1+p_2)^2$$

*принадлежат области* $D_t$, *при* $t=\frac{1}{2}\sqrt{(p_1+p_3)^2}\geqslant t_0$ *и* $p_{10}+p_{30}\geqslant 0$ *имеет место представление*

$$\widetilde{F}_{ij}(p_1,\ldots,p_4)=\Phi\left[p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2, (p_1+p_2)^2; \frac{1}{2}\sqrt{(p_1+p_3)^2}\right],\quad i,j=r,a.$$

Из сформулированной теоремы, в частности, вытекает, что при любом $\leqslant 0$ и при всех вещественных $\Delta^2$ из промежутка

$$\Delta^2_{\min}<\Delta^2<\Delta^2_{\max}\ * \tag{1.6}$$

точки $z$ вида (1.2) принадлежат всем областям $D_t$, $t\geqslant t_0$. Здесь обозначено:

$$\Delta^2_{\max}=\min_{t\geqslant t_0}\,[A(t,0)+B(t,0)], \tag{1.7}$$

$$\Delta^2_{\min}=\max_{t\geqslant t_0,\ \tau\leqslant 0}\,[A(t,\tau)-B(t,\tau)]. \tag{1.8}$$

Эта теорема была впервые доказана Н. Н. Боголюбовым в 1956 г. [см. ([1]), дополнение А] при $\tau_j^0=\mu^2$ и $\gamma_j=3$ (мезон-нуклонное рассеяние). Им было показано, что по $z_5$ имеет место аналитичность в области

$$|z_5+4\Delta^2|<\frac{\rho}{t^2}, \tag{1.9}$$

---

* Неравенство $\Delta^2_{\min}<\Delta^2_{\max}$ опять приводит к некоторым ограничениям на числа $M$, $\mu$, $\gamma_j$, $\tau_j^0$.

где $\rho$ — некоторое достаточно малое положительное число и $\Delta^2$ изменяется в интервале (1.6) с $\Delta^2_{\min}=0$ и $\Delta^2_{\max}=\frac{M\mu^2}{M+\mu}$. Метод Боголюбова существенно опирается на теорию обобщенных функций и использует различные формы параметризации. Этот метод получил дальнейшее усовершенствование и развитие в работе Н. Н. Боголюбова и В. С. Владимирова ([7]), где было показано, что в упомянутом выше случае $\Delta^2_{\max}=2\mu^2$. Вскоре этот же результат был получен в работе Бремермана, Эме и Тейлора ([8]). Основой их метода является построение аналитического расширения областей специального вида, называемых полутрубами [см. ([9])]. В дальнейшем, опираясь на результаты работы ([7]), В. С. Владимиров в работе ([10]) увеличил значение $\Delta^2_{\max}$ до $2.56\,\mu^2$ (в предположении, что $M=7\mu$). Наконец, недавно Леман ([11]), пользуясь интегральным представлением Дайсона ([12]), получил, что

$$\Delta^2_{\max}=\frac{8}{3}\,\frac{2M+\mu}{2M-\mu}\,\mu^2\approx 3\cdot 10\,\mu^2. \tag{1.10}$$

Сформулированная основная теорема, с одной стороны, обобщает соответствующие теоремы работ ([1]), ([7]), ([8]), ([10]), доказанные для частных значений параметров $\gamma_1=\gamma_2$, $\tau^0_1$ и $\tau^0_2$, на случай произвольных $\gamma_j$ и $\tau^0_j$. С другой стороны, согласно этой теореме, областью аналитичности по $z_5$ является эллипс (1.3), в то время как в предыдущих работах это была более узкая область, а именно полоса (1.9). Нужно отметить, что в случае $\gamma_j=3$, $\tau^0_j=\mu^2$ эллипс (1.3) был получен Леманом в работе ([11]).

В заключение этого параграфа приведем некоторые результаты вычисления $\Delta^2_{\max}$, вытекающие из основной теоремы.

1. Рассеяние скалярных частиц равных масс ($M=\mu$, $\gamma_j=2$, $\tau^0_j=\mu^2$). $\Delta^2_{\max}=2M^2$, что совпадает с результатом, указанным в работе ([8]).

2. Мезон-нуклонное рассеяние [см. ([1])] ($\gamma_j=3$, $\tau^0_j=\mu^2$, $M=6{,}71\,\mu$). $\Delta^2_{\max}$ дается формулой (1.10).

3. Комптон-эффект на нуклонах [см. ([13])] ($\gamma_j=2$, $\tau^0_j=0$).

$$\Delta^2_{\max}=\frac{(2M+\mu)(6M^2+9M\mu+4\mu^2)}{4M(M+\mu)^2}\,\mu^2\approx 3.02\,\mu^2. \tag{1.11}$$

4. Рождение $\pi$-мезонов в электрон-нуклонных столкновениях [см. ([14])] ($\gamma_1=2$, $\gamma_2=3$, $\tau^0_1=\tau^0\leqslant 0$, $\tau^0_2=\mu^2$).

$$\Delta^2_{\max}=\frac{M}{M+\mu}\,\frac{\mu^2-\tau^0}{2}+$$
$$+\frac{(2M+\mu)\mu}{2}\sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{4\mu^2-\tau^0}{M(2M-\mu)}}\left[1+\sqrt{1+\frac{\mu^2-\tau^0}{4\mu^2-\tau^0}\cdot\frac{M}{(M+\mu)^2}\,\frac{(2M+\mu)^2-\tau^0}{2M+\mu}}\right], \tag{1.12}$$

если $\tau^0>-3\mu^2$; при $\tau\leqslant-3\mu^2$ $\Delta^2_{\max}$ вычисляется по общей формуле (1.7).

Вопросами доказательств дисперсионных соотношений для некоторых виртуальных процессов занимались также Эме и Тейлор ([15]), которые, в частности, получили формулы (1.11) и (1.12). Необходимо, однако,

отметить, что наше выражение для $\Delta^2_{\max}$ совпадает с соответствующим значением $\Delta^2_{\max}$, полученным в работе ([15]), лишь при

$$\tau^0 \geqslant -4\frac{M+\mu}{M-\mu}\mu^2 = \tau'.$$

Для $\tau^0 < \tau'$ $\Delta^2_{\max}$, вычисленные в работе ([15]), неправильны, поскольку при их вычислении не была, по существу, учтена вторая возможность для аналитического выражения функции $\phi$.

Мы не будем здесь подробно останавливаться на всех возможных физических приложениях основной теоремы, отсылая читателя к работам ([16]), ([15]), ([13]). В этих работах показано, что основная теорема достаточна для обоснования дисперсионных соотношений для передачи импульса $\Delta^2 < \Delta^2_{\max}$.

## § 2. Вспомогательная теорема

Доказательство основной теоремы опирается на вспомогательную теорему, имеющую к тому же и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА. *Пусть даны две обобщенные функции* $F_r(x)$ *и* $F_a(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, *такие, что*

$$\begin{aligned} F_r(x) &= 0, \quad \text{если} \quad x \leqslant 0, \\ F_a(x) &= 0, \quad \text{если} \quad x \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

*Пусть, кроме того, их преобразования Фурье* $\widetilde{F}_j(p)$, $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $j = r, a$, *совпадают в области* $G_t^0(\gamma)$:

$$\widetilde{F}_r(p) = \widetilde{F}_a(p), \quad p \in G_t^0(\gamma), \tag{2.2}$$

*где* $G_t^0(\gamma)$ *есть совокупность точек* $p = (p_0, \vec{p})$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$t - \sqrt{\vec{p}^2 + \gamma^2\mu^2} < p_0 < -t + \sqrt{\vec{p}^2 + (M+\mu)^2}\,.$$

*Предполагаем, что*

$$2t \geqslant M + \mu - \gamma\mu \geqslant 0, \quad \gamma > 1, \quad \mu > 0.$$

*Тогда существует аналитическая функция* $\widetilde{\Phi}(k)$ *четырех комплексных переменных*

$$k = (k_0, k_1, k_2, k_3) = p + iq = (p_0 + iq_0, \vec{p} + i\vec{q}),$$

*голоморфная в области* $G_t(\gamma)$, *где область* $G_t(\gamma)$ *есть совокупность точек* $k$, *удовлетворяющих условиям: либо* $q^2 > 0$, *либо при* $q^2 \leqslant 0$

$$-\frac{\alpha^2-\beta^2}{4} - t^2 + p^2 + \sqrt{\vec{p}^2(4t^2-\beta^2) + (t\alpha - p_0\beta)^2} < q^2, \ \text{если} \ p_0 + |\vec{p}| \leqslant t\frac{\alpha}{\beta}, \tag{2.3}$$

$$\frac{t - p_0 - |\vec{p}|}{t + p_0 + |\vec{p}|}\left[-(p_0+t)^2 + \vec{p}^2 + (M+\mu)^2\right] < q^2, \ \text{если} \ p_0 + |\vec{p}| \geqslant t\frac{\alpha}{\beta}, \tag{2.4}$$

*где*

$$\alpha = M + \mu + \gamma\mu, \quad \beta = M + \mu - \gamma\mu.$$

*Функция* $\widetilde{\Phi}(k)$ *такова, что при вещественных* $p$ *из области* $G_l^0(\gamma)$

$$\widetilde{\Phi}(p) = \widetilde{F}_r(p) = \widetilde{F}_a(a).$$

Доказательство. Как известно [см. ([17]), ([18])], условия (2.1) позволяют аналитически продолжить функции $\widetilde{F}_r(p)$ и $\widetilde{F}_a(p)$ соответственно в области $q_0 < |\vec{q}|$ и $q_0 < -|\vec{q}|$. Полученные таким путем функции $\widetilde{F}_r(k)$ и $\widetilde{F}_a(k)$ при вещественных $k = p$ совпадают с функциями $\widetilde{F}_r(p)$ и $\widetilde{F}_a(p)$ соответственно, т. е. имеют место следующие предельные соотношения:

$$\widetilde{F}_r(p + iq) \underset{q \to 0, q_0 > |\vec{q}|}{\longrightarrow} \widetilde{F}_r(p), \qquad \widetilde{F}_a(p + iq) \underset{q \to 0, q_0 < -|\vec{q}|}{\longrightarrow} \widetilde{F}_a(p), \tag{2.5}$$

причем стремление к пределу в (2.5) понимается в смысле обобщенных функций.

Фиксируем вещественный вектор $\vec{p}$ и рассмотрим функции $\widetilde{F}_r(k_0, \vec{p})$ и $\widetilde{F}_a(k_0, \vec{p})$, являющиеся (по предыдущему) голоморфными функциями $k_0 = p_0 + iq_0$ соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Эти функции ограничены полиномом некоторой степени $m$ соответственно в областях $q_0 \geqslant \delta$ и $q_0 \leqslant -\delta$ при каждом $\delta > 0$, причем степень мажорирующего полинома не зависит от $\vec{p}$ и $\delta$, а зависит только от того класса $C(r, s; 4)$, которому принадлежат функции $\widetilde{F}_j(p)$ [см. ([19])].

Пусть $N$ — произвольное положительное число, а $n$ — целое положительное число, не меньшее $m$. Разделим функции $\widetilde{F}_j(k_0, \vec{p})$ на $(k_0 - iN)^{n+1}$ и к полученным функциям применим теорему Коши, выбирая в качестве контуров интегрирования прямые линии $\xi + i\delta$ и $\xi - i\delta$, $-\infty < \xi < \infty$, соответственно. Устремляя $\delta$ к нулю, при всех $k_0$ из верхней полуплоскости получим:

$$\widetilde{F}_r(k_0, \vec{p}) = \frac{(k_0 - iN)^{n+1}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{F}_r(\xi, \vec{p}) - \widetilde{F}_a(\xi, \vec{p})}{(\xi - k_0)(\xi - iN)^{n+1}} d\xi + \sum_{s=0}^{n} \frac{(k_0 - iN)^s}{s!} \frac{\partial^s \widetilde{F}_r(\xi, \vec{p})}{\partial \xi^s}\bigg|_{\xi = iN}. \tag{2.6}$$

Заметим, что стремление к пределу при $\delta \to 0$ здесь осуществляется в смысле обобщенных функций и имеет место при достаточно большом $n$.

В работах Дайсона ([12]) и Иоста и Лемана ([20]) найдено интегральное представление для любой обобщенной функции $\widetilde{f}(p)$, обращающейся в нуль в области $G_l^0(\gamma)$, преобразование Фурье которой обращается в нуль в области $x^2 < 0$:

$$\widetilde{f}(p) = \int \operatorname{sign}(p_0 - u_0)\, \delta[(p - u)^2 - \lambda^2]\, \varphi(u, \lambda^2)\, du d\lambda^2, \tag{2.7}$$

где обобщенная функция $\varphi(u, \lambda^2)$ относительно $\lambda^2$ принадлежит пространству $S'$, а относительно переменных $u = (u_0, \vec{u})$ принадлежит классу $\theta_c$ [см. ([3]), ([20])]. Кроме того, функция $\varphi(u, \lambda^2)$ обращается в нуль вне

области

$$|u_0|+|\vec{u}|\leqslant t,$$
$$\lambda\geqslant\max\left[0, M+\mu-\sqrt{(t+u_0)^2-\vec{u}^2},\ \gamma\mu-\sqrt{(t-u_0)^2-\vec{u}^2}\ \right]. \qquad (2.8)$$

В силу условий (2.1) и (2.2), обобщенная функция

$$\widetilde{f}(p)=\widetilde{F}_r(p)-\widetilde{F}_a(p)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы Дайсона, а поэтому для нее имеет место представление (2.7). Подставляя в (2.6) вместо

$$\widetilde{F}_r(\xi, p)-\widetilde{F}_a(\xi, p)$$

соответствующее выражение (2.7), после несложных преобразований получим:

$$\widetilde{F}_r(k_0,\vec{p})=\sum_{s=0}^{n}\frac{(k_0-iN)^s}{s!}\widetilde{F}_r^{(s)}(iN,\vec{p})+\frac{(k_0-iN)^{n+1}}{2\pi i}\times$$
$$\times\int\left\{\frac{\left[k_0-u_0-\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\right]\left[u_0-iN+\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\right]^{n+1}}{2\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\left[(k_0-u_0)^2-(\vec{p}-\vec{u})^2-\lambda^2\right]\left[(u_0-iN)^2-(\vec{p}-\vec{u})^2-\lambda^2\right]^{n+1}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\left[k_0-u_0+\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\right]\left[u_0-iN-\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\right]^{n+1}}{2\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\left[(k_0-u_0)^2-(\vec{p}-\vec{u})^2-\lambda^2\right]\left[(u_0-iN)^2-(\vec{p}-\vec{u})^2-\lambda^2\right]^{n+1}}\right\}\times$$
$$\times\varphi(u,\lambda^2)\,du\,d\lambda^2. \qquad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что функция $\widetilde{F}_r(k_0,\vec{p})$ допускает аналитическое продолжение как по комплексной переменной $k_0$, так и по вещественным переменным $\vec{p}$. Так как носитель обобщенной функции $\varphi(u,\lambda^2)$ сосредоточен в области (2.8), то получающаяся при этом функция $\widetilde{F}_r(k)$ будет голоморфной для тех $k$, для которых одновременно имеют место неравенства:

$$q^2<N^2,\quad (k_0-u_0)^2-(\vec{k}-\vec{u})^2-\lambda^2\neq 0,\quad (iN-u_0)^2-(\vec{k}-\vec{u})^2-\lambda^2\neq 0 \qquad (2.10)$$

при всех $(u,\lambda^2)$ из области (2.8).

Заметим, что для всех $k$ из области (2.10) интеграл в (2.9) можно интерпретировать как значение функционала (обобщенной функции) $\varphi(u,\lambda^2)$ на соответствующей основной функции (при достаточно большом $n$).

Так как $N$ — произвольное положительное число, а область (2.10) монотонно возрастает с увеличением $N$, то в (2.10) можно перейти к пределу при $N\to\infty$. Таким образом, к области голоморфности функции $\widetilde{F}_r(k)$ относятся те точки $k$, для которых выполнено неравенство

$$(k_0-u_0)^2-(\vec{k}-\vec{u})^2-\lambda^2\neq 0 \qquad (2.11)$$

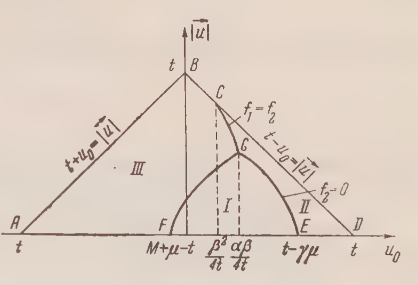
при всех $(u,\lambda^2)$ из области (2.8).

Отметим, что этот же результат можно получить, если воспользоваться вместо (2.6) аналогичным представлением для $\widetilde{F}_r$, полученным в работе [20].

Из условия (2.11) непосредственно следует, что точки $k$, для которых $q^2 > 0$, принадлежат области голоморфности функции $\widetilde{F}_r(k)$. Поэтому мы можем ограничить наше рассмотрение теми $k$, для которых $q^2 \leqslant 0$. Эти последние $k$ содержатся, в силу (2.11), в области, определяемой условием:

$$\operatorname{Re}[(k_0 - u_0)^2 - (\vec{k} - \vec{u})^2 - \lambda^2] = \\ = (p - u)^2 - q^2 - \lambda^2 < 0 \qquad (2.12)$$

при всех $(u, \lambda^2)$ из области (2.8).




Чтобы раскрыть условие (2.12), предположим, для определенности, что

$$2t \geqslant M + \mu + \gamma\mu.$$

Тогда условие (2.12) эквивалентно неравенству

$$\max_{|u_0| + |\vec{u}| \leqslant t} f(u_0, |\vec{u}|) < 0, \qquad (2.13)$$

где $f$ — непрерывная функция своих аргументов (см. чертеж):

$$f(u_0, |\vec{u}|) =$$

$$= \begin{cases} (p_0 - u_0)^2 - (|\vec{p}| - |\vec{u}|)^2 - q^2, & \text{если } (u_0, |\vec{u}|) \in \mathrm{I}, \\ (p_0 - u_0)^2 - (|\vec{p}| - |\vec{u}|)^2 - q^2 - [\gamma\mu - \sqrt{(t - u_0)^2 - \vec{u}^2}]^2, & \text{если } (u_0, |\vec{u}|) \in \mathrm{II}, \\ (p_0 - u_0)^2 - (|\vec{p}| - |\vec{u}|)^2 - q^2 - [M + \mu - \sqrt{(t + u_0)^2 - \vec{u}^2}]^2, & \text{если } (u_0, |\vec{u}|) \in \mathrm{III}. \end{cases}$$

На чертеже линии $FG$, $EG$ и $CG$ имеют соответственно уравнения:

$$FG: \quad M + \mu = \sqrt{(t + u_0)^2 - \vec{u}^2}, \qquad M + \mu - t \leqslant u_0 \leqslant \frac{\alpha\beta}{4t},$$

$$EG: \quad \gamma\mu = \sqrt{(t - u_0)^2 - \vec{u}^2}, \qquad \frac{\alpha\beta}{4t} \leqslant u_0 \leqslant t - \gamma\mu,$$

$$CG: \quad 2\beta|\vec{u}| = \sqrt{(4t^2 - \beta^2)(\beta^2 - 4u_0^2)}, \qquad \frac{\beta^2}{4t} \leqslant u_0 \leqslant \frac{\alpha\beta}{4t}.$$

Замечая, что

$$f(-t, 0) = (p_0 + t)^2 - \vec{p}^2 - q^2 - (M + \mu)^2,$$
$$f(t, 0) = (p_0 - t)^2 - \vec{p}^2 - q^2 - \gamma^2\mu^2,$$

заключаем, на основании (2.13), что в случае $q^2 \leqslant 0$ необходимыми условиями принадлежности точек $k$ к области голоморфности функции $\widetilde{F}_r(k)$ являются неравенства для $p = \operatorname{Re} k$, входящие в определение области $G_t^0(\gamma)$.

Элементарные рассуждения показывают, что максимум функции $f(u_0, |\vec{u}|)$ в области $|u_0| + |\vec{u}| \leqslant t$ достигается на кривой $CG$, если

$$p_0 + |\vec{p}| \leqslant t \frac{\alpha}{\beta},$$

или на прямолинейном отрезке $BC$, если

$$p_0 + |\vec{p}| \geqslant t \frac{\alpha}{\beta}.$$

Вычислив соответствующие максимальные значения функции $f$, мы придем, в силу (2.13), к условиям (2.3) или (2.4).

Таким образом, функция $\widetilde{F}_r(k)$ голоморфна в области $G_t(\gamma)$. К области $G_t(\gamma)$, в частности, относятся все точки вещественной области $G_t^0(\gamma)$. Это утверждение непосредственно следует из неравенств (2.3) и (2.4) при $q^2 = 0$, если заметить, что неравенство (2.3) при $q^2 = 0$ эквивалентно неравенству

$$[(p_0 + t)^2 - \vec{p}^2 - (M + \mu)^2][(p_0 - t)^2 - \vec{p}^2 - \gamma^2\mu^2] > 0.$$

Аналогичные рассуждения (с соответствующими упрощениями) приводят к той же самой области $G_t(\gamma)$ для случая, когда $2t \leqslant M + \mu + \gamma\mu$. Повторяя подобные рассуждения для функции $\widetilde{F}_a$, мы придем к аналитической функции $\widetilde{F}_a(k)$, голоморфной в той же области $G_t(\gamma)$. Но, по доказанному, область $G_t(\gamma)$ содержит $G_t^0(\gamma)$ вместе с некоторой ее (комплексной) окрестностью. Следовательно, в этой комплексной окрестности области $G_t^0(\gamma)$ построенные функции $\widetilde{F}_j(k)$, $j = r, a$, голоморфны; по условию, при вещественных $p$ из области $G_t^0(\gamma)$ эти функции совпадают как обобщенные и, следовательно, в силу их голоморфности, совпадают в каждой точке. Поэтому функции $\widetilde{F}_j(k)$, $j = r, a$, определяют фактически одну аналитическую функцию $\widetilde{\Phi}(k)$, голоморфную в области $G_t(\gamma)$ и совпадающую при вещественных $p$ из области $G_t^0(\gamma)$ с функциями $\widetilde{F}_j(p)$. Теорема доказана полностью.

Отметим одно полезное для приложений следствие, установленное при доказательстве этой теоремы: *в условиях теоремы функция* $\widetilde{\Phi}(k)$ *голоморфна в некоторой комплексной окрестности области* $G_t^0(\gamma)$. Сформулированный результат был впервые установлен Н. Н. Боголюбовым [см. ([1]), Дополнение А, теорема 1]; в дальнейшем этот результат был доказан другими методами в работах ([7]), ([8]), ([20]). В работе ([8]) теоремы такого типа названы теоремами «edge of the wedge».

## § 3. Доказательство основной теоремы

Доказательство основной теоремы будем проводить по схеме доказательства теорем III и II работы ([7]), используя при этом вместо теоремы I работы ([7]) доказанную в § 2 вспомогательную теорему. Предварительно изложим кратко ту часть доказательства, которая в некоторой степени повторяет соответствующие рассуждения в работе ([7]).

Ввиду трансляционной инвариантности обобщенных функций $F_{ij}(x_1, \ldots, x_4)$ их можно рассматривать как обобщенные функции трех 4-векторов, например:

$$y_1 = x_1 - x_3, \quad y_2 = x_4 - x_2, \quad y_3 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Это приводит нас к функциям

$$\Phi_{ij}(y_1, y_2, y_3) = \Phi_{ij}(x_1 - x_3, x_4 - x_2, x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = F_{ij_1}(x_1, \ldots, x_4), \tag{3.1}$$

$$\widetilde{\Phi}_{ij}(q_1, q_2, q_3) = 2^4 \widetilde{F}_{ij_1}(q_1 + q_3, -q_2 - q_3, q_3 - q_1, q_2 - q_3), \tag{3.2}$$

где $j_1 = r$, если $j = a$, и $j_1 = a$, если $j = r$. Положив

$$p_1 = q_1 + q_3, \quad p_2 = -q_2 - q_3, \quad p_3 = q_3 - q_1, \quad p_4 = q_2 - q_3,$$

находим:

$$\begin{gathered} q_3 = \frac{1}{2}(p_1 + p_3), \quad p_1^2 = (q_1 + q_3)^2, \quad p_2^2 = (q_2 + q_3)^2 \quad p_3^2 = (q_3 - q_1)^2, \\ p_4^2 = (q_2^2 - q_3)^2, \quad (p_1 + p_2)^2 = (q_1 - q_2)^2. \end{gathered} \tag{3.3}$$

В силу условий с), функции $\widetilde{\Phi}_{ij}(q_1, q_2, q_3)$ обращаются в нуль в области:

$$q_3^2 < \left(\frac{M + \mu}{2}\right)^2 \text{ или } q_{30} < 0. \tag{3.4}$$

Так как функции $\widetilde{\Phi}_{ij}$ инвариантны относительно преобразований из ортохронной группы Лоренца и по переменной $q_3$ обращаются в нуль вне будущего светового конуса, то всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы вектор

$$q_3 = (t, \vec{0}). \tag{3.5}$$

В этой системе координат обобщенные функции $\widetilde{\Phi}_{ij}(q_1, q_2, q_3)$ будем записывать в виде $\widetilde{f}_{ij}(q_1, q_2, t)$. Таким образом, мы приходим к системе четырех обобщенных функций $f_{ij}(y_1, y_2, y_0)$ девяти переменных $(y_{10}, \vec{y}_1, y_{20}, \vec{y}_2, y_0)$, обладающих, в силу условий a), b) и c), следующими свойствами:

$$\begin{aligned} f_{rr} &= 0, \text{ если } y_1 \leqslant 0 \text{ или } y_2 \leqslant 0, \\ f_{ra} &= 0, \text{ если } y_1 \leqslant 0 \text{ или } y_2 \geqslant 0, \\ f_{ar} &= 0, \text{ если } y_1 \geqslant 0 \text{ или } y_2 \leqslant 0, \\ f_{aa} &= 0, \text{ если } y_1 \geqslant 0 \text{ или } y_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\widetilde{f}_{rj} = \widetilde{f}_{aj}, \quad j = r, a, \text{ если } q_1 \in G_t^0(\gamma_1), \tag{3.7}$$

$$\widetilde{f}_{ir} = \widetilde{f}_{ia}, \quad i = r, a, \text{ если } q_2 \in G_t^0(\gamma_2), \tag{3.8}$$

$$\widetilde{f}_{ij} = 0, \quad \text{если } t < t_0, \quad i, j = r, a. \tag{3.9}$$

Функции $\widetilde{f}_{ij}(q_1, q_2, t)$ инвариантны относительно пространственных вращений и отражений векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$.

Из (3.6) и (3.7) заключаем, что для двух $(j = r, a)$ пар функций $\widetilde{f}_{rj}(q_1, q_2, t)$ и $\widetilde{f}_{aj}(q_1, q_2, t)$ относительно переменной $q_1$ выполнены условия

вспомогательной теоремы. Применяя эту теорему, мы придем к функциям

$$\widetilde{\Phi}_j(k_1, q_2, t), \quad j = r, a, \tag{3.10}$$

которые являются голоморфными относительно $k$ в области $G_t(\gamma_1)$ и обобщенными относительно $(q_2, t)$. В силу (3.6), (3.8) и (3.9), построенные функции (3.10) опять удовлетворяют условиям вспомогательной теоремы по переменной $q_2$. Применяя снова эту теорему к функциям (3.10), построим функцию $\widetilde{\Phi}(k_1, k_2; t)$, голоморфную по совокупности переменных $(k_1, k_2)$ из области $G_t(\gamma_1) \times G_t(\gamma_2)$ и обобщенную относительно (вещественной) переменной $t$. Здесь мы воспользовались теоремой Гартогса (см., например, ([21]), гл. VII), гласящей: если функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ голоморфна по каждой переменной при фиксированных остальных, то она голоморфна и по совокупности переменных $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Полученная функция $\widetilde{\Phi}(k_1, k_2; t)$ при вещественных $(k_1, k_2) = (q_1, q_2)$ из области $G_t^0(\gamma_1) \times G_t^0(\gamma_2)$ совпадает с функциями $\widetilde{f}_{ij}(q_1, q_2, t)$.

Воспользуемся теперь условием инвариантности относительно пространственных вращений и отражений. В силу этого условия, функция $\widetilde{\Phi}(k_1, k_2; t)$ зависит от $(k_1, k_2)$ посредством пяти переменных: $k_{10}, k_{20}$, $\vec{k}_1^2, \vec{k}_2^2, \vec{k}_1\vec{k}_2$. Вместо них можно ввести эквивалентную систему переменных $z = (z_1, z_2, \ldots, z_5)$, положив

$$\begin{gathered} z_1 = (k_{10} + t)^2 - \vec{k}_1^2, \quad z_2 = (k_{20} + t)^2 - \vec{k}_2^2, \quad z_3 = (k_{10} - t)^2 - \vec{k}_1^2, \\ z_4 = (k_{20} - t)^2 - \vec{k}_2^2, \quad z_5 = (k_{10} - k_{20})^2 - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2, \end{gathered} \tag{3.11}$$

так что

$$\widetilde{\Phi}(k_1, k_2; t) = \Phi(z_1, z_2, \ldots, z_5; t). \tag{3.12}$$

Из (3.11) получаем:

$$\begin{gathered} k_{10} = \frac{z_1 - z_3}{4t}, \quad k_{20} = \frac{z_2 - z_4}{4t}, \quad (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) = -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2, \\ \vec{k}_1^2 = t^2 - \frac{z_1 + z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2, \quad \vec{k}_2^2 = t^2 - \frac{z_2 + z_4}{2} + \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Таким образом, для доказательства основной теоремы достаточно, в силу (1.2), показать, что, каковы бы ни были числа $t \geqslant t_0$, $\tau \leqslant 0$ и $\Delta^2$ из эллипса (1.3), найдется хотя бы одна (комплексная) точка $(k_1, k_2)$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\begin{gathered} k_{j0} = \frac{M^2 - \tau - \tau_j^0}{4t}, \quad \vec{k}_j^2 = t^2 - \frac{M^2 + \tau + \tau_j^0}{2} + \left(\frac{M^2 - \tau - \tau_j^0}{4t}\right) \equiv \\ \equiv \varphi^2(t, \tau + \tau_j^0), \quad j = 1, 2, \\ (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 = 4\Delta^2 + \left(\frac{\tau_1^0 - \tau_2^0}{4t}\right)^2 \end{gathered} \tag{3.14}$$

и принадлежащая области $G_t(\gamma_1) \times G_t(\gamma_2)$.

Из (3.14) следует, что комплексные векторы $\vec{k}_j = \vec{p}_j + i\vec{q}_j$ имеют ортогональные вещественные и мнимые части:

$$\vec{p}_j \vec{q}_j = 0, \quad j = 1, 2.$$

Поэтому условия (3.14) можно переписать в виде:

$$p_{j0} = \frac{M^2 - \tau - \tau_j^0}{4t}, \quad q_{j0} = 0, \quad \vec{p}_j^{\,2} - \vec{q}_j^{\,2} = \varphi^2(t, \tau + \tau_j^0), \quad j = 1,2, \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered}\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2} - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\mu_1 - \vec{q}_1^{\,2} - \vec{q}_2^{\,2} + 2|\vec{q}_1||\vec{q}_2|\mu_2 + \\ + 2i|\vec{q}_1||\vec{p}_2|\nu_1 + 2i|\vec{p}_1||\vec{q}_2|\nu_2 = 4\Delta^2 + \left(\frac{\tau_1^0 - \tau_2^0}{4t}\right)^2,\end{gathered} \tag{3.16}$$

где числа $\mu_j$ и $\nu_j$, $j = 1, 2$, суть косинусы углов между соответствующими векторами, удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{gathered}\mu_1\nu_2 + \nu_1\mu_2 + \alpha_1\alpha_2 = 0, \quad \mu_j^2 + \nu_j^2 = 1 - \alpha_j^2, \\ |\mu_j| \leqslant 1, \quad |\nu_j| \leqslant 1, \quad |\alpha_j| \leqslant 1, \quad j = 1, 2.\end{gathered} \tag{3.17}$$

Исключая из (3.16) величины $|\vec{q}_j|$, с помощью (3.15) получим:

$$\begin{gathered}4\Delta^2 = \varphi^2(t, \tau + \tau_1^0) + \varphi^2(t, \tau + \tau_2^0) - \left(\frac{\tau_1^0 - \tau_2^0}{4t}\right)^2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\mu_1 + \\ + 2\sqrt{\vec{p}_1^{\,2} - \varphi^2(t, \tau + \tau_1^0)}\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} - \varphi^2(t, \tau + \tau_2^0)}\,\mu_2 + \\ + 2i|\vec{p}_1|\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} - \varphi^2(t, \tau + \tau_2^0)}\,\nu_2 + 2i|\vec{p}_2|\sqrt{\vec{p}_1^{\,2} - \varphi^2(t, \tau + \tau_1^0)}\,\nu_1.\end{gathered} \tag{3.18}$$

Воспользуемся теперь вспомогательной теоремой § 2 и выведем условие принадлежности к области $G_t(\gamma)$ точек $k$, удовлетворяющих соотношениям (3.15), т. е. точек вида

$$k = \left[\frac{M^2 - \tau - \tau^0}{4t}, \ \vec{p} + i\vec{\lambda}\sqrt{\vec{p}^{\,2} - \varphi^2(t, \tau + \tau^0)}\right], \tag{3.19}$$

где $\vec{\lambda}$ — вещественный ортогональный к вектору $\vec{p}$ орт, а $\vec{p}$ — произвольный вещественный вектор такой, что *

$$\max[0, \varphi^2(t, \tau + \tau^0)] \leqslant \vec{p}^{\,2}. \tag{3.20}$$

В рассматриваемом случае $q^2 \leqslant 0$. Принимая во внимание выражение (1.4) для $\varphi^2$ и учитывая (3.19) и (3.20), заключаем, что

$$\operatorname{Re} k = \left(\frac{M^2 - \tau - \tau^0}{4t}, \ \vec{p}\right)$$

всегда принадлежит области $G_t^0(\gamma)$, если только $\tau^0 < \gamma^2\mu^2$.

* При $\tau > \mu^2$ функция $\varphi^2(t, \tau)$ может стать отрицательной.

Условия (2.3) и (2.4) примут соответственно вид:

$$|\vec{p}| < \sqrt{\varphi^2(t, \tau+\tau^0) + \frac{(2M+\mu)(\gamma^2\mu^2-\tau-\tau^0)}{4t^2-(M+\mu-\gamma\mu)^2}\mu} \equiv u_1(t, \tau+\tau^0),$$

$$\text{если } \frac{M^2-\tau-\tau^0}{4t} + |\vec{p}| \leqslant \frac{M+\mu+\gamma\mu}{M+\mu-\gamma\mu}, \tag{3.21}$$

$$u_3(t, \tau+\tau^0) \equiv \frac{(2M+\mu)\mu}{4t} -$$

$$-\frac{1}{4t}\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau-\tau^0}\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau-\tau^0} < |\vec{p}| <$$

$$< \frac{(2M+\mu)\mu}{4t} + \frac{1}{4t}\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau-\tau^0}\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau-\tau^0} \equiv$$

$$\equiv u_2(t, \tau+\tau^0),$$

$$\text{если } \frac{M-\tau-\tau^0}{4t} + |\vec{p}| \geqslant t\frac{M+\mu+\gamma\mu}{M+\mu-\gamma\mu}. \tag{3.22}$$

Функция $u_1(t, \tau)$ монотонно убывает с возрастанием $\tau$. Поэтому условие

$$\min_{t \geqslant t_0}\left[\left(t + \frac{M^2-\tau^0}{4t}\right)^2 - M^2 + \frac{(2M+\mu)(\gamma^2\mu^2-\tau^0)}{4t^2-(M+\mu-\gamma\mu)^2}\mu\right] > 0 \tag{3.23}$$

обеспечивает положительность подкоренного выражения в (3.21). По условию основной теоремы, неравенство (3.23) выполнено при $\gamma = \gamma_j$ и $\tau^0 = \tau_j^0$, $j = 1, 2$. Функция $u_3(t, \tau)$ отрицательна при всех

$$t \geqslant t_0, \quad \tau \leqslant \gamma\mu\left(M + \mu - \frac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right).$$

Поэтому ограничения снизу на $|\vec{p}|$ в условии (3.22) фактически нет.

Рассмотрим в трехмерном пространстве переменных $(t, \tau, |\vec{p}|)$ три поверхности:

$$|\vec{p}| = u_1(t, \tau+\tau^0), \quad |\vec{p}| = u_2(t, \tau+\tau^0), \quad |\vec{p}| = t\frac{M+\mu+\gamma\mu}{M+\mu-\gamma\mu} - \frac{M^2-\tau-\tau^0}{4t}.$$

По построению (см. вспомогательную теорему), эти поверхности пересекаются по общей линии, проекция которой на плоскость $|\vec{p}| = 0$ дается уравнением

$$u_1(t, \tau+\tau^0) = u_2(t, \tau+\tau^0),$$

которое преобразуется к виду:

$$\tau + \tau^0 = \gamma\mu\left(M + \mu - \frac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right).$$

В силу сказанного, условия (3.21)—(3.22) можно переписать в форме:

$$|\vec{p}| < \psi(t, \gamma, \tau+\tau^0), \tag{3.24}$$

где непрерывная функция $\psi$ определяется формулой (1.5).

Таким образом, на основании (3.20) и (3.24), получен следующий результат: все точки (3.19), для которых

$$\max[0, \varphi^2(t, \tau+\tau^0)] \leqslant \vec{p}^2 < \psi^2(t, \gamma, \tau+\tau^0), \tag{3.25}$$

принадлежат области голоморфности $G_t(\gamma)$.

Выясним условия, которые обеспечивают непустоту области (3.25) при всех $\tau \leqslant 0$ и $t \geqslant t_0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства:

$$\psi^2(t, \gamma, \tau + \tau^0) > 0, \quad \psi^2(t, \gamma, \tau + \tau^0) - \varphi^2(t, \tau + \tau^0) > 0. \tag{3.26}$$

Из (1.4) и (1.5) следует, что функции $\varphi$ и $\psi$ убывают с возрастанием $\tau$. Докажем, что $\psi^2 - \varphi^2$ убывает с возрастанием $\tau$. Для первого выражения в (1.5) это очевидно. Для второго выражения имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi^2 - \varphi^2) = \frac{1}{2t}\left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right) + \frac{1}{8t^2}[(2M + \mu)\mu + \\ + \sqrt{(2t + M + \mu)^2 - \tau}\sqrt{(2t - M - \mu)^2 - \tau}] \times \\ \times \frac{\tau - 4t^2 - (M + \mu)^2}{\sqrt{(2t + M + \mu)^2 - \tau}\sqrt{(2t - M - \mu)^2 - \tau}},$$

откуда следует:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi^2 - \varphi^2) < -\frac{(2M + \mu)\mu}{8t^2} < 0, \text{ если } \tau \leqslant \gamma\mu\left(M + \mu - \frac{4t^2}{M + \mu - \gamma\mu}\right).$$

Таким образом, условия (3.26) можно переписать в виде:

$$\psi^2(t, \gamma, \tau^0) > 0, \quad \psi^2(t, \gamma, \tau^0) - \varphi^2(t, \tau^0) > 0.$$

Но эти последние неравенства обеспечиваются условием (3.23).

Применим полученный результат к точкам $k_j$, удовлетворяющим соотношениям (3.15). В силу (3.25), эти точки будут принадлежать области голоморфности $G_t(\gamma_1) \times G_t(\gamma_2)$ в том случае, если одновременно выполнены неравенства:

$$\max[0, \varphi^2(t, \tau + \tau_j^0)] \leqslant \vec{p}_j^{\,2} < \psi^2(t, \gamma_j, \tau + \tau_j^0), \quad j = 1, 2. \tag{3.27}$$

На основании изложенного, к области голоморфности $D_t$ функции $\Phi$ принадлежат те значения $\Delta^2$ (при данном $\tau \leqslant 0$), которые могут быть представлены в виде (3.18) хотя бы при одном наборе чисел $\mu_j, \nu_j, |\vec{p}_j|$, $j = 1, 2$, удовлетворяющих соответственно условиям (3.17) и (3.27). Чтобы получить границу соответствующей области, необходимо, очевидно, положить в (3.18)

$$-\mu_1 = \mu_2 = \cos\delta, \quad \nu_1 = \nu_2 = \sin\delta, \quad |\vec{p}_j| = \psi(t, \gamma_j, \tau + \tau_j^0)$$

(условия (3.17) при этом будут выполнены при $\alpha_j = 0$). Таким образом, мы приходим к эллипсу (1.3).

Доказательство основной теоремы закончено.

Докажем теперь, что промежуток (1.6) принадлежит всем эллипсам (1.3). Ясно, что эллипсы (1.3) содержат вещественные $\Delta^2$ из промежутка

$$\max_{\substack{t \geqslant t_0 \\ \tau \leqslant 0}}[A(t, \tau) - B(t, \tau)] < \Delta^2 < \min_{\substack{t \geqslant t_0 \\ \tau \leqslant 0}}[A(t, \tau) + B(t, \tau)]. \tag{3.28}$$

Покажем, что минимум в правой части (3.28) реализуется при $\tau = 0$. Для этого достаточно установить, что при любом $t \geqslant t_0$ функции $A$ и $B$ монотонно возрастают с убыванием $\tau$ при всех $\tau \leqslant 0$. Но это утвержде-

ние непосредственно следует из аналитического выражения для $A$ и $B$ и из установленных свойств функций $\psi$, $\varphi$ и $\psi^2-\varphi^2$.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову за интересные обсуждения и замечания.

Поступило
30.X.1958

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В. и Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, Гостехиздат, 1958.

[2] Соболев С. Л., Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy, Матем. сборн., 1(43):1 (1936), 39—72.

[3] Schwartz L., Théorie des distributions. II, Paris, 1951.

[4] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции. 2, Пространства основных и обобщенных функций, Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1958.

[5] Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., Вопросы квантовой теории поля. I, II, Успехи физ. наук, 55 (1955), 149—214; 57 (1955), 1—92.

[6] Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, Успехи матем. наук, IX (1954), 19—93.

[7] Боголюбов Н. Н. и Владимиров В. С., Об аналитическом продолжении обобщенных функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 15—48.

[8] Bremermann H. J., Oehme R. and Taylor J. G., A proof of dispersion relations in quantized field theories, Phys. Rev., 109 (1958), 2178—2190.

[9] Bremermann H. J., Die Holomorphiehüllen der Tuben und Halbtubengebiete, Math. Annalen, 127 (1954), 406—423.

[10] Владимиров В. С., Об определении области аналитичности, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 275—294.

[11] Lehmann H., Analytic properties of scattering amplitudes as functions of momentum transfer, Nuovo Cimento, X (1958), 579—589.

[12] Dyson F. J., Integral representations of causal commutators, Phys. Rev., 110 (1958), 1460—1464.

[13] Logunov A. A. and Isaev P. S., On the theory of dispersion relations for photon-nucleon scattering, Nuovo Cimento, X (1958), 917—942.

[14] Логунов А. А., К теории дисперсионных соотношений для виртуальных процессов, Nuclear Physics, 10 (1959), 71—81.

[15] Oehme R. and Taylor J. G., Proof of Dispersion Relations for the Production of Pions by Real and Virtual Photons and for Related Processes, Phys. Rev., 113 (1959), 371—380.

[16] Владимиров В. С. и Логунов А. А., Доказательство некоторых дисперсионных соотношений в квантовой теории поля, препринт Объединенного ин-та ядерных исследований, Р—260, 1958.

[17] Schwartz L., Transformation de Laplase des distributions, Medd. Lund. Univ. Mat. Sem., Supplementband (1952), 196—206.

[18] Боголюбов Н. Н. и Парасюк О. С., Об аналитическом продолжении обобщенных функций, Доклады Ак. наук СССР, 109 (1956), 717—719.

[19] Боголюбов Н. Н. и Владимиров В. С., Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций, Научные доклады высшей школы, 3 (1958), 26—34.

[20] Jost R. and Lehmann H., Integral-Darstellung kausaler Kommutatoren, Nuovo Cimento, V (1957), 1598—1610.

[21] Бохнер С. и Мартин У., Функции многих комплексных переменных, ИИЛ, 1951.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 677—696

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

# ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ФУНКЦИИ, ИМЕЮЩЕЙ КОНЕЧНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ, С ПРИЛОЖЕНИЕМ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Для функции, имеющей конечный интеграл Дирихле, дается зависящая от $h$ оценка интеграла от ее квадрата, взятого по конечному куску поверхности шириной $h$. Эта оценка применяется затем при решении вариационным методом задач Гильберта и Дирихле в пространстве, когда граничные условия заданы на поверхности с краем.

## § 1. Введение

1. 1. В этой работе я хочу остановиться на одном свойстве функций многих переменных, имеющих конечный интеграл Дирихле. Вместе с другими уже известными свойствами оно может быть применимо к исследованию краевых задач.

Приводятся примеры такого применения к задачам эллиптического типа, где краевые условия задаются на незамкнутой поверхности (имеющей край). С этой точки зрения данная работа является продолжением моей статьи ([7]).

В § 2 доказывается упомянутое в начале свойство, сформулированное в виде теоремы 2.1.

В § 3 исследуется задача Гильберта в $n$-мерном пространстве для случая, когда поверхность, на которой заданы граничные условия, имеет край. В сущности показывается, что результаты, которые были получены в работе ([7]), где рассматривалась задача Гильберта для замкнутой достаточно гладкой поверхности, остаются в силе и для куска такой поверхности с достаточно гладким краем. Отметим лемму 3.7, представляющую общий интерес, так как она касается двух произвольных, не связанных с какими-либо краевыми условиями, функций $u$ и $f$, имеющих конечный интеграл Дирихле, где $u$ — гармоническая функция*.

В плоском случае $n = 2$ поверхность с краем превращается в разомкнутый контур. Задача Гильберта с разомкнутыми контурами для аналитических функций глубоко изучена на основе теории сингулярных

* Так же как в работе ([7]), методы, которые здесь применяются по отношению к оператору $\Delta u$, могут быть без существенных изменений распространены и на более общие эллиптические операторы с переменными коэффициентами.

интегральных уравнений в работах Н. И. Мусхелишвили, его учеников и других математиков [см. монографию Н. И. Мусхелишвили ([3]) и мемуар В. А. Хведелидзе ([11])].

Что касается трехмерного (или $n$-мерного) случая, то здесь мы можем отметить только одну известную нам работу Тшицинского ([10]), в которой рассматривается задача о нахождении функции $u$, определенной на всем пространстве, представимой в виде интеграла типа потенциала и удовлетворяющей на заданной поверхности $\Lambda$ (замкнутой или с краем) граничному условию

$$au_+ - bu_- = \varkappa,$$

где $a, b, \varkappa$ — заданные на $\Lambda$ функции, а $u_+$ и $u_-$ — предельные значения искомой функции $u$ на поверхности $\Lambda$ соответственно с одной и другой ее стороны. В исследованиях этого рода, где решение краевой задачи в пространстве ищется среди функций, представимых в виде интегралов типа потенциалов, пока еще остается неразрешенным ряд вопросов (единственность и т. д.).

В § 4 рассматривается задача Дирихле в пространстве, в которое погружен кусок $S$ произвольной гладкой поверхности с краем. В случае, когда $S$ есть круг, эффективную формулу для решения этой задачи дал А. В. Бицадзе ([1]) и для более частной задачи — Гейне и Хобсон [см. литературу в работе ([1])].

В § 5 доказывается нужная лемма для классов $H_p^{(r)}$ и, кроме того, приводится добавочное пояснение к доказательству леммы 6.1.2 упоминаемой выше моей работы ([7]).

1.2. Если $G$ есть область пространства $R = R_n$ действительных точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $f$ — определенная (почти всюду) на $G$ функция, имеющая обобщенные производные с интегрируемым квадратом на $G$, то величина

$$D_G[f] = \int_G \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dG < \infty \tag{1}$$

называется интегралом Дирихле от $f$ на $G$. Положим еще

$$\|f\|_{L_2(G)} = \left(\int_G f^2\, dG\right)^{\frac{1}{2}}.$$

## § 2. Свойство функции с конечным интегралом Дирихле

2.1. ТЕОРЕМА. *Пусть на области* $\Delta = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, *представляющей собой прямоугольный параллелепипед в* $R$, *задана функция* $f$ *с конечным интегралом Дирихле*

$$D_\Delta[f] < \infty. \tag{1}$$

*Тогда существует зависящая от* $\Delta$ *константа* $c$ *такая, что после соответствующего видоизменения* $f$ *на множестве* $n$*-мерной меры нуль*

*имеет место неравенство*

$$\int_{x_1}^{x_1+h}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} f(x_1,\ldots,x_n)^2\,dx_1\ldots dx_{n-1} < c\,(\|f\|^2_{L_2(\Delta)} + D_\Delta[f])\,h\ln\frac{1}{h} \quad (h>0) \quad (2)$$

*для всех* $x_n \in [a_n, b_n]$ *и всех* $x_1$ *и* $h$, *для которых* $a_1 \leqslant x_1 < x_1+h \leqslant b_1$.

*В смысле порядка относительно* $h$ *неравенство* (2) *точно.*

2.2. ЛЕММА. *Если для функции периода* $2\pi$, *имеющей ряд Фурье*

$$\varphi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta),$$

*выполняется неравенство*

$$\sum_1^\infty k\,(a_k^2+b_k^2) < \infty,$$

*то существует не зависящая от* $\varphi$ *константа* $c_1$ *такая, что*

$$\int_\theta^{\theta+h} f(t)^2\,dt < c_1\left[a_0^2 + \sum_{k=1}^\infty k\,(a_k^2+b_k^2)\right] h\ln\frac{1}{h} \quad (h>0). \tag{1}$$

*В смысле порядка относительно* $h$ *это неравенство точно.*

Доказательство. Зададим $h>0$ и подберем натуральное $n$ так, что

$$\frac{1}{n+1} < h \leqslant \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$\left(\int_x^{x+h} f(t)^2\,dt\right)^{\frac12} \leqslant \left(\int_x^{x+h}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k\cos kt + b_k\sin kt)\right]^2 dt\right)^{\frac12} +$$
$$+\left(\int_x^{x+h}\left[\sum_{n+1}^\infty (a_k\cos kt + b_k\sin kt)\right]^2 dt\right)^{\frac12} = I_1 + I_2. \tag{2}$$

Но если считать, что $b_0 = 0$, то

$$I_1 \leqslant \left(\int_x^{x+h}\left[\sum_0^n (|a_k| + |b_k|)\right]^2 dt\right)^{\frac12} = h^{\frac12}\sum_0^n (|a_k| + |b_k|) \leqslant$$
$$\leqslant h^{\frac12}\left(|a_0| + \sqrt{\sum_1^n k\,(a_k^2+b_k^2)}\,\sqrt{\sum_1^n \frac1k}\right) <$$
$$< c_2 h^{\frac12}\left(|a_0| + \sqrt{\sum_1^n k\,(a_k^2+b_k^2)}\right)\left(\ln\frac1h\right)^{\frac12}, \tag{3}$$

$$I_2 \leqslant \left(\int_0^{2\pi}\sum_{n+1}^\infty\left[(a_k\cos kt + b_k\sin kt)\right]^2 dt\right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant c_3\left[\sum_{n+1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant \frac{c_3}{n^{\frac{1}{2}}}\left[\sum_{n+1}^{\infty}k(a_k^2+b_k^2)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant c_4h^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{0}^{\infty}k(a_k^2+b_k^2)\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует (1).

Неравенство (1) в смысле порядка относительно $h$ улучшить для всего рассматриваемого класса функций нельзя, так как если, например,

$$f_n(\theta)=\sum_{k=1}^{n}a_k^{(n)}\cos k\theta, \quad (5)$$

$$a_k^{(n)}=\left(k\sqrt{\sum_1^n\frac{1}{k}}\right)^{-1}, \quad (6)$$

то при $h=h_n=n^{-1}$

$$\left(\int_0^h f_n(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\int_0^h\left(\sum_1^n a_k^{(n)}\right)^2dt\right]^{\frac{1}{2}}+\mu_n=h^{\frac{1}{2}}\sum_1^n a_k^{(n)}+\mu_n=h^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sum_1^n\frac{1}{k}}+\mu_n=$$

$$=h^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\ln n}+O(1)\right)+\mu_n=h^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\ln\frac{1}{h}}+O(1)\right)+\mu_n>c_5\left(h\ln\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=c_5\left(|a_0^{(n)}|+\sqrt{\sum_{k=1}^n k a_k^{(n)2}}\right)\left(h\ln\frac{1}{h}\right)^{\frac{1}{2}}\quad (c_5>0,\quad a_0^{(n)}=0), \quad (7)$$

потому что

$$|\mu_n|^2\leqslant\int_0^h\left[\sum_1^n a_k^{(n)}(1-\cos kt)dt\right]^2dt=\int_0^h\left(\sum_1^n 2\sin^2\frac{kt}{2}\,a_k^{(n)}\right)^2dt\leqslant$$

$$\leqslant 4\int_0^h\sum_1^n\sin^4\frac{kt}{2}\,a_k^{(n)2}\,dtn<\sum_1^n k a_k^{(n)2}h^2n=h,$$

т. е.

$$|\mu_n|=O\left(h^{\frac{1}{2}}\right).$$

Лемма доказана.

2.3. Доказательство теоремы 2.1. Будем пока считать, что функция $f$ зависит только от двух переменных $x=x_1$ и $y=x_2$, и пусть прямоугольник $\Delta$ имеет вид:

$$\Delta_*=\{0\leqslant x\leqslant\pi,\quad \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\}.$$

Функцию $f$, определенную на $\Delta$, мы продолжим четным образом на прямоугольник

$$\Delta_1=\{-\pi\leqslant x\leqslant 0,\quad \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\}$$

и затем периодически с периодом $2\pi$ по переменной $x$. Продолженная периодическая функция, как нетрудно видеть, будет иметь обобщенные

производные с интегрируемым квадратом на прямоугольнике вида

$$\Delta_a = \{a \leqslant x \leqslant a + 2\pi,\ \ \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1\},$$

где $a$ — любое число.

Очевидно,

$$\infty > D_\Delta [f] = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Delta_0} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \geqslant$$

$$\geqslant c_1 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] y\, dx\, dy = c_1 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} \left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2\right] \rho\, d\theta\, d\rho, \tag{1}$$

где $c_1$ — положительная константа и где мы чисто формально положили $x = \theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ и $y = \rho$ $\left(\frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1\right)$.

Введем в рассмотрение круг $\sigma$ радиуса единица, точки которого рассматриваются в полярных координатах $(\theta, \rho)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1)$, и пусть $\varkappa$ обозначает кольцо, принадлежащее этому кругу, ограниченное окружностями $\rho = \frac{1}{2}$ и $\rho = 1$. Полученное неравенство (1) можно записать так:

$$D_{\Delta_*} [f] > c_1 D_\varkappa [f],$$

помня, конечно, что в левой части рассматривается функция $f(x, y)$ в декартовых координатах на $\Delta_*$, а в правой рассматривается эта же функция $f(\theta, \rho)$ от полярных координат на $\varkappa$.

Функцию $f(\theta, \rho)$ можно продолжить на весь круг $\sigma$ так, что продолженная определенная на $\sigma$ функция $\bar{f}(\theta, \rho)$ будет иметь конечный интеграл $D_\sigma [f]$ Дирихле, удовлетворяющий неравенству

$$D_\sigma [f] < c_2 [D_\varkappa [f] + \| f \|^2_{L_2(\varkappa)}] < c_3 (D_{\Delta_*} [f] + \| f \|^2_{L_2(\Delta_*)}) \tag{2}$$

[см. ([4]), ([7])].

Пусть $u(\rho, \theta)$ — гармоническая в круге $\sigma$ функция, удовлетворяющая условию

$$u(1, \theta) = f(\theta, 1) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_k \cos k\theta. \tag{3}$$

Тогда, в силу минимального принципа, будем иметь:

$$D_\sigma [f] \geqslant D_\sigma [u] = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^2. \tag{4}$$

Заметим, что

$$|a_0| = \left|\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(t, 1)\, dt\right| < c_1 \sqrt{\int\limits_0^\pi f(t, 1)^2\, dt} < c_5 (\| f \|_{L_2(\Delta_*)} + \sqrt{D_{\Delta_*} [f]}) \tag{5}$$

[см. ([9]), 9.12, или ([7]), 2.8 (3) .

Из леммы 2.2 и неравенств (2), (3), (4) и (5) получаем:

$$\int_x^{x+h} f(x, 1)^2\,dx < c_6\left(\|f\|^2_{L_2(\Delta_*)} + D_{\Delta_*}[f]\right) h \ln\frac{1}{h} \quad (h > 0). \tag{6}$$

Мы доказали пока неравенство (2) п. 2.1 в двумерном случае для специального прямоугольника

$$\Delta_* = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1\},$$

когда в левой части этого неравенства величина $y$ фиксирована и равна единице.

Докажем теперь это неравенство в общем виде при произвольном $y$, но пока в двумерном случае. Общность доказательства не нарушится, если мы ограничимся рассмотрением прямоугольника

$$\Delta = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Итак, пусть на $\Delta$ задана функция $f$, для которой $D_\Delta[f] < \infty$. Зададим произвольное $y_0 \in [0, 1]$.

Если $\frac{1}{2} \leqslant y_0$, то рассмотрим функцию

$$F(x, y) = f(x, y - 1 + y_0)$$

на прямоугольнике

$$\Delta_* = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Очевидно,

$$D_{\Delta_*}[F] \leqslant D_\Delta[f], \quad \|F\|_{L_2(\Delta_*)} \leqslant \|f\|_{L_2(\Delta)},$$

$$F(x, 1) = f(x, y_0).$$

Поэтому из (6) немедленно следует неравенство (2) при $n = 2$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = \pi$, $b_2 = 1$ и произвольном $x_2 = y \in [0,1]$.

Если $y_0 < \frac{1}{2}$, то подобным же образом рассматривается функция

$$F(x, y) = f(x, 1 - y + y_0).$$

Переход к общему случаю

$$\Delta = \{a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\}$$

сводится к соответствующей подстановке.

Пусть теперь $\Delta = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$ есть $n$-мерный прямоугольник, на котором задана функция $f$ с $D_\Delta[f] < \infty$. Тогда также [см. ([7])]

$$\|f\|_{L_2(\Delta)} < \infty.$$

На основании уже доказанного при $n = 2$ неравенства (2) п. 2. 1 и теоремы Фубини, существует (зависящая от $\Delta$, но не от $f$) константа $c$ такая, что для почти всех (допустимых для $\Delta$) точек $(x_2, \ldots, x_{n-1})$ $n-2$-

мерного пространства и для всех $x_n \in [a_n, b_n]$ имеет место неравенство

$$\int_{x_1}^{x_1+h} f(x_1, \ldots, x_n)^2 \, dx_1 < c\left(\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_n}^{b_n} f^2 \, dx_1 dx_n + \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_n}^{b_n} \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\right\} dx_1 dx_n\right)$$

из которого, если его проинтегрировать по $x_2, \ldots, x_{n-1}$, немедленно следует неравенство (2) п. 2.1 (даже более сильное, так как в нем участвуют частные производные только по $x_1$ и $x_n$).

Неравенство (1) п. 2.1 доказано. Пример, показывающий, что оно точно в смысле порядка относительно $h$, мы сконструируем в двумерном случае.

Определим с этой целью последовательность гармонических в круге $\sigma$ $(\rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ функций

$$u_n(\rho, \theta) = \sum_1^n \rho^k a_k^{(n)} \cos k\theta \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где граничные функции

$$u_n(1, \theta) = f_n(\theta)$$

заданы равенствами (5) и (6) п. 2.2. Тогда для всех функций

$$f_n(x, y) = u_n(x, y),$$

рассматриваемых в прямоугольнике

$$\Delta = \{0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \ \ \tfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1\},$$

при $h = n^{-1}$, вследствие неравенства (7) п. 2.2, будем иметь:

$$\int_0^h f_n(x, 1)^2 \, dx = \int_0^h f_n(\theta)^2 \, d\theta \geqslant c_5^2 h \ln \frac{1}{h} > c_6 (\|f_n\|^2_{L_2(\Delta)} + D_\Delta [f_n]) \, h \ln \frac{1}{h},$$

так как

$$\|f_n\|^2_{L_2(\Delta)} = \int_\Delta f_n^2 \, d\Delta < 2 \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}}^1 u(\rho, \theta)^2 \rho \, d\rho \, d\theta < c_7,$$

$$D_\Delta [f_n] = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{\partial f_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\} dx \, dy \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{2\pi} \left\{\left(\frac{\partial u_n}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial \rho}\right)^2\right\} \rho \, d\theta \, d\rho < c_8 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

2.4. З а м е ч а н и е. Теорема 2.1 может быть обобщена на область с непрерывно дифференцируемой границей. Для произвольного, даже

ограниченного, открытого множества $G$ она не верна, как показывает следующий пример.

Пусть множество $G$ двумерной плоскости состоит из совокупности не граничащих друг с другом прямоугольников

$$\Delta_k = \{0 \leqslant x \leqslant 1, \ a_k \leqslant y \leqslant a'_k\}, \quad a'_k - a_k = \frac{1}{k^4} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

и пусть функция $f$ определена на $G$ при помощи равенств $f(P) = k$, если $P \in \Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Очевидно,

$$\|f\|_{L_2(G)} = \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{k^2}} < \infty, \quad D_G[f] = 0$$

и, таким образом, при фиксированном $h$ и некотором $c$ правая часть неравенства (2) п. 2.1 есть определенное число, между тем как левая часть стремится к бесконечности, если, например, $y$ пробегает значения $a_k$ (при $k \to \infty$).

## § 3. Задача Гильберта

3.1. В моей работе ([7]) была рассмотрена задача Гильберта в пространстве в предположении, что поверхность, на которой задаются краевые условия, является геометрически замкнутой (гомеоморфной шаровой поверхности).

В этом параграфе мы рассмотрим ту же задачу, но для поверхности, имеющей край.

Ограничимся рассмотрением трехмерного случая; в $n$-мерном пространстве при $n > 3$ имеют место аналогичные факты без существенных изменений в доказательстве.

Зададим в трехмерном пространстве $R$ замкнутую (гомеоморфную шаровой поверхности) поверхность $\Lambda$ класса $C_2$ [см. ([7]), 2. 2]. На $\Lambda$ определим замкнутую (гомеоморфную окружности) кривую $\Gamma$ класса $C_2$:

$$x_i = \psi_i(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l,$$

$$\psi_i(0) = \psi_i(l), \quad \sum_1^3 \psi'_i(s)^2 > 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $s$ — длина дуги $\Gamma$. Эта кривая делит $\Lambda$ на два односвязных куска, имеющих $\Gamma$ своими краями. Один из них обозначим через $\Lambda_1$. Именно только на нем и будут задаваться краевые условия.

Впрочем, в наших рассуждениях будет целесообразно оперировать понятием замкнутой поверхности $\Lambda$, часть которой составляет замкнутую поверхность $\Lambda_1$. Мы будем полностью пользоваться обозначениями работы ([7]) и ссылаться на отдельные ее результаты. По-прежнему $\Lambda_+$ и $\Lambda_-$ будут обозначать внутреннюю и внешнюю стороны $\Lambda$.

На куске $\Lambda_1$ мы задаем три функции $a(P)$, $b(P)$ и $\varkappa(P)$. Пусть первые две из них имеют непрерывные частные производные (по координатам, через которые эти функции могут быть выражены при помо-

щи равенств (1) п. 2.2 работы ([7])) и пусть $a(P) \neq 0$. Что касается функции $\varkappa(P)$, то предполагается, что она такова, что ниже определяемый класс $\mathfrak{M}$ не пуст. В п. 3.9 будут даны достаточно общие условия для этого.

Определение класса $\mathfrak{M}$. Функция $f \in \mathfrak{M}$, если

1) $f$ имеет обобщенные частные производные на $R - \Lambda_1$,

2) $D[f] = \int\limits_R \sum\limits_1^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dR < \infty$,

3) $af_+ - bf_- = \varkappa$ на $\Lambda_1$, где $f_+$ и $f_-$ — предельные значения $f$ на $\Lambda_1$ соответственно изнутри и извне $\Delta$ [см. ([6]), 2.4)],

4) $\int\limits_\gamma f d\gamma = 0$, где $\gamma$ есть некоторый фиксированный прямоугольник *, находящийся вне $\Lambda_1$.

Класс $\mathfrak{M}_0$, по определению, есть класс $\mathfrak{M}$, когда $\varkappa \equiv 0$.

Имеет место

3.2. ТЕОРЕМА. *Среди функций $f$ класса $\mathfrak{M}$ существует, и притом единственная, функция $u$, для которой осуществляется минимум вариационной задачи*

$$\min_{f \in \mathfrak{M}} D[f] = D[u].$$

*Функция $u$ — гармоническая на $R - \Lambda_1$.*

Эта теорема аналогична теореме 4.1 работы ([7]), и ее доказательство ничем не отличается от доказательства, приведенного в п. 5.4 работы ([7]) в случае $\Lambda$. Нужно только убедиться в справедливости основной леммы 5.3 работы ([7]), утверждающей, что для произвольного шара $\omega \subset R$ существует константа $c_\omega$ такая, что

$$\|f\|_{L_2(\omega)} < c_\omega \sqrt{D[f]} \text{ для всех } f \in \mathfrak{M}_0. \tag{1}$$

Для этого берем произвольный шар $\omega$, содержащий в себе $\Lambda_1$ и $\gamma_1$. На основании леммы 2.9 работы ([7]) имеет место неравенство (2) п. 2.9 работы ([7]), где $G$ надо заменить на $\omega$ и вычеркнуть величину $\|\varphi\|_{L_2(\gamma)}$ так как в данном случае справедливо неравенство (2) п. 5.2 работы ([7]),

3.3. ТЕОРЕМА. *Для того чтобы функция $u$ удовлетворяла условиям, теоремы* 3.2, *необходимо и достаточно, чтобы $u \in \mathfrak{M}$ и*

$$D[u, f] = \int\limits_R \sum\limits_1^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dR = 0$$

*для всех $f \in \mathfrak{M}_0$* [см. ([7]), п. 5.5].

3.4. Мы будем считать число $\delta_0$ настолько малым, что все нормали к $\Lambda$ на расстоянии $|\delta|$, не превышающем $\delta_0$, не пересекаются, и каждая нормаль, выходя из некоторой точки $Q \in \Lambda$ на расстоянии $|\delta|$, не большем $\delta_0$, от этой точки, не встречает в другом месте $\Lambda$.

---

* В $n$-мерном случае — $(n-1)$-мерный параллелепипед.

Таким образом, для $|\delta| \leqslant \delta_0$ имеют смысл координаты $(Q; \delta)$ точек $P$ некоторой окрестности $\Lambda$, где $Q$ есть точка $\Lambda$, на нормали к которой лежит $P$, и $\delta$ — расстояние от $P$ до $Q$, взятое со знаком плюс или минус, в зависимости от того, лежит ли $P$ внутри $\Lambda$ или вне.

3.5. ТЕОРЕМА. *Для того чтобы гармоническая функция* $u$ *удовлетворяла условиям теоремы* 3.2, *необходимо и достаточно, чтобы* $u \in \mathfrak{M}$ *и чтобы для всех непрерывно дифференцируемых на* $\Lambda_1$ *функций* $\varphi$ *имели место равенства*:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\Lambda_1}\left\{b\frac{\partial u}{\partial n}(Q, \delta) - a\frac{\partial u}{\partial n}(Q, -\delta)\right\}\varphi(Q)\,d\Lambda = 0, \qquad (1)$$

$$\int_{\sigma_\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = o(\rho^{-2}) \;* \quad (\rho\to\infty), \qquad (2)$$

*где* $\sigma_\rho$ *есть шаровая поверхность радиуса* $\rho$ *с центром в начале координат.*

3.5.1. Примечание. В теореме 3.5 равенство (1) (справедливое для всех функций $\varphi \in C_1(\Lambda)$) можно заменить следующим утверждением.

Существует убывающая к нулю, зависящая от $u$ последовательность чисел $\delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ такая, что имеет место равенство

$$\lim_{\delta_k\to 0}\int_{\Lambda_1}\left\{b\frac{\partial u}{\partial n}(Q, \delta_k) - a\frac{\partial u}{\partial n}(Q, -\delta_k)\right\}\varphi(Q)\,d\Lambda_1 = 0 \qquad (1)$$

для всех $\varphi \in \widetilde{H}_2^{\frac{1}{2}}(\Delta_1)$ [см. ([7]), 2.5].

3.6. Предположенные дифференциальные свойства поверхности (содержащей в себе, как часть, $\Lambda_1$) дают возможность выделить на $\Lambda$ достаточно узкую (содержащую в середине линию $\Gamma$) полосу, определяемую при помощи криволинейных координат $(s, t)$ равенствами

$$x_i = \mu_i(s, t) \quad (i = 1, 2, 3, \quad 0 \leqslant s \leqslant l, \quad |t| \leqslant \tau, \quad \tau > 0),$$

где $x_i$ — декартовы координаты полосы. При этом функции $\mu_i$ имеют в указанной области непрерывные частные производные и кривая

$$x_i = x_i(s, 0) = \psi_i(s) \quad (i = 1, 2, 3)$$

совпадает с $\Gamma$. Таким образом, $s$ есть длина дуги $\Gamma$ и $\Gamma$ делит полосу на две части; одна из них — пусть соответствующая значениям $t < 0$ — принадлежит $\Lambda_1$, а другая, соответствующая значениям $t > 0$, принадлежит $\Lambda_2 = \Lambda - \Lambda_1$.

Обозначим через $\Pi^{(\delta)}$ часть полосы, соответствующую изменениям $0 \leqslant s \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant \delta \leqslant \tau$. Очевидно, $\Lambda_1 + \Pi^{(\delta)} \subset \Lambda$ есть продолжение $\Lambda_1$ на $\Lambda$ через границу $\Gamma$.

Введем в рассмотрение поверхности $\Lambda_\delta$ и $\Lambda_{-\delta}$ [см. ([7]), 7.1], представляющие собой геометрические места точек, внутренних или, соот-

---

* В $n$-мерном случае $o(\rho^{1-n})$.

ветственно, внешних по отношению к $\Lambda$, и отстоящих от $\Lambda$ по нормалям на расстояние $\delta$.

Мы можем точки $Q \in \Pi^{(\delta)}$ обозначать соответствующими парами чисел $(s, t)$ $(0 \leqslant s \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant \delta)$.

Положим $\Lambda' = \Lambda_1 + \Pi^{(\delta)}$ и пусть $N^{(\delta)}$ обозначает поверхность, состоящую из точек $(Q, u) = (s, \delta; u)$, где $0 \leqslant s \leqslant l$, $|u| \leqslant \delta$. Очевидно, три куска $\Lambda_\delta'$, $\Lambda_{-\delta}'$ и $N^{(\delta)}$ образуют границу некоторой области $G_\delta$, содержащей строго внутри себя $\Lambda_1$. Область, внешнюю по отношению к этой границе и содержащуюся внутри шаровой поверхности $\sigma_\rho$ достаточно большого радиуса $\rho$, обозначим через $G_{\delta\rho}$.

3.7. ЛЕММА. *Пусть $u$ и $f$ — две функции, определенные на $R - \Lambda_1$, для которых*

$$D[u] < \infty \text{ и } D[f] < \infty,$$

*и пусть, кроме того, $u$ — гармоническая функция на $R - \Lambda_1$*.*

*Тогда имеет место равенство*

$$D[u, f] = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{\Lambda_1} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(Q, \delta) f_+(Q) - \frac{\partial u}{\partial n}(Q, -\delta) f_-(Q)\right] d\Lambda + \lim_{\rho \to \infty} \int\limits_{\sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} f \, d\sigma_\rho, \quad (1)$$

*справедливое*

а) *если функция $f$ ограничена в окрестности $\Lambda_1$ при непрерывном стремлении $\delta$ к нулю,*

б) *в общем случае для некоторой зависящей от $u$ убывающей к нулю последовательности $\delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$**.*

*При этом оба предела справа существуют.*

Доказательство. Применяя формулу Грина, получим:

$$D[u, f] = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \rho \to \infty}} D_{G_{\delta\rho}}[u, f] = \lim \left[\int\limits_{\Lambda_\delta'} \frac{\partial u}{\partial n_1} f \, d\Lambda_\delta + \int\limits_{\Lambda_{-\delta}'} \frac{\partial u}{\partial n_1} f \, d\Lambda_{-\delta}\right] +$$

$$+ \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{N^{(\delta)}} \frac{\partial u}{\partial n_1} f \, dN^{(\delta)} + \lim_{\rho \to \infty} \int\limits_{\sigma_\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} f \, d\sigma_\rho = \lim_{\delta \to 0} I_{1\delta} + \lim_{\delta \to 0} I_{2\delta} + \lim_{\rho \to \infty} I_\rho, \quad (2)$$

где $n_1$ — направление нормали, идущее от точки соответствующей поверхности внутрь области $G_{\delta\rho}$.

Существование третьего предела правой части (2) вытекает из того, что мы можем сначала перейти к пределу при $\rho \to \infty$, а затем при $\delta \to 0$. Что касается первых двух пределов, то пока мы должны были бы написать $\lim (I_{1\delta} + I_{2\delta})$, но в дальнейшем будет видно, что существуют также и пределы отдельных слагаемых суммы. Мы будем разрешать себе подобную вольность и в других случаях.

Будем, как ранее, считать, что точки $(Q, \delta)$ при $\delta > 0$ находятся с внутренней стороны $\Lambda$, а при $\delta < 0$ — с внешней. Тогда если $n$ обозначает направление внешней нормали к $\Lambda_\delta$ и $\Lambda_{-\delta}$, то $n$ совпадает с $n_1$ для точек $\Lambda_\delta$ и противоположно по направлению для точек $\Lambda_{-\delta}$.

* Эта лемма может быть распространена и на случай, когда $u$ удовлетворяет более общему дифференциальному уравнению эллиптического типа.

** Возможно, что и в общем случае это равенство имеет место при непрерывном стремлении $\delta$ к нулю, но этого я не доказал.

В работе (7) (см. предпоследнее равенство в п. 7.2 и сноску к нему *) доказано равенство

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{\Lambda_\delta^*} \frac{\partial u}{\partial n} f\, d\Lambda_\delta^* - \int_{\Lambda_{-\delta}^*} \frac{\partial u}{\partial n} f\, d\Lambda_{-\delta}\right] =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_{\Lambda^*}\left[\frac{\partial u}{\partial n}(Q,\delta) f_+(Q) - \frac{\partial u}{\partial n}(Q,-\delta) f_-(Q)\right] d\Lambda, \tag{3}$$

где $\Lambda^* \subset \Lambda$ — произвольное, вообще говоря зависящее от $\delta$ измеримое множество. Это равенство надо понимать в том смысле, что если существует один из пределов, то существует и другой, ему равный.

Из равенства (3), полагая $\Lambda^* = \Lambda' + \Pi^{(\delta)}$, получаем следующее равенство:

$$\lim I_{1\delta} = \lim_{\delta\to 0}\int_{\Lambda_1}\left[\frac{\partial u}{\partial n}(Q,\delta) f_+(Q)\, d\Lambda - \frac{\partial u}{\partial n}(Q,-\delta) f_-(Q)\right] d\Lambda +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0}\int_{\Pi^{(\delta)}}\left[\frac{\partial u}{\partial n}(Q,\delta) - \frac{\partial u}{\partial n}(Q,-\delta)\right]\varphi(Q)\, d\Lambda = \lim_{\delta\to 0} I_{11}(\delta) + \lim_{\delta\to 0} I_{12}(\delta), \tag{4}$$

где $\varphi(Q) = f_+(Q) = f_-(Q)$ для $Q \in \Pi^{(\delta)} \subset \Delta_2$.

На основании теоремы 2.1,

$$\int_{\Pi^{(\delta)}} \varphi(Q)^2\, d\Lambda = O\left(\delta \ln\frac{1}{\delta}\right) \quad (0 < \delta < \delta_0). \tag{5}$$

С другой стороны, так как

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \cos(n,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \cos(n,y)\frac{\partial u}{\partial y},$$

то **

$$\int_0^{\delta_0}\int_{\Pi^{(\delta)}}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 d\Lambda\, d\delta \leqslant 2\int_0^{\delta_0}\int_{\Pi^{(\delta)}}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} d\Lambda\, d\delta < \infty$$

и для некоторой последовательности $\delta_k \to 0$

$$\int_{\Pi^{(\delta_k)}}\left[\frac{\partial u}{\partial n}(Q,\delta_k)\right]^2 d\Lambda = o\left(\frac{1}{\delta_k \ln\frac{1}{\delta_k}}\right); \tag{6}$$

поэтому из (5) и (6) следует:

$$|I_{12}(\delta_k)| < \left(\sqrt{\int_{\Pi^{(\delta_k)}}\frac{\partial u}{\partial n}(Q,\delta_k)^2\, d\Lambda} + \sqrt{\int_{\Pi^{(\delta_k)}}\frac{\partial u}{\partial n}(Q,-\delta_k)^2\, d\Lambda}\right) \times$$

$$\times \sqrt{\int_{\Pi^{(\delta_k)}}\varphi(Q)^2\, d\Lambda} \to 0 \quad (\delta_k \to 0). \tag{7}$$

---

* В указанной сноске надо читать: «это равенство» вместо «равенство (6)».

** При достаточно гладком преобразовании координат конечность величины $D[f]$ сохраняется.

Аналогично, на основании теоремы 2.1,

$$\int_{N^{(\delta)}} f^2\, dN^{(\delta)} < c \int_{-\delta}^{\delta}\int_0^l f^2(s, \delta, u)\, ds\, du = O\left(\delta \ln \frac{1}{\delta}\right) \quad (0<\delta<\delta_0), \tag{8}$$

где $c$ — константа, и, в силу конечности интеграла,

$$\int_0^{\delta_0}\int_{N^{(\delta)}} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dN^{(\delta)}\, dt < \infty.$$

Так же, как выше, заключаем, что

$$\int_{N^{(\delta_k)}} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dN^{(\delta_k)} = o\left(\frac{1}{\delta_k \ln \frac{1}{\delta_k}}\right) \tag{9}$$

для некоторой убывающей к нулю последовательности чисел $\delta_k$.

Из (8) и (9) вытекает, что

$$|I_2(\delta_k)| = \left|\int_{N^{(\delta_k)}} \frac{\partial u}{\partial n} f\, dN^{(\delta_k)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{N^{(\delta_k)}} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dN^{(\delta_k)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{N^{(\delta_k)}} f^2\, dN^{(\delta_k)}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (\delta_k \to 0).$$

Но тогда из (2), (4), (7) и (10) следует:

$$D[u, f] = \lim_{\delta_k \to 0} I_{11}(\delta_k) + \lim_{\rho\to\infty} I_\rho,$$

т. е. утверждение б) леммы.

Докажем теперь утверждение а). Допустим, что функция $f$ удовлетворяет условию теоремы и ограничена в некоторой окрестности $\Lambda_1$. Тогда существуют положительные числа $K$ и $\delta_0$ такие, что для $\delta<\delta_0$ функции $f$ и $\varphi$, входящие в интегралы $I_{2\delta}$ и $I_{12}(\delta)$, не превышают по абсолютной величине $K$. Поэтому на основании леммы 6.1.6 работы (7) об оценке гармонической функции

$$|I_{2\delta}| \leqslant K \int_{N^{(\delta)}} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| dN^{(\delta)} < K\left(\int_{N^{(\delta)}} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 dN^{(\delta)}\right)^{\frac{1}{2}} O\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right) <$$

$$< o\left(\delta^{-\frac{1}{2}}\right) O\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right) \to 0 \quad (\delta\to 0),$$

$$|I_{12}(\delta)| < K\left(\sqrt{\int_{\Pi^{(\delta)}} \frac{\partial u}{\partial n}(Q, \delta)^2\, d\Lambda} + \sqrt{\int_{\Pi^{(\delta)}} \frac{\partial u}{\partial n}(Q, -\delta)^2\, d\Lambda}\right) O\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right) <$$

$$< o\left(\delta^{-\frac{1}{2}}\right) O\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right) \to 0 \quad (\delta\to 0),$$

что доказывает утверждение а) леммы.

3.8. Доказательство теоремы 3.5. Если функция $u$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2, то на основании 3.3 для нее имеет место равенство $D[u, f] = 0$, какова бы ни была функция $f \in \mathfrak{M}_0$. Но тогда, в силу леммы 3.7, правая часть равенства (1) п. 3.7 для всех $f \in \mathfrak{M}_0$ равна нулю.

Так как среди функций $f \in \mathfrak{M}_0$ имеются и такие, что $f = 0$ внутри некоторой сферы с центром в начале, содержащей $\Lambda_1$, и $f = 1$ вне некоторой концентрической с ней большей сферы, то

$$\lim_{\delta \to \infty} \int_{\Lambda_1} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(Q, \delta) f_+(Q) - \frac{\partial u}{\partial n}(Q, -\delta) f_-(Q)\right] d\Lambda = 0 \tag{1}$$

для всех функций $f \in \mathfrak{M}_0$, ограниченных в окрестности $\Lambda_1$ и тождественно равных нулю вне достаточно большого шара, и

$$\lim_{\rho \to \infty} \int \frac{\partial u}{\partial \rho} d\sigma_\rho = 0. \tag{2}$$

В силу того, что функции $f \in \mathfrak{M}_0$ имеют граничные на $\Lambda$ функции $f_+$ и $f_-$, принадлежащие к классу $\widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda)$ [см. (7), 2.5] и удовлетворяющие соотношению

$$af_+ - bf_- = 0,$$

равенство (1) п. 3.5 имеет место для всех ограниченных функций $\varphi \in \widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda_1)$. В частности, этот класс функций содержит в себе все непрерывно дифференцируемые на $\Lambda_1$ функции. Далее, из (2), в силу п. 6.1.2 работы (7), следует равенство (2) п. 3.5.

Наоборот, если функция $u \in \mathfrak{M}$ удовлетворяет дополнительным условиям (1), (2) п. 3.5 для всех непрерывно дифференцируемых на $\Lambda_1$ функций $\varphi$, то обратным рассуждением [см. (7), 7.3] приходим к тому, что $D[u, f] = 0$ для всех $f \in \mathfrak{M}_0$, имеющих непрерывные частные производные и образующих множество, всюду плотное (в смысле $D[f]$) в $\mathfrak{M}_0$, поэтому и для всех $f \in \mathfrak{M}_0$. Отсюда, на основании 3.3, мы заключаем, что условия (1), (2) п. 3.5 достаточны для того, чтобы имела место теорема 3.5.

К этому же результату, рассуждая как в п. 7.3.1 работы (7), мы придем, если будем считать, что функция $u \in \mathfrak{M}$ удовлетворяет условию (1) п. 3.5 для всех непрерывно дифференцируемых на $\Lambda_1$ функций.

3.9. В заключение займемся вопросом о том, какие условия надо наложить на функцию $\varkappa$, значения которой определены на $\Lambda_1$, чтобы класс $\mathfrak{M}$ был не пуст.

Если класс $\mathfrak{M}$ не пуст, то на $R - \Lambda_1$ существует функция $f$ с $D[f] < \infty$ такая, что

$$af_+ - bf_- = \varkappa, \quad a \neq 0.$$

Поэтому в силу того, что $f_+$, $f_-$, а следовательно, $af_+$, $bf_-$ принадлежат к классу $\widetilde{H}_2^{\frac{1}{2}}(\Lambda_1)$, функция $\varkappa$ необходимо должна принадлежать к классу $\widetilde{H}_2^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\Lambda_1)$.

Пусть $\varkappa \in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda_1)\left(\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\varepsilon<1\right)$ и $a-b\neq 0$ на $\Gamma$. Тогда вдоль $\Gamma$ можно определить полосу $\Pi_\delta\subset\Lambda_1$, настолько узкую, что на ней $a-b\neq 0$.

Положим

$$f_-=\frac{\varkappa}{a-b} \text{ на } \Pi_\delta.$$

Тогда $f_-\in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Pi_\delta)$. Продолжим $f_-$ на всю поверхность $\Lambda$ так, чтобы продолженная функция $f_-\in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda)$, что возможно [см. ([5])]. Затем определим на $\Lambda$ функцию $f_+$ следующим образом:

$$f_+=\begin{cases}\dfrac{bf_++\varkappa}{a}=f_-+\left(\dfrac{b}{a}-1\right)f_-+\dfrac{\varkappa}{a} & \text{на } \Lambda_1,\\ f_- & \text{на } \Lambda_2.\end{cases}\tag{1}$$

Очевидно, $f_+\in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda_1)$, $f_+\in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda_2)$ и, кроме того, предельные значения $f_+$ на $\Gamma$ со стороны $\Lambda_1$ и со стороны $\Lambda_2$ почти всюду совпадают, так как

$$\left(\frac{b}{a}-1\right)f_-+\frac{\varkappa}{a}=0 \text{ на } \Pi_\delta.$$

Поэтому (см. добавление 5.1) $f_+\in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda_1)$. Теперь можно продолжить $f_+$ внутрь $\Lambda$ и $f_-$ — во вне $\Lambda$ так, что получится функция $f$, имеющая на $R-\Lambda$ обобщенные производные с $D[f]<\infty$. В силу (1), для этой функции имеет место равенство

$$af_+-bf_-=\varkappa \text{ на } \Lambda_1.$$

Мы доказали, что, если $a-b\neq 0$ на $\Gamma$ и $\varkappa\in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda_1)$, класс $\mathfrak{M}$ не пуст.

## § 4. Задача Дирихле

4.1. Для рассмотренной в § 3 поверхности $\Lambda_1$ с краем, применяя те же методы, можно решить задачу Дирихле, задавая на одной стороне $\Lambda_1$ одни значения гармонической функции и на другой стороне — другие. Для случая, когда $\Lambda$ есть круг $z=0$, $x^2+y^2\leqslant 1$, помещенный в пространство точек $(x, y, z)$, такую задачу рассматривал А. В. Бицадзе ([1]), который получил эффективную формулу решения.

Зададим на $\Lambda_1$ две функции $\varkappa_+$ и $\varkappa_-$ такие, что в $R=R_3$ существует функция $f$, обладающая следующими свойствами:

1) $f$ имеет на $R-\Lambda_1$ обобщенные частные производные первого порядка;

2) $D[f]=D_{R-\Lambda_1}[f]<\infty$,

3) $f_+=\varkappa_+$, $f_-=\varkappa_-$ на $\Lambda_1$.

Класс функций $f$, удовлетворяющих условиям 1), 2), 3) при данных функциях $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, обозначим через $\mathfrak{M}$.

Если $\varkappa_1 \equiv \varkappa_2 \equiv 0$ на $\Lambda_1$, то положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$.

Имеют место следующие теоремы.

4.2. ТЕОРЕМА. *Существует минимум*

$$\lim_{f \in \mathfrak{M}} D[f] = D[u], \tag{1}$$

*достигаемый для единственной функции* $u \in \mathfrak{M}$, *которая является гармонической функцией на* $R - \Lambda_1$.

4.3. ТЕОРЕМА. *Следующие утверждения эквивалентны*:

а) *Функция* $u$ (*существующая и единственная по теореме* 4.2) *минимизирует вариационную задачу* (1) *п.* 4.2.

б) *Функция* $u \in \mathfrak{M}$ *и для нее выполняется равенство*

$$D[u, f] = 0$$

*для всех* $f \in \mathfrak{M}_0$.

в) *Функция* $u \in \mathfrak{M}$ — *гармоническая на* $R - \Lambda_1$ *и*

$$\int_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = o(\rho^{-2}) \ * \quad (\rho \to \infty).$$

4.4. Следствие. *Существует, и притом единственная, функция* $u \in \mathfrak{M}$, *гармоническая на* $R - \Lambda_1$ *и удовлетворяющая условию* 1) *п.* 4.3 *на бесконечности.*

4.5. Приведенные теоремы доказываются аналогично соответствующим утверждениям предыдущего параграфа. Мы сделаем только отдельные замечания по этому поводу.

При доказательстве теоремы 4.2 (аналогичной 3.2) надо убедиться в справедливости для рассматриваемого класса $\mathfrak{M}_0$ леммы Пуанкаре, сводящейся к неравенству, аналогичному (1) п. 3.2. Но в данном случае класс $\mathfrak{M}_0$ есть часть класса $\mathfrak{M}_0$, рассмотренного в § 3, поэтому нужное неравенство есть тривиальное следствие неравенства (1) п. 3.2.

Эквивалентность утверждений б) и в) теоремы 4.3 получается немедленно при помощи уже приводившихся рассуждений из равенства (1) п. 3.7 **, где надо считать, что $u$ удовлетворяет утверждению б) или в), а $f \in \mathfrak{M}_0$, и принять во внимание, что в данном случае $f_+ \equiv f_- \equiv 0$.

4.6. Приведем простой критерий непустоты класса $\mathfrak{M}$, дающий таким образом достаточное (близкое к необходимому) условие, которому должны подчиняться заданные на $\Lambda_1$ функции $\varkappa_+$ и $\varkappa_-$, чтобы для них имели место теоремы 4.2—4.4.

Пусть

$$\varkappa_+ \in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda_1), \tag{1}$$

$$(\varepsilon > 0)$$

$$\varkappa_- \in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda_1). \tag{2}$$

* В $n$-мерном случае $o(\rho^{1-n})$.

** В данном случае удобнее воспользоваться утверждением 3.7 б).

Тогда по теореме вложения [см. ([5]), 5.14] имеют смысл граничные функции

$$\varphi_1 = \varkappa_+ |_\Gamma \in H_2^{(\varepsilon)}(\Gamma), \tag{3}$$
$$\varphi_2 = \varkappa_- |_\Gamma \in H_2^{(\varepsilon)}(\Gamma). \tag{4}$$

4.6.1. ЛЕММА. *Для того чтобы для* $\varkappa_+$ *и* $\varkappa_-$ *можно было построить на* $R$ *функцию* $f$, *удовлетворяющую свойствам* 1), 2), 3) *п.* 4.1, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \text{ почти всюду на } \Gamma. \tag{1}$$

В самом деле, из того, что $\varphi \in H_2^{(\varepsilon)}(\Gamma)$, следует возможность продолжения функции $\varphi$ на $\Lambda_2$ так, что продолженная функция $\varkappa_*$ будет удовлетворять свойствам:

$$\varkappa_* \in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda_2), \quad \varkappa_* |_\Gamma = \varphi \tag{2}$$

[см. ([5]), 6.2].

Построим две функции:

$$\varkappa'_+ = \begin{cases} \varkappa_+ \text{ на } \Lambda_1, \\ \varkappa_* \text{ на } \Lambda_2, \end{cases} \quad \varkappa'_- = \begin{cases} \varkappa_- \text{ на } \Lambda_1, \\ \varkappa_* \text{ на } \Lambda_2. \end{cases}$$

Из условий (1), (3) п. 4.6 и (1), (2) п. 4.6.1 следует (см. 5.1), что

$$\varkappa'_+ \in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda),$$

а из условий (2), (4) п. 4.6 и (1), (2) п. 4.6.1 вытекает, что

$$\varkappa'_- \in H_2^{\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}(\Lambda).$$

Теперь, снова воспользовавшись обратной теоремой вложения [см. ([5]), 6.2], можно определить на $R$ функции $f_1, f_2 \in H_2^{(1+\varepsilon)}(R)$ такие, что

$$f_1 |_\Gamma = \varkappa'_+, \quad f_2 |_\Gamma = \varkappa'_-.$$

Обе эти функции во всяком случае имеют конечные интегралы Дирихле:

$$D_R[f_1] < \infty, \quad D_R[f_2] < \infty$$

и так как

$$\varkappa'_+ = \varkappa'_- = \varkappa_* \text{ на } \Lambda_2,$$

то функция

$$f = \begin{cases} f_1 \text{ внутри } \Lambda, \\ f_2 \text{ вне } \Lambda \end{cases}$$

обладает свойствами 1), 2) и 3) п. 4.1, т. е. принадлежит к классу $\mathfrak{M}$.

4.6.2. Заметим, что если одна из функций принадлежит к классу $H_2^{\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}(\Lambda_1)$ $(\varepsilon > 0)$, но не принадлежит к классу $H_2^{\frac{1}{2}}(\Lambda_1)$, то уже не существует в $R - \Lambda_1$ функции, удовлетворяющей условиям 1), 2), 3) п. 4.1, и класс $\mathfrak{M}$, соответствующий таким $\varkappa_+$ и $\varkappa_-$, пуст.

## § 5. Добавление

5.1. ЛЕММА. *Пусть* $0 < r - \frac{1}{p} < r < 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $R = \{-\infty < < x, y < \infty\}$ — *двумерная плоскость и*

$$R_+ = \{-\infty < x < \infty,\ y \geqslant 0\}, \quad R_- = \{-\infty < x < \infty,\ y \leqslant \infty\}$$

— *верхняя и нижняя полуплоскости. Пусть, кроме того, функция* $f(x, y)$, *определенная на* $R$, *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $f \in H_p^{(r)}(R_+)$, $f \in H_p^{(r)}(R_-)$;

2) *после видоизменения* $f(x, y)$ *на множестве двумерной меры нуль почти для всех* $x$ *имеют место равенства*:

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y < 0}} f(x, y) = \psi(x).$$

*Тогда* $f \in H_p^{(r)}(R)$.

Доказательство. Из того, что функция $f \in H_p^{(r)}(R_+)$ $(0 < r < 1)$, следует [см. (6)] возможность определить на $R$ функцию $\bar{f} \in H_p^{(r)}$ такую, что $\bar{f} = f$ на $R_+$. В силу условия $0 < r - \frac{1}{p} < 1$ функция

$$\psi = f(x, 0+0) = \bar{f}(x, 0)$$

принадлежит к классу $H_p^{\left(r - \frac{1}{p}\right)}(-\infty, \infty)$. Больше того, функцию $\bar{f}$ можно видоизменить на множестве двумерной меры нуль и после этого для некоторой константы $c > 0$, не зависящей от $y > 0$, имеет место неравенство [см. (2), теорема 4.1]

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y) - \psi(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant c\, |y|^{r - \frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Аналогично, функцию $f$ можно продолжить с нижней полуплоскости на верхнюю и показать, что неравенство (1) также верно для $y < 0$.

Далее, при $h > 0$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y, +h) - f(x, y)|^p\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{-h}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y+h) - f(x, y)|^p\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{p}} + \\
&+ \left(\int_{-h}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y+h) - f(x, y)|^p\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{p}} + \\
&+ \left(\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h, y) - f(x, y)|^p\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{p}} = I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{2}$$

При этом, в силу того, что $f \in H_p^{(r)}(R_+)$ и $f \in H_p^{(r)}(R_-)$,

$$I_1 < c_1 h^r, \quad I_3 < c_1 h^r, \tag{3}$$

где $c_1$ — константа, не зависящая от $h$.

Вследствие (1),

$$I_2 \leqslant \left( \int_{-h}^{0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y+h) - \psi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{-h}^{0} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x) - f(x, y)|^p \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left( \int_{-h}^{0} c_1 h^{rp-1} \, dy \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{-h}^{0} c_1 h^{rp-1} \, dy \right)^{\frac{1}{p}} < 2c_1^{\frac{1}{p}} h^r. \tag{4}$$

Из (2), (3), (4) следует, что $f \in H_p^{(r)}(R)$.

5. 2. Добавление к доказательству леммы 6.12 работы ([7]). При доказательстве этой леммы мы исходили из того, что гармоническая вне единичной сферы (на $\Omega$) функция с конечным интегралом Дирихле разлагается в ряд по шаровым функциям вида (7) п. 6.12 работы ([7]). Ниже поясняется, почему такое разложение возможно.

Пусть $u$ есть функция, удовлетворяющая условию леммы 6.1.2. Тогда функция

$$v_k = \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

— гармоническая на $\Omega$ и

$$\| v_k \|_{L_2(\Omega)} < \infty,$$

поэтому для нее имеет место аналогичное неравенству (4) п. 6.1.5 неравенство

$$| v_k(P) | < c r^{-\frac{n}{2}} \| v_k \|_{L_2(\omega_r)} < c_1,$$

где $P \subset \Omega$, $r \leqslant R - 1 = |P| - 1$, $\omega_r$ — шар с центром в точке $P$ радиуса $r$, $c$ — константа, не зависящая от рядом стоящего множителя, и $c_1$ — константа, не зависящая от положения точки $P$, принадлежащей к внешности $\Omega_2$ круга радиуса, равного 2, концентрического с $\Omega$. Но тогда, очевидно, существует константа $c_2$, зависящая только от $u$ и такая, что для всех $P \in \Omega_2$ имеет место неравенство

$$| u(P) | < c_2 R.$$

В таком случае функция

$$w(\rho; Q) = \frac{1}{\rho^{n-2}} u\left( \frac{1}{\rho}; Q \right) \quad \left( \rho^2 = \sum_1^n x_i^2 \right),$$

гармоническая внутри единичной сферы за исключением нулевой точки, удовлетворяет неравенству

$$| w | < \frac{c_2}{\rho^{n-1}} \quad \left( 0 < \rho \leqslant \frac{1}{2} \right),$$

и потому ее можно представить в виде

$$w(\rho; Q) = \frac{a_0}{\rho^{n-2}} - \sum_1^n a_i \frac{\partial \left( \frac{1}{\rho^{n-2}} \right)}{\partial x_i} + w_*(\rho; Q),$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянные и $w_*$ — функция, гармоническая внутри $\sigma$, включая нулевую точку (см. по этому поводу ([8]), лекция X, § 2, лем-

ма 1 и теорема 4. При этом надо учесть, что в случее $s$-мерного пространства исходное неравенство $|u| < \frac{A}{R^n}$ леммы 1, сформулированной для трехмерного пространства, надо заменить на неравенство $|u| < \frac{A}{R^{n+s-3}}$).

Таким образом,

$$u(R;\, Q) = a_0 + (n-2)\sum_1^n Ra_i \cos\theta_i + \frac{1}{R^{n-2}} w_*\left(\frac{1}{R}\,;\, Q\right), \tag{1}$$

где $\cos\theta_i = \frac{x_i}{R}$. В силу того, что функция $u$ и последнее слагаемое правой части имеют на $\Omega$ конечный интеграл Дирихле, константа

$$\sum_{1}^{n} a_i \cos\theta_i = 0.$$

Этим доказано, что при условиях, наложенных леммой,

$$u(R;\, \theta) = a_0 + \frac{1}{R^{n+2}} w_*\left(\frac{1}{R}\,;\, Q\right),$$

где $w_*(\rho, Q)$ — гармоническая на единичном шаре $\sigma$ функция с конечным интегралом ($D_\sigma[w_*]$) Дирихле. Теперь возможность разложения $w_*$ в ряд по шаровым функциям $\varphi_\nu(Q)$, сходящийся к $w_*$ в смысле среднего квадратического, доказывается без труда.

Поступило
8.XII.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бицадзе А. В., Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 525—538

[2] Кудрявцев Л. Д., Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, LV, 1959.

[3] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, Москва, 1946.

[4] Никольский С. М., К вопросу о решении полигармонического уравнения вариационным методом, Доклады Ак. наук СССР, 83, № 3 (1953), 409—411.

[5] Никольский С. М., Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях, Матем. сборн., 33(75) : 2 (1953), 261—326.

[6] Никольский С. М., О продолжении функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств, Матем. сборн., 40 (82) : 2 (1956), 243—268.

[7] Никольский С. М., Вариационная задача Гильберта, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 599—630.

[8] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, ГИТТЛ, Москва, 1947

[9] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, 1950.

[10] Trjitzinsky W. I., Multidimensional principal integrals. Boundary value problems and integral equations, Acta Mathematica, 84 (1951), 1—128.

[11] Хведелидзе Б. В., Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Труды Тбилисского матем. ин-та, XXIII (1956), 3—158.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 697—736

В. К. ДЗЯДЫК

# О ПРОБЛЕМЕ С. М. НИКОЛЬСКОГО В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

(*Представлено академиком* **С. Л. Соболевым**)

В работе детально исследуются свойства линий уровня для областей с угловыми особенностями, устанавливаются неравенства для производных от многочленов, ограниченных на границе положительной непрерывной функцией, и доказывается обратная теорема приближения функций в областях с кусочно-гладкими границами.

## § 1. Введение

В 1911—1912 гг. в известных работах Д. Джексона ([1]), ([2]) и С. Н. Бернштейна ([3]) было установлено, что для того чтобы периодическая с периодом $2\pi$ функция $f(t)$ имела $r$-ю производную $f^{(r)}(t)$, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $n=1, 2, \ldots$ величина наилучшего приближения функции $f$ при помощи тригонометрических полиномов $T_n(t)$ порядка не выше $n$ удовлетворяла условию:

$$E_n(f)=\max_t |f(t)-T_n^*(t)| \leqslant \frac{A_1}{n^{r+\alpha}}, \tag{1.1}$$

где $T_n^*(t)$ — полином наилучшего приближения в метрике $C$ функции $f$ при заданном $n$ и $A_1$ — постоянная, не зависящая от $n$.

В этих же работах был рассмотрен также случай приближения непериодических функций $f(x)$, заданных на некотором сегменте $[a, b]$ при помощи обыкновенных многочленов $P_n(x)$, однако полученные при этом результаты не были окончательными, так как найденные достаточные условия принадлежности функции $f$ классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$ не совпадали с полученными необходимыми условиями. Объяснялось это прежде всего тем, что в непериодическом случае, более сложном по сравнению с периодическим, невозможно, как правило, полностью охарактеризовать непрерывные свойства функции и ее производных при помощи последовательности наилучших приближений $\{E_n(f)\}$ этой функции. В частности, в этом случае не существует никакой убывающей функции натурального аргумента $\varphi(n)$ такой, чтобы условие

$$E_n(f)\leqslant A_2\varphi(n), \quad A_2=\mathrm{const}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

оказалось (подобно периодическому случаю) одновременно необходимым и достаточным для принадлежности функции $f(x)$ классу $\mathrm{Lip}\,\alpha\ (0<\alpha<1)$.

Первый существенный сдвиг в этом вопросе после упомянутых работ Д. Джексона и С. Н. Бернштейна был получен только в 1946 году С. М. Никольским [см. (4), стр. 307], который показал, что для функций, удовлетворяющих условию Lip 1, теорема Джексона в непериодическом случае допускает усиление в том смысле, что для всякой функции $f(x)$ из класса Lip 1, заданной на сегменте $[-1, 1]$ и ограниченной по модулю числом 1, можно построить для любого $n = 1, 2, \ldots$ обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ такой, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x)-P_n(x)| \leqslant \frac{\frac{\pi}{2}}{n}\left[\sqrt{1-x^2}+O\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right]. \qquad (1.2)$$

Из этого результата, в отличие от теоремы Джексона учитывающего положение точки $x$ на сегменте $[-1, 1]$, следует, что для построенных многочленов при $|x|\to 1$ отклонение $|f(x)-P_n(x)|$, вообще говоря, уменьшается и становится величиной порядка $\frac{\ln n}{n^2}$.

Исследования в этом направлении были позже продолжены в работах учеников С. М. Никольского: А. Ф. Тимана (5), (6), (7), (22), В. К. Дзядыка (8), (9), (23), М. К. Потапова (10), Г. К. Лебедя и др.

В 1951 г. А. Ф. Тиман (5) показал возможность дальнейшего усиления теоремы Джексона в том смысле, что для всякой функции $f(x)$ из класса $\mathrm{Lip}\,\alpha\ (0<\alpha\leqslant 1)$, заданной на сегменте $[-1, 1]$ и ограниченной по модулю числом 1, можно построить для любого $n = 1, 2, 3\ldots$ обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$ такой, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x)-P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^\alpha}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha+\left(\frac{|x|}{n}\right)^\alpha\right], \,*$$

где $C$ — постоянная, не зависящая от $n$; в том же году в работе (6) Тиман обобщил полученную теорему на функции, имеющие непрерывную $r$-ю производную $f^{(r)}(x)$ с заданным модулем непрерывности $\omega_r(\delta)$.

В 1956 г. нами было доказано [см. (8)], что условия (необходимые), полученные А. Ф. Тиманом в работах (5) и (6), являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы функция $f(x)$ имела $r$-ю производную, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}\,\alpha\ (0<\alpha<1)$.

Кроме того, в работах (8) и (9) нами получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(x)$ имела $r$-ю $(r\geqslant 0)$ произ-

---

* Этот результат служит, очевидно, усилением (в отношении порядка второго слагаемого) и обобщением результата С. М. Никольского (1.2) и подтверждает высказанную С. М. Никольским гипотезу о существовании для функций класса Lip 1 процессов приближения таких, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x)-P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{|x|}{n}\right),$$

где $C$ — постоянная, не зависящая от $n$ [см. (11), стр. 9].

водную $f^{(r)}(x)$, удовлетворяющую условию:

$$|f^{(r)}(x+h)-2f^{(r)}(x)+f^{(r)}(x-h)|\leqslant A_3 h$$

(а также условию $\Delta_h^2 f^{(r)}(x)=o(h)$).

Отметим, что некоторые из результатов работы ([8]) были обобщены Ю. А. Брудным и А. Ф. Тиманом на функции с более сложным модулем непрерывности [см. ([22])] и что, с другой стороны, автором была получена теорема [см. ([23])], которая усиливает результаты А. Ф. Тимана, относящиеся к усилению теоремы Джексона [см. ([6]) и ([7])].

Условимся впредь называть задачей Никольского всякую задачу, в которой при помощи учета положения точки $x$ удается установить зависимость (в ту или иную сторону) между непрерывными свойствами функции $f(x)$ или ее производных и величиной разностей

$$|f(x)-P_n(x)|=\delta_n(P_n;\ f;\ x),\quad n=1,2,\ldots,$$

при некотором выборе последовательности многочленов $\{P_n(x)\}$. Тогда каждый из предыдущих результатов можно будет рассматривать как решение задачи Никольского в том или ином конкретном случае.

В частности, в настоящей работе делается первая попытка подойти к решению задачи Никольского для случая функций $f(z)$, являющихся аналитическими во внутренних точках некоторого множества $\mathfrak{M}$ с кусочно гладкой границей и имеющих в каждой точке $z$ границы $C_1$ этого множества производную $r$-го порядка ($r$ — целое $\geqslant 0$) $f^{(r)}(z)$, удовлетворяющую условию Липшица степени $\alpha$ ($0<\alpha<1$) *.

В § 2 дается определение множеств типа ($A^{**}$). Затем производится довольно тщательное исследование свойств линий уровня для областей с угловыми особенностями, представляющее, на наш взгляд, и самостоятельный интерес. В конце § 2 приводятся примеры множеств типа ($A^{**}$).

В § 3 устанавливаются неравенства для производных от многочленов, ограниченных на некоторых континуумах положительной непрерывной функцией. Эти неравенства служат обобщением некоторых неравенств С. Н. Бернштейна [см. ([12]), стр. 498, неравенство (10)], Г. Сеге [см. ([13]), стр. 51—52] и автора [см. ([8]), стр. 636, теорема 2′]. Основной в этом параграфе является теорема 3.1.

В § 4 на множествах типа ($A^{**}$) устанавливается основная в этой работе обратная теорема приближения функций класса $\operatorname{Lip}\alpha$ ($0<\alpha<1$) в комплексной области с угловыми особенностями. Эта теорема содержит в виде частного случая упомянутую выше теорему автора [см. ([8]), стр. 636, теорема 3], относящуюся к приближению непериодических функций на отрезке [—1,1]. С другой стороны, она содержит в виде частного случая обратные теоремы, полученные для областей с аналитическими границами В. Е. Севеллом [см. ([15]), стр. 100—108]. Отметим также, что эта теорема имеет ряд точек соприкосновения с результатами С. Н. Мергеляна [см. ([16]), гл. III, в частности стр. 114, теорема 6.3, а также ([21]), теорема 3.1].

---

* Эта проблема была поставлена С. М. Никольским на III Всесоюзном математическом съезде.

## § 2. Определение и примеры множеств типа $(A^{**})$

1°. В этом параграфе мы введем в рассмотрение множества, которые в дальнейшем будут играть роль множеств определения рассматриваемых нами функций.

Пусть $\mathfrak{M}$ — ограниченное замкнутое множество с односвязным дополнением $G$, граница $C_1$ которого состоит из конечного числа жордановых дуг, и пусть $\varphi(z) = \varphi(z; \mathfrak{M})$ — функция, осуществляющая конформное отображение внешности $\mathfrak{M}$ на внешность единичного круга с центром в начале так, что $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z}$ существует и равен некоторому положительному конечному числу: пусть, наконец, $\varphi^{-}(w)$ — функция, обратная к $\varphi(z)$.

Обозначим через $C_R (R \geqslant 1)$ * линию уровня $|\varphi(z)| = R$, а через $\rho_R(z) = \rho_R(z; \mathfrak{M})$ и $\bar{\rho}_R(\tilde{z}) = \bar{\rho}_R(\tilde{z}; \mathfrak{M})$ для всех $z \in C_1$ и $\tilde{z} \in C_R$ — величины

$$\rho_R(z) = \min_{z' \in C_R} |z' - z|, \quad \bar{\rho}_R(\tilde{z}) = \min_{z' \in C_1} |z' - \tilde{z}|. \tag{2.1}$$

Условимся говорить, что множество $\mathfrak{M}$ обладает свойством $(A^*)$, если существует число $\bar{R} = \bar{R}(\mathfrak{M}) > 1$ такое, что

1) каждая из линий уровня $C_R (1 \leqslant R \leqslant \bar{R})$ может быть разбита на конечное число $N = N(\mathfrak{M})$ дуг $C_R^{(1)}, C_R^{(2)}, \ldots, C_R^{(N)}$, на каждой из которых длина $s(z_1, z_2)$ частичной дуги между произвольными двумя точками $z_1$ и $z_2$ не превышает расстояния между этими точками, умноженного на некоторое постоянное число $A_4 = A_4(\mathfrak{M})$:

$$s(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} |dz| \leqslant A_4 |z_2 - z_1|, \quad z, z_1, z_2 \in C_R^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, N); \tag{2.2}$$

2) для всех $z \in C_1$ и $\tilde{z} \in C_R$ при $1 < R < R_1 \leqslant \bar{R}$ выполняются соответственно неравенства

$$\begin{aligned} &\text{а) } |\varphi^{-}[R\varphi(z)] - z| \leqslant A_5 \rho_R(z), \quad \text{б) } \left|\tilde{z} - \varphi^{-}\left[\frac{1}{R}\varphi(\tilde{z})\right]\right| \leqslant A_5 \bar{\rho}_R(\tilde{z}), \\ &\text{в) } A_5' \rho_{R_1}(z) \leqslant |\varphi^{-}[R_1 \varphi(\tilde{z})] - \tilde{z}| \leqslant A_5 \rho_{R_1}(z), \quad z = \varphi^{-}\left[\frac{\varphi(\tilde{z})}{R}\right]^{**}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $A_5 = A_5(\mathfrak{M})$ и $A_5' = A_5'(\mathfrak{M})$ — постоянные.

Назовем множеством типа $(A^{**})$ всякое множество $\mathfrak{M}$, которое обладает свойствами $(A^*)$ и, кроме того, удовлетворяет условиям ***:

3) на всякой дуге $z_1 z_2$ границы $C_1$ данного множества найдется по крайней мере одна точка $z^*$ такая, что при всех $z \in z_1 z_2$ и $1 < R \leqslant \bar{R}$

---

* При $R = 1$ получаем границу $C_1$ множества $\mathfrak{M}$.

** Отметим, что точка $\varphi^{-}[R_1 \varphi(\tilde{z})] \in C_{R \cdot R_1}$.

*** Примеры множеств типа $(A^{**})$ даются ниже в теоремах 2.2, 2.3, 2.4.

будет иметь место неравенство

$$\rho_R(z) \leqslant A_6 \rho_R(z^*), \tag{2.4}$$

где $A_6 = A_6(C_1)$ — постоянная, зависящая только от границы $C_1$;

4) если $z_0$ — произвольная точка кривой $C_1$, то при каждом $L \geqslant 1$ ($L = \text{const}$) и для всех $1 < R \leqslant \overline{R}$ во всех точках $z$, принадлежащих той же части $C_1^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, N$), что и точка $z_0$, и находящихся в круге радиуса $L\rho_R(z_0)$ с центром в точке $z_0$, будем иметь:

$$A_7' \rho_R(z_0) < \rho_R(z) < A_7 \rho_R(z_0); \tag{2.5}$$

где $A_7'$ и $A_7$ — постоянные, зависящие только от вида кривой $C_1$ и от числа $L$.

Не вдаваясь в анализ необходимости или независимости приведенных условий, отметим, что они обеспечивают определенную равномерность в поведении линий уровня в достаточно малой окрестности любой точки $z \in C_1$. В частности, неравенства а) и б) условия 2) показывают, что $\rho_R(z)$ и $\bar{\rho}_R(\tilde{z})$ являются величинами того же порядка, что и величина $|\tilde{z} - z|$, если только при конформном отображении $w = \varphi(z)$ образы точек $z \in C_1$ и $\tilde{z} \in C_R$ находятся на одном и том же радиусе так, что $\tilde{z} = \varphi^{-}[R\varphi(z)]$ и $z = \varphi^{-}\left[\frac{1}{R}\varphi(\tilde{z})\right]$. Этот факт будет иметь для нас большое значение, ибо, не в пример функциям $\rho_R(z)$ и $\bar{\rho}_R(\tilde{z})$, функция $\tilde{z} - z = \varphi^{-}[R\varphi(z)] - z$ является аналитической во всех точках $z$, расположенных вне $\mathfrak{M}$.

Условие 4) показывает, что если $z_0 \in C_1$, то в окрестности этой точки радиуса $L\rho_R(z_0)$ ($L = \text{const}$) величина $\rho_R(z)$ может измениться, например уменьшиться, только в конечное число раз.

Целью этого параграфа является установление того факта, что существуют конкретные важные классы множеств, являющихся множествами типа ($A^{**}$).

2°. Нам потребуется следующее обобщение линий уровня $C_R$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное (не обязательно ограниченное) замкнутое множество с односвязным дополнением $G$, и пусть $a$ — какая-нибудь точка из $G$: $a \in G$ (в частности, $a$ может равняться $\infty$). Тогда если какая-нибудь функция $\varphi(z) = \varphi(z; \mathfrak{M}; a)$ отображает $G$ на внешность единичного круга так, что $\varphi(a) = \infty$ (этими условиями функция $\varphi(z)$ с точностью до множителя $e^{i\alpha}$, $\alpha \geqslant 0$, определяется, очевидно, однозначно), то линии, в точках $z$ которых имеет место равенство $|\varphi(z)| = R$, будем называть также линиями уровня множества $\mathfrak{M}$ и обозначать через $C_R(\mathfrak{M}; a)$ или же $C_{R,a} = C_R$.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА 2.1. *Пусть $K$ — множество точек плоскости $z$, заключенных между осью $OX$ и лучом, выходящим из начала и образующим с $OX$ угол $(2-\beta)\pi$, где $0 < \beta < 2$. Тогда если $\varphi(z)$ конформно отображает внешность $K$ на внешность единичного круга так, что $\varphi\left(e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}\right) = \infty$, то линии $C_R\left(K; e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}\right)$, $R \geqslant 1$, в некоторой окрестности начала удовлетворяют всем требованиям, налагаемым на линии уровня множеств типа ($A^{**}$) [т. е. условиям 1) — 4)].*

Доказательство. При помощи преобразования $\zeta = z^{\frac{1}{\beta}}$ внешность множества $K$ переходит в нижнюю полуплоскость плоскости $\zeta$ *, а при помощи преобразования $w = -\frac{\zeta - i}{\zeta + i}$ полученная полуплоскость переходит во внешность единичного круга. При втором из этих преобразований прообразами окружностей $|w| = R\,(R > 1)$ в плоскости $\zeta$ будут, как легко проверить, окружности

$$\zeta = -\frac{R^2+1}{R^2-1}\,i + \frac{2R}{R^2-1}\,e^{i\left[\frac{\pi}{2} - t\,(R-1)\right]}, \quad t \in \left[0,\ \frac{2\pi}{R-1}\right], \tag{2.6}$$

каждая из которых имеет радиус, равный

$$\frac{2R}{R^2-1} = \frac{1}{R-1} + \frac{1}{R+1} \approx \frac{1}{R-1},$$

и отстоит от начала при $t = 0$ на расстоянии

$$\frac{R-1}{R+1} \approx \frac{R-1}{2}.$$

В плоскости $z$ прообразами окружностей $|w| = R$ будут при $t \in \left[0, \frac{\pi}{R-1}\right]$ линии $\Big($позже мы увидим, что эти линии действительно являются линиями уровня $C_R\left(K;\ e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}\right)\Big)$

$$z = |\zeta|^\beta e^{-i\beta \operatorname{arc\,tg} \frac{R^2+1-2R\cos(R-1)t}{2R\sin(R-1)t}}, \tag{2.7}$$

или, в параметрическом виде,

$$x = |\zeta|^\beta \cos\tau, \quad y = -|\zeta|^\beta \sin\tau, \tag{2.7'}$$

где

$$|\zeta| = \sqrt{\frac{R^4 + 6R^2 + 1 - 4R\,(R^2+1)\cos(R-1)\,t}{(R^2-1)^2}} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{R-1}{R+1}\right)^2 + 8R\,(R^2+1)\,\frac{\sin^2(R-1)\,\frac{t}{2}}{(R^2-1)^2}}, \tag{2.8}$$

$$\tau = \beta \operatorname{arc\,tg} \frac{R^2+1-2R\cos(R-1)\,t}{2R\sin(R-1)\,t} = \beta \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{(R-1)^2}{2R\sin(R-1)\,t} + \operatorname{tg}\frac{R-1}{2}\,t\right], \tag{2.9}$$

и, значит, при $t \in [0,1]$ и $R \to 1$

$$|\zeta| = O\,[(R-1) + t], \quad \tau = \dot{O}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{R-1}{t}\right) = \dot{O}\left(\frac{R-1}{t+R-1}\right); \tag{2.10}$$

при этом здесь и дальше мы будем обозначать через $\dot{O}(\alpha)$ положительную величину, которая равна $O(\alpha)$, но отлична от $o(\alpha)$, т. е.

$$A_8\alpha \leqslant \dot{O}(\alpha) \leqslant A_9\,\alpha,$$

где $A_8 > 0$ и $A_9 > 0$.

---

* Если только считать, что для всех $z$, которые находятся вне $K$, $-\beta\pi < \arg z < 0$.

Отсюда после некоторых довольно громоздких, но не сложных вычислений, получаем:

$$\frac{d|\zeta|}{dt}=\frac{2R(R^2+1)\sin(R-1)t}{(R+1)\sqrt{R^4+6R^2+1-4R(R^2+1)\cos(R-1)t}},$$
$$\frac{d\tau}{dt}=\beta\frac{2R(R-1)[2R-(R^2+1)\cos(R-1)t]}{R^4+6R^2+1-4R(R^2+1)\cos(R-1)t}, \tag{2.11}$$

$$\frac{dx}{dt}=\beta|\zeta|^{\beta-2}\frac{2R}{(R+1)(R^2-1)}\Big\{(R^2+1)\sin(R-1)t\cos\tau+ + [(R^2+1)\cos(R-1)t-2R]\sin\tau\Big\}, \tag{2.11'}$$

$$\frac{dy}{dt}=\beta|\zeta|^{\beta-2}\frac{2R}{(R+1)(R^2-1)}\{[(R^2+1)\cos(R-1)t-2R]\cos\tau- -(R^2+1)\sin(R-1)t\sin\tau\}, \tag{2.11''}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left[\cos(R-1)t-\frac{2R}{R^2+1}\right]\cos\tau-\sin(R-1)t\sin\tau}{\sin(R-1)t\cos\tau+\left[\cos(R-1)t-\frac{2R}{R^2+1}\right]\sin\tau}, \tag{2.11'''}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{\{\sin(R-1)t\cos\tau+[\ldots]\sin\tau\}^2}\Bigg\{\bigg(\sin(R-1)t\cos\tau+ +\left[\cos(R-1)t-\frac{2R}{R^2+1}\right]\sin\tau\bigg)\bigg(\left[\cos(R-1)t-\frac{2R}{R^2+1}\right](-\sin\tau)\frac{d\tau}{dt}- -\sin(R-1)t\cos\tau\frac{d\tau}{dt}-(R-1)\sin(R-1)t\cos\tau- -(R-1)\cos(R-1)t\sin\tau\bigg)-\bigg(\left[\cos(R-1)t-\frac{2R}{R^2+1}\right]\cos\tau- -\sin(R-1)t\sin\tau\bigg)\bigg(-\sin(R-1)t\sin\tau\frac{d\tau}{dt}+ +\left[\cos(R-1)t-\frac{2R}{R^2+1}\right]\cos\tau\frac{d\tau}{dt}+(R-1)\cos(R-1)t\cos\tau- -(R-1)\sin(R-1)t\sin\tau\bigg)\Bigg\}=$$

$$=\frac{1}{\{\sin(R-1)t\cos\tau+\ldots\}^2}\left\{\left[-1+\frac{4R}{R^2+1}\cos(R-1)t- -\frac{4R^2}{(R^2+1)^2}\right]\frac{d\tau}{dt}-(R-1)\left[1-\frac{2R}{R^2+1}\cos(R-1)t\right]\right\}=$$

$$=\frac{R-1}{\{\sin(R-1)t\cos\tau\ldots\}^2(R^2+1)^2}\{2\beta R[(R^2+1)\cos(R-1)t-2R]- -(R^2+1)^2+2R(R^2+1)\cos(R-1)t\}=$$

$$=\frac{R-1}{\{\sin(R-1)t\cos\tau\ldots\}^2(R^2+1)^2}\cdot\frac{(R^2-1)^2}{2}[\beta-1-(\beta+1)|\zeta|^2],$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(R-1)(R^2-1)^2(\beta+1)}{2\left\{\sin(R-1)t\cos\tau+\left[\cos(R-1)t-\frac{2R}{R^2+1}\right]\sin\tau\right\}^2(R^2+1)^2}\times \times\left[\frac{\beta-1}{\beta+1}-|z|^{\frac{2}{\beta}}\right]. \tag{2.12}$$

Воспользуемся полученными соотношениями сначала для качественного исследования кривой (2.7′).

а) Так как в силу (2.7) — (2.9) $z \to e^{-i\beta \frac{\pi}{2}}$ при $R \to \infty$, то линии (2.7′) действительно являются линиями уровня $C_R\left(K;\ e^{-i\beta \frac{\pi}{2}}\right)$.

б) В силу равенства (2.12), при $\beta < 1$ производная $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ является отрицательной при всех $t$. Если же $\beta > 1$, то эта производная будет положительной при $|z| < \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right)^{\frac{\beta}{2}}$ и отрицательной при $|z| > \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1}\right)^{\frac{\beta}{2}}$, или, что то же самое, производная $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ будет положительной при $|\zeta| < \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta + 1}}$ и отрицательной при $|\zeta| > \sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta + 1}}$.

Случай $\beta = 1$ мы не будем рассматривать, ибо в этом случае отображение $w = \varphi(z)$ является дробно линейным и все утверждения леммы проверяются без труда.

в) Из (2.11‴), принимая во внимание (2.9), выводим, что

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0} = \operatorname{ctg} \frac{\beta\pi}{2} \begin{cases} > 0, & \text{если } \beta < 1, \\ < 0, & \text{если } \beta > 1. \end{cases}$$

г) Если $\beta > 1$ и $t < \sqrt{\frac{2}{R^2 + 1}}$, то

$$(R^2 + 1) \cos (R - 1)\, t - 2R = (R - 1)^2 - 2 (R^2 + 1) \sin^2 \frac{R - 1}{2} t >$$

$$> (R - 1)^2 - \frac{R^2 + 1}{2} (R - 1)^2 t^2 > 0.$$

Поэтому если $t$ настолько мало ($t > 0$), что [см. (2.9)]

$$\tau = \beta \operatorname{arc\,tg} \frac{R^2 + 1 - 2R \cos (R - 1)\, t}{2R \sin (R - 1)\, t} \geqslant \frac{\pi}{2},$$

то первое слагаемое в фигурных скобках правой части (2.11″) будет $\leqslant 0$ и, следовательно, в этом случае $\frac{dy}{dt} < 0$.

Если же

$$\tau = \beta \operatorname{arc\,tg} \frac{R^2 + 1 - 2R \cos (R - 1)\, t}{2R \sin (R - 1)\, t} < \frac{\pi}{2}$$

и $\tau > 0$, то, учитывая, что при всех $\alpha > 0$, $\beta > 1$, $\alpha\beta < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $\operatorname{tg} \beta\alpha > \beta \operatorname{tg} \alpha$, в силу (2.9), получим:

$$[(R^2 + 1) \cos (R - 1)\, t - 2R] \cos \tau - (R^2 + 1) \sin (R - 1)\, t \sin \tau <$$

$$< \cos \tau \left\{(R^2 + 1) \cos (R - 1)\, t - 2R - (R^2 + 1)\, \beta\, \frac{R^2 + 1 - 2R \cos (R - 1)\, t}{2R}\right\} =$$

$$= \cos\tau\,(R^2+1)\left\{1+\beta-\frac{\beta(R^2+1)}{2R}-\frac{2R}{R^2+1}-\right.$$

$$\left.-(1+\beta)\,2\sin^2\frac{R-1}{2}t\right\} < \cos\tau\,(R^2+1)\left\{\frac{(R-1)^2}{R^2+1}-\beta\frac{(R-1)^2}{2R}\right\} < 0.$$

Следовательно, и в этом случае $\frac{dy}{dt} < 0$.

Таким образом, если $\beta > 1$, то, например, при всех $t \in (0,1]$ имеем $\frac{dy}{dt} < 0$, т. е. $y$ убывает при возрастании $t$.

д) Докажем, что $\frac{dx}{dt} > 0$ при всех $t \in (0,1]$ и $\beta \in (0,2)$ *. Предположим сначала, что $\beta > 1$. Рассуждая от противного, обозначим через $t'$ первую, а через $t''\,(t'' \geqslant t')$ — последнюю точку $t \in (0,1]$, в которой $\frac{dx}{dt} = 0$. Так как при $\beta > 1$ и $t \in (0,1]$, в силу г), $\frac{dy}{dt} < 0$, то мы найдем:

$$\lim_{t\to t'-0}\frac{dy}{dx} = \lim_{t\to t''+0}\frac{dy}{dx} = -\infty.$$

Учитывая, что при $t = 1$, в силу (2.10), $\tau = O(R-1)$, заключаем, что $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=1} > 0$ и, следовательно, $t'' < 1$. Отсюда, принимая во внимание б), найдем, что производная $\frac{dy}{dx}$ должна вначале возрастать (ибо вначале $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) > 0$), затем, при подходе к точке $t'$, — убывать** и, наконец, при отходе от точки $t''$ — опять возрастать **. Мы пришли к противоречию, ибо, согласно б), для случая $\beta > 1$ производная $\frac{dy}{dx}$ на отрезке $(0,1]$ только один раз переходит от возрастания к убыванию ***.

Пусть теперь $\beta < 1$. Представив выражение в фигурных скобках (2.11′) в виде:

$$(R^2+1)\sin(R-1)t\cos\tau + [(R^2+1)\cos(R-1)t - 2R]\sin\tau =$$
$$= (R^2+1)\sin[\tau+(R-1)t] - 2R\sin\tau =$$
$$= (R^2+1)\sin[\tau+(R-1)t] - (R^2+1)\sin\tau + (R-1)^2\sin\tau =$$
$$= 2(R^2+1)\cos\left[\tau+(R-1)\frac{t}{2}\right]\sin\frac{R-1}{2}t + (R-1)^2\sin\tau$$

и учитывая, что $\tau = \beta\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ при $t = 0$ и что $\tau < \beta\frac{\pi}{4}$ уже при $t > R-1$, мы видим, что и в этом случае $\frac{dx}{dt} > 0$ при всех $t \in (0,1]$.

---

* При $t \to 0$ и при $t = 1$ $\frac{dx}{dt} > 0$ в силу (2.11′) и (2.9).

** По крайней мере в некоторых точках.

*** Следует иметь в виду, что величина $|\zeta|$ при $t \in (0,1]$, в силу (2.8), монотонно возрастает.

Таким образом, при всяком $\beta \in (0,2)$ и при всех $t \in (0,1]$ $\frac{dx}{dt} > 0$, т. е. абсцисса $x$ кривой (2.7′) монотонно растет при возрастании $t$ от 0 до 1.

е) Из б) и д) следует, что если $\beta < 1$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} < 0$$

при всех $t \in (0,1]$, а если $\beta > 1$, то $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ при $|z| < \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta}{2}}$ и $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ при $|z| > \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta}{2}}$ и $t \in (0,1]$.

Таким образом, если $\beta < 1$, то кривая (2.7′) является вогнутой при всех $t \in (0,1]$, а если $\beta > 1$, то эта кривая является выпуклой при $|z| < \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta}{2}}$ и вогнутой при $|z| > \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta}{2}}$.

ж) В некоторой окрестности точки $t = 0$, не зависящей от $R$ (лишь бы $R$ было достаточно близко к 1), при возрастании $t$ $(t > 0)$ $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ монотонно убывает.

В самом деле, если $\beta > 1$, то

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0} = \operatorname{ctg} \beta \frac{\pi}{2} < 0$$

и, кроме того, при $|z| < \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\right)^{\frac{\beta}{2}}$ производная $\frac{dy}{dx}$ монотонно возрастает при возрастании $t$, оставаясь при этом отрицательной, ибо при $\beta > 1$, в силу г) и д), производная $\frac{dy}{dt} < 0$, а $\frac{dx}{dt} > 0$.

Если же $\beta < 1$, то, принимая во внимание тот факт, что кривая (2.7′) при $t \in (0,1]$ является вогнутой и, следовательно, $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ сначала монотонно убывает, а затем, обратившись, быть может, в нуль в некоторой точке, начинает вместе с $|y| = |y(t)|$ монотонно возрастать, а также учитывая, что в силу (2.7′) и (2.10)

$$|y(1)| = O(R-1), \quad |y(t)| = \dot{O}\left\{(R-1+t)^{\beta} \frac{R-1}{t+R-1}\right\} =$$
$$= (R-1)\dot{O}\left[(t+R-1)^{\beta-1}\right],$$

мы заключаем, что в некоторой окрестности точки $t = 0$ при всех $t > 0$

$$|y(t)| > |y(1)|.$$

Отсюда и следует, что при всех $t$ из этой окрестности выражение $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ монотонно убывает.

з) Касательная к кривой (2.7′), имеющая при $t = 0$ угловой коэффициент, равный $\operatorname{ctg} \frac{\beta\pi}{2}$, является, как легко проверить, перпендикуляр-

ной к биссектрисе множества $K$, которая делит эту кривую, очевидно, на две симметричные части.

Общая картина поведения кривых (2.7′) при разных $R$ $(1 < R_1 < < R_2 < \ldots < \infty)$ и $\beta$ изображена на рисунках 1 и 2.

Здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать только часть кривой (2.7′), расположенную непосредственно под осью абсцисс и отвечающую достаточно малым значениям $t > 0$.

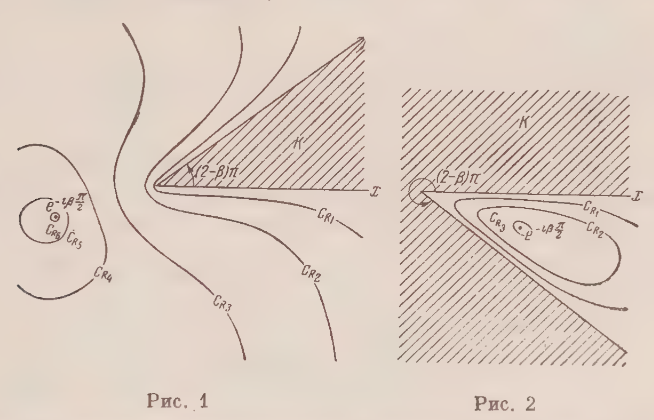



Рис. 1 Рис. 2

Пользуясь полученными свойствами кривой (2.7′), приступим к доказательству леммы.

Так как, согласно свойству ж), в некоторой окрестности нулевой точки

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leqslant \left|\frac{dy(t)}{dx}\right|_{t=0} = \left|\operatorname{ctg}\frac{\beta\pi}{2}\right|,$$

то

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \leqslant \operatorname{cosec}\frac{\beta\pi}{2}$$

и, следовательно, при $\beta \neq 1$ длина дуги кривой (2.7′) между двумя произвольными точками этой кривой не превышает расстояния между этими точками, умноженного на $\operatorname{cosec}\beta\frac{\pi}{2}$, т. е. кривая (2.7′) в окрестности начала удовлетворяет условию 3) для множеств типа $(A^{**})$.

Далее, так как $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ монотонно убывает, то кривая (2.7′) в некоторой окрестности начала удовлетворяет условию 3) для множеств типа $(A^{**})$.

Докажем, что для множества $K$ в некоторой окрестности начала выполняется условие 4) для множеств типа $(A^{**})$.

Действительно, положим $L' = 10L\,(L \geqslant 1)$ и, предположив $R$ достаточно близким к единице, например $1 < R < \frac{L'+1}{L'}$, рассмотрим два таких случая:

а) пусть $t \geqslant L'(R-1)$, $t \leqslant 1$ и $t$ находится в окрестности, где имеет место свойство ж). Так как при $t \geqslant L'(R-1)$, $t \leqslant 1$, в силу (2.9) и в силу того, что $R\sin(R-1)t \geqslant (R-1)t$,

$$\tau = \beta \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{(R-1)^2}{2R\sin(R-1)t} + \operatorname{tg}\frac{R-1}{2}t\right] \leqslant \beta \operatorname{arc\,tg}\frac{(R-1)^2}{2R\sin(R-1)t} +$$

$$+\beta\frac{R-1}{2}t\leqslant\beta\frac{(R-1)^2}{2R\sin(R-1)t}+\frac{\beta}{2L'}\leqslant\frac{\beta}{L'}<\frac{2}{L'},$$

то, вследствие (2.11″) и ж), получаем.

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|\leqslant\left|\frac{\left\{\frac{(R-1)^2}{R^2+1}-2\sin^2\left[\frac{L'}{2}(R-1)^2\right]\right\}\cos\tau-\sin[L'(R-1)^2]\sin\tau}{\sin[L'(R-1)^2]\cos\tau+\left\{\frac{(R-1)^2}{R^2+1}-2\sin^2\left[\frac{L'}{2}(R-1)^2\right]\right\}\sin\tau}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\frac{(R-1)^2}{2}+L'(R-1)^2\sin\tau}{\frac{2}{\pi}L'(R-1)^2\cos\tau}<\frac{2{,}5\pi}{2L'\cos\tau}<\frac{5\pi}{4\left(1-\frac{1}{25}\right)L'}<\frac{5}{L'}=\frac{1}{2L}. \quad (2.13)$$

Поэтому кривая (2.7′) во всех точках $\widetilde{z}$ *, соответствующих значениям $t\geqslant L'(R-1)$ (но не очень большим), наклонена к оси абсцисс под углом $\leqslant\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2L}$.

б) Пусть $t\leqslant L'(R-1)$, $t>0$. Так как в силу (2.8) и (2.9)

$$\left.\begin{aligned}&|\zeta|=\dot{O}(R-1),\\&A_{10}<\tau<\beta\frac{\pi}{2}\ (A_{10}-\text{постоянная}>0),\\&|\widetilde{z}|=|\zeta|^\beta=\dot{O}[(R-1)^\beta],\end{aligned}\right\}\quad (2.14)$$

то, вследствие (2.7′), найдутся две положительные постоянные $A_{11}$ и $A_{12}$ такие, что для всех $\widetilde{z}(t)=\widetilde{x}(t)+i\widetilde{y}(t)$ при $t\in[0,\ L'(R-1)]$ будем иметь:

$$A_{11}(R-1)^\beta\leqslant\min_{0\leqslant t\leqslant L'(R-1)}|\widetilde{y}(t)|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant L'(R-1)}|\widetilde{y}(t)|\leqslant A_{12}(R-1)^\beta. \quad (2.15)$$

Из этого неравенства и результата, полученного в случае а), легко заключаем, что действительно в некоторой (фиксированной) окрестности начала величина $\rho_R(z)$ в окрестности $U(z_0;\ L\rho_R(z_0))$ произвольно взятой точки $z_0\in C_1$ не может изменяться больше, чем в конечное число раз (точки $z$ и $z_0$ находятся на оси абсцисс), что и требовалось доказать.

Наконец, установим, что для множества $K$ в некоторой окрестности начала выполняется условие 2) для множеств типа $(A^{**})$.

Убедимся сначала, что если $R\leqslant\frac{11}{10}$ и $t\in(0,1]$, то произвольно взятой точке $\widetilde{z}$ на кривой $C_R(K;\ e^{-i\beta\frac{\pi}{2}})$, $\widetilde{z}=|\zeta|^\beta e^{-i\tau}$ будет отвечать (на оси абсцисс) точка $z=\varphi^-\left[\frac{1}{R}\varphi(\widetilde{z})\right]$, отстоящая от точки $t^\beta$ не больше, чем на $3(R-1)t^\beta$:

$$|z-t^\beta|\leqslant 3(R-1)t^\beta. \quad (2.16)$$

Действительно, точки $\widetilde{z}$ и $z$, согласно определению, являются при обратном преобразовании $z=\varphi^-(w)$ внешности единичного круга на внешность $K$ образами точек $\widetilde{w}$ и $w$, которые находятся на одном и том

---

* Здесь мы точки кривой (2.7′) обозначаем через $\widetilde{z}$, чтобы отличить их от точек $z$ границы множества $K$.

же радиусе (и, следовательно, на прямой, проходящей через начало) и расположены, соответственно, на окружностях $|w| = R$ и $|w| = 1$.

Точкам $\widetilde{w}$ и $w$ в плоскости $\zeta$, в силу преобразования $w = -\frac{\zeta - i}{\zeta + i}$, соответствует точка $\widetilde{\zeta}$, определяемая при данном $t$ формулой (2.6), и точка $\zeta$, которая находится на пересечении окружности, проходящей через точки $i$, $-i$ и $\widetilde{\zeta}$, с осью абсцисс.

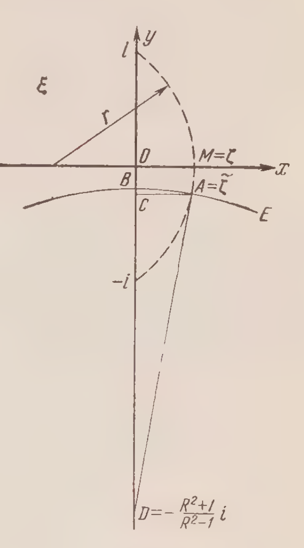


Рис. 3

Для доказательства неравенства (2.16) проверим сначала, что

$$|\zeta - t| \leqslant (R-1)\,t. \qquad (2.16')$$

Проведем в плоскости $\zeta$ окружность (2.6) с центром в точке $D = -\frac{R^2+1}{R^2-1}i$ и радиусом, равным $AD = \frac{2R}{R^2-1}$ (см. рис. 3). Так как в силу (2.6) параметру $t$ соответствует угол $ADC$, равный $(R-1)\,t$, и так как $\overline{BO} = \frac{R-1}{R+1}$, то

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AC}^2}{\left(\frac{4R}{R^2-1} - \overline{BC}\right)} = \frac{4R^2 \sin^2 (R-1)\,t}{(R^2-1)^2\left(\frac{4R}{R^2-1} - \overline{BC}\right)} \approx \frac{1}{2}(R-1)\,t^2, \qquad (\alpha)$$

$$|\overline{AC} - t| = \left|\frac{2R}{R+1}\,\frac{\sin (R-1)\,t}{R-1} - \frac{2R}{R+1}t + \frac{2R}{R+1}t - t\right| \leqslant \frac{3}{5}(R-1)\,t, \qquad (\beta)$$

$$\overline{OM} \approx \overline{AC} \approx t, \quad \overline{OM}\,(2r - \overline{OM}) = 1, \quad r \geqslant \frac{1}{2\,\overline{OM}} \approx \frac{1}{2t},$$

$$\delta = \overline{OM} - \overline{AC} = \frac{(\overline{OB} + \overline{BC})^2}{(2r - \delta)} \leqslant 4\,(R-1)^2\,t \leqslant \frac{2}{5}(R-1)\,t. \qquad (\gamma)$$

Из ($\beta$) и ($\gamma$) вытекает, что

$$|\zeta - t| = |\overline{MO} - t| \leqslant |\overline{MO} - \overline{AC}| + |\overline{AC} - t| \leqslant (R-1)\,t^{\beta},$$

откуда следует, что

$$|z - t^{\beta}| = |\overline{MO}^{\beta} - t^{\beta}| = |\overline{MO} - t|\,\beta\,|t + \theta\,(\overline{MO} - t)|^{\beta-1} < 3\,(R-1)\,t^{\beta},$$

где $0 < \theta < 1$; неравенство (2.16) доказано.

Чтобы убедиться в выполнении неравенств а) и б) условия 2) для множеств типа ($A^{**}$), нам нужно доказать, что величины

$$\rho_R(z), \quad \bar{\rho}_R(\widetilde{z}) \text{ и } |\widetilde{z} - z| = |\varphi^{-}[R\varphi(z)] - z| = \left|\widetilde{z} - \varphi^{-}\left[\frac{1}{R}\varphi(\widetilde{z})\right]\right|$$

могут отличаться друг от друга не больше, чем на положительные множители, ограниченные сверху и снизу положительными постоянными равномерно по всем $z \in C_1$ и $R > 1$.

Возьмем какие-нибудь две точки $z \in C_1(K;\ e^{-i\beta\frac{\pi}{2}})$ и $\widetilde{z} = \varphi^{-}[R\varphi(z)] \in C_R(K;\ e^{-i\beta\frac{\pi}{2}})$ и обозначим через $\zeta$ и $\widetilde{\zeta}$ точки, соответствующие в плоскости $\zeta$ точкам $z$ и $\widetilde{z}$:

$$\zeta = z^{\frac{1}{\beta}} > 0, \quad \widetilde{\zeta} = \widetilde{z}^{\frac{1}{\beta}}.$$

Тогда, обозначая через $\gamma = \gamma(\zeta, \widetilde{\zeta})$ произвольную жорданову дугу, соединяющую точки $\zeta$ и $\widetilde{\zeta}$, а через $l = l(\zeta, \widetilde{\zeta}')$ и $\bar{l} = \bar{l}(\zeta', \widetilde{\zeta})$— произвольные жордановы дуги, соединяющие соответственно точку $\zeta$ с какой-нибудь точкой $\widetilde{\zeta}' \in \breve{CE}$ и точку $\widetilde{\zeta}$ с какой-нибудь точкой $\zeta' \in OX$ (см. рис. 3), очевидно, будет иметь:

$$|\widetilde{z} - z| = \min_{\gamma} \int_{\gamma(\zeta, \widetilde{\zeta})} \beta |\zeta|^{\beta-1} |d\zeta|, \quad \rho_R(z) = \min_{l} \int_{l(\zeta, \widetilde{\zeta}')} \beta |\zeta|^{\beta-1} |d\zeta|,$$
$$\bar{\rho}_R(\widetilde{z}) = \min_{\bar{l}} \int_{\bar{l}(\zeta', \widetilde{\zeta})} \beta |\zeta|^{\beta-1} |d\zeta|. \tag{2.17}$$

Так как при $R$, достаточно близких к 1 (например, при $1 < R < \frac{11}{10}$), и $t \in (0,1)$ каждое из расстояний от точки $M = \zeta$ до дуги $\breve{BE}$, с одной стороны, и от точки $A = \widetilde{\zeta}$ до прямой $OX$, с другой стороны, превышает число $h$, равное половине длины дуги $\breve{AM}$, то мы легко получим:

а) если $\overline{OM} > 2h$ и $\beta > 1$, то

$$\left.\begin{aligned} \rho_R(z) &= \beta \min_{l} \int_{l(\zeta, \widetilde{\zeta}')} |\zeta|^{\beta-1} ds \\ \bar{\rho}_R(\widetilde{z}) &= \beta \min_{\bar{l}} \int_{\bar{l}(\zeta', \widetilde{\zeta})} |\zeta|^{\beta-1} ds \end{aligned}\right\} \geqslant \beta \int_{\zeta-h}^{\zeta} s^{\beta-1} ds > \frac{\beta}{2} \min_{\gamma} \int_{\gamma(\zeta, \widetilde{\zeta})} \left|\frac{\zeta}{2}\right|^{\beta-1} ds > \frac{1}{4} |\widetilde{z} - z|;$$

а') если $\overline{OM} > 2h$ и $\beta < 1$, то

$$\left.\begin{aligned} \rho_R(z) &= \beta \min_{l} \int_{l(\zeta, \widetilde{\zeta}')} |\zeta|^{\beta-1} ds \\ \bar{\rho}_R(\widetilde{z}) &= \beta \min_{\bar{l}} \int_{\bar{l}(\zeta', \widetilde{\zeta})} |\zeta|^{\beta-1} ds \end{aligned}\right\} \geqslant \beta \int_{|\widetilde{\zeta}|}^{|\widetilde{\zeta}|+h} s^{\beta-1} ds > \frac{1}{2} \beta \min_{\gamma} \int_{\gamma(\zeta, \widetilde{\zeta})} |2\zeta|^{\beta-1} ds > \frac{1}{4} |\widetilde{z} - z|;$$

б) если $\overline{OM} \leqslant 2h$, то $\overline{OM} < R - 1$, ибо в этом случае, в силу ($\alpha$),

$$\overline{BC} \approx \frac{1}{2}(R-1)t^2 < \frac{R-1}{2}, \quad \overline{BO} = \frac{R-1}{R+1} < \frac{R-1}{2};$$

следовательно, $|\zeta| = O(R-1)$ и

$$\left.\begin{aligned} \rho_R(z) &= \beta \min_{l} \int\limits_{l(\zeta, \widetilde{\zeta}')} |\zeta|^{\beta-1} ds \\ \bar{\rho}_R(\widetilde{z}) &= \beta \min_{\bar{l}} \int\limits_{\bar{l}(\zeta', \widetilde{\zeta})} |\zeta|^{\beta-1} ds \end{aligned}\right\} = \dot{O}[(R-1)^\beta] > A_{13} |\widetilde{z} - z|,$$

где $A_{13}$ — некоторая постоянная $> 0$. Так как неравенства

$$\rho_R(z) \leqslant |\widetilde{z} - z|$$

и

$$\bar{\rho}_R(\widetilde{z}) \leqslant |\widetilde{z} - z|$$

очевидны, то

$$\rho_R(z) = \dot{O}(|\widetilde{z} - z|)$$

и

$$\bar{\rho}_R(\widetilde{z}) = \dot{O}(|\widetilde{z} - z|)$$

и, значит, также

$$\rho_R(z) = \dot{O}[\bar{\rho}_R(\widetilde{z})].$$

Неравенства в) в условии 2) для множеств типа $(A^{**})$ доказываются аналогично. Лемма полностью доказана.

Учитывая, что в силу (α), (β) и (2.10)

$$|\widetilde{z} - z| = \min_{\gamma} \int\limits_{\gamma(\zeta, \widetilde{\zeta})} \beta |\zeta|^{\beta-1} ds =$$

$$= \dot{O}[(t + R - 1)^{\beta-1}]\, \dot{O}\left[\frac{R-1}{R+1} + (R-1)t^2\right] = (R-1)\, \dot{O}\left[(t + R - 1)^{\beta-1}\right],$$

а в силу (2.16) $|z| = \dot{O}(|t|^\beta)$ и, следовательно, $t = \dot{O}(|z|^{\frac{1}{\beta}})$, и принимая во внимание, что при произвольных $a > 0$, $b > 0$ и $s > 0$ имеет место [см., например, ([8]), стр. 625] соотношение:

$$(a + b)^s = \dot{O}(a^s + b^s),$$

мы заключаем, что

$$\rho_R(z) = \dot{O}(|\widetilde{z} - z|) = (R-1)\, \dot{O}\left\{[|z| + (R-1)^\beta]^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right\}.$$

Поэтому, полагая в лемме $\alpha = 2 - \beta$, мы получаем

Следствие 2.1. *Пусть $K$ — множество точек плоскости $z$, заключенных между осью $OX$ и лучом, выходящим из начала и образующим с $OX$ угол $\alpha\pi$, где $0 < \alpha < 2$. Тогда в некоторой окрестности начала для*

*всех* $z$, *принадлежащих границе множества* $K$, *при всех* $R > 1$ *имеет место соотношение*

$$\rho_R(z) = (R-1)\, O\left\{[\,|z| + (R-1)^{2-\alpha}]^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}\right\}. \tag{2.18}$$

3°. В этом пункте мы покажем, что все свойства множеств типа $(A^{**})$ остаются инвариантными при конформном отображении внешности $\mathfrak{M}$, если только функция $\psi(z)$, осуществляющая конформное отображение, имеет отличную от нуля производную $\psi'(z)$ в точках границы множества $\mathfrak{M}$. Точнее, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть* $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ — *две замкнутые (вообще говоря, неограниченные) области с односвязными непустыми дополнениями* $G$ *и* $G_1$ *и с границами, состоящими из конечного числа жордановых дуг, каждая из которых имеет ограниченную кривизну, и пусть* $a$ *и* $a_1$ — *какие-нибудь точки, взятые соответственно в* $G$ *и* $G_1$, *причем функция* $\psi(z)$, *конформно отображающая внешность* $\mathfrak{M}$ *на внешность* $\mathfrak{M}_1$, *удовлетворяет условиям:*

1) $\psi(a) = a_1$;

2) *вдоль точек некоторой дуги* $\gamma$ *границы* $C_1(\mathfrak{M})$ *множества* $\mathfrak{M}$ *и прилегающей к этой дуге какой-нибудь односвязной области* $g \in G$, $\bar{g} \supset \gamma$ *имеем:*

$$0 < A_{14} < |\psi'(z)| < A_{15} \quad (z \in \bar{g};\ A_{14} \text{ и } A_{15} \text{ — постоянные}). \tag{2.19}$$

*Тогда если линии уровня* $C_{R,a} = C_R(\mathfrak{M};\, a)$ *множества* $\mathfrak{M}$ *в точках области* $g$ *удовлетворяют условиям* 1) — 4) *для множеств типа* $(A^{**})$, *а* $\gamma_1$ *и* $g_1$ *суть образы* $\gamma$ *и* $g$ *при отображении* $\zeta = \psi(z)$, *то и линии уровня* $C_{R,a_1} = C_R(\mathfrak{M}_1;\, a_1)$ *множества* $\mathfrak{M}_1$ *будут в точках области* $g_1$ *также удовлетворять условиям* 1) — 4) *для множеств типа* $(A^{**})$, *и наоборот.*

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно учесть следующие факты.

1) Пусть $z_1$ и $z_2$ — две произвольные точки из $\bar{g}$, и пусть $\zeta_1 = \psi(z_1)$ и $\zeta_2 = \psi(z_2)$ — их образы при отображении $\zeta = \psi(z)$. Тогда если $z_1$ и $z_2$ и, соответственно, $\zeta_1$ и $\zeta_2$ можно соединить между собой дугами, расположенными в $\bar{g}$ и $\bar{g}_1$ и имеющими, соответственно, длины $\leqslant A_{16}|z_2 - z_1|$ и $\leqslant A_{16}|\zeta_2 - \zeta_1|$, где $A_{16}$ — какая-нибудь постоянная, то

$$\frac{A_{14}}{A_{16}}|z_2 - z_1| \leqslant |\zeta_2 - \zeta_1| \leqslant A'_{15}|z_2 - z_1|, \quad A'_{15} = A_{15}A_{16}, \tag{2.20}$$

где $A_{14}$ и $A_{15}$ — те же постоянные, что и в (2.19).

Действительно, пусть $l = l(z_1, z_2)$ и $\gamma = \gamma(\zeta_1, \zeta_2)$ — произвольные жордановы дуги, соединяющие, соответственно, точку $z_1$ с $z_2$ и $\zeta_1$ с $\zeta_2$ и расположенные, соответственно, в $\bar{g}$ и $\bar{g}_1$. Тогда, в силу (2.19),

$$|\zeta_2 - \zeta_1| \begin{cases} \geqslant \dfrac{1}{A_{16}} \min\limits_{l} \displaystyle\int_{l(z_1, z_2)} |\psi'(z)|\,|dz| \geqslant \dfrac{A_{14}}{A_{16}}|z_2 - z_1|, \\ \leqslant \min\limits_{l} \displaystyle\int_{l(z_1, z_2)} |\psi'(z)|\,|dz| \leqslant A_{16}A_{15}|z_2 - z_1|. \end{cases}$$

2. Если $\varphi(z)$ и $\varphi_1(\zeta)$ — функции, осуществляющие конформное отображение внешностей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ на внешность единичного круга так, что $\varphi(a)=\infty$ и $\varphi_1(a_1)=\infty$, то при некотором $\alpha \geqslant 0$

$$\varphi(z) \equiv e^{i\alpha}\varphi_1[\psi(z)]. \tag{2.20'}$$

Это непосредственно следует из двух обстоятельств:

а) так как функция $\psi(z)$ каждую точку $z$ границы множества $\mathfrak{M}$ переводит в точку $\zeta=\psi(z)$ границы множества $\mathfrak{M}_1$, то при всех $z \in C_1(\mathfrak{M})$

$$|\varphi_1[\psi(z)]| = 1,$$

и, значит, функция $\varphi_1[\psi(z)]$ внешность $\mathfrak{M}$ переводит во внешность единичного круга;

б) так как, согласно условию теоремы, $\psi(a)=a_1$, то $\varphi_1[\psi(a)]=\infty$.

Тождество (2.20′) показывает, что каждая точка линии уровня $C_R(\mathfrak{M};\, a)$ переходит при отображении $\zeta=\psi(z)$ в некоторую точку $\psi(z)=\zeta$ линии уровня $C_R(\mathfrak{M}_1,\, a_1)$, и наоборот.

3. Пусть $\zeta_1=\psi(z_1)$, $\zeta_2=\psi(z_2)$, и пусть $z_1, z_2 \in C_R^{(i)}(\mathfrak{M};\, a)$ — произвольные точки, которые можно соединить между собой дугами с длинами $\leqslant A_{16}|\zeta_2-\zeta_1|$ и, соответственно, $\leqslant A_{16}|z_2-z_1|$; тогда, в силу (2.2), (2.19) и (2.20),

$$s(\zeta_1, \zeta_2) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} |d\zeta| = \int_{z_1}^{z_2} |\psi'(z)||dz| \leqslant A_{15}A_4|z_2-z_1| \leqslant \frac{A_{15}A_{16}}{A_{11}} A_1|\zeta_2-\zeta_1|,$$

$$\zeta,\ \zeta_1,\ \zeta_2 \in C_R(\mathfrak{M}_1,\ a_1),$$

откуда следует, что для линий уровня $C_R(\mathfrak{M}_1;\, a_1)$ множества $\mathfrak{M}_1$ выполняется свойство 1) для множеств типа $(A^{**})$.

4. Так как при $z \in C_1(\mathfrak{M})$, $\tilde{z} \in C_R(\mathfrak{M};\, a)$, $z, \tilde{z} \in \bar{g}$ и $\zeta=\psi(z)$, $\tilde{\zeta}=\psi(\tilde{z})$, в силу (2.20), имеем:

$$\rho_R(\zeta) = \min_{\zeta' \in C_{R,a_1}} |\zeta'-\zeta| \begin{cases} \geqslant \dfrac{A_{14}}{A_{16}} \min\limits_{z' \in C_{R,\,a}} |z'-z| = \dfrac{A_{14}}{A_{16}} \rho_R(z), \\ \leqslant A_{15}' \min\limits_{z' \in C_{R,\,a}} |z'-z| = A_{15}' \rho_R(z), \end{cases}$$

$$\bar{\rho}_R(\tilde{\zeta}) = \min_{\zeta' \in C_{1,a_1}} |\zeta'-\tilde{\zeta}| \begin{cases} \geqslant \dfrac{A_{14}}{A_{16}} \min\limits_{z' \in C_1(\mathfrak{M})} |z'-\tilde{z}| = \dfrac{A_{14}}{A_{16}} \bar{\rho}_R(\tilde{z}), \\ \leqslant A_{15}' \min\limits_{z' \in C_1(\mathfrak{M})} |z'-\tilde{z}| = A_{15}' \bar{\rho}_R(\tilde{z}), \end{cases}$$

то для произвольных $z,\ \tilde{z} \in \bar{g}$ и $\zeta=\psi(z)$, $\tilde{\zeta}=\psi(\tilde{z})$ имеют место неравенства

$$\begin{gathered} \frac{A_{14}}{A_{16}} \rho_R(z) \leqslant \rho_R(\zeta) \leqslant A'_{15} \rho_R(z), \\ \frac{A_{14}}{A_{16}} \bar{\rho}_R(\tilde{z}) \leqslant \bar{\rho}_R(\tilde{\zeta}) \leqslant A'_{15} \bar{\rho}_R(\tilde{z}). \end{gathered} \tag{2.21}$$

Пользуясь этими неравенствами и неравенством (2.20), легко убедиться, что для множества $\mathfrak{M}_1$ выполняются условия 2) — 4) множеств типа $(A^{**})$, ибо в силу (2.20) и (2.21) в каждом из неравенств (2.3) — (2.5) величины $\rho_R(z)$, $\bar{\rho}_R(\tilde{z})$ и $|\tilde{z} - z|$ можно заменить каждый раз соответственно на $\frac{1}{A'_{15}}\rho_R(\zeta)$, $\frac{1}{A'_{15}}\bar{\rho}_R(\tilde{\zeta})$ и $\frac{1}{A'_{15}}|\tilde{\zeta} - \zeta|$ в левой части и на $\frac{A_{16}}{A_{14}}\rho_R(\zeta)$, $\frac{A_{16}}{A_{14}}\bar{\rho}_R(\tilde{\zeta})$ и $\frac{A_{16}}{A_{14}}|\tilde{\zeta} - \zeta|$ — в правой. Этим теорема 2.1 полностью доказана.

Принимая во внимание, что множество $K$, фигурирующее в лемме 2.1, при помощи функции

$$\psi(z) = a\frac{z - b}{z - e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}},$$

где $a$ и $b$ — какие-нибудь постоянные, можно конформно отобразить на произвольный двуугольник, образованный дугами двух равных * окружностей с раствором дуг, равным $(2 - \beta)\pi$, и что при этом $\psi(e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}) = \infty$ и в окрестности начала $|\psi'(z)| = \dot{O}(1)$, мы, при помощи теоремы 2.1, получаем

Следствие 2.2. *Множество $K_1$ точек плоскости $z$, заключенных между двумя дугами равных окружностей, образующими в точках стыка угол $\alpha\pi$, $0 < \alpha < 2$, является множеством типа $(A^{**})$.*

4°. Теорема 2.1 совместно с леммой 2.1 дает повод ожидать, что довольно широкий класс замкнутых множеств, имеющих угловые точки, являются множествами типа $(A^{**})$ и что, в частности, всякий многоугольник, а также множества, ограниченные конечным числом кривых, имеющих непрерывную кривизну, являются множествами типа $(A^{**})$.

Для того чтобы строго доказать эти результаты, нам потребуются некоторые добавочные сведения, к которым мы сейчас и переходим.

Докажем сначала одну лемму о свойстве производной от функции, осуществляющей конформное отображение. Эта лемма представляет, на наш взгляд, и самостоятельный интерес, ибо она указывает достаточные условия для того, чтобы функция $\psi(z)$, переводящая угловую точку $z_0$ области $G$ в угловую точку $\zeta_0$ области $G_1$, имела в окрестности точки $z_0$ конечную и отличную от нуля производную $\psi'(z)$.

ЛЕММА 2.2. *Пусть в плоскостях $z$ и $\zeta$ даны соответственно два замкнутых множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ с односвязными непустыми дополнениями $G$ и $G_1$. Пусть $\varphi(z)$ и $\varphi_1(\zeta)$ — функции, осуществляющие конформные отображения $G$ и $G_1$ на внешность единичного круга $|w| \leqslant 1$ так, что*

а) $\varphi(a) = \varphi_1(a_1) = \infty$, *где $a$ и $a_1$ — какие-нибудь фиксированные точки, взятые, соответственно, в $G$ и $G_1$;*

---

* Тот факт, что данные окружности являются равными, вытекает из того обстоятельства, что биссектриса множества $K$, содержащая точку $e^{-i\beta\frac{\pi}{2}}$, перейдет в прямую, являющуюся биссектрисой двуугольника.

*б)* $\varphi(z_0) = \varphi_1(\zeta_0) = w_0$, *где* $z_0$ *и* $\zeta_0$ — *некоторые точки на границах множеств* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{M}_1$ *.

*Пусть, наконец, для точек* $z_0$ *и* $\zeta_0$ *существуют окрестности* $U(z_0, \delta)$ *и* $U_1(\zeta_0, \delta)$ *некоторого радиуса* $\delta > 0$ *такие, что*

*1) для всякой пары точек* $z \in \overline{G} \cap U(z_0, \delta) = g$ *и* $\zeta \in \overline{G}_1 \cap U_1(\zeta_0, \delta) = g_1$, *находящихся на одинаковых расстояниях от* $z_0$ *и* $\zeta_0 : |z - z_0| = |\zeta - \zeta_0|$, *будем иметь:*

$$A_{17} |\varphi'(z)| \leqslant |\varphi'_1(\zeta)| \leqslant A_{18} |\varphi'(z)|, \tag{2.22}$$

*где* $A_{17}$ *и* $A_{18}$ — *постоянные* $> 0$;

*2) любые точки* $z \in g$ *и* $\zeta \in g_1$ *можно соединить соответственно с точками* $z_0$ *и* $\zeta_0$ *такими гладкими дугами (проходящими соответственно в* $g$ *и* $g_1$), *которые во всех своих точках имеют касательные, составляющие с отрезками, соединяющими соответственно точки* $z$ *с* $z_0$ *и* $\zeta$ *с* $\zeta_0$, *углы**, не превышающие некоторого числа* $\sigma < \frac{\pi}{2}$;

*3) для всякой пары положительных чисел* $A_{19} < A_{20}$ *найдется другая пара положительных чисел* $A'_{19} < A'_{20}$ *такая, что, какова бы ни была точка* $z_1 \in g$, *для всех точек* $z_2 \in g$, *удовлетворяющих условию*

$$A_{19} |z_1 - z_0| \leqslant |z_2 - z_0| \leqslant A_{20} |z_1 - z_0|, \tag{2.23}$$

*будем иметь:*

$$A'_{19} |\varphi'(z_1)| \leqslant |\varphi'(z_2)| \leqslant A'_{20} |\varphi'(z_1)|; \tag{2.23'}$$

*4) если* $z_1$ *и* $z_2$ — *произвольная пара точек из* $g$ *и*

$$|z_2 - z_0| = k |z_1 - z_0|, \tag{2.24}$$

*где* $k \geqslant 1$, *то для точек* $w_1 = \varphi(z_1)$ *и* $w_2 = \varphi(z_2)$ *будем иметь:*

$$|w_2 - w_0| \geqslant A_{21} \sqrt{k}\, |w_1 - w_0|, \tag{2.24'}$$

*где* $A_{21}$ — *положительная постоянная, не зависящая от* $z_1$, $z_2$ *и* $k$.

*При выполнении этих условий *** производная функции* $\zeta = \psi(z)$, *осуществляющей конформное отображение* $G$ *в* $G_1$ *таким образом, что* $\psi(z_0) = \zeta_0$ *и* $\psi(a) = a_1$, *будет в некоторой окрестности точки* $z_0$ *удовлетворять неравенству*

$$0 < A_{22} < |\psi'(z)| < A_{23}, \tag{2.25}$$

*где* $A_{22}$ *и* $A_{23}$ — *постоянные.*

Доказательство. Разобьем доказательство этой леммы на четыре этапа.

1. Отображая конформно при помощи функции $w = \varphi(z)$ область $G$ на внешность единичного круга, а затем при помощи функции $\zeta = \varphi_1^{-1}(w)$ — внешность единичного круга в область $G_1$, мы получим отоб-

* Для применения леммы особенно важен случай, когда $z_0$ и $\zeta_0$ — угловые точки.

** В рассмотрение принимаются только острые углы пересечения двух прямых.

*** Отметим, что условия 3) и 4) относятся только к множеству $\mathfrak{M}$.

ражение $\zeta = \overline{\varphi_1}[\varphi(z)]$ внешности $\mathfrak{M}$ на внешность $\mathfrak{M}_1$. Так как при этом, очевидно,

$$\overline{\varphi_1}[\varphi(a)] = a_1 \quad \text{и} \quad \overline{\varphi_1}[\varphi(z_0)] = \overline{\varphi_1}(w_0) = \zeta_0,$$

то функции $\overline{\varphi_1}[\varphi(z)]$ и $\psi(z)$ тождественны:

$$\psi(z) \equiv \overline{\varphi_1}[\varphi(z)]. \tag{2.26}$$

2. Так как в силу (2.22) модули производных $\varphi'(z)$ и $\varphi_1'(\zeta)$ от функций $\varphi(z)$ и $\varphi_1(\zeta)$ в точках $z'$ и $\zeta'$, удовлетворяющих соответственно условиям $|z'-z_0| = \text{const}$, $|\zeta'-\zeta_0| = \text{const}$, $z' \in g$, $\zeta' \in g_1$, могут изменяться только в определенных границах, то мы можем, отправляясь от этих производных, построить четыре вспомогательные функции действительного аргумента:

$$\underline{\Phi}(r) = \inf_{|z'-z_0|=r;\ z'\in g} |\varphi'(z')|, \qquad \overline{\Phi}(r) = \sup_{|z'-z_0|=r;\ z'\in g} |\varphi'(z')|,$$

$$\underline{\Phi}_1(r) = \inf_{|\zeta'-\zeta_0|=r;\ \zeta'\in g_1} |\varphi_1'(\zeta')|, \quad \overline{\Phi}_1(r) = \sup_{|\zeta'-\zeta_0|=r;\ \zeta'\in g_1} |\varphi_1'(\zeta')|.$$

Эти функции определены для достаточно малых $r \geqslant 0$ и обладают, как легко видеть, следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &\underline{\Phi}(|z-z_0|) \leqslant |\varphi'(z)| \leqslant \overline{\Phi}(|z-z_0|), \\ &\underline{\Phi}_1(|\zeta-\zeta_0|) \leqslant |\varphi_1'(\zeta)| \leqslant \overline{\Phi}_1(|\zeta-\zeta_0|), \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\overline{\Phi}(r) \leqslant \frac{A_{18}}{A_{17}} \underline{\Phi}(r), \quad \overline{\Phi}_1(r) \leqslant \frac{A_{18}}{A_{17}} \underline{\Phi}_1(r) \tag{2.28}$$

(так, например, при $|z-z_0| = |\zeta-\zeta_0| = r$ мы, в силу (2.22), имеем:

$$\overline{\Phi}_1(r) \leqslant A_{18}|\varphi'(z)| < \frac{A_{18}}{A_{17}} A_{17}|\varphi'(z)| \leqslant \frac{A_{18}}{A_{17}} \underline{\Phi}_1(r)$$

и т. д.),

$$A_{17}\overline{\Phi}(r) \leqslant \underline{\Phi}_1(r) \leqslant \overline{\Phi}_1(r) \leqslant A_{18}\underline{\Phi}(r). \tag{2.29}$$

Отсюда, принимая во внимание условие 2) доказываемой леммы, для любой пары точек $\tilde{z} \in g$ и $\tilde{\zeta} \in g_1$ таких, что $|\tilde{z}-z_0| = |\tilde{\zeta}-\zeta_0|$ и, соответственно, точек $\tilde{w} = \varphi(\tilde{z})$ и $\tilde{w}_1 = \varphi_1(\tilde{\zeta})$ будем иметь *:

$$|\tilde{w}_1 - w_0| \geqslant \frac{2}{\pi} \min_{\gamma} \int_{\gamma(\zeta_0, \tilde{\zeta})} |\varphi_1'(\zeta)|\,|d\zeta| \geqslant \frac{1}{2} \int_0^{|\tilde{\zeta}-\zeta_0|} \underline{\Phi}_1(s)\,ds \geqslant$$

* За счет сокращения $g$ и $g_1$ мы можем, очевидно, считать, что прообразы кратчайших дуг, проходящих вне окружности $|w| < 1$ и соединяющих $\tilde{w}$ и $\tilde{w}_1$, содержатся соответственно в $g$ и $g_1$.

$$\geqslant \frac{1}{2} A_{17} \int\limits_0^{|\widetilde{z}-z_0|} \overline{\Phi}(s)\, ds = \frac{1}{2} A_{17} \cos\sigma \int\limits_0^{|\widetilde{z}-z_0|} \overline{\Phi}(s) \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\sigma}\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} A_{17} \cos\sigma \min_l \int\limits_{l(z_0,\, \widetilde{z})} |\varphi'(z)|\,|dz| \geqslant \frac{1}{2} A_{17} \cos\sigma\, |\widetilde{w} - w_0|.$$

Совершенно аналогично получим:

$$|\widetilde{w} - w_0| \geqslant \frac{1}{2A_{18}} \cos\sigma\, |\widetilde{w}_1 - w_0|,$$

так что

$$A_{24}|\widetilde{w} - w_0| \leqslant |\widetilde{w}_1 - w_0| \leqslant A_{25}|\widetilde{w} - w_0|, \tag{2.30}$$

где $A_{24}$ и $A_{25}$ — положительные постоянные.

3. Покажем, что в некоторой окрестности $U(z_0;\, \delta')$, $\delta' \leqslant \delta$, точки $z_0$ для всех $\widetilde{z} \in U(z_0, \delta') \cap g = g'$ будем иметь:

$$A_{26}|\widetilde{z} - z_0| \leqslant |\varphi_1^{-}[\varphi(\widetilde{z})] - \zeta_0| \leqslant A_{27}|\widetilde{z} - z_0|, \tag{2.31}$$

где $A_{26}$ и $A_{27}$ — постоянные $> 0$.

В самом деле, точке $\widetilde{z} \in g$ отвечает некоторая точка

$$\varphi_1^{-}[\varphi(\widetilde{z})] = \widetilde{\zeta} \in g_1;$$

положим, что

$$|\widetilde{\zeta} - \zeta_0| = s\,|\widetilde{z} - z_0|,$$

где $s$ — некоторое число $> 0$, и что в $g$ существует точка $\widetilde{z}'$ такая, что

$$|\widetilde{z}' - z_0| = |\widetilde{\zeta} - \zeta_0| = s\,|\widetilde{z} - z_0|. \tag{2.32}$$

Требуется доказать, что $s = \dot{O}(1)$.

Введя обозначения $\varphi(\widetilde{z}) = \widetilde{w}$, $\varphi(\widetilde{z}') = \widetilde{w}'$, мы получим:

$$\varphi_1(\widetilde{\zeta}) = \varphi_1\{\varphi_1^{-}[\varphi(\widetilde{z})]\} = \widetilde{w}$$

и, следовательно, в силу (2.30),

$$A_{24}|\widetilde{w}' - w_0| \leqslant |\widetilde{w} - w_0| \leqslant A_{25}|\widetilde{w}' - w_0|.$$

Отсюда, принимая во внимание (2.24′), получим:

а) если $s \geqslant 1$, то $|\widetilde{w}' - w_0| \geqslant A_{21}\sqrt{s}\,|\widetilde{w} - w_0|$ и, следовательно,

$$\sqrt{s} \leqslant \frac{1}{A_{21}\cdot A_{24}};$$

б) если $s < 1$, то $|\widetilde{w} - w_0| \geqslant A_{21}\frac{1}{\sqrt{s}}|\widetilde{w}' - w_0|$ и, следовательно,

$$\sqrt{s} = \frac{A_{21}}{A_{25}}.$$

Этим неравенство (2.31) доказано.

4. Из (2.26) вытекает, что при всех $\widetilde{z} \in g$

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=\widetilde{z}} = \psi'(\widetilde{z}) = \varphi'(\widetilde{z})\left[\frac{d}{dw}\varphi_1^{-}(w)\right]_{w=\varphi(\widetilde{z})} = \frac{\varphi'(\widetilde{z})}{\left[\frac{d}{d\zeta}\varphi_1(\zeta)\right]_{\zeta=\varphi_1^{-}[\varphi(\widetilde{z})]}} = \frac{\varphi'(\widetilde{z})}{\varphi_1'(\widetilde{\zeta})}$$

и, следовательно,

$$|\psi'(\widetilde{z})| = \frac{|\varphi'(\widetilde{z})|}{|\varphi_1'(\widetilde{\zeta})|} \quad (\widetilde{\zeta} = \varphi_1^{-}[\varphi(\widetilde{z})]). \tag{2.33}$$

Поэтому, придерживаясь обозначений, принятых в предыдущем случае [см. (2.32)], получим:

а) так как $|\widetilde{\zeta} - \zeta_0| = |\widetilde{z}' - z_0|$, то, в силу (2.22),

$$A_{17}|\varphi'(\widetilde{z}')| \leqslant |\varphi_1'(\widetilde{\zeta})| \leqslant A_{18}|\varphi'(\widetilde{z}')|; \tag{2.34}$$

б) так как $|\widetilde{z}' - z_0| = |\widetilde{\zeta} - \zeta_0| = |\varphi_1^{-}[\varphi(\widetilde{z})] - \zeta_0|$, то, в силу (2.31).

$$A_{26}|\widetilde{z} - z_0| \leqslant |\widetilde{z}' - z_0| \leqslant A_{27}|\widetilde{z} - z_0|.$$

Отсюда, в силу условия 3) доказываемой леммы, следует, что найдется пара чисел $A_{27}' > A_{26}' > 0$ такая, что

$$A_{26}'|\varphi'(\widetilde{z})| \leqslant |\varphi'(\widetilde{z}')| \leqslant A_{27}'|\varphi'(\widetilde{z})|.$$

Из этого неравенства и неравенства (2.34) вытекает:

$$A_{17}A_{26}'|\varphi'(\widetilde{z})| \leqslant |\varphi_1'(\widetilde{\zeta})| \leqslant A_{18}A_{27}'|\varphi'(\widetilde{z})|.$$

Подставляя эти оценки в (2.33), находим:

$$\frac{1}{A_{18}\cdot A_{27}'} \leqslant |\psi'(\widetilde{z})| \leqslant \frac{1}{A_{17}\cdot A_{26}'},$$

и лемма 2.2 полностью доказана.

Докажем еще одну лемму, идея доказательства которой принадлежит Варшавскому [см. ([17]), стр. 345—346].

ЛЕММА 2.3. *Пусть замкнутые, вообще говоря, неограниченные множества* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{M}_1$ *с односвязными непустыми дополнениями* $G$ *и* $G_1$ *имеют общую жорданову дугу* $\gamma$; *пусть* $G$ *и* $G_1$ *примыкают к* $\gamma$ *с одной и той же стороны, и пусть* $a$ *и* $a_1$ — *какие-нибудь точки, взятые соответственно в* $G$ *и* $G_1$, *причем функции* $w = \varphi(z; a)$ *и* $w = \varphi_1(z; a_1)$ *конформно отображают* $G$ *и* $G_1$ *на внешность единичного круга так, что* $\varphi(a, a) = \varphi(a_1, a_1) = \infty$. *Тогда, какова бы ни была дуга* $\gamma_1$, *содержащаяся в* $\gamma$, *но не имеющая с* $\gamma$ *общих концов, найдется область* $g \subset G \cap G_1$ *такая, что* $\overline{g} \supset \gamma_1$ *и при этом для всех* $z \in \overline{g}$ *справедливы неравенства*:

$$A_{28}|\varphi'(z; a)| \leqslant |\varphi_1'(z; a_1)| \leqslant A_{29}|\varphi'(z; a)|, \tag{2.35}$$

*где* $A_{28}$ *и* $A_{29}$ — *положительные постоянные.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $G_1 \subset G$, так как в противном случае можно было бы обе области $G$ и $G_1$ сравнить с некоторой третьей, содержащейся как в $G$, так и в $G_1$. При отображении $w = \varphi(z; a)$ область $G_1$ переходит в некоторую часть $D_1$ внешности единичного круга. При этом граница $C_1(D_1)$ области $D_1$ содержит некоторую дугу $\delta_1$, являющуюся образом дуги $\gamma_1$. Заметим, что отображение $w = \varphi_1(z; a_1)$ области $G_1$ во внешность единичного круга можно получить посредством отображения $\zeta = \varphi(z; a)$ области $G_1$ в

и затем некоторого отображения $w = g(\zeta)$ области $D_1$ во внешность единичного круга (мы говорим «некоторого» отображения, ибо требуется, чтобы $g[\varphi(a_1; a)] = \varphi_1(a_1, a_1) = \infty$). Согласно принципу Римана — Шварца, функция $g(\zeta)$ будет аналитической и будет иметь отличную от нуля производную также в некоторой области $g' \supset \delta_1$ *.

Таким образом,

$$w = \varphi_1(z; a_1) = g[\varphi(z; a)] = g(\zeta),$$

где $\zeta = \varphi(z; a)$, откуда получаем:

$$|\varphi_1'(z: a_1)| = g'[\varphi(z; a)]\,\varphi'(z; a)$$

и, следовательно,

$$|\varphi_1'(z; a_1)| = \dot{O}(|\varphi'(z; a)|),$$

что и требовалось доказать.

Из лемм 2.2 и 2.3 вытекает

Следствие 2.3. *Пусть какой-нибудь (вообще говоря произвольный) многоугольник $P$ имеет в некоторой вершине $\zeta_0$ угол с раствором, равным $\alpha\pi$ $(0 < \alpha < 2)$, и пусть $K$ — множество точек (из леммы 2.1), заключенных между двумя лучами, образующими в точке стыка $z_0$ угол, также равный $\alpha\pi$. Тогда если функция $\zeta = \psi(z)$ конформно отображает внешность $K$ на внешность $P$ так, что $\psi(z_0) = \zeta_0$, то в точках $z\,(z \overline{\in} K)$ из некоторой окрестности точки $z_0$ будем иметь:*

$$A_{30} < |\psi'(z)| < A_{31}, \tag{2.36}$$

*где $A_{30}$ и $A_{31}$ — положительные постоянные.*

Чтобы убедиться в правильности этого следствия, отметим, что в силу леммы 2.3 для функций $\varphi(z)$ и $\varphi_1(\zeta)$, осуществляющих конформное отображение соответственно внешностей $K$ и $P$ на внешность единичного круга, выполняется условие 1) леммы 2.2. Тот факт, что для внешностей $K$ и $P$ выполняется условие 2), очевиден.

Чтобы убедиться в выполнении условий 3) и 4) для функции $\varphi(z)$, отметим, что

а) $\varphi(z) = -\frac{\zeta - i}{\zeta + i}$, где $\zeta = (z - z_0)^{\frac{1}{2-\alpha}}$ (см. начало доказательства леммы 2.1) и, следовательно,

$$\varphi'(z) = -\frac{2i}{(\zeta + i)^2}\frac{1}{2-\alpha}(z - z_0)^{\frac{1}{2-\alpha}-1}, \quad |\varphi'(z)| = \frac{2}{(2-\alpha)|\zeta + i|^2}|z - z_0|^{\frac{1}{2-\alpha}-1},$$

где $\zeta \to 0$ при $z \to z_0$; значит, в окрестности точки $z_0$

$$|\varphi'(z)| = O\left(|z - z_0|^{\frac{1}{2-\alpha}-1}\right);$$

* При сделанных предположениях функция $g(w)$ будет даже однолистной в $g'$ [см., например, ([24]), стр. 143—144].

б) если $w_1 = \varphi(z_1), w_2 = \varphi(z_2)$, где $|z_2 - z_0| = k|z_1 - z_0|$, $k \geqslant 1$, то

$$|w_1 - w_0| \approx \min_{\gamma} \int_{\gamma(z_0, z_1)} |\varphi'(z)||dz| = \dot{O}\left\{\int_0^{|z_1 - z_0|} s^{\frac{1}{2-\alpha}-1} ds\right\} = \dot{O}\left(|z_1 - z_0|^{\frac{1}{2-\alpha}}\right),$$

$$|w_2 - w_0| = \dot{O}\left(|z_2 - z_0|^{\frac{1}{2-\alpha}}\right) \geqslant A_{32}\sqrt{k}\,|z_1 - z_0|^{\frac{1}{2-\alpha}} \geqslant A'_{32}\sqrt{k}\,|w_1 - w_0|,$$

где $A_{32}$, $A'_{32} = \mathrm{const}$.

5°. Применяя теорему 2.1, мы, в силу следствия 2.3, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.2. *Всякий многоугольник, граница которого состоит из конечного числа отрезков прямых, образующих в точках стыка углы* $\alpha_i$ $(0 < \alpha_i < 2\pi)$, *является множеством типа* $(A^{**})$.

Замечание. Путем довольно простых рассуждений можно было бы убедиться в том, что теорема 2.2 остается справедливой и для случая, когда в состав границы многоугольника входит одна или несколько дуг окружностей. Мы этого не станем проверять, ибо позже, пользуясь одной леммой Осгуда — Тейлора, докажем значительно более общую теорему.

ТЕОРЕМА 2.3. *Множество точек отрезка* $[-1,1]$ *есть множество типа* $(A^{**})$.

Доказательство. Так как доказательство этой теоремы является довольно простым, то мы остановимся только на основных вехах, предоставляя детали читателю.

Учитывая, что линиями уровня $C_R$ для сегмента $[-1,1]$, как известно служат эллипсы [см., например, ([19]), стр. 118—121] с фокусами в точках $\pm 1$,

$$\frac{x^2}{\left[\frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)\right]^2} = 1, \tag{2.37}$$

а прообразами прямых, проходящих в плоскости $w$ через начало, служат равнобочные гиперболы:

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{z_0^2} - \frac{y^2}{1 - z_0^2} = 1, \quad z_0 \in (0, 1), \tag{2.37'}$$

с фокусами также в точках $\pm 1$ и что отображение внешности отрезка $[-1,1]$ на внешность единичного круга осуществляется при помощи функции

$$w = \varphi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

найдем:

α) если $z_1 = x_1 + iy_1 \in C_R$ и $z_2 = x_2 + iy_2 \in C_R$ — любые две точки из первого квадранта, то

$$s(z_1, z_2) \leqslant |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| \leqslant 2|z_2 - z_1|;$$

β) если $z_0 \in (0,1)$, то точка

$$\varphi^{-}[R\varphi(z_0)] = \frac{1}{2}\left[R\left(z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}\right) + \frac{1}{R\left(z_0 + \sqrt{z_0^2 - 1}\right)}\right] = \tilde{z}_0$$

находится с точкой $z_0$ на одной и той же ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{z_0^2}-\frac{y^2}{1-z_0^2}=1,$$

γ) всякая гипербола $\frac{x^2}{z_0^2}-\frac{y^2}{1-z_0^2}=1$ в точке с абсциссой, равной 1, и ординатой $>0$ имеет, как легко проверить, касательную с угловым коэффициентом, равным $\frac{1}{z_0}>1$, поэтому каждая такая касательная наклонена к оси абсцисс под углом $>45°$;

δ) на всякой линии уровня $C_R$, т. е. на эллипсе (2.37) ордината выражается через абсциссу в виде

$$y=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\sqrt{\left(1-\frac{2Rx}{1+R^2}\right)\left(1+\frac{2Rx}{1+R^2}\right)}=$$

$$=\frac{R+1}{2R(R^2+1)}(R-1)\sqrt{(R-1)^2+2R(1+x)}\sqrt{(R-1)^2+2R(1-x)}=$$

$$=(R-1)\dot{O}(\sqrt{1-x^2}+R-1); \qquad (2.38)$$

ε) на всякой линии уровня $C_R$ при $y=0$ имеем:

$$x-1=\frac{1}{2R}(R-1)^2. \qquad (2.38')$$

Из приведенных фактов следует, что для сегмента $[-1,1]$ условие 1) для множеств типа $(A^{**})$ выполняется в силу α); неравенство в) в условии 2) для множеств типа $(A^{**})$ выполняется в силу (2.38) и (2.38′); неравенства а) и б) условия 2) — в силу β), γ) и δ); условие 3) выполняется в силу того обстоятельства, что эллипсы вида (2.37), и, следовательно, величина $\rho_R(z)$ при $z\in[0,1]$ для всех $R>1$ монотонно убывает; условие 4) выполняется в силу (2.38) и (2.38′). Теорема доказана.

Замечание. Из формулы (2.38) в силу выполнения неравенства в) в условии 2) для множеств типа $(A^{**})$ вытекает, что для сегмента $[-1,1]$ величина $\rho_R(z)$ удовлетворяет условию [ср. (2.18) при $\beta=0$]:

$$\rho_R(z)=(R-1)\dot{O}\left(\sqrt{|z^2-1|+(R-1)^2}\right)=(R-1)\dot{O}\left(\sqrt{1-z^2}+R-1\right). \qquad (2.18')$$

ТЕОРЕМА 2.4. *Всякое множество $K$, границей которого служит замкнутая жорданова кривая, состоящая из конечного числа гладких кривых с непрерывной кривизной, образующих в точках стыка углы $\alpha_i\pi$, $0\leqslant\alpha_i<2$, является множеством типа $(A^{**})$.*

Доказанная выше теорема 2.2 является, очевидно, частным случаем этой теоремы. Для доказательства теоремы 2.4 нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 2.4 [см. ([18]), стр. 282—283, или ([17]), стр. 324]. *Если замкнутое множество $\mathfrak{M}$ с односвязным дополнением в некоторой окрестности угловой точки $z_0$ ограничено двумя кривыми $C_1$ и $C_2$ с непрерывной кри-*

*визной, образующими в точке стыка* $z_0$ *угол, равный* $(2-\beta)\pi$, $0<\beta\leqslant 2$, *то производную* $\varphi'(z)$ *от функции, осуществляющей конформное отображение внешности* $\mathfrak{M}$ *на внешность единичного круга, можно в окрестности точки* $z_0$ *представить в виде*

$$\varphi'(z)=\lambda(z)\frac{d}{dz}(z-z_0)^{\frac{1}{\beta}}, \qquad (2.39)$$

*где* $\lambda(z)$ — *непрерывная функция и* $\lambda(z_0)\neq 0$.

ЛЕММА 2.5 [см. ([17]), стр. 322, или ([25]), стр. 561—563]. *Если граница* $C$ *замкнутого ограниченного множества* $\mathfrak{M}$ *с односвязным дополнением имеет непрерывную кривизну, то функция* $w=\psi(z)$, *осуществляющая конформное отображение внешности* $\mathfrak{M}$ *на внешность единичного круга, имеет производную* $\psi'(z)$, *которая во всех точках* $z$ *вне* $\mathfrak{M}$ *удовлетворяет неравенству*

$$A_{33}\leqslant|\psi'(z)|\leqslant A_{34},$$

*где* $A_{33}$ *и* $A_{34}$ — *положительные постоянные.*

Доказательство теоремы 2.4. Из лемм 2.4 и 2.2 следует, что функция $\zeta=\psi(z)$, осуществляющая конформное отображение внешности множества $\mathfrak{M}$ из теоремы 2.4 на внешность угла $K$ из леммы 2.1 (если $0<\beta<2$) или же на внешность сегмента $[-1,1]$ (если $\beta=2$) так, что при этом точка стыка $z_i$ переходит в угловую точку (с таким же раствором), имеет в некоторой окрестности взятой точки стыка производную $\psi'(z)$, удовлетворяющую условию

$$A_{22}<|\psi'(z)|<A_{23}\,*.$$

Поэтому, принимая во внимание лемму 2.1 или, соответственно, теорему 2.3, мы, в силу теоремы 2.1, видим, что линии уровня множества $\mathfrak{M}$ в некоторых окрестностях каждой из точек стыка $z_i$ удовлетворяют всем условиям для множеств типа $(A^{**})$.

Так как, с другой стороны, в силу леммы 2.5 и теоремы 2.1, эти линии уровня будут удовлетворять всем условиям для множеств типа $(A^{**})$ и на дугах границы множества $\mathfrak{M}$, оставшихся после удаления выделенных окрестностей точек стыка $z_i$, то отсюда заключаем, что линии уровня множества $\mathfrak{M}$ во всех своих точках удовлетворяют всем условиям для множеств типа $(A^{**})$. Теорема 2.4 доказана.

Пользуясь следствием 2.1 и замечанием к теореме 2.3 [см. (2.18) и (2.18')], мы, в силу рассуждений, применявшихся в предыдущей теореме и в теореме 2.1, без труда убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2.5 *Если граница замкнутой ограниченной области* $K$ *с односвязным дополнением состоит из конечного числа гладких кривых с непрерывной кривизной, образующих в точках стыка* $z_i$ *углы* $\alpha_i\pi$, $0\leqslant\alpha_i<2$, *то во всех точках* $z$, *принадлежащих границе данного множества* $K$,

* Доказательство этого факта аналогично доказательству следствия 2.3.

*при всех $R > 1$ справедливы равенства*

$$\rho_R(z) = \rho_R(z; K) = (R-1)\dot{O}\left\{\left[|z - z_i| + (R-1)^{2-\alpha_i}\right]^{\frac{1-\alpha_i}{2-\alpha_i}}\right\}, \qquad (2.40)$$

*где $z_i$ — ближайшая к точке $z$ точка стыка.*

Покажем на примере, что непрерывность кривизны гладких кривых, ограничивающих множество $\mathfrak{M}$ в теореме 2.4, не является необходимой для принадлежности множества к типу $(A^{**})$.

ТЕОРЕМА 2.6. *Множество $K$ точек, находящихся левее и на кривой*

$$x = \frac{1 + \frac{t^2}{2}}{1 + t^2}, \quad y = \frac{1}{2}\frac{t^3}{1 + t^2}, \quad t \in (-\infty, \infty), \qquad (2.41)$$

*удовлетворяет в окрестности точки $z = 1$ всем условиям для множества типа $(A^{**})$.*

Доказательство. Кривая (2.41) получается вследствие отображения прямой $z_1 = 1 + it$ при помощи функции $z = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right)$. В окрестности точки $z = 1$ (т. е. при $t = 0$) кривая (2.41) имеет такой же порядок касания оси абсцисс, как и полукубическая парабола $y = \sqrt{2}(1 - x)^{\frac{3}{2}}$. В остальных точках эта кривая является выпуклой, когда $t > 0$, и вогнутой, когда $t < 0$, ибо для точек $(x, y)$ этой кривой

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}t(t^2 + 3), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2}\frac{(1 + t^2)^3}{t}.$$

Вследствие последних формул, кривая (2.41) при $t = 0$ (т. е. в точке $z = 1$) имеет кривизну, равную $\infty$. Тем не менее, в окрестности точки $z = 1$ линии уровня множества $K$ удовлетворяют всем условиям для множеств типа $(A^{**})$. Действительно, так как дополнение к множеству $K$ получается при помощи конформного отображения $z = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right)$ полуплоскости $\operatorname{Re} z_1 > 1$ и так как полуплоскость $\operatorname{Re} z_1 > 1$, в свою очередь, получается при помощи конформного отображения $z_1 = \frac{2w}{1 + w}$ внешности единичного круга в плоскости $w$, то мы легко найдем, что внешность отрезка $[-1, 1]$, расположенного в некоторой плоскости $\zeta$, можно конформно отобразить на внешность множества $K$ при помощи функции $z = \psi(\zeta)$:

$$z = \psi(\zeta) = \frac{1}{2}\left\{\frac{2(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}{1 + \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} + \frac{1 + \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}\right\}. \qquad (2.42)$$

Эта функция переводит точку $\zeta = 1$ в точку $z = 1$ и ее производная в этой точке (а следовательно, и в некоторой окрестности $z = 1$) отлична от нуля:

$$\psi'(1) = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Отсюда, в силу рассуждений теоремы 2.1, вытекает утверждение теоремы 2.6.

## § 3. Неравенства для производных от многочленов, ограниченных положительной непрерывной функцией

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть множество* $\mathfrak{M}$ *с границей* $C_1$ *обладает свойством* $(A^{**})$. *Тогда если для всех* $z \in C_1$ *какой-нибудь многочлен* $P_n(z)$ *степени не выше* $n$ *удовлетворяет неравенству*

$$|P_n(z)| \leqslant [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^s, \tag{3.1}$$

*где* $s$ — *произвольное фиксированное действительное число* $\geqslant 0$, *то для всех* $z \in C_1$ *при каждом натуральном* $k \geqslant 1$ *производная* $k$-*го порядка* $P_n^{(k)}(z)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|P_n^{(k)}(z)| \leqslant A_{35}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{s-k}, \tag{3.2}$$

*где* $A_{35}$ — *постоянная, зависящая от множества* $\mathfrak{M}$ *и от порядка* $k$ *производной* $P_n^{(k)}(z)$, *но не от многочлена* $P_n(z)$ *и его степени.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая

ЛЕММА 3.1. *При каждом натуральном* $n$ *для всякого многочлена* $P_n(z)$ *степени* $\leqslant n$, *удовлетворяющего в точках* $z$ *кривой* $C_1$ *условию*

$$|P_n(z)| \leqslant [\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^s \quad (-\infty < s < \infty), \tag{3.3}$$

*во всех точках* $\tilde{z}$ *кривой* $C_R\left(R \leqslant 1 + \frac{1}{n}\right)$ *будут иметь место неравенства:*

$$|P_n(\tilde{z})| \leqslant A_{36}[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^s, \quad |P_n(\tilde{z})| \leqslant A_{37}[\bar{\rho}_{1+\frac{1}{n}}(\tilde{z}')]^s, \tag{3.4}$$

*где* $z$ *есть точка кривой* $C_1$, *образ которой находится на одном радиусе с образом точки* $\tilde{z}$, $A_{36}$, $A_{37}$ — *положительные постоянные и*

$$\tilde{z}' = \varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right] = \varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\varphi(\tilde{z})}{|\varphi(\tilde{z})|}\right]$$

(т. е. $\tilde{z}' \in C_{1+\frac{1}{n}}$, $\arg\varphi(\tilde{z}') = \arg\varphi(\tilde{z}) = \arg\varphi(z)$).

Доказательство леммы. 1) Рассмотрим сначала случай $s \geqslant 0$. Введем вспомогательную функцию

$$\Phi(z) = \frac{P_n(z)}{\left\{\varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right] - z\right\}^s [\varphi(z)]^n}, \quad \Phi(\infty) = 0. \tag{3.5}$$

Принимая во внимание, что

а) функция $\varphi(z)$ является аналитической вне $\mathfrak{M}$ и при $z \to \infty$ существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z} > 0$,

б) $\left|\varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right] - z\right| \to \infty$ при $z \to \infty$ и поэтому $\lim\limits_{z\to\infty}\Phi(z) = 0$,

в) при всех $z \in C_1$

$$\left|\varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right]-z\right| = |\tilde{z}'-z| \geqslant \rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$$

($\tilde{z}'$ — точка кривой $C_{1+\frac{1}{n}}$ такая, что $\arg\varphi(\tilde{z}') = \arg\varphi(z)$), мы видим, что каждая ветвь функции $\Phi(z)$ является аналитической и однозначной в любой точке $z$, которая находится вне множества $\mathfrak{M}$. Поэтому, в силу принципа максимального модуля [см. ([20]), стр. 167, задача 268], для всех $z$, находящихся вне множества $\mathfrak{M}$, будем иметь:

$$|\Phi(z)| \leqslant \max_{z\in C_1}|\Phi(z)| \leqslant \max_{z\in C_1}\frac{|P_n(z)|}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^s 1^n} \leqslant 1.$$

Отсюда, в силу определения $\Phi(z)$, следует, что во всех точках $\tilde{z}\in C_R$, $R \leqslant 1+\frac{1}{n}$,

$$|P_n(\tilde{z})| \leqslant \left|\varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(\tilde{z})\right]-\tilde{z}\right|^s\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Поэтому, принимая во внимание неравенства (2.3) [см. правую часть неравенства в)], найдем, что

$$|P_n(\tilde{z})| \leqslant A_{38}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^s,$$

где $A_{38}$ — постоянная. Этим первое из неравенств (3.4) доказано. Второе из них следует из первого, если учесть, что в силу второго из неравенств (2.3) при всех $\tilde{z}' \in C_{1+\frac{1}{n}}$ и $z\in C_1$ таких, что $\arg\varphi(z) = \arg\varphi(\tilde{z}')$, имеем:

$$\rho_{1+\frac{1}{n}}(z) \leqslant |\tilde{z}'-z| = \left|\tilde{z}'-\varphi^{-}\left[\frac{n}{n+1}\varphi(\tilde{z}')\right]\right| \leqslant A_5\bar{\rho}_{1+\frac{1}{n}}(\tilde{z}').$$

2) В случае $s<0$ вводим вспомогательную функцию

$$\Phi(z) = \frac{P_n(z)}{\left\{\varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right]-z\right\}^s[\varphi(z)]^{n+|s|}}$$

и, пользуясь неравенством

$$\left|\varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right]-z\right| \leqslant A_5\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$$

[см. (2.3), неравенство а)], при помощи рассуждений, аналогичных случаю $s \geqslant 0$, получим:

$$|\Phi(z)| \leqslant \max_{z\in C_1}|\Phi(z)| \leqslant \max_{z\in C_1}\frac{\left\{A_5\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right\}^{|s|}}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{|s|}\cdot 1^{n+|s|}} = A_5^{-s}.$$

Отсюда видно, что во всех точках $\widetilde{z} \in C_R$, $R \leqslant 1 + \frac{1}{n}$,

$$|P_n(\widetilde{z})| \leqslant A_5^{|s|} \left| \varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(\widetilde{z})\right] - \widetilde{z}\right|^s \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+|s|} \leqslant A'_{38}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^s,$$

где $A'_{38}$ — постоянная $> 0$.

Второе из неравенств (3.4) мы получаем из данного, пользуясь тем, что в силу (2.3)

$$\rho_{1+\frac{1}{n}}(z) \geqslant \frac{1}{A_5}\left|\varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right] - z\right| \geqslant \frac{1}{A_5}\bar{\rho}_{1+\frac{1}{n}}(\widetilde{z}').$$

Доказательство теоремы 3.1. А) Пусть $z$ — произвольная точка кривой $C_1$ и пусть $\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z)$ есть расстояние этой точки до дуги $C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}$. Опишем из точки $z$ окружность $\gamma_i$ радиуса $3\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z)$ и покажем, что при $k > s$

$$\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}} \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta\right| \leqslant A_{39}\left[\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{s-k} \leqslant A_{39}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{s-k}. \quad (3.6)$$

Обозначим через $z_1$ и $z_2$ соответственно первую и последнюю точки пересечения дуги $C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}$ с окружностью $\gamma_i$ при движении вдоль дуги $C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}$ так, чтобы область, ограниченная кривой $C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}$, оставалась слева. Тогда

1) так как $|z_2 - z_1| \leqslant 6\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z)$, то вследствие (2.2)

$$s(z_1, z_2) \leqslant 6A_4\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z);$$

2) в силу второго из неравенств (3.4) при всех $\zeta \in \breve{z_1 z_2}$

$$|P_n(\zeta)| \leqslant A_{37}\left[(1+6A_4)\,\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^s = A_{40}\left[\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^s;$$

3) если через $z'$ обозначить точку дуги $C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}$, наименее удаленную от точки $z$, то при всех $\zeta \in C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}} - \breve{z_1 z_2}$ вследствие (2.2) получим:

$$|\zeta - z| \geqslant |\zeta - z'| - |z' - z| \geqslant \frac{|\zeta - z'|}{2} \geqslant \frac{s(z', \zeta)}{2A_4};$$

4) в силу второго из неравенств (3.4) для тех же $\zeta$, что и в 3), будем иметь:

$$|P_n(\zeta)| \leqslant A_{37}\left[\bar{\rho}_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)\right]^s \leqslant A_{37}|\zeta - z|^s \leqslant 2^s A_{37}[s(z', \zeta)]^s.$$

Поэтому

$$\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}} \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta\right| \leqslant \left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\smile z_1 z_2} \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta\right| + \left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}} - \smile z_1 z_2} \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!}{2\pi}\frac{A_{40}\left[\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^s}{\left[\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{k+1}}\,6A_4\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z) + 2^{1+s}\frac{k!}{2\pi}A_{37}(2A_4)^{k+1}\int\limits_{2\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}^{\infty}\frac{\sigma^s\,d\sigma}{\sigma^{k+1}} <$$

$$< A_{41}\left[\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{s-k} \leqslant A_{41}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{s-k}$$

и неравенство (3.6) доказано. В силу этого неравенства найдем:

$$|P_n^{(k)}(z)| = \left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C_{1+\frac{1}{n}}} \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}} \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta\right| \leqslant NA_{41}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{s-k}.$$

Этим теорема 3.1 для случая $k > s$ полностью доказана.

В) Пусть теперь $k \leqslant s$ (этот случай может встретиться только при $s \geqslant 1$).

Представим число $s$ в виде

$$s = s_0 + \alpha, \tag{3.7}$$

где $s_0$ — натуральное число и $0 \leqslant \alpha < 1$.

Пусть $z_0$ — произвольная точка на границе $C_1$ множества $\mathfrak{M}$ и $\widetilde{z}'_0$ — ближайшая к ней точка (или одна из таких точек) на линии уровня $C_{1+\frac{1}{n}}$, так что

$$|\widetilde{z}'_0 - z_0| = \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0).$$

Проведем две концентрические окружности $c_1$ и $c_2$ с центром в точке $z_0$ и радиусами, равными $\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$ и $2A_5\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$. Так как, в силу

условия 4) для множеств типа $(A^{**})$, для всех точек $z \in C_1$, попавших в середину окружности $c_2$,

$$\rho_{1+\frac{1}{n}}(z) \geqslant A_7' \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0),$$

где $A_7' > 0$, то, очевидно,

$$\bar{\rho}_{1+\frac{1}{n}}(\tilde{z}_0') \geqslant A_7' \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0).$$

Поэтому луночка $\Omega$ между окружностью $c_1$ и окружностью $\bar{c}_1$ с центром в точке $\tilde{z}_0'$ и радиусом $A_7'\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$ будет полностью содержаться в полосе $S\left(\frac{1}{n}\right)$ между границей $C_1$ и линией уровня $C_{1+\frac{1}{n}}$. Отсюда следует, что точка $\check{z}_0$, расположенная на отрезке, соединяющем точки $z_0$ и $\tilde{z}_0'$, на расстоянии $\frac{1}{2} A_7'\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$ от точки $\tilde{z}_0'$, будет обладать свойствами:

a) $|\check{z}_0 - z_0| < \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$;

b) точка $\check{z}_0$ содержится в полосе $S\left(\frac{1}{n}\right)$ вместе с кругом $U$ с центром в этой точке и радиусом, равным $\frac{1}{2} A_7'\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$.

Поэтому, обозначая через $\gamma_{\check{z}_0}$ границу круга $U$, мы для точки $\check{z}_0$ при всех натуральных $j$, в силу (3.4) и неравенства (2.5), будем иметь:

$$|P_n^{(j)}(\check{z}_0)| = \left| \frac{j!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{\check{z}_0}} \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - \check{z}_0)^{j+1}} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{j!}{2\pi} \left[ \frac{2}{A_7'\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)} \right]^{j+1} A_{36} \left[ A_7\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) \right]^s A_7'\pi\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) <$$

$$< A_{41}' \left[ \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) \right]^{s-j} \quad (A_{41}' = \text{const}). \tag{3.8}$$

Так как, на основании (3.7), $s_0 + 1 > s$, то в силу уже разобранного случая А) доказываемой теоремы и леммы 3.1, для всех точек $z \in C_1$ и всех $\zeta$ из полосы $S\left(\frac{1}{n}\right)$ имеем:

$$|P_n^{(s_0+1)}(z)| \leqslant N A_{41} \left[ \rho_{1+\frac{1}{n}}(z) \right]^{s-s_0-1}, \quad |P_n^{(s_0+1)}(\zeta)| \leqslant A_{36} N A_{41} \left[ \rho_{1+\frac{1}{n}}(z) \right]^{s-s_0-1},$$

$$z = \varphi^{-}\left[ \frac{1}{|\varphi(\zeta)|} \varphi(\zeta) \right].$$

Учитывая еще, что в силу неравенства б) из (2.3) для всех $\zeta$ из луночки $\Omega$ соответствующая точка $z = \varphi^{-}\left[\frac{1}{|\varphi(\zeta)|}\varphi(\zeta)\right]$ содержится внутри

$c_2$, и принимая во внимание (2.5), мы видим, что во всех точках $\zeta$ отрезка, соединяющего точки $z_0$ и $\check{z}_0$,

$$|P_n^{(s_0+1)}(\zeta)| \leqslant A_{36} N A_{41} \left| A_7' \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) \right|^{s-s_0-1} = A_{42} \left[ \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) \right]^{s-s_0-1}, \quad (3.9)$$

где $A_{42}$ — положительная постоянная, не зависящая от взятой точки $z_0$.

Учитывая, наконец, что

$$P_n^{(s_0)}(z_0) = \int_{\check{z}_0}^{z_0} P_n^{(s_0+1)}(\zeta)\, d\zeta + P_n^{(s_0)}(\check{z}_0),$$

мы, в силу (3.8), (3.9) и неравенства $|\check{z}_0 - z_0| < \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$, получим:

$$|P_n^{(s_0)}(z_0)| \leqslant A_{42} \left[ \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) \right]^{s-s_0-1} \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) +$$
$$+ A_{41}' \left[ \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) \right]^{s-s_0} = A_{43} \left[ \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) \right]^{s-s_0}.$$

Аналогично,

$$|P_n^{(s_0-1)}(z_0)| \leqslant \left| \int_{\check{z}_0}^{z_0} P_n^{(s_0)}(\zeta)\, d\zeta \right| + |P_n^{(s_0-1)}(\check{z}_0)| \leqslant A_{43}' \left[ \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) \right]^{s-s_0+1},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$|P_n'(z_0)| \leqslant \left| \int_{\check{z}_0}^{z_0} P_n''(\zeta)\, d\zeta \right| + |P_n'(\check{z}_0)| \leqslant A_{43}^{(s_0-1)} \left[ \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0) \right]^{s-1},$$

где $A_{43}, A_{43}', \ldots, A_{43}^{(s_0-1)}$ — постоянные, не зависящие от точки $z_0$. А так как точка $z_0$ была взята произвольно на $C_1$, то теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 3.2 *. *Пусть $\mathfrak{M}$ — ограниченное замкнутое множество с односвязным дополнением, граница $C_1$ которого состоит из конечного числа жордановых дуг, и пусть для $\mathfrak{M}$ имеет место первое из условий, определяющих множества типа $(A^*)$. Тогда если на $C_1$ задана положительная непрерывная функция $A(z)$, то для производных всякого многочлена $P_n(z)$ степени не выше $n$, удовлетворяющего для всех $z \in C_1$ условию*

$$|P_n(z)| \leqslant A(z), \quad (3.10)$$

*будет во всех этих точках выполняться неравенство*

$$|P_n^{(k)}(z)| \leqslant A_{44} \frac{A(z)}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^k}, \quad (3.11)$$

*где $\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$ — расстояние от точки $z$ до линии уровня $C_{1+\frac{1}{n}}$, $A_{44}$ — постоянная $> 0$ и $k$ — произвольное фиксированное натуральное число.*

* Отметим, что теоремы 3.2 и 3.3 при доказательстве основной теоремы 4.1 не используются.

ЛЕММА 3.2. *Пусть $K$ — ограниченный континуум, содержащий более одной точки, $G_\infty$ — та из смежных с $K$ областей, которой принадлежит точка $z=\infty$, и $C_1$ — граница области $G_\infty$. Тогда если все граничные элементы континуума $C_1$ являются простыми концами 1-го рода для $G_\infty$, то, какова бы ни была положительная непрерывная функция $A(z)$, определенная в точках $z \in C_1$, всегда найдется функция $F(z)$, аналитическая и отличная от нуля в точках $z \in G_\infty$ (включая точку $z=\infty$), принимающая в точках $z \in C_1$ значения, по модулю равные $A(z)$, и имеющая в замкнутой области $\overline{G}_\infty$ непрерывный модуль $|F(z)|$.*

Доказательство. Решив задачу Дирихле, мы найдем функцию $G(x, y)$, гармоническую в $G_\infty$ и непрерывную в $\overline{G}_\infty$, которая в точках $x+iy=z \in C_1$ будет принимать значения, равные $\ln A(z)$.

Обозначим через $H(x, y)$ функцию, сопряженную с $G(x, y)$. Тогда функция

$$F(z)=e^{G(x, y)+iH(x, y)},$$

очевидно, будет удовлетворять всем условиям леммы.

ЛЕММА 3.3. *Пусть $K$, $G_\infty$ и $C_1$ имеют те же значения, что и в лемме 3.2. Тогда если некоторый многочлен $P_n(z)$ степени $\leqslant n$ при всех $z \in C_1$ удовлетворяет условию*

$$|P_n(z)| \leqslant |F(z)|, \tag{3.12}$$

*где $F(z)$ — функция, аналитическая в $G_\infty$ и имеющая на $\overline{G}_\infty$ непрерывный и отличный от нуля модуль $|F(z)|$, то для всех $\tilde{z} \in C_{1+\frac{1}{n}}$*

$$|P_n(\tilde{z})| = (1+\varepsilon)\cdot e\cdot|F(z)|, \tag{3.13}$$

*где $z=\varphi^{-}\left[\frac{n}{n+1}\varphi(\tilde{z})\right]$ и $\varepsilon$ не зависит от вида многочлена $P_n(z)$ и равномерно по всем $z \in C_1$ стремится к нулю при $n\to\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\eta(z)=\frac{P_n(z)}{F(z)\,[\varphi(z)]^n}.$$

Эта функция является аналитической в области $G_\infty$ и правильной при $z=\infty$. Поэтому, согласно принципу максимального модуля, при всех $z \in G_\infty$ будем иметь:

$$|\eta(z)|=\left|\frac{P_n(z)}{F(z)\,[\varphi(z)]^n}\right| \leqslant \max_{\zeta \in C_1}\left|\frac{P_n(\zeta)}{F(\zeta)\,[\varphi(\zeta)]^n}\right| \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что во всех точках $\tilde{z} \in C_{1+\frac{1}{n}}$

$$|P_n(\tilde{z})| \leqslant |F(\tilde{z})|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant (1+\varepsilon)\,e\,|F(z)|,$$

где $z=\varphi^{-}\left[\frac{n}{n+1}\varphi(\tilde{z})\right]$ и $\varepsilon\to 0$ при $n\to\infty$, ибо

$$\tilde{z}-z=\varphi^{-}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right]-z\to 0,$$

когда $n \to \infty$ [см. ([19]), стр. 407, теорема 2] и функция $|F(z)|$, по условию, непрерывна и не обращается в нуль в точках континуума $C_1$.

Этим лемма 3.3 доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Пусть $z_0$ — произвольная точка континуума $C_1$. Проведем окружность $\gamma_0$ с центром в этой точке и радиусом $\delta_0$, настолько малым (но фиксированным), что при всех $z \in C_1 \cap U_0$, где $U_0$ — круг, ограниченный $\gamma_0$, выполняется неравенство

$$|A(z) - A(z_0)| < A(z_0).$$

Далее, пользуясь леммами 3.2 и 3.3, возьмем $N_1$ настолько большим, чтобы при всех $n \geqslant N_1$ во всех точках $\widetilde{z} \in C_{1+\frac{1}{n}} \cap U_0$ выполнялось неравенство

$$|P_n(\widetilde{z})| \leqslant 7A(z_0).$$

Обозначим, как и при доказательстве теоремы 3.1, через $z'$ точку на дуге $C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}$ кривой $C_{1+\frac{1}{n}}$, наименее удаленную от $z_0$ (т. е. такую, что $|z' - z_0| = \rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$). Тогда для всех $\zeta \in C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}$ получим:

$$|\zeta - z_0| \geqslant \max\left\{\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z_0),\ \ |\zeta - z'| - \rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z_0)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \max\left\{\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z_0),\ \frac{s(z', \zeta)}{A_4} - \rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z_0)\right\} \geqslant \frac{s(z', \zeta) + \rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z_0)}{A_{45}},$$

где $A_{45} = 2A_4 + 1$. Поэтому, если обозначить через $l$ число, которым ограничены длины дуг $C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, N)$ *, положить $M = \max\limits_{z \in C_1} A(z)$ и учесть, что

$$\max_{\zeta \in C_{1+\frac{1}{n}}} |P_n(\zeta)| \leqslant Me$$

[см., например, ([21]), неравенство (1.7)], то для всех $n \geqslant N_1$, таких, что

$$\frac{lM}{\delta_0^{k+1}} < \frac{1}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)\right]^k},$$

получим:

$$\left|\frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}} \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta\right| \leqslant \frac{k!}{2\pi} \int\limits_{C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}} \cap U_0} \frac{|P_n(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{k+1}} |d\zeta| +$$

---

* Такое число существует, ибо если обозначить через $d$ диаметр линии уровня $C_2 = C_+$, то тогда, в силу (2.2), можно, например, положить $l = A_4 d$.

$$+\frac{k!}{2\pi}\int\limits_{C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}-U_0}\frac{|P_n(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^{k+1}}|d\zeta|\leqslant\frac{k!}{2\pi}7A_{45}^{k+1}A(z_0)\int\limits_0^{\infty}\frac{ds}{\left[s+\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z_0)\right]^{k+1}}+$$

$$+\frac{k!}{2\pi}\frac{Me}{\delta_0^{k+1}}l\leqslant A_{46}\frac{A(z_0)}{\left[\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z_0)\right]^k}+\frac{1}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)\right]^k}\leqslant A_{47}\frac{A(z_0)}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)\right]^k}.$$

В силу этого неравенства, имеем:

$$|P_n^{(k)}(z_0)|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C_{1+\frac{1}{n}}}\frac{P_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}}\frac{P_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\right|\leqslant NA_{47}\frac{A(z_0)}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)\right]^k},$$

и теорема 3.2 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть в точках незамкнутой жордановой кривой* $\Gamma$ (*не обязательно спрямляемой*) *определена положительная непрерывная функция* $A(z)$. *Тогда для производных всякого многочлена* $P_n(z)$ *степени не выше* $n$, *удовлетворяющего в точках* $z\in\Gamma$ *условию*

$$|P_n(z)|\leqslant A(z), \tag{3.14}$$

*будет во всех этих точках выполняться неравенство*

$$|P_n^{(k)}(z)|\leqslant(1+\varepsilon)ek!\frac{A(z)}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^k}, \tag{3.15}$$

*где* $\varepsilon$ — *равномерно стремится к нулю при* $n\to\infty$.

Доказательство. Пусть $z_0$ — произвольная точка кривой $\Gamma$ и $\gamma_0$ — окружность радиуса $\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)$ с центром в точке $z_0$. В таком случае, принимая во внимание непрерывность функции $A(z)$ и учитывая леммы 3.2 и 3.3, мы видим, что во всех точках $\zeta\in\gamma_0$ будет иметь место неравенство

$$|P_n(\zeta)|\leqslant(1+\varepsilon)eA(z_0),$$

где $\varepsilon$ равномерно по всем $z_0\in\Gamma$ стремится к 0 при $n\to\infty$. Отсюда следует:

$$|P_n^{(k)}(z_0)|=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)}\frac{P_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\right|\leqslant(1+\varepsilon)ek!\frac{A(z_0)}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^k},$$

что и требовалось доказать.

## § 4. Обратная задача приближения функций в комплексной области

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть на множестве $\mathfrak{M}$ типа $(A^{**})$ задана некоторая функция $f(z)$. Тогда если при всяком натуральном $n \geqslant n_0$ найдется многочлен $P_n(z)$ степени не выше $n$ такой, что при всех $z \in C_1$ выполняется неравенство*

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant A_{48}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{r+\alpha}, \qquad (4.1)$$

*где $r$ — целое $\geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$ и $A_{48}$ — постоянная, одна и та же для $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$, то функция $f(z)$ является аналитической во всех внутренних точках $\mathfrak{M}$, непрерывной на $\mathfrak{M}$ и во всех точках $z \in \mathfrak{M}$ имеет $r$-ю производную $f^{(r)}(z)$, принадлежащую классу* $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Доказательство. Как известно [см., например, ([15])], достаточно доказать, что $f^{(r)}(z) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ в точках $z \in C_1$.

I. Рассмотрим сначала случай $r = 0$ и покажем, что если при $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$ для всех $z \in C_1$

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant A_{48}\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{\alpha}, \qquad (4.1')$$

то $f(z) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, т. е. для любой пары точек $z' \in C_1$ и $z'' \in C_1$ будем иметь:

$$|f(z'') - f(z')| \leqslant A_{49}|z'' - z'|^{\alpha},$$

где $A_{49}$ — постоянная.

Действительно, из (4.1′) следует, что в каждой точке $z \in C_1$

$$f(z) = P_{n_0}(z) + [P_{n_1}(z) - P_{n_0}(z)] + [P_{n_2}(z) - P_{n_1}(z)] + \ldots + [P_{n_{i+1}}(z) - P_{n_i}(z)] + \ldots = P_{n_0}(z) + U_{n_1}(z) + U_{n_2}(z) + \ldots + U_{n_{i+1}}(z) + \ldots, \qquad (4.2)$$

где

$$U_{n_{i+1}}(z) = P_{n_{i+1}}(z) - P_{n_i}(z), \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Оценивая многочлен $n_{i+1}$-й степени $U_{n_{i+1}}(z)$, в силу (4.1′) находим:

$$|U_{n_{i+1}}(z)| \leqslant |P_{n_{i+1}}(z) - f(z)| + |f(z) - P_{n_i}(z)| \leqslant 2A_{48}\left[\rho_{1+\frac{1}{n_i}}(z)\right]^{\alpha}. \qquad (4.3)$$

Пусть $z_1$ и $z_2$ — две произвольные точки кривой $C_1$, и пусть на дуге $\breve{z_1 z_2}$ кривой $C_1$ именно точка $z_2$ играет роль точки $z^*$ [см. (2.4)] (из процесса доказательства будет ясно, что от этого предположения мы ничего не теряем в общности); это значит, что при всех $z \in \breve{z_1 z_2}$

$$\rho_{1+\frac{1}{n}}(z) \leqslant A_6 \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_2), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и если $k_0$ выбрано так, что

$$\rho_{1+\frac{1}{n_{k_0+1}}}(z_2) < h \leqslant \rho_{1+\frac{1}{n_{k_0}}}(z_2),$$

где $h = |z_2 - z_1|$, то для произвольной точки $z \in \widetilde{z_1 z_2}$ будем иметь [см. (2.5)]:

$$\rho_{1+\frac{1}{n_{k_0}}}(z) > A_7' \rho_{1+\frac{1}{n_{k_0}}}(z_2) \geqslant A_7' h.$$

Выберем последовательность натуральных чисел $\{n_i\}$ так, чтобы при каждом $i = 0, 1, 2, \ldots$ выполнялось условие

$$\frac{1}{2^{i+1}} < \rho_{1+\frac{1}{n_i}}(z_2) < \frac{1}{2^i}. \tag{4.4}$$

Тогда, принимая во внимание (4.2), (4.3) и теорему 3.1, получим:

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leqslant |P_{n_0}(z_2) - P_{n_0}(z_1)| + \sum_{i=0}^{k_0-1} |U_{n_{i+1}}(z_2) - U_{n_{i+1}}(z_1)| +$$

$$+ \sum_{i=k_0}^{\infty} \{|U_{n_{i+1}}(z_2)| + |U_{n_{i+1}}(z_1)|\} \leqslant$$

$$\leqslant A_{50}|z_2 - z_1| + \sum_{i=0}^{k_0-1} \left| \int_{z_1}^{z_2} U'_{n_{i+1}}(\zeta)\, d\zeta \right| + 2A_{48}(1 + A_6^\alpha) \sum_{i=k_0}^{\infty} \left[\rho_{1+\frac{1}{n_i}}(z_2)\right]^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant A_{50}|z_2 - z_1| + \sum_{i=0}^{k_0-1} s(z_1, z_2) A_{51} \left[\rho_{1+\frac{1}{n_i}}(z_2)\right]^{\alpha-1} + 2A_{48}(1 + A_6^\alpha) \sum_{i=k_0}^{\infty} \frac{1}{2^{i\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant A_{50}|z_2 - z_1| + A_4 A_{51} h \sum_{i=1}^{k_0} 2^{i(1-\alpha)} + 2A_{48}(1 + A_6^\alpha) \frac{8^\alpha}{2^\alpha - 1} \frac{1}{2^{(k_0+2)\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant A_{50}|z_2 - z_1| + A_{52} h \frac{2^{k_0(1-\alpha)}}{2^{1-\alpha} - 1} + \frac{A_{53}}{2^\alpha - 1}\left[\rho_{1+\frac{1}{n_{k_0+1}}}(z_2)\right]^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant A_{50} h + \frac{A_{52} h}{2^{1-\alpha} - 1} \frac{1}{\left[\rho_{1+\frac{1}{n_{k_0}}}(z_2)\right]^{1-\alpha}} + \frac{A_{53} h^\alpha}{2^\alpha - 1} \leqslant$$

$$\leqslant A_{50} h + \left(\frac{A_{52}}{2^{1-\alpha} - 1} + \frac{A_{53}}{2^\alpha - 1}\right) h^\alpha < A_{54} h^\alpha,$$

и теорема для случая $r = 0$ полностью доказана.

II. Рассмотрим случай $r > 0$. Представим снова функцию $f(z)$ в виде [см. (4.2)]

$$f(z) = P_{n_0}(z) + U_{n_1}(z) + U_{n_2}(z) + \cdots + U_{n_{i+1}}(z) + \cdots, \tag{4.2'}$$

где последовательность $\{n_i\}$ выбрана так, чтобы удовлетворялись неравенства (4.4).

Каждый многочлен $U_{n_{i+1}}(z)$ в правой части этого равенства вследствие условия (4.1) удовлетворяет неравенству

$$|U_{n_{i+1}}(z)| \leqslant |P_{n_{i+1}}(z) - f(z)| + |f(z) - P_{n_i}(z)| \leqslant 2A_{48}\left[\rho_{1+\frac{1}{n_i}}(z)\right]^{r+\alpha}.$$

Поэтому если ряд (4.2') $r$ раз почленно продифференцировать, то получится ряд

$$f^{(r)}(z) = P_{n_0}^{(r)}(z) + U_{n_1}^{(r)}(z) + U_{n_2}^{(r)}(z) + \ldots + U_{n_{i+1}}^{(r)}(z) + \cdots,$$

в котором каждый член, вследствие теоремы 3.1, удовлетворяет неравенству:

$$|U_{n_{i+1}}^{(r)}(z)| \leqslant 2A_{48}A_{54}\left[\rho_{1+\frac{1}{n_i}}(z)\right]^{\alpha},$$

т. е. функция $f^{(r)}(z)$ представляется в виде равномерно сходящегося ряда, в котором общий член $U_{n_{i+1}}^{(r)}(z)$ удовлетворяет тому же неравенству (4.3), что и общий член ряда (4.2).

Отсюда, в силу рассуждений, проведенных для случая I, вытекает, что $f^{(r)}(z) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$. Этим теорема 4.1 полностью доказана.

Поступило
26. X. 1957

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jackson D., Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen, Dissertation, Göttingen, 1911.

[2] Jackson D., On approximation by trigonometric sums and polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 14 (1912), 491—515.

[3] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьковского матем. об-ва, 2-я серия, XIII, № 2—3 (1913), 49—144.

[4] Никольский С. М., О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 10 (1946), 295—317.

[5] Тиман А. Ф., Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами, Доклады Ак. наук СССР, 77 (1951), 969—972.

[6] Тиман А. Ф., Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси, Доклады Ак. наук СССР, 78 (1951), 17—20.

[7] Тиман А. Ф., Замечание к одной теореме С. М. Никольского, Успехи матем. наук, т. 12, в. 3 (75) (1957), 225—227.

[8] Дзядык В. К., О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip $\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) на конечном отрезке вещественной оси, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 623—642.

[9] Дзядык В. К., О приближении функций обыкновенными многочленами на конечном отрезке вещественной оси, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 22 (1958), 337—354.

[10] Потапов М. К., О теоремах типа Джексона в метрике $L_p$, Доклады Ак. наук СССР, 111, 6 (1956), 1185—1188.

[11] Тиман А. Ф., Исследования по теории приближения функций, Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, Днепропетровск, 1951.

[12] Бернштейн С. Н., Об оценках производных многочленов, Собр. соч., т. I. Конструктивная теория функций (1905—1930), АН СССР, (1952), 497—499.

[13] Szegö G., Über einen Satz von A. Markoff, Mathem. Zeitschr., 23 (1925), 45—61.

[14] Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949.

[15] Sewell W. E., Degree of approximation by polynomials in the complex domain, Princ. Univ. Press, London (1942), 1—236.

[16] Мергелян С. Н., Равномерные приближения функций комплексного переменного, Успехи матем. наук, т. 7, в. 2(48) (1952), 31—122.

[17] Warschawski S., Über das Verhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, Math. Zeitschr., 35 (1932), 321—456.

[18] Osgood W. F. and Taylor E. H., Conformal transformations on the boundaries of their regions of definition, Trans. Amer. Math. Soc., 14 (1913), 277—298.
[19] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, ГИТТЛ, М.— Л., 1950.
[20] Полиа Г. и Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, т. I, ГИТТЛ, М.- Л., 1956.
[21] Мергелян С. Н., Некоторые вопросы конструктивной теории функций, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XXXVII, 1951.
[22] Тиман А. Ф., Обратные теоремы конструктивной теории функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 5 (1957), 762—765.
[23] Дзядык В. К., Дальнейшее усиление теоремы Джексона о приближении обыкновенными многочленами непрерывных функций, Доклады Ак. наук СССР, 121, № 3 (1958), 403—406.
[24] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, ГИТТЛ, М.— Л., 1951.
[25] Lichtenstein L., Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen des elliptischen Typus, Math. Ann., 67 (1900), 559—575.

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

23 (1959), 737—770



А. В. ЕФИМОВ


## О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА


(*Представлено академиком* **И. Н. Векуа**)



Даются асимптотически точные равенства для верхних граней уклонений функции от ее сумм Валле-Пуссена, распространенных на классы функций с заданным модулем гладкости или с заданной мажорантой модуля непрерывности.


### § 1. Введение

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода $2\pi$,

$$S_n(f,\ x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

— частичные суммы ее ряда Фурье и

$$\sigma_{n,p}(f,\ x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} S_k(f,\ x) \quad (p = 0,\ 1, \ldots,\ n)$$

— суммы Валле-Пуссена функции $f(x)$. Через $V_{n,p}(f,\ x)$ обозначим уклонение функции от ее сумм Валле-Пуссена $\sigma_{n,p}(f,\ x)$:

$$V_{n,p}(f,\ x) = f(x) - \sigma_{n,p}(f,\ x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^{n} [f(x) - S_k(f,\ x)] =$$

$$= \frac{1}{4\pi(p+1)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+t)] \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt.$$

Под $\|f(x)\|$ мы будем понимать в дальнейшем норму функции $f(x)$ в пространстве непрерывных функций периода $2\pi$:

$$\|f(x)\| = \max_x |f(x)|.$$

Пусть, далее, $\omega_1(\delta)$ — заданная положительная функция, являющаяся модулем непрерывности [см. ([8])], т. е. удовлетворяющая условиям:

$$\omega_1(\delta) \text{ непрерывна при } \delta = 0, \qquad \omega(0) = 0,$$

и при $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2$

$$0 \leqslant \omega_1(\delta_2) - \omega_1(\delta_1) \leqslant \omega_1(\delta_2 - \delta_1),$$

а $\omega_2(\delta)$ — заданная положительная функция, являющаяся модулем гладкости для некоторой непрерывной функции $f_0(x)$ периода $2\pi$, т. е.

$$\omega_2(\delta) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \| \Delta_h^2 f_0(x) \| = \sup_{|h|\leqslant\delta} \| f_0(x+h) - 2f_0(x) + f_0(x-h) \|,$$

причем

$$\omega_2(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)\,\omega_2(\delta) \quad (\lambda > 0). \tag{1.1}$$

Будем говорить, что $f(x) \in MH_1^\omega$, если $f(x)$ имеет период $2\pi$ и ее модуль непрерывности

$$\omega_1(\delta, f) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \| f(x+h) - f(x) \|$$

удовлетворяет условию

$$\omega_1(\delta, f) \leqslant M\omega_1(\delta).$$

Далее, будем говорить, что $f(x) \in M\overline{H_2^\omega}$, если $f(x)$ имеет период $2\pi$ и ее модуль гладкости

$$\omega_2(\delta, f) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \| \Delta_h^2 f(x) \|$$

удовлетворяет условию

$$\omega_2(\delta, f) \leqslant M\omega_2(\delta),$$

где $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию (1.1).

Вместо $1\cdot H_1^\omega$ и $1\cdot \overline{H_2^\omega}$ условимся писать $H_1^\omega$ и $\overline{H_2^\omega}$.

Мы ставим своей задачей исследовать поведение верхних граней

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega) = \sup_{f\in H_1^\omega} \| V_{n,p}(f, x) \|, \quad \mathscr{E}_{V_{n,p}}(\overline{H_2^\omega}) = \sup_{f\in \overline{H_2^\omega}} \| V_{n,p}(f, x) \|, \tag{1.2}$$

т. е. верхних граней норм уклонений функции $f(x)$ от ее сумм Валле-Пуссена $\sigma_{n,p}(f, x)$, распространенных на классы функций $H_1^\omega$ и $\overline{H_2^\omega}$.

Асимптотически точные решения этой задачи для некоторых классов непрерывных функций при $p=0$ и $p=n$ (приближение суммами Фурье и суммами Фейера) были получены А. Н. Колмогоровым (4), В. Т. Пинкевичем (9), С. М. Никольским (6), (7), (8) и автором (1), (2), (3). А. Ф. Тиман (11) получил асимптотически точное решение задачи при $p=o(n)$ для функций, $r$-я производная в смысле Вейля которых удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha$, т. е. для класса $W^rH_1^\alpha$, а также для сопряженного класса $\overline{W^rH_1^\alpha}$. Им было показано, что если $p=o(n)$, $r\geqslant 0$ и $0<\alpha\leqslant 1$, то

$$\left.\begin{matrix}\mathscr{E}_{V_{n,p}}(W^rH_1^\alpha)\\ \mathscr{E}_{V_{n,p}}(\overline{W^rH_1^\alpha})\end{matrix}\right\} = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \ln\frac{n}{p+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

А. Д. Щербина ([12]) доказала, что если $|\varphi(t)|\leqslant 1$ и $\bar{\varphi}(t)$ — сопряженная функция, то

$$\sup_{|\varphi|\leqslant 1}\|V_{n,p}(\bar{\varphi}, x)\| = \sup_{|\varphi|\leqslant 1}\|\bar{\varphi}(x)-\bar{\sigma}_{n,p}(\varphi, x)\| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n}{p+1}+O(1).$$

В настоящей работе даются асимптотически точные равенства для $\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_1^{\omega})$ и $\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^{\omega})$ при $\omega_2(h)=h^{\alpha}$ $(0<\alpha\leqslant 1)$.

Положим

$$C_i^{(n)}(\omega)=\sup_{f\in H_i^{\omega}}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx\right| \quad (i=1,2),$$

т. е. $C_i^{(n)}(\omega)$ — это верхняя грань $n$-го коэффициента Фурье. В случае, когда

$$\omega_i(h)=h^{\alpha}, \quad 0<\alpha\leqslant 1 \qquad (i=1,\ 2),$$

мы будем писать $C_i^{(n)}(\alpha)$ (а классы, соответственно, обозначать через $H_i^{\alpha}$).

В дальнейшем под символом $O(\varphi(n))$ мы будем понимать такую функцию $\Phi(f,\ x,\ n,\ p)$, для которой существует абсолютная постоянная $C$, удовлетворяющая неравенству

$$|\Phi(f,\ x,\ n,\ p)|\leqslant C\varphi(n)$$

равномерно для всех функций $f(x)$ из указанного класса, для всех $x$, $n$ и $p$ в указанных пределах.

Ниже доказывается (теорема А), что для всех $0\leqslant p\leqslant n-1$ справедливо асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_1^{\omega})=A_{n,p}(\omega)+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{1.3}$$

где

$$A_{n,p}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln\dfrac{n}{p+1} & \text{при } 0\leqslant p\leqslant \frac{1}{2}n,\\[2ex] \dfrac{2}{\pi(p+1)}\displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}}\frac{\omega_1(t)}{t^2}dt & \text{при } \frac{1}{2}n\leqslant p\leqslant n-1.\end{cases}$$

Далее, доказывается (теорема В), что при всех $0\leqslant p\leqslant n-1$ и $0<\alpha\leqslant 1$ справедливо асимптотическое равенство

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^{\alpha})=B_{n,p}(\alpha)+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \tag{1.4}$$

где

$$B_{n,p}(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{C_2^{(n)}(\alpha)}{\pi}\ln\dfrac{n}{p+1}+O\left(\dfrac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right) & \text{при } 0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n,\quad 0<\alpha\leqslant 1,\\ O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right) & \text{при } \frac{1}{2}n\leqslant p\leqslant n-1,\quad 0<\alpha<1,\\ \dfrac{1}{\pi(p+1)}\ln\dfrac{n+1}{n-p} & \text{при } \frac{1}{2}n\leqslant p\leqslant n-1,\quad \alpha=1.\end{cases}$$

Доказывается (леммы 4 и 5), что экстремальные функции, осуществляющие асимптотические равенства (1.3) и (1.4) при $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$, зависят только от $n$, но не зависят от $p$, т. е. являются экстремальными функциями для приближений суммами Фурье, а экстремальные функции, осуществляющие равенства (1.3) и (1.4) при $\frac{1}{2}n\leqslant p\leqslant n-1$, не зависят ни от $n$, ни от $p$.

Выражаю глубокую благодарность С. Б. Стечкину за постановку задач и за ценные советы и указания, использованные мною при выполнении настоящей работы.

## § 2. Вспомогательные предложения

Напомним, прежде всего, некоторые известные свойства модулей непрерывности и модулей гладкости, а также свойства функций классов $H_1^\omega$ и $\widetilde{H_2^\omega}$.

1. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода $2\pi$ и

$$\omega_i(h,\ f)=\sup_{|\delta|\leqslant h}\|\Delta_\delta^i f(x)\|\quad (i=1,\ 2),$$

где

$$\Delta_\delta^1 f(x)=f(x+\delta)-f(x)$$

и

$$\Delta_\delta^2 f(x)=f(x+\delta)-2f(x)+f(x-\delta).$$

Тогда для любого $\lambda>0$ $(\lambda h<1)$

$$\omega_i(\lambda h,\ f)\leqslant(\lambda+1)^i\omega_i(h,\ f). \tag{2.1}$$

2. Пусть $P_{n-1}(x)$ — тригонометрический полином порядка $n-1$ и

$$E_n(f)=\inf_{P_{n-1}}\|f(x)-P_{n-1}(x)\|=\|f(x)-P_{n-1}^*(x)\|.$$

Тогда

$$E_n(f)=\|f(x)-P_{n-1}^*(x)\|\leqslant c\omega_2\left(\frac{1}{n},\ f\right). \tag{2.2}$$

3. Пусть $\|f(x)-P_n(x)\|\leqslant c\omega_2\left(\frac{1}{n},\ f\right)$. Тогда

$$\|P_n''(x)\|\leqslant c_1n^2\omega_2\left(\frac{1}{n},\ f\right) \tag{2.3}$$

и

$$\omega_2\left(\frac{1}{n},\ P_n\right)\leqslant c_2\omega_2\left(\frac{1}{n},\ f\right), \tag{2.4}$$

где $c$, $c_1$, $c_2$ — некоторые абсолютные постоянные.

Свойство 1 доказано А. Маршо ([5]) [см. также ([10])], а свойства 2 и 3 — С. Б. Стечкиным ([10]).

ЛЕММА 1. *Пусть* $f(x)\in \overline{H_2^{\omega}}$, $p$ *и* $n$ — *целые числа*, $0\leqslant\gamma\leqslant\mathrm{const}$. *Тогда для всех* $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$ *справедлива оценка*

$$I=\frac{1}{p+1}\int\limits_{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty}[f(x+t)-2f(x)+$$

$$+f(x-t)]\,\frac{\cos(n-p)t-\cos(n+1)t}{t^2}\,dt=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Так как $f(x)\in \overline{H_2^{\omega}}$, то

$$\omega_2(h,\ f)\leqslant\omega_2(h). \tag{2.5}$$

Заменим функцию $f(x)$ ее полиномом наилучшего приближения $P_n(x)$. Тогда, в силу (2.2) и (2.5), будем иметь:

$$f(x+t)-2f(x)+f(x-t)=P_n(x+t)-2P_n(x)+P_n(x-t)+$$
$$+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n},\ f\right)\right)=\psi_n(t)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где

$$\psi_n(t)=P_n(x+t)-2P_n(x)+P_n(x-t).$$

Так как

$$\frac{1}{p+1}\int\limits_{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty}\frac{dt}{t^2}=O(1)$$

равномерно по $n$ и $p$, то

$$I=\frac{1}{p+1}\int\limits_{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty}\frac{\psi_n(t)}{t^2}[\cos(n-p)t-\cos(n+1)t]\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$
$$=I_1+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Дважды интегрируя по частям, получаем:

$$I_1=\frac{1}{p+1}\int\limits_{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty}\frac{\psi_n(t)}{t^2}[\cos(n-p)t-\cos(n+1)t]\,dt=$$

$$= \frac{1}{p+1} \Big|_{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty} \frac{\psi_n(t)}{t^2}\left[\frac{\sin(n-p)t}{n-p} - \frac{\sin(n+1)t}{n+1}\right] -$$

$$-\frac{1}{p+1}\int_{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty}\left[\frac{\psi'_n(t)}{t^2}-\frac{2\psi_n(t)}{t^3}\right]\left[\frac{\sin(n-p)t}{n-p}-\frac{\sin(n+1)t}{n+1}\right]dt =$$

$$= -\frac{\psi_n'\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}\right)}{(p+1)\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}\right)^2}\left[\frac{\sin(n-p)\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}\right)}{n-p}-\frac{\sin(n+1)\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}\right)}{n+1}\right]+$$

$$+\frac{1}{p+1}\Big|_{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty}\left[\frac{\psi'_n(t)}{t^2}-\frac{2\psi_n(t)}{t^3}\right]\left[\frac{\cos(n-p)t}{(n-p)^2}-\frac{\cos(n+1)t}{(n+1)^2}\right]-$$

$$-\frac{1}{p+1}\int_{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty}\left[\frac{\psi''_n(t)}{t^2}-\frac{4\psi_n(t)}{t^3}+\frac{6\psi_n(t)}{t^4}\right]\left[\frac{\cos(n-p)t}{(n-p)^2}-\frac{\cos(n+1)t}{(n+1)^2}\right]dt. \tag{2.6}$$

**Учитывая (2.4), (2.5) и (1.1), находим:**

$$\left|\psi_n\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}\right)\right| = \left|\Delta^2_{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}} P_n(x)\right| \leqslant \omega_2\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n},\ P_n\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\,\omega_2\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n},\ f\right) \leqslant c\,\omega_2\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}\right) = c\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\left[\frac{2\pi n}{p+1}-\gamma\pi\right]\right) \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\frac{2\pi n}{p+1}-\gamma\pi+1\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

($c$ — **абсолютная постоянная**), т. е.

$$\left|\psi_n\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}\right)\right| = O\left(\frac{n}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2.7}$$

**Далее, в силу (2.3),**

$$\left|\psi_n'\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}\right)\right| = \left|P_n'\left(x+\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}\right)-P_n'\left(x-\frac{2\pi}{p+1}+\frac{\gamma\pi}{n}\right)\right| =$$

$$= 4\left(\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}\right)\left|P_n''\left(x+\frac{2\theta\pi}{p+1}\right)\right| \leqslant \frac{cn^2\omega_2\left(\frac{1}{n},\ f\right)}{p+1} \leqslant \frac{cn^2\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{p+1} \quad (|\theta|<1) \tag{2.8}$$

и [см. ([2]), стр. 96]

$$\left|\frac{\psi''_n(t)}{t^2}-\frac{4\psi'_n(t)}{t^3}+\frac{6\psi_n(t)}{t^4}\right| = O\left(\frac{n^2\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{t^2}\right). \tag{2.9}$$

Таким образом, из (2.6), учитывая (2.7), (2.8), (2.9) и то, что при $p<\frac{1}{2}n$ $\frac{1}{n-p}=O\left(\frac{1}{n}\right)$, получаем:

$$I_1=O\left((p+1)\frac{n}{p+1}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right)+O\left((p+1)\left[\frac{n^2\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{p+1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(p+1)\frac{n}{p+1}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right]\frac{1}{n^2}\right)+O\left(\frac{1}{p+1}\int\limits_{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty}\frac{n^2\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{t^2}\frac{1}{n^2}dt\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

равномерно для всех функций $f\in H_2^{\overline{\omega}}$ и $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$, т. е.

$$I=I_1+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Лемма установлена.

Для удобства дальнейших доказательств введем классы $M\widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$.

Будем говорить, что $\varphi(x)\in M\widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$, если $\varphi(x)$ может быть представлена в форме

$$\varphi(x)=f(x)+ax+b,$$

где $a$ и $b$ — постоянные, а $f(x)\in MH_2^{\overline{\omega}}$. Автором (3) доказано, что если $f(x)\in\widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$ и $f(0)=f(d)=0$, то для любых $x\in[0, d]$

$$f(x)=O\left(\ln\frac{2d}{x}\omega_2(x)\right). \tag{2.10}$$

Там же (лемма 2 и ее следствия) установлено, что если $f(x)\in\widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$ или $f(x)\in H_1^{\omega}$, то равномерно относительно $n$

$$\sup_{f\in\widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2m\pi}{n}}f(x)\cos nx\,dx\right|=\frac{m}{n}C_2^{(n)}(\omega)+O\left(\frac{\ln(m+1)}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2.11}$$

$$\sup_{f\in H_1^{\omega}}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{2m\pi}{n}}f(x)\cos nx\,dx\right|=\frac{m}{n}C_1^{(n)}(\omega)+O\left(\frac{\ln(m+1)}{n}\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{2.12}$$

и для любых целых $m$ и $n$

$$\int\limits_0^{\frac{2m\pi}{n}}f(x)\cos nx\,dx=O\left(\frac{m}{n}C_i^{(n)}(\omega)\right)\quad(i=1,\ 2), \tag{2.13}$$

где

$$C_i^{(n)}(\omega)=O\left(\omega_i\left(\frac{1}{n}\right)\right)\quad(i=1,\ 2). \tag{2.14}$$

ЛЕММА 2. *Пусть* $f(x)\in \widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$, $f(0)=0$, $m$ — *целое. Тогда для всех* $k=0, 1, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]$

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}}\frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{u} f(t)\sin mt\,dt=O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)$$

*равномерно относительно* $f\in \widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$, $f(0)=0$.

Доказательство. Мы имеем:

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}}\frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{u} f(t)\sin mt\,dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}} f(t)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}}\right)\sin mt\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}} f\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}-z\right)\frac{z\cos mz}{\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}\right)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}-z\right)}\,dz=$$

$$=\frac{m}{2\pi\left(k+\frac{5}{4}\right)}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}}\left[f\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}-z\right)-\frac{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}-z}{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}}\times\right.$$

$$\left.\times f\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}\right)\right]\frac{z\cos mz}{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}-z}\,dz\,.$$

Но функция

$$\psi_k(z)=f\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}-z\right)-\frac{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}-z}{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}}\,f\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}\right)$$

удовлетворяет условиям

$$\psi_k(z)\in \widetilde{H}_2^{\overline{\omega}},\quad \psi_k(0)=\psi_k\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}\right)=0$$

и, в силу (2.10), для $0<z\leqslant\frac{2\pi}{m}$

$$\psi_k(z)=O\left(\ln\frac{k+2}{mz}\,\omega_2(z)\right).$$

Следовательно,

$$I = O\left(\frac{m}{k+1}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}} \ln\frac{k+2}{mz}\,\omega_2(z)\frac{z}{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}\,dz\right) =$$

$$= O\left(\frac{m^2}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}} z\,\ln\frac{k+2}{mz}\,dz\right) = O\left(\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right),$$

и лемма установлена.

ЛЕММА 3. *Пусть* $\mu(x)\in\widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$, $\mu(0)=\mu\left(\frac{2\pi}{p+1}\right)=0$, $k$, $p$, *и* $n$ — *целые числа,* $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$, $1\leqslant k\leqslant k_0=\left[\frac{2n-p+1}{2(p+1)}-\frac{1}{4}\right]$. *Тогда*

$$I_k = \int\limits_{\frac{\pi}{2(2n-p+1)}}^{\frac{\pi}{2(2n-p+1)}+\frac{2k\pi}{2n-p+1}} [\mu(2t)+\mu(-2t)]\sin(2n-p+1)t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}} [\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt +$$

$$+ O\left(\frac{(p+1)k^2}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{n}{(p+1)k}\right)$$

*равномерно относительно всех функций* $\mu(x)\in\widetilde{H}_2^{\overline{\omega}}$, $\mu(0)=\mu\left(\frac{2\pi}{p+1}\right)=0$.

Доказательство. Мы имеем:

$$I_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n-p+1}}^{\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}} [\mu(t)+\mu(-t)]\sin\frac{2n-p+1}{2}t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n-p+1}}^{\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}} [\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n-p+1}}^{\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}} [\mu(t)+\mu(-t)]\left[\sin\left(n-\frac{p-1}{2}\right)t-\sin nt\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}} [\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n-p+1}} [\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}}[\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt-$$

$$-\int\limits_{0}^{\frac{8k\pi}{4n-p+1}}[\mu(t)+\mu(-t)]\cos\frac{4n-p+1}{4}t\sin\frac{p-1}{4}tdt+$$

$$+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2n-p+1}}[\mu(t)+\mu(-t)]\cos\frac{4n-p+1}{4}t\sin\frac{p-1}{4}tdt-$$

$$-\int\limits_{\frac{8k\pi}{4n-p+1}}^{\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}}[\mu(t)+\mu(-t)]\cos\frac{4n-p+1}{4}t\sin\frac{p-1}{4}tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}[\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt-\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{2}A_2-A_3+A_4-A_5.$$

Так как $\mu(t)\in\widetilde{H}_2^{\ddot{\omega}}$ и $\mu(0)=\mu\left(\frac{2\pi}{p+1}\right)=0$, то, в силу (2.10), для всех $0\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{p+1}$

$$\mu(t)=O\left(\ln\frac{4\pi}{(p+1)t}\omega_2(t)\right),$$

а отсюда и из условия

$$|\mu(t)-2\mu(0)+\mu(-t)|\leqslant\omega_2(t)$$

получаем, что и

$$\mu(-t)=O\left(\ln\frac{4\pi}{(p+1)t}\omega_2(t)\right),$$

т. е. для всех $-\frac{2\pi}{p+1}\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{p+1}$

$$\mu(t)=O\left(\ln\frac{4\pi}{(p+1)|t|}\omega_2(|t|)\right). \tag{2.15}$$

Далее, для всех $0\leqslant k\leqslant k_0$ и при любом $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$ имеем:

$$\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}-\frac{\pi+4k\pi}{2n}=(\pi+4k\pi)\frac{p-1}{2n(2n-p+1)}=O\left(\frac{(p+1)(k+1)}{n^2}\right) \tag{2.16}$$

и

$$\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}-\frac{8k\pi}{4n-p+1}=\pi\frac{(4k-1)(p-1)+4n}{(2n-p+1)(4n-p+1)}=O\left(\frac{(p+1)k+n}{n^2}\right). \tag{2.17}$$

Используя (2.15) и (2.16), получаем:

$$A_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n-p+1}} [\mu(t) + \mu(-t)] \sin nt\, dt = O\left(\frac{p+1}{n^2} \ln \frac{4\pi}{(p+1)\frac{\pi}{2n}}\, \omega_2\left(\frac{\pi}{2n-p+1}\right)\right) =$$

$$= O\left(\frac{p+1}{n^2} \ln \frac{n}{p+1}\, \omega_2\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}\left[1 + \frac{p-1}{2n-p+1}\right]\right)\right) = 0\left(\frac{p+1}{n^2} \ln \frac{n}{p+1}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и

$$A_2 = \int\limits_{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}} [\mu(t) + \mu(-t)] \sin nt\, dt = O\left(\frac{(p+1)(k+1)}{n^2} \ln \frac{4\pi}{(p+1)\frac{2(k+1)\pi}{n}} \times\right.$$

$$\left.\times\, \omega_2\left(\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}\right)\right) = O\left(\frac{(p+1)(k+1)}{n^2} \ln \frac{n}{(p+1)(k+1)}\, \omega_2\left(\frac{k}{n}\right)\right) =$$

$$= O\left(\frac{(p+1)(k+1)^2}{n^2} \ln \frac{n}{(p+1)(k+1)}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Далее, в силу (2.15) и условия $\sin z \leqslant z$, имеем:

$$A_4 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n-p+1}} [\mu(t) + \mu(-t)] \cos \frac{4n-p+1}{4} t \sin \frac{p-1}{4} t\, dt =$$

$$= O\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n-p+1}} \ln \frac{4\pi}{(p+1)t}\, \omega_2(t) \frac{p+1}{2n-p+1}\, dt\right) =$$

$$= O\left(\omega_2\left(\frac{\pi}{2n-p+1}\right) \frac{p+1}{2n-p+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2n-p+1}} \left(t \ln \frac{4\pi}{(p+1)t} + t\right)\right) =$$

$$= O\left(\frac{p+1}{n^2} \ln \frac{n}{p+1}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Учитывая (2.15) и (2.17), получаем:

$$A_5 = \int\limits_{\frac{8k\pi}{4n-p+1}}^{\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}} [\mu(t) + \mu(-t)] \cos \frac{4n-p+1}{4} t \sin \frac{p-1}{4} t\, dt =$$

$$= O\left(\frac{(p+1)k+n}{n^2} \ln \frac{4\pi}{(p+1)\frac{8k\pi}{4n-p+1}}\, \omega_2\left(\frac{\pi+4k\pi}{2n-p+1}\right) \frac{(p+1)k}{2n-p+1}\right) =$$

$$= O\left(\frac{(p+1)k^2}{n^2} \ln \frac{n}{(p+1)k}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{(p+1)k^2}{n^2} \ln \frac{n}{(p+1)k}\, \omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

так как для $1 \leqslant k \leqslant k_0$ $\frac{(p+1)k}{2n-p+1} \leqslant 1$ и, в силу (1.1), для $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}n$

$$\omega_2\left(\frac{k}{2n-p+1}\right) = O\left(k\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$I_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}} [\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt - A_3 +$$

$$+ O\left(\frac{(p+1)k^2}{n^2}\ln\frac{n}{(p+1)k}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Учитывая, что

$$\sin\frac{p-1}{4}t = \frac{p-1}{4}\int\limits_0^t \cos\frac{p-1}{4}u\,du,$$

находим:

$$A_3 = \int\limits_0^{\frac{8k\pi}{4n-p+1}} [\mu(t)+\mu(-t)]\cos\frac{4n-p+1}{4}t\sin\frac{p-1}{4}t\,dt =$$

$$= \frac{p-1}{4}\int\limits_0^{\frac{8k\pi}{4n-p+1}} [\mu(t)+\mu(-t)]\cos\frac{4n-p+1}{4}t\,dt\int\limits_0^t \cos\frac{p-1}{4}u\,du =$$

$$= \frac{p-1}{4}\int\limits_0^{\frac{8k\pi}{4n-p+1}} \cos\frac{p-1}{4}u\,du\int\limits_u^{\frac{8k\pi}{4n-p+1}} [\mu(t)+\mu(-t)]\cos\frac{4n-p+1}{4}t\,dt =$$

$$= \frac{p-1}{4}\sum_{\nu=0}^{k-1}\int\limits_{\frac{8\nu\pi}{4n-p+1}}^{\frac{8(\nu+1)\pi}{4n-p+1}} \cos\frac{p-1}{4}u\,du\left\{\int\limits_u^{\frac{8(\nu+1)\pi}{4n-p+1}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\frac{8(\nu+1)\pi}{4n-p+1}}^{\frac{8k\pi}{4n-p+1}} [\mu(t)+\mu(-t)]\cos\frac{4n-p+1}{4}t\,dt\right\} =$$

$$= (p-1)\sum_{\nu=0}^{k-2}\int\limits_{\frac{8\nu\pi}{4n-p+1}}^{\frac{8(\nu+1)\pi}{4n-p+1}} \cos\frac{p-1}{4}u\,du\int\limits_{\frac{2(\nu+1)\pi}{4n-p+1}}^{\frac{2k\pi}{4n-p+1}} [\mu(4t)+\mu(-4t)]\cos(4n-p+1)t\,dt +$$

$$+ \frac{p-1}{4}\sum_{\nu=0}^{k-1}\int\limits_{\frac{8\nu\pi}{4n-p+1}}^{\frac{8(\nu+1)\pi}{4n-p+1}} \cos\frac{p-1}{4}u\,du\int\limits_u^{\frac{8(\nu+1)\pi}{4n-p+1}} [\mu(t)+\mu(-t)]\cos\frac{4n-p+1}{4}t\,dt =$$

$$= (p-1)\sum\nolimits_1 + \frac{p-1}{4}\sum\nolimits_2.$$

Применяя (2.13) и (2.14), получаем:

$$(p-1)\sum\nolimits_1 = O\left(\frac{p+1}{n}\sum_{\nu=0}^{k-2}\frac{k-\nu-1}{4n-p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= O\left(\frac{(p+1)\,k^2}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{(p+1)\,k^2}{n^2}\ln\frac{n}{(p+1)\,k}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Наконец, в силу (2.15),

$$\frac{p-1}{4}\sum\nolimits_2 = O\left(\frac{p+1}{4n-p+1}\sum_{\nu=0}^{k-1}\int\limits_{\frac{8\nu\pi}{4n-p+1}}^{\frac{8(\nu+1)\pi}{4n-p+1}}\ln\frac{4\pi}{(p+1)\,t}\,\omega_2(t)\,dt\right) =$$

$$= O\left(\frac{p+1}{n}\,\omega_2\left(\frac{8\pi}{4n-p+1}\right)\int\limits_0^{\frac{8\pi}{4n-p+1}}\ln\frac{1}{(p+1)\,t}\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{p+1}{n}\sum_{\nu=1}^{k-1}\omega_2\left(\frac{8(\nu+1)\pi}{4n-p+1}\right)\ln\frac{4\pi}{(p+1)\,\frac{8\nu\pi}{4n-p+1}}\cdot\frac{1}{4n-p+1}\right) =$$

$$= O\left(\frac{p+1}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{n}{p+1}\right) + O\left(\frac{p+1}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{\nu=1}^{k-1}\nu\ln\frac{n}{(p+1)\,\nu}\right) =$$

$$= O\left(\frac{p+1}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{n}{p+1}\right) + O\left(\frac{(p+1)\,k^2}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{n}{(p+1)\,k}\right),$$

так как

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}\nu\ln\frac{n}{(p+1)\,\nu} \leqslant \int\limits_0^k x\ln\frac{n}{(p+1)\,x}\,dx =$$

$$= O\left(k^2\ln\frac{n}{(p+1)\,k} + \ln\frac{n}{p+1}\right) = O\left(k^2\ln\frac{n}{(p+1)\,k}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{p-1}{4}\sum\nolimits_2 = O\left(\frac{(p+1)\,k^2}{n^2}\ln\frac{n}{(p+1)\,k}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

и

$$A_3 = O\left(\frac{(p+1)\,k^2}{n^2}\ln\frac{n}{(p+1)\,k}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$I_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}[\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt + O\left(\frac{(p+1)\,k^2}{n^2}\ln\frac{n}{(p+1)\,k}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и мы получили утверждение леммы.

## § 3. Приближение суммами Валле-Пуссена, близкими к суммам Фурье

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $f(x) \in H_2^{\bar{\omega}}$. *Тогда при всех* $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2} n$ *для уклонения функции* $f(x)$ *от ее сумм Валле-Пуссена* $\sigma_{n,p}(f, x)$ *справедливо равенство:*

$$V_{n,p}(f, x) = -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[ f\left(x + \frac{t}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(x - \frac{t}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos t dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

*равномерно относительно* $f(x) \in H_2^{\bar{\omega}}$ *и* $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2} n$, *где* $k_0 = \left[\frac{2n-n+1}{2(p+1)} - \frac{1}{4}\right]$.

Доказательство. Мы имеем:

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{4\pi(p+1)} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+t)] \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt.$$

Используя формулу

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(k\pi + \frac{t}{2}\right)^2} = 4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi + t)^2}$$

и периодичность функции $f(x)$, получим:

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(x+t)] \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi(p+1)} \int_0^{\infty} [2f(x) - f(x+t) - f(x-t)] \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi(p+1)} \int_0^{\frac{2\pi}{p+1} - \frac{\gamma\pi}{n}} [2f(x) - f(x+t) - f(x-t)] \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{2\pi}{p+1} - \frac{\gamma\pi}{n}}^{\infty} [2f(x) - f(x+t) - f(x-t)] \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2} dt,$$

где $\gamma$ выбрано так, что

$$\frac{\gamma}{n} = \frac{2}{p+1} - \frac{4k_0}{2n-p+1},$$

т. е. $\gamma = O(1)$. Последнее слагаемое, в силу леммы 1, есть $O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,

т. е.

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{\pi(p+1)} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}} [2f(x) - f(x+t) - f(x-t)]$$

$$\times \frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Рассмотрим функцию

$$\mu_x(t) = \mu(t) = f(x+t) + at + b, \qquad \mu(t) \in \widetilde{H}_2^{\widetilde{\omega}}, \tag{3.1}$$

где $a$ и $b$ выбраны так, что

$$\mu(0) = \mu\left(\frac{2\pi}{p+1}\right) = 0,$$

и, следовательно, в силу (2.10), для всех $t \in \left[0, \frac{2\pi}{p+1}\right]$

$$\mu(t) = O\left(\ln\frac{4\pi}{(p+1)t}\,\omega_2(t)\right);$$

отсюда и из условия

$$|\mu(t) - 2\mu(0) + \mu(-t)| \leqslant \omega_2(t)$$

получаем, что и

$$\mu(-t) = O\left(\ln\frac{4\pi}{(p+1)t}\,\omega_2(t)\right). \tag{3.2}$$

Так как

$$f(x+t) - 2f(x) + f(x-t) = \mu(t) - 2\mu(0) + \mu(-t) = \mu(t) + \mu(-t),$$

то, полагая

$$\nu(t) = -\mu(t) - \mu(-t), \qquad \nu(t) \in 2\widetilde{H}_2^{\widetilde{\omega}},$$

находим:

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{1}{\pi(p+1)} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}} \nu(t)\frac{\cos(n-p)t - \cos(n+1)t}{t^2} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi(p+1)} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}} \nu(t)\frac{\sin\frac{2n-p+1}{2}t\,\sin\frac{p+1}{2}t}{t^2} dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Обозначим

$$2n - p + 1 = m, \qquad m = O(n).$$

Тогда

$$V_{n,p}(f,x)=\frac{2}{\pi(p+1)}\left\{\int\limits_0^{\frac{\pi}{m}}+\int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}}\nu(t)\,\frac{\sin\frac{m}{2}t\sin\frac{p+1}{2}t}{t^2}\,dt\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi(p+1)}\{I_1+I_2\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Так как для $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{m}$

$$|\nu(t)|=|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|\leqslant\omega_2(t,f)\leqslant\omega_2\left(\frac{\pi}{m},f\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

то

$$\left|\frac{1}{\pi(p+1)}I_1\right|\leqslant\frac{1}{\pi(p+1)}\int\limits_0^{\frac{\pi}{m}}|\nu(t)|\,\frac{\frac{m}{2}t\,\frac{p+1}{2}t}{t^2}\,dt=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Согласно выбору $\gamma$ и обозначению $k_0$,

$$\frac{2\pi}{p+1}-\frac{\gamma\pi}{n}=\frac{\pi}{m}+\frac{4\pi\left[\frac{m}{2(p+1)}-\frac{1}{4}\right]}{m}=\frac{\pi}{m}+\frac{4k_0\pi}{m}.$$

Следовательно,

$$V_{n,p}(f,x)=\frac{2}{\pi(p+1)}\int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m}+\frac{4k_0\pi}{m}}\nu(t)\,\frac{\sin\frac{m}{2}t\sin\frac{p+1}{2}t}{t^2}\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi(p+1)}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}}\nu(2t)\,\frac{\sin mt\sin(p+1)t}{t^2}\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Далее, так как

$$\frac{\sin(p+1)t}{(p+1)t^2}=\int\limits_t^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}}\left[2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\cos(p+1)u\right]\frac{du}{u^2}+\frac{\sin(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}\right)}{(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}\right)^2},$$

то

$$V_{n,p}(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}}\nu(2t)\sin mt\,dt\,\times$$

$$\times\left\{\int\limits_t^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}}\left[2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\cos(p+1)u\right]\frac{du}{u^2}+\right.$$

$$+\left.\frac{\sin(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}\right)}{(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}\right)^2}\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}}\left[2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\cos(p+1)u\right]\frac{du}{u^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{u}\nu(2t)\sin mt\,dt+$$

$$+O\left(\frac{\sin(p+1)\,\frac{\gamma\pi}{2n}\,m^2}{(p+1)\,k_0^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}}\nu(2t)\sin mt\,dt\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Учитывая, что $k_0=O\left(\frac{m}{p+1}\right)$ и используя (2.13) и (2.14), получаем для второго слагаемого:

$$\frac{\sin(p+1)\,\frac{\gamma\pi}{2n}\,m^2}{(p+1)\,k_0^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}}\nu(2t)\sin mt\,dt=$$

$$=O\left(\frac{\frac{p+1}{n}\cdot m^2k_0}{(p+1)\,k_0^2\cdot m}\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)=O\left(\frac{m}{nk_0}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=O\left(\frac{p+1}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$V_{n,p}(f,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k_0\pi}{m}}\left[2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\cos(p+1)u\right]\frac{du}{u^2}\times$$

$$\times\int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{u}\nu(2t)\sin mt\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{k_0-1}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}}\left[2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u}-\cos(p+1)u\right]\frac{du}{u^2}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}+\int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{u}\nu(2t)\sin mt\,dt\right\}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k_0-1} \int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}} \left[2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u\right] \frac{du}{u^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}} \nu(2t)\sin mt\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{k_0-1} \int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}} \left[2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u\right] \frac{du}{u^2} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{u} \nu(2t)\sin mt\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\sum\nolimits_1 + \frac{1}{\pi}\sum\nolimits_2 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Но

$$2\,\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u = 1 + O\left((p+1)^2 u^2\right),$$

поэтому, учитывая (2.13) и (2.14), находим:

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k=1}^{k_0-1} \int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}} \left[1 + O\left((p+1)^2 u^2\right)\right] \frac{du}{u^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}} \nu(2t)\sin mt\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0-1} \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}} - \frac{1}{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}} \right) \int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}} \nu(2t)\sin mt\,dt +$$

$$+ O\left((p+1)^2 \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{m}\,\frac{k}{m}\,C_2^{(n)}(\omega)\right) =$$

$$= \frac{m}{2\pi} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{\left(k+\frac{1}{4}\right)\left(k+\frac{5}{4}\right)} \int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}} \nu(2t)\sin mt\cdot dt + O\left(\frac{(p+1)^2}{m^2}\,k_0^2\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{m}{2\pi} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}} \nu(2t)\sin mt\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{m}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}} \nu(2t)\sin mt\,dt + \frac{1}{\pi}\sum\nolimits_2 + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Для оценки $\sum_2$ представим эту сумму в следующем виде:

$$\sum_2 = \sum_{k=0}^{k_0-1} \int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}} \left[2\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u - 2\frac{\sin(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}\right)}{(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}\right)} + \right.$$

$$\left. + \cos(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}\right)\right]\frac{du}{u^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{u} \nu(2t)\sin mt\,dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_0-1}\left[2\frac{\sin(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}\right)}{(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}\right)} - \cos(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}\right)\right] \int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}} \frac{du}{u^2} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{u} \nu(2t)\sin mt\,dt = \sum_3 + \sum_4.$$

Так как для всех $u$

$$2\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u = O(1),$$

то, применяя лемму 2 и учитывая, что $\frac{1}{m} = O\left(\frac{1}{n}\right)$, получаем:

$$\sum_4 = O\left(\sum_{k=0}^{k_0-1}\frac{\ln(k+2)}{(k+1)^2}\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Далее, применяя теорему Лагранжа, для $\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}$ и $u_k = \frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+\theta)\pi}{m} = O\left(\frac{k+1}{m}\right)$ $(\theta<1)$ находим:

$$2\frac{\sin(p+1)u}{(p+1)u} - \cos(p+1)u - 2\frac{\sin(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}\right)}{(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}\right)} +$$

$$+ \cos(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}\right) = \left(u - \frac{\pi}{2m} - \frac{2k\pi}{m}\right) \times$$

$$\times \left[2\frac{(p+1)u_k\cos(p+1)u_k - \sin(p+1)u_k}{(p+1)u_k^2} + (p+1)\sin(p+1)u_k\right] =$$

$$= O\left(\frac{1}{m}\left[\frac{(p+1)u_k(1+O((p+1)^2u_k^2)) - (p+1)u_k + O(p+1)^3u_k^3)}{(p+1)u_k^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + O((p+1)^2u_k)\right]\right) = O\left(\frac{1}{m}[(p+1)^2u_k + (p+1)^2u_k]\right) = O\left(\frac{(p+1)^2(k+1)}{m^2}\right),$$

а так как, в силу (3.2), для всех $t \in \left[\frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{p+1}\right]$

$$|\nu(2t)| = |\mu(2t) + \mu(-2t)| = O\left(\ln \frac{4\pi}{(p+1)2t} \omega_2(2t)\right),$$

то

$$\sum\nolimits_3 = O\left(\sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2(k+1)\pi}{m}} \frac{(p+1)^2(k+1)}{m^2} \frac{du}{u^2} \int_{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}^{u} \ln \frac{4\pi}{(p+1)t} \omega_2(t)\,dt\right) =$$

$$= O\left(\frac{(p+1)^2}{m^2} \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(k+1)m}{(k+1)^2} \frac{1}{m} \omega_2\left(\frac{k+1}{m}\right) \ln \frac{4\pi}{(p+1)\left(\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}\right)}\right) =$$

$$= O\left(\frac{(p+1)^2}{m^2} \sum_{k=0}^{k_0-1} \frac{(k+2)\,\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)}{k+1} \ln \frac{m}{(p+1)(k+1)}\right) =$$

$$= O\left(\frac{(p+1)^2}{m^2} \omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \sum_{k=0}^{k_0-1} \ln \frac{m}{(p+1)(k+1)}\right) =$$

$$= O\left(\frac{(p+1)^2}{m^2} \omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \Big|_1^{k_0} \left(x \ln \frac{m}{(p+1)x} + x\right)\right) =$$

$$= O\left(\frac{(p+1)^2}{m^2} \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\left(k_0 \ln \frac{m}{(p+1)k_0} - \ln \frac{m}{p+1} + k_0 - 1\right)\right) =$$

$$= O\left(\frac{(p+1)^2}{m^2} k_0\, \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right) + O\left(\frac{(p+1)^2}{m^2} \ln \frac{m}{p+1} \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right).$$

Но для $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}n$, $m = 2n - p + 1$

$$\frac{(p+1)^2}{m^2} \ln \frac{m}{p+1} = O(1),$$

следовательно,

$$\sum\nolimits_3 = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right) = O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$V_{n,p}(f, x) = \frac{m}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}} \nu(2t) \sin mt\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\frac{m}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2m}}^{\frac{\pi}{2m}+\frac{2k\pi}{m}}[\mu(2t)+\mu(-2t)]\sin mt\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Применяя лемму 3, получаем:

$$V_{n,p}(f, x) = -\frac{m}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}[\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt +\right.$$

$$\left.+ O\left(\frac{(p+1)k^2}{n^2}\ln\frac{n}{(p+1)k}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\frac{2n-p+1}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}[\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt +$$

$$+ O\left(\frac{(2n-p+1)(p+1)}{n^2}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{k_0-1}\ln\frac{n}{(p+1)k}\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\frac{n}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}[\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt +$$

$$+ O\left((p+1)\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}[\mu(t)+\mu(-t)]\sin nt\,dt\right) +$$

$$+ O\left(\frac{p+1}{n}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\Big|_1^{k_0}\left(x\ln\frac{n}{(p+1)x}+x\right)\right) + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Используя (2.11) и оценку $\frac{p+1}{n}\ln\frac{n}{p+1} = O(1)$, находим:

$$V_{n,p}(f, x) = -\frac{n}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}}[f(x+t)+f(x-t)]\sin nt\,dt +$$

$$+O\left(\frac{p+1}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{n}{p+1}\right)+O\left(\frac{p+1}{n}\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{n}{p+1}\right)+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[f\left(x+\frac{t}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(x-\frac{t}{n}-\frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos t\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$V_{n,p}(f,x)=-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[f\left(x+\frac{t}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(x-\frac{t}{n}-\frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos t\,dt+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Замечание. Так как из условия $f(x)\in H_1^{\omega}$ следует, что $f(x)\in 2\overline{H_2^{\omega}}$, то отсюда можно заключить, что теорема 1 справедлива и для функций из класса $H_1^{\omega}$, т. е. справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f(x)\in H_1^{\omega}$. Тогда при всех $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$ для уклонения функции $f(x)$ от ее сумм Валле-Пуссена $\sigma_{n,p}(f,x)$ справедливо равенство:*

$$V_{n,p}(f,x)=-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[f\left(x+\frac{t}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(x-\frac{t}{n}-\frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos t\,dt+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

*равномерно относительно $f(x)\in H_1^{\omega}$ и $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$, где $k_0=\left[\frac{2n-p+1}{2(p+1)}-\frac{1}{4}\right]$.*

## § 4. Асимптотические оценки для $V_{n,p}(f,x)$

Докажем, прежде всего, две леммы о существовании экстремальных функций.

ЛЕММА 4. *Существует функция $\psi_n(x)\in H_1^{\omega}$*, зависящая только от $n$, *но не зависящая от $p$, такая, что для всех $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$*

$$V_{n,p}(\psi_n,0)=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[-\pi,\pi]$ на отрезки

$$I_1=\left[-\pi,-\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{5\pi}{2n}\right],\quad I_2=\left[-\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right]+\frac{5\pi}{2n},-\frac{\pi}{2n}\right],$$

$$I_3=\left[-\frac{\pi}{2n},\frac{3\pi}{2n}\right],\quad I_4=\left[\frac{3\pi}{2n},\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right]-\frac{5\pi}{2n}\right],\quad I_5=\left[\frac{2\pi}{n}\left[\frac{n}{2}\right]-\frac{5\pi}{2n},\pi\right]$$

(см. рис. 1 для $n=25$) и рассмотрим функцию

$$\psi_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\in I_1,\ x\in I_3,\ x\in I_5,\\ f(x) & \text{при } x\in I_4,\\ f\left(-x-\frac{\pi}{n}\right) & \text{при } x\in I_2,\end{cases} \tag{4.1}$$

$$\psi_n(x+2\pi)=\psi_n(x),$$

где $f(x)\in H_1^\omega$ и $f(x)$ такова, что

$$f\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)=f(x),\quad f\left(\frac{3\pi}{2n}\right)=0, \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)\cos t\,dt=-C_1^{(n)}(\omega). \tag{4.3}$$

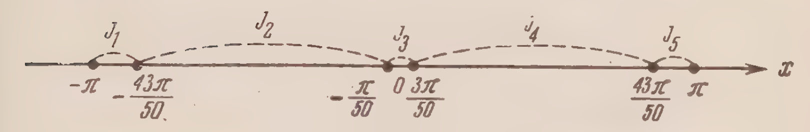



Рис. 1

Автором ([3]) было установлено, что $\psi_n(x)\in H_1^\omega$ и

$$\max_x|\psi_n(x)|=O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{4.4}$$

Найдем $V_{n,p}(\psi_n,\ 0)$. В силу теоремы 2 и условий (4.1), (4.3), (4.4), имеем:

$$V_{n,p}(\psi_n,\ 0)=-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[\psi_n\left(\frac{t}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)+\psi_n\left(-\frac{t}{n}-\frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos t\,dt+$$

$$+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{h=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}^{2k\pi}\left[\psi_n\left(\frac{t}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\psi_n\left(-\frac{t}{n}-\frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos t\,dt\right\}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)=O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{{}^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=2}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\frac{1}{\pi}\int_{2\pi}^{2k\pi}\left[f\left(\frac{t}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(-\left(-\frac{t}{n}-\frac{\pi}{n}\right)-\frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos t\,dt+$$

$$+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=2}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}2(k-1)C_1^{(n)}(\omega)+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\sum_{k=2}^{k_0-1}\frac{k-1}{k^2}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln k_0+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е

$$V_{n,p}(\psi_n,\ 0)=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

что и завершает доказательство леммы.

В дальнейшем, как и в работе автора ([1]), через $MH_2^\alpha$ будем обозначать класс непрерывных периода $2\pi$ функций $f(x)$, для которых

$$\omega_2(h,\ f)\leqslant Mh^\alpha \quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1),$$

т. е. класс $M\overline{H}_2^\omega$ при $\omega_2(h)=h^\alpha$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$.

Для функций класса $H_2^\alpha$ справедлива

ЛЕММА 5. *Существует функция* $\psi_n(x)\in H_2^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, *зависящая только от* $n$ *и не зависящая от* $p$, *такая, что для всех* $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$

$$V_{n,p}(\psi_n,\ 0)=\frac{C_2^{(n)}(\alpha)}{\pi}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Доказательство. Так как при $\lambda>0$

$$(\lambda h)^\alpha=\lambda^\alpha h^\alpha\leqslant(\lambda+1)h^\alpha,$$

то для функций класса $H_2^\alpha$ справедлива теорема 1. Положим

$$d_n=[(\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}]+1$$

и рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{n},\\ \frac{n^\alpha}{\{2\pi(d_n-1)\}^\alpha}\left(x-\frac{2\pi}{n}\right)^\alpha & \text{при } \frac{2\pi}{n}\leqslant x\leqslant\frac{2d_n\pi}{n},\\ 1 & \text{при } \frac{2d_n\pi}{n}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \varphi(\pi-x) & \text{при } \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi,\\ \varphi(-x) & \text{при } -\pi\leqslant x\leqslant 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

$\varphi(x+2\pi)=\varphi(x)$
(см. рис. 2 для $\varphi(x)$ при $n=50$ и $\alpha=1$).

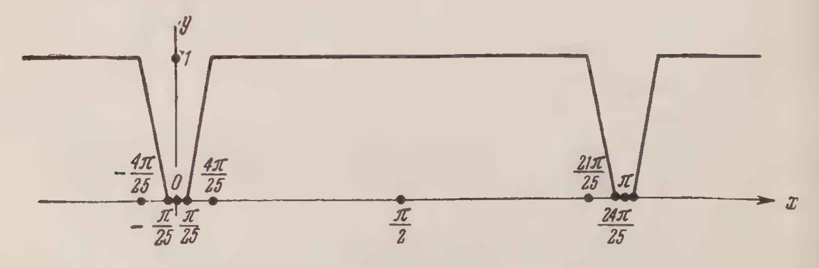



Рис. 2

С помощью $\varphi(x)$ образуем функцию

$$\nu_n(x) = \begin{cases} f(x)\varphi(x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ f\left(-x - \frac{\pi}{n}\right)\varphi(x) & \text{при } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \end{cases} \tag{4.6}$$

где $f(x) \in H_2^\alpha$ и $f(x)$ такова, что

$$f\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) = f(x), \quad f\left(\frac{3\pi}{2n}\right) = 0, \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{x}{n} + \frac{\pi}{2n}\right)\cos x dx = -C_2^{(n)}(\alpha). \tag{4.8}$$

Автором [см. (2), лемма 5] было установлено, что функция

$$\psi_n(x) = \frac{1}{1 + \frac{c}{\ln n}}\nu_n(x), \tag{4.9}$$

где $c$ — некоторая постоянная, принадлежит классу $H_2^\alpha$ и

$$\max_x |\psi_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{4.10}$$

Согласно теореме 1, так как $\psi_n(0) = 0$ и $\omega_2\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^\alpha}$, имеем:

$$V_{n,p}(\psi_n, 0) = -\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[\psi_n\left(\frac{t}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) + \psi_n\left(-\frac{t}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos t dt + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Так как для случая $p = 0$, т. е. для приближения суммами Фурье, доказательство проведено в работе (2), а при $p = 1$

$$k_0 = \left[\frac{2n - 1 + 1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{4}\right] = \left[n - \frac{1}{4}\right],$$

т. е. и в этом случае доказательство не отличается от доказательства, проведенного в работе (2), то достаточно рассмотреть только случай $2 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}n$. Но для $p \geqslant 2$ имеем:

$$V_{n,p}(\psi_n, 0) = -\frac{1}{2\pi^2}\left\{\sum_{k=1}^{d_n+3}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[\psi_n\left(\frac{t}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) + \psi_n\left(-\frac{t}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos t dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=d_n+4}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\int_0^{2k\pi}\left[\psi_n\left(\frac{t}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) + \psi_n\left(-\frac{t}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos t dt\right\} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2}\left\{\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2\right\} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Отсюда, используя (4.10) и условие $d_n = O\left((\ln n)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, получаем:

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k=1}^{d_n+3} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\psi_n\left(\frac{t}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) + \psi_n\left(-\frac{t}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos t dt =$$

$$= O\left(\sum_{k=1}^{d_n+3} \frac{1}{k^2} 2k \frac{1}{n^\alpha}\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha} \ln d_n\right) = O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Далее, в силу (4.6), (4.5), (4.8) и (4.10), находим:

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{k=d_n+4}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[\psi_n\left(\frac{t}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) + \psi_n\left(-\frac{t}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos t dt =$$

$$= \sum_{k=d_n+4}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_0^{2(d_n+3)\pi} \left[\psi_n\left(\frac{t}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) + \psi_n\left(-\frac{t}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos t dt +$$

$$+ \frac{1}{1+\frac{c}{\ln n}} \sum_{k=d_n+4}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_{2(d_n+3)\pi}^{2k\pi} \left[f\left(\frac{t}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) + f\left(-\left(-\frac{t}{n} - \frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos t dt =$$

$$= O\left(\sum_{k=d_n+4}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \frac{d_n+3}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{1+\frac{c}{\ln n}} \sum_{k=d_n+4}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} 2(k-d_n-3) C_2^{(n)}(\alpha) =$$

$$= O\left(\frac{1}{n^\alpha} \frac{d_n+3}{d_n+3}\right) - \frac{2\pi C_2^{(n)}(\alpha)}{1+\frac{c}{\ln n}} \left[\sum_{k=d_n+4}^{k_0-1} \frac{1}{k} - (d_n+3) \sum_{k=d_n+4}^{k_0-1} \frac{1}{k^2}\right] =$$

$$= -2\pi C_2^{(n)}(\alpha) \ln \frac{k_0}{d_n+4} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) =$$

$$= -2\pi C_2^{(n)}(\alpha) \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Таким образом,

$$V_{n,p}(\psi_n, 0) = \frac{C_2^{(n)}(\alpha)}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right),$$

и лемма установлена.

ТЕОРЕМА 3. *При любых* $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2} n$ *справедливо асимптотическо[е] равенство*:

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega) = \sup_{f \in H_1^\omega} \| f(x) - \sigma_{n,p}(f, x) \| = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. В силу теоремы 2, имеем:

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega) = \sup_{f \in H_1^\omega} \left\| \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \int_0^{2k\pi} \left[f\left(x + \frac{t}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) + f\left(x - \frac{t}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos t dt \right\| +$$

$$+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)\leqslant\frac{n}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\sup_{f\in H_1^\omega}\left\|\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2k\pi}{n}}\left[f\left(x+t+\frac{\pi}{2n}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+f\left(x-t-\frac{\pi}{2n}\right)\right]\cos nt\,dt\right\|+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Используя (2.12), получаем:

$$\mathcal{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega)\leqslant\frac{n}{2\pi}\sum_{k=1}^{k_0-1}\frac{1}{k^2}\,\frac{2kC_1^{(n)}(\omega)+O\left(\ln(k+1)\,\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln k_0+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и так как $k_0=\left[\frac{2n-p+1}{2(p+1)}-\frac{1}{4}\right]$, то

$$\mathcal{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega)\leqslant\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).\qquad(4.11)$$

Для оценки $\mathcal{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega)$ снизу замечаем, что для функции $\psi_n(x)$, построенной в лемме 4, имеем неравенство:

$$\mathcal{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega)\geqslant V_{n,p}(\psi_n,\ 0)=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\mathcal{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega)\geqslant\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).\qquad(4.12)$$

Из (4.11) и (4.12) находим:

$$\mathcal{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega)=\frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е. получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *При любых* $0\leqslant p\leqslant\frac{1}{2}n$ *справедливо асимптотическое неравенство*

$$\mathcal{E}_{V_{n,p}}(H_2^{\bar\omega})=\sup_{f\in H_2^{\bar\omega}}\|f(x)-\sigma_{n,p}(f,\ x)\|\leqslant\frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi}\ln\frac{n}{p+1}+O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

*Константа* $\frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi}$ *в классе всех функций* $\omega_2(t)$, *являющихся модулями гладкости некоторых непрерывных функций периода* $2\pi$ *и удовлетворяю-*

*щих условию*

$$\omega_2(\lambda t) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega_2(t) \quad (\lambda > 0),$$

*не может быть понижена.*

Доказательство. Используя вместо теоремы 2 и оценки (2.12) теорему 1 и оценку (2.11), аналогично доказательству теоремы 3 получаем:

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^{\bar\omega}) \leqslant \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \sup_{f \in H_2^{\bar\omega}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2k\pi}{n}} \left[ f\left(x + t + \frac{\pi}{2n}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + f\left(x - t - \frac{\pi}{2n}\right)\right] \cos nt\, dt \right\| + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{1}{k^2} \frac{2kC_2^{(n)}(\omega) + O\left(\ln(k+1)\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^{\bar\omega}) \leqslant \frac{C_2^{(n)}(\omega)}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4.13}$$

и первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части рассмотрим функции $\omega_2(t) = t^\alpha$ при $0 < \alpha \leqslant 1$. В силу леммы 5, для соответствующих классов функций, т. е. для классов $H_2^\alpha$, мы имеем:

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^\alpha) \geqslant V_{n,p}(\psi_n, 0) = \frac{C_2^{(n)}(\alpha)}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right),$$

т. е.

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^\alpha) \geqslant \frac{C_2^{(n)}(\alpha)}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right). \tag{4.14}$$

Из (4.13) и (4.14) получаем, что при $0 < \alpha \leqslant 1$

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^\alpha) = \frac{C_2^{(n)}(\alpha)}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right). \tag{4.15}$$

Равенство (4.15) доказывает второе утверждение теоремы и устанавливает

Следствие. *При любых $0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2} n$ и $0 < \alpha \leqslant 1$ справедливо асимптотическое равенство:*

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^\alpha) = \frac{C_2^{(n)}(\alpha)}{\pi} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{\ln\ln n}{n^\alpha}\right).$$

## § 5. Приближение суммами Валле-Пуссена, близкими к суммам Фейера

Для дальнейшего нам потребуется следующее утверждение, доказанное автором (²):

*Пусть $f(x)$ — непрерывная функция периода $2\pi$ и $\omega_2(h, f)$ — ее модуль гладкости. Тогда для уклонения функции $f(x)$ от ее сумм Фейера справедливо равенство:*

$$f(x)-\sigma_n(f, x) = -\frac{1}{\pi(n+1)}\int\limits_{\frac{a}{n+1}}^{\infty}\frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right), \qquad (5.1)$$

*где $a>0$ — произвольная постоянная.*

ТЕОРЕМА 5. *Пусть функция $f(x)\in H_2^{\bar\omega}$, $\omega_2(h, f)$ — ее модуль гладкости ($\omega_2(h,f)\leqslant\omega_2(h)$). Тогда при всех $\frac{1}{2}n\leqslant p\leqslant n-1$ для уклонения функции $f(x)$ от ее суммы Валле-Пуссена $\sigma_{n,p}(f, x)$ справедливо равенство:*

$$V_{n,p}(f, x)=f(x)-\sigma_{n,p}(f, x)=-\frac{1}{\pi(p+1)}\int\limits_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n-p}}\frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^2}\,dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Для $\frac{1}{2}n\leqslant p\leqslant n-1$ мы имеем:

$$f(x)-\sigma_{n,p}(f, x)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n}[f(x)-S_k(f, x)]=$$

$$=\frac{1}{p+1}\left\{\sum_{k=0}^{n}[f(x)-S_k(f, x)]-\sum_{k=0}^{n-p-1}[f(x)-S_k(f, x)]\right\}=$$

$$=\frac{1}{p+1}\left\{(n+1)[f(x)-\sigma_n(f, x)]-(n-p)[f(x)-\sigma_{n-p-1}(f, x)]\right\}.$$

Используя (5.1), получаем:

$$f(x)-\sigma_{n,p}(f, x)=\frac{1}{p+1}\left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\infty}\frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^2}\,dt + \right.$$

$$+\ O\left(n\omega_2\left(\frac{1}{n},\ f\right)\right)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{n-p}}^{\infty}\frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^2}\,dt\ +$$

$$+\ O\left((n-p)\ \omega_2\left(\frac{1}{n-p},\ f\right)\right)\Bigg\}=-\frac{1}{\pi(p+1)}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}}\frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{t^2}\,dt\ +$$

$$+\ O\left(\frac{n}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n},f\right)\right)+\ O\left(\frac{n-p}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n-p},\ f\right)\right).$$

Так как для $\frac{1}{2}n\leqslant p\leqslant n-1$ $\quad\frac{n}{p+1}=O(1)$, то

$$\frac{n}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n},f\right)=\ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Далее, из условия

$$\omega_2(\lambda h)\leqslant(\lambda+1)\,\omega_2(h)$$

получаем:

$$\frac{n-p}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n-p},\ f\right)=\ O\left(\frac{n-p}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-p}\right)\right)=$$

$$=\ O\left(\frac{n-p}{p+1}\left(\frac{n}{n-p}+1\right)\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\ O\left(\frac{2n-p}{p+1}\,\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Таким образом,

$$V_{n,\,p}(f,\ x)=$$

$$=-\frac{1}{\pi(p+1)}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}}\frac{f(x+t)-2f(x)+f(x-t)}{2}\,dt\ +\ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

и теорема установлена.

ТЕОРЕМА 6. *Для всех* $\frac{1}{2}n\leqslant p\leqslant n-1$ *справедливо асимптотическое неравенство*:

$$\mathscr{E}_{V_{n,\,p}}(H_2^{\bar{\omega}})\leqslant\frac{1}{\pi(p+1)}\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}}\frac{\omega_2(t)}{t^2}\,dt+\ O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

*При* $\omega_2(h)=h$ *знак неравенства заменяется знаком равенства.*

Доказательство. В силу теоремы 5, имеем:

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^{\overline{\omega}}) = \frac{1}{\pi(p+1)} \sup_{f \in H_2^{\overline{\omega}}} \left\| \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\Delta_t^2 f(x)}{t^2}\, dt \right\| + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_2(t, f)}{t^2}\, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_2(t)}{t^2}\, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^{\overline{\omega}}) \leqslant \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_2(t)}{t^2}\, dt + O\left(\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{5.2}$$

и первая часть теоремы установлена.

Далее, функция

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -\frac{|x|}{2} \qquad \text{при } -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \\ \psi(x + 2\pi) &= \psi(x) \end{aligned} \tag{5.3}$$

принадлежит классу $H_2^1$, и для нее мы имеем:

$$V_{n,p}(\psi, 0) = -\frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\Delta_t^2 \psi(0)}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{t}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_2(t)}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^1) \geqslant V_{n,p}(\psi, 0) = \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_2(t)}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.4}$$

Из (5.2) и (5.4) заключаем, что при $\omega_2(t) = t$

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^1) = \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_2(t)}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{5.5}$$

т. е. мы получаем второе утверждение теоремы.

Следствие. *При всех* $\frac{1}{2} n \leqslant p \leqslant n - 1$ *справедливо асимптотическое равенство:*

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^1) = \frac{1}{\pi(p+1)} \ln \frac{n+1}{n-p} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi(n+1)} \ln \frac{n+1}{n-p} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{5.6}$$

В самом деле, из (5.5) следует:

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_2^1) = \frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{dt}{t} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi(p+1)} \ln\frac{n+1}{n-p} + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \ln\frac{n+1}{n-p} + \frac{n-p}{\pi(n+1)(p+1)} \ln\frac{n+1}{n-p} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi(n+1)} \ln\frac{n+1}{n-p} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n+1}\frac{n-p}{p+1} \ln\frac{1}{\frac{n-p}{n+1}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(n+1)} \ln\frac{n+1}{n-p} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е. мы получили равенство (5.6).

Замечание. Знак равенства в теореме 6 имеет место также для таких функций $\omega_2(t)$, для которых функция

$$\varphi(t) = \frac{\omega_2(|t|)}{2} \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi,$$

$$\varphi(t+2\pi) = \varphi(t)$$

при любых $t$ и $h > 0$ удовлетворяет условию:

$$|\varphi(t+h) - 2\varphi(t) + \varphi(t-h)| \leqslant \omega_2(h),$$

т. е. снова принадлежит тому же классу $\overline{H_2^{\omega}}$ *.

Так как из условия $f(x) \in H_1^{\omega}$ следует, что $f(x) \in 2\overline{H_2^{\omega}}$, то отсюда заключаем, что теорема 5 справедлива и для классов $H_1^{\omega}$, т. е. справедлива

ТЕОРЕМА 7. *Пусть $f(x) \in H_1^{\omega}$. Тогда при всех $\frac{1}{2}n \leqslant p \leqslant n-1$ для уклонения функции $f(x)$ от ее суммы Валле-Пуссена $\sigma_{n,p}(f, x)$ справедливо равенство:*

$$V_{n,p}(f, x) = f(x) - \sigma_{n,p}(f, x) = -\frac{1}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{t^2} dt +$$

$$+ O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

ТЕОРЕМА 8. *Для всех $\frac{1}{2}n \leqslant p \leqslant n-1$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_1^{\omega}) = \frac{2}{\pi(p+1)} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_1(t)}{t^2} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

---

* Это утверждение имеет место, если функция $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условиям:

$$0 \leqslant \omega_2(\delta_2) - \omega_2(\delta_1) \leqslant \omega_2(\delta_2 - \delta_1)$$

и

$$-\omega_2\left(\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\right) \leqslant \omega_2(\delta_1) + \omega_2(\delta_2) - 2\omega_2\left(\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right) \leqslant \omega_2\left(\frac{\delta_2-\delta_1}{2}\right)$$

$$(0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \pi).$$

Доказательство. В силу теоремы 7, имеем:

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega) \leqslant \frac{1}{\pi(p+1)} \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\|f(x+t)-f(x)\|+\|f(x-t)-f(x)\|}{t^2} dt +$$

$$+ O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \frac{2}{\pi(p+1)} \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_1(t)}{t^2} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

т. е.

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega) \leqslant \frac{2}{\pi(p+1)} \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_1(t)}{t^2} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{5.7}$$

Но функция

$$\psi(t) = \omega_1(|t|) \quad \text{при } -\pi \leqslant t \leqslant \pi,$$

$$\psi(t+2\pi) = \psi(t)$$

принадлежит классу $H_1^\omega$ и для нее мы имеем:

$$V_{n,p}(\psi, 0) = -\frac{1}{\pi(p+1)} \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\psi(t)+\psi(-t)}{t^2} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi(p+1)} \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_1(t)}{t^2} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega) \geqslant |V_{n,p}(\psi, 0)| = \frac{2}{\pi(p+1)} \int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_1(t)}{t^2} dt + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) получаем утверждение теоремы 8.

Объединяя результаты теорем 3 и 8, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА A. *Для всех* $0 \leqslant p \leqslant n-1$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}_{V_{n,p}}(H_1^\omega) = A_{n,p}(\omega) + O\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

*где*

$$A_{n,p}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \cdot \ln \dfrac{n}{p+1} & \text{при } 0 \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}n, \\ \dfrac{2}{\pi(p+1)} \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n-p}} \frac{\omega_1(t)}{t^2} dt & \text{при } \frac{1}{2}n \leqslant p \leqslant n-1. \end{cases}$$

Аналогично, из результатов теоремы 4 и ее следствия [равенство (4.16)], теоремы 6 и ее следствия [равенство (5.6)] и равенства

$$\frac{1}{p+1}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n-p}} t^{\alpha-2}\,dt = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \quad \left(\frac{1}{2}\quad n\leqslant p\leqslant n-1,\quad 0<\alpha<1\right)$$

вытекает

ТЕОРЕМА B. *Для всех* $0\leqslant p\leqslant n-1$ *и* $0<\alpha\leqslant 1$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}_{V_{n,p}}(H_2^{\alpha}) = B_{n,p}(\alpha) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

*где*

$$B_{n,p}(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{C_2^{(n)}(\alpha)}{\pi}\ln\dfrac{n}{p+1} + O\left(\dfrac{\ln\ln n}{n^{\alpha}}\right) & \text{при } 0\leqslant p\leqslant \frac{1}{2}n,\ 0<\alpha\leqslant 1,\\ O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right) & \text{при } \frac{1}{2}n\leqslant p\leqslant n-1,\ 0<\alpha<1,\\ \dfrac{1}{\pi(n+1)}\ln\dfrac{n+1}{n-p} & \text{при } \frac{1}{2}n\leqslant p\leqslant n-1,\ \alpha=1. \end{cases}$$

Поступило
10. II. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ефимов А. В., О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера, Доклады Ак. наук СССР, 114 (1957), 930—933.

[2] Ефимов А. В., О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 81—116.

[3] Ефимов А. В., Приближение функций с заданным модулем непрерывности суммами Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 23 (1959), 115—134.

[4] Kolmogoroff A., Zur Grösserordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen, Ann. of Math., 36 (1935), 521—526.

[5] Marchaud A., Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles, Journ. Mathem. pures et appl., 6 (1927), 337—425.

[6] Никольский С. М., Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье, Доклады Ак. наук СССР, 32 (1941), 386—389.

[7] Никольский С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды математ. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. наук СССР, XV, 1945.

[8] Никольский С. М., Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности, Доклады Ак. наук СССР, 52 (1946), 191—193.

[9] Пинкевич В. Т., О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 4 (1940), 521—528.

[10] Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 15(1951), 219—242.

[11] Тиман А. Ф., Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 99—134.

[12] Щербина А. Д., Об одном методе суммирования рядов, сопряженных рядам Фурье, Матем. сборн., 27 (69): 2 (1950), 157—170.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 771—780

А. Л. БРУДНО

# ТОПОЛОГИЯ ПОЛЕЙ ТЁПЛИЦА

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

В работе рассматривается топологизация пространства ограниченных последовательностей с помощью полей различных матриц Тёплица.

Обозначения. Через $R = \{ x \}$ обозначено линейное пространство ограниченных последовательностей $x = \{ x^1, x^2, \ldots \}$ с почленным сложением и умножением на константу (верхний значок — индекс, а не степень).

Множество последовательностей, сходящихся к нулю, обозначается через $R_0$, единичная последовательность — через $e = \{ 1, 1, \ldots \}$.

Матрица Тёплица обозначается через $A = (a_k^n)$, где $n$ — номер строки, а $k$ — номер столбца; ее $n$-я строка обозначается через $A^n = \{a_1^n, a_2^n, \ldots\}$. Далее,

$$A^n(x) = a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \ldots;$$

преобразованная последовательность обозначается через

$$A(x) = \{A^1(x), A^2(x), \ldots\}.$$

Единичная матрица обозначается через $E = (e_k^n)$, где $e_k^n = 1\,(0)$ при $n = k$ $(n \neq k)$.

Если существует предел $A^\infty(x) = \lim A^n(x)$, то говорят, что последовательность $x$ *суммируется* матрицей $A$ (к пределу $A^\infty(x)$).

Множество $\mathfrak{A}$ *ограниченных* последовательностей, суммируемых матрицей Тёплица $A$, называется полем. Через $\mathfrak{A}_0$ обозначается множество ограниченных последовательностей, суммируемых матрицей $A$ к нулю.

Вводя в пространстве $R$ норму

$$|x| = \sup |x^k| \quad (\|x\| = \overline{\lim} |x^k|),$$

мы обращаем его в полное нормированное пространство $R_1\,(R_2)$ *. Если в $R_2$ отождествить последовательности, разность которых сходится к ну-

---

* Мы пользуемся нормировками (и топологизациями) пространства, в которых отличные от нуля элементы могут иметь нулевую норму (разделима не любая пара точек).

лю, то получится фактор-пространство $(R_2/R_0)$ с естественной нормировкой. Нормы операторов и функционалов в $R_1$ $(R_2)$ обозначаются через $| \ |$ $(\| \ \|)$.

Строка $A^n$ и матрица $A$ определяют в $R_1$ линейный функционал $A^n = A^n(x)$ и линейный оператор $A = A(x)$. Две ограниченные последовательности, отличающиеся на последовательность из $R_0$, переводятся матрицей Тёплица в последовательности, также отличающиеся на последовательность из $R_0$. Отсюда следует, что хотя строка $A^n$ и не определяет в $R_2$ функционала, но вся матрица Тёплица $A$ в целом определяет линейный оператор $A(x)$ не только в $R_1$, но и в $R_2$. Нормы упомянутых операторов и функционалов очевидным образом выражаются через коэффициенты $A$:

$$|A^n| = |a_1^n| + |a_2^n| + \ldots, \quad |A| = \sup |A^n|, \quad \|A\| = \overline{\lim} |A^n|.$$

Первое из этих чисел называют нормой строки, второе и третье — нормами матрицы. Если в множестве $\mathfrak{A}$ ввести норму $| \ |$ (соотв. $\| \ \|$), то оно обращается в линейное подпространство $\subset R_1$ (соотв. $\subset R_2$). На множестве $\mathfrak{A}$ матрица $A$ задает линейный функционал

$$\mathfrak{A}(x) = A^\infty(x) \quad (x \in \mathfrak{A})$$

— пределы, к которым матрица суммирует ограниченные последовательности. Функционал $\mathfrak{A}(x)$, подобно оператору $A(x)$, является линейным функционалом как в $R_1$, так и в $R_2$. Нормы $\mathfrak{A}(x)$ в $R_1$ и $R_2$, очевидно, совпадают. Обозначение функционала $A^\infty(x)$ через $\mathfrak{A}(x)$ возможно благодаря тому, что матрицы Тёплица, имеющие одинаковые поля, суммируют ограниченные последовательности к одинаковым пределам [см. ([1])].

Норму функционала $\mathfrak{A}(x)$ называют нормой поля $\mathfrak{A}$; она совпадает с нижней гранью норм матриц Тёплица, для которых $\mathfrak{A}$ служит полем [см. ([2])].

На протяжении всей работы $x, y, x_m$ обозначают ограниченные последовательности; $x^k, y^k, x_m^k$ — их члены.

$A, B, A_i$ — матрицы Тёплица; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}_i$ — их поля. Мы говорим, что $B$ — строго сильнее, сильнее, равносильно $A$, если, соответственно, $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

Заданной матрице Тёплица $A$ (по ее коэффициентам) мы в этой работе ставим в соответствие систему (выпуклых центрально симметричных) окрестностей (нуля) пространства $R$. Таким образом линейное пространство ограниченных последовательностей превращается в топологическое (псевдонормированное локально выпуклое) пространство с «$A$-топологией».

Основной результат работы состоит в том, что *равносильные матрицы Тёплица* (т. е. суммирующие одни и те же ограниченные последовательности) *определяют одинаковую топологию*. Вследствие этого мы можем говорить об $\mathfrak{A}$-топологии (топологии, определенной ограниченным полем $\mathfrak{A}$) пространства ограниченных последовательностей $R$.

В § 3 устанавливается более общий результат: если матрица Тёплица $B$ сильнее матрицы $A$, то $\mathfrak{B}$-топология слабее $A$-топологии, и обратно. Более того: если хотя бы одна окрестность $B$ содержит какую-нибудь окрестность $A$, то $\mathfrak{B}$-топология слабее $\mathfrak{A}$-топологии и матрица $B$ сильнее матрицы $A$ (это, разумеется, не значит, что любая фиксированная окрестность $A$ содержится в какой-нибудь окрестности $B$). Отсюда следует, что оператор $B(x)$ непрерывен в $\mathfrak{A}$-топологии тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$. Отметим, что в $\mathfrak{A}$-топологии неотделимы те и только те точки, разность которых входит в $\mathfrak{A}_0$.

Таким образом, $\mathfrak{A}$-топология является топологией и в линейном фактор-пространстве $(R/\mathfrak{A}_0)$, где она разделяет уже любую пару точек. В § 2 эта топология сравнивается с другими топологизациями фактор-пространства $(R/\mathfrak{A}_0)$. Оказывается, что $\mathfrak{A}$-топология занимает промежуточное положение между естественной нормировкой фактор-пространства $(R_2/\mathfrak{A}_0)$ и его $A$-нормировкой, когда за норму принята $\|A(x)\|$.

## § 1. Окрестности матриц Тёплица

Определение. Пусть $\varepsilon(\nu)$ — положительная функция, определенная для всех $\nu > 0$. Рассмотрим множества ограниченных последовательностей

$$\{\|x\| < \nu,\ \|A(x)\| < \varepsilon(\nu)\}, \quad \nu > 0,$$

и их общую выпуклую оболочку $\mathscr{E}$ (по всем $\nu > 0$). Если множество $\mathscr{E}$ не совпадает со всем пространством ограниченных последовательностей, то мы будем называть его *окрестностью $\mathscr{E}$ матрицы $A$, определенной с помощью функции $\varepsilon(\nu)$* *.

Сделаем по поводу этого определения несколько замечаний.

1. *Для того чтобы упомянутое множество $\mathscr{E}$ было окрестностью (т. е. не содержало всего $R$), необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\lim}\, \varepsilon(\nu) < \infty$ при $\nu \to \infty$.*

Действительно, если $\overline{\lim}\, \varepsilon(\nu) = \infty$ и $x$ — фиксированная ограниченная последовательность, то найдется такое $\nu$, что $\|x\| < \nu$ и $\|A(x)\| < \varepsilon(\nu)$, вследствие чего $x \in \mathscr{E}$ и, значит, $\mathscr{E}$ содержит любую ограниченную последовательность.

Обратно, если $\overline{\lim}\, \varepsilon(\nu) < \infty$, то существуют числа $\nu_1$ и $M_1$ такие, что $\varepsilon(\nu) < M_1$ при всех $\nu \geqslant \nu_1$. В силу этого,

$$\bigcup_{\nu < \nu_1} \{\|x\| < \nu;\ \|A(x)\| < \varepsilon(\nu)\} \subseteq \{\|x\| < \nu_1\},$$

$$\bigcup_{\nu \geqslant \nu_1} \{\|x\| < \nu;\ \|A(x)\| < \varepsilon(\nu)\} \subseteq \{\|x\| < \infty;\ \|A(x)\| < M_1\}$$

---

* Следует говорить «окрестностью $\mathscr{E}$ точки нуль, определенной с помощью матрицы $A$ и функции $\varepsilon(\nu)$». Выражение в тексте взято для краткости речи.

и, значит, $\mathscr{E}$ входит в общую выпуклую оболочку двух множеств:

$$\{\|x\| < \nu_1\} \text{ и } \{\|x\| < \infty,\ \|A(x)\| < M_1\}.$$

Если же $x$ — фиксированная точка $\mathscr{E}$, то для нее существует разложение

$$x = \lambda^1 x_1 + \lambda^2 x_2,$$

где

$$\lambda^1 + \lambda^2 = 1, \quad \lambda^1, \lambda^2 \geqslant 0, \quad \|x_2\| < \infty, \quad \|x_1\| < \nu_1, \quad \|A(x_2)\| < M_1.$$

Но тогда $\|A(x_1)\| < \|A\|\nu_1$ и, следовательно,

$$\|A(x)\| < \|A\|\nu_1 + M_1.$$

Таким образом, $\mathscr{E}$ содержит только такие последовательности $x$, для которых $\|A(x_1)\|$ не превосходит константы $\nu_1\|A\| + M_1$ и, значит, не содержит всех ограниченных последовательностей.

2. *Окрестность $\mathscr{E}$ матрицы Тёплица $A$ пересекается с каждой прямой $\lambda x\,[-\infty < \lambda < +\infty]$ по (открытому) интервалу (конечному или бесконечному) значений $\lambda$.*

Нужно показать, что вместе с $x$ в $\mathscr{E}$ входит и $\varkappa x$, где $\varkappa = \varkappa(x) > 1$. Если $x \in \mathscr{E}$, то $x$ представляется в виде конечной суммы

$$x = \sum \lambda^\nu x_\nu,$$

где для индексов $\nu$, участвующих в сумме,

$$\sum \lambda^\nu = 1, \quad \lambda^\nu \geqslant 0, \quad \|x_\nu\| < \nu, \quad \|A(x_\nu)\| < \varepsilon(\nu).$$

Таким образом, существует $\varkappa > 1$, столь мало отличающееся от 1, что для тех же $\nu$ и $y_\nu = \varkappa x_\nu$

$$\|y_\nu\| < \nu, \quad \|A(y_\nu)\| < \varepsilon(\nu),$$

вследствие чего последовательность $\varkappa x$, равная $\sum \lambda^\nu y_\nu$, входит в $\mathscr{E}$.

Окрестность $\mathscr{E}$, заданная функцией $\varepsilon(\nu)$, совпадает с окрестностью $\mathscr{E}_1$, заданной ограниченной монотонно не возрастающей функцией $\varepsilon_1(\nu)$, равной

$$\varepsilon_1(\nu) = \sup_{\nu_1 \geqslant \nu} \varepsilon_*(\nu_1),$$

где

$$\varepsilon_*(\nu) = \begin{cases} \varepsilon(\nu) & \text{при } \varepsilon(\nu) \leqslant \nu\|A\|, \\ \nu\|A\| & \text{при } \varepsilon(\nu) > \nu\|A\|. \end{cases}$$

Действительно, $\mathscr{E} = \mathscr{E}_*$, где $\mathscr{E}_*$ определяется функцией $\varepsilon_*(\nu)$, ибо множество $\{\|x\| < \nu;\ \|A(x)\| < \varepsilon\}$ при всех $\varepsilon \geqslant \nu\|A\|$ остается одним и тем же (совпадает с $\{\|x\| < \nu\}$). Остается показать, что $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_*$. Так как $\varepsilon_1(\nu) \geqslant \varepsilon_*(\nu)$ при всех $\nu$, то $\mathscr{E}_1 \supseteq \mathscr{E}_*$. Проверим обратное включение. Пусть $x \in \mathscr{E}_1$; тогда для некоторого $\varkappa > 1$ будет $\varkappa x \in \mathscr{E}_1$, вследствие чего

$$\varkappa x = \sum \lambda^\nu x_\nu$$

(сумма конечного числа членов), где

$$\sum \lambda^{\nu} \leqslant 1, \quad \lambda^{\nu} \geqslant 0, \quad \|x_{\nu}\| < \nu, \quad \|A(x_{\nu})\| < \varepsilon_1(\nu).$$

Каждому $\nu$ поставим в соответствие число $\nu_1 \geqslant \nu$, для которого $\varepsilon_*(\nu_1) > > \varepsilon_1(\nu) : \varkappa$. Тогда имеем:

$$\|x_{\nu} : \varkappa\| < \nu_1, \qquad \|A(x_{\nu} : \varkappa)\| < \varepsilon_*(\nu_1), \quad x = \sum \lambda^{\nu}(x_{\nu} : \varkappa).$$

Это означает, что $x \in \mathscr{E}_*$ и, следовательно, $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_* = \mathscr{E}$. Отсюда получаем следующее утверждение:

3. *Любую окрестность $\mathscr{E}$ матрицы Тёплица можно задать с помощью ограниченной монотонно не возрастающей функции $\varepsilon(\nu)$.*

Пусть, как и раньше, $\mathscr{E}$ есть окрестность матрицы Тёплица $A$. Согласно утверждению п.2, $\mathscr{E}$ пересекается с каждой прямой $\lambda x\,(-\infty < \lambda < < +\infty)$ по конечному или бесконечному интервалу. Выясним, когда этот интервал конечен и когда бесконечен.

4. *Если ограниченная последовательность $x_a$ суммируется к нулю матрицей $A$, то в этом и только этом случае вся бесконечная прямая $\lambda x_a\,(-\infty < \lambda < +\infty)$ входит в $\mathscr{E}$. Более того, если $x_1 \in \mathscr{E}$, то бесконечная прямая $x_1 + \lambda x_a\,(-\infty < \lambda < +\infty)$ входит в $\mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда ограниченная последовательность $x_a$ суммируется к нулю матрицей $A$.*

Доказательство. Если $x_a$ суммируется к нулю матрицей $A$, то $\lambda x_a \in \mathscr{E}$ при всех $\lambda$. Если же $x_1 \in \mathscr{E}$, то, согласно п. 2, существует такое $\varkappa > 1$, что $\varkappa x_1 \in \mathscr{E}$. Так как $\mathscr{E}$ выпукло, то

$$\frac{1}{\varkappa}(\varkappa x_1) + \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right)\lambda x_a \in \mathscr{E},$$

а в силу произвольности $\lambda$, это дает:

$$x_1 + \lambda x_a \in \mathscr{E}.$$

Обратно, пусть $x_1$ и $x_a$ — ограниченные последовательности и вся бесконечная прямая $x_1 + \lambda x_a$ содержится в окрестности $\mathscr{E}$. При доказательстве утверждения п.1 мы видели, что для фиксированной окрестности $\mathscr{E}$ существует константа $\nu_1\|A\| + M_1$ такая, что $x \in \mathscr{E}$ влечет за собой

$$\|A(x)\| < \nu_1\|A\| + M_1.$$

Следовательно, в нашем случае

$$A(x_1 + \lambda x_a)\| < \nu_1\|A\| + M_1$$

и, значит,

$$|\lambda| \cdot \|A(x_a)\| < \nu_1\|A\| + M_1 + \|A(x_1)\|$$

при всех $\lambda$, т. е. $\|A(x_a)\| = 0$.

5. *В нормированных пространствах $R_1$ и $R_2$ окрестность матрицы Тёплица является телом (т. е. содержит некоторую сферу) и открытым множеством.*

Телом она является потому, что содержит сферу радиуса $\min[1, \varepsilon(1):\|A\|]$, описанную вокруг нуля. Покажем, что множество $\mathscr{E}$ открыто. Пусть $x_1$ входит в выпуклое центрально симметричное тело $\mathscr{E}$ и $\varkappa x_1 (\varkappa > 1)$ — конец интервала, по которому $\mathscr{E}$ пересекается с прямой $\lambda x_1$. Произведем над $\mathscr{E}$ преобразование подобия с центром $\varkappa x_1$ и коэффициентом $(\varkappa - 1):\varkappa < 1$. Мы получим множество

$$\mathscr{E}_* = \varkappa x_1 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}(\mathscr{E} - \varkappa x_1) = x_1 + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\mathscr{E},$$

центр симметрии которого находится в точке $x_1$. Таким образом, вокруг точки $x_1$ (как центра) описано множество $\mathscr{E}_*$, подобное $\mathscr{E}$ и содержащееся в $\mathscr{E}$. Тем самым вокруг $x_1$ описана и сфера, содержащаяся в $\mathscr{E}_*$ и описанная вокруг центра $\mathscr{E}_*$.

Как мы уже видели, окрестность $\mathscr{E}$ пересекается с прямыми, проходящими через нуль, по интервалам (конечным или бесконечным). Прибавив к $\mathscr{E}$ концы всех конечных интервалов, мы получим тело, которое обозначим через $\overline{\mathscr{E}}$. Легко видеть, что $\overline{\mathscr{E}}$ есть замыкание $\mathscr{E}$ как в $R_1$, так и в $R_2$.

6. *В пересечении двух окрестностей $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ матрицы Тёплица $A$, заданных функциями $\varepsilon_1(\nu)$ и $\varepsilon_2(\nu)$, содержится окрестность $\mathscr{E}$ этой матрицы, заданная функцией $\varepsilon(\nu) = \min[\varepsilon_1(\nu), \varepsilon_2(\nu)]$. Вместе с $\mathscr{E}$ окрестностью матрицы $A$ (задаваемой функцией $\varepsilon_\gamma(\nu) = \varepsilon(\nu:|\gamma|)\cdot|\gamma|$) является и множество $\gamma\mathscr{E}$ ($\gamma \neq 0$ — действительное число).*

Среди всех окрестностей матрицы выделим полную систему окрестностей (нуля), задаваемых монотонно не возрастающими последовательностями положительных чисел $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots\}$.

*Окрестность $\mathscr{E}$ матрицы $A$, заданная последовательностью $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots$, есть, по определению, общая выпуклая оболочка множеств*

$$\{\|x\| < n;\ \|A(x)\| < \varepsilon^n\}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Окрестность, заданная последовательностью $\{\varepsilon^n\}$, является окрестностью (в ранее определенном смысле) и совпадает с окрестностью, заданной функцией $\varepsilon(\nu) = \varepsilon^n$, где $n$ — первое число $\geqslant \nu$.

7. *Система окрестностей, заданных (монотонно не возрастающими) последовательностями, есть полная система окрестностей, так как в каждой окрестности $\mathscr{E}$, заданной функцией $\varepsilon(\nu)$, содержится окрестность $\mathscr{E}_*$, заданная последовательностью $\{\varepsilon^n\} = \{\varepsilon(n)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Из п. 1—7 вытекает следующий результат:

*Окрестность матрицы $A$ можно рассматривать не только как множество индивидуальных последовательностей, но и как множество точек фактор-пространства $(R/R_0)$ или $(R/\mathfrak{A}_0)$. Во всех случаях окрестность есть центрально симметрическое выпуклое множество с центром в нуле и пересекается с каждой прямой $\lambda x$ (проходящей через нуль) по откры-*

*тому интервалу (значений $\lambda$). Интервал бесконечен, если $x \in \mathfrak{A}_0$. В нормированных пространствах $R_1$, $R_2$ и $(R_2/\mathfrak{A}_0)$ окрестность есть открытое тело. В пересечении двух окрестностей матрицы $A$ содержится третья, и вместе с $\mathscr{E}$ окрестностью $A$ является и $\gamma\mathscr{E}$ ($\gamma \neq 0$ — действительное число). Окрестности, определенные с помощью монотонно не возрастающих последовательностей, образуют полную систему окрестностей.*

## § 2. Различные топологизации пространства ограниченных последовательностей

Рассмотрим следующие три способа введения топологии в линейное пространство $R$ с помощью матрицы Тёплица $A$:

1°. Естественная нормировка фактор-пространства $(R_2/\mathfrak{A}_0)$.

2°. *Если система всех окрестностей $\mathscr{E}$ матрицы $A$ принята в качестве окрестностей нуля, то мы говорим, что в пространстве $R$ введена $\mathfrak{A}$-топология *.*

3°. Если за норму $x$ принято число $\|A(x)\|$, то говорят, что пространство $A$-нормировано.

Заметим, что все три приведенные топологизации являются топологизациями линейного фактор-пространства $(R/\mathfrak{A}_0)$ и разделяют в нем любую пару точек.

ТЕОРЕМА. *Пусть $M \subset R$ и пусть через $\overline{M}^i$ обозначено замыкание $M$ в смысле пункта $i$ ($i = 1° - 3°$). Тогда*

1) $\overline{M}^1 \subseteq \overline{M}^2 \subseteq \overline{M}^3$.

2) *Для каждого $i = 1°, 2°$ найдутся матрицы $A$ и множество $M$ такие, что $\overline{M}^i \subset \overline{M}^{i+1}$.*

Доказательство. 1) Любая окрестность $\mathscr{E}_1$ произвольной матрицы Тёплица $A$ является телом в фактор-пространстве $(R_2/\mathfrak{A}_0)$, т. е. содержит некоторую сферу фактор-пространства $(R_2/\mathfrak{A}_0)$ с естественной нормировкой. Значит, всегда $\overline{M}^1 \subseteq \overline{M}^2$.

Далее, любая окрестность $\{\|A(x)\| < \varepsilon\}$ из $A$-нормировки является одновременно и окрестностью $\mathfrak{A}$-топологии. Следовательно, $\overline{M}^2 \subseteq \overline{M}^3$.

2) Согласно определению 3) из работы (3), функция

$$f(\delta) = \begin{cases} \sqrt{\delta} & \text{при } 0 \leqslant \delta \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } \delta > 1 \end{cases}$$

является, очевидно, норма-функцией. Так как $f(0) = 0$, то, согласно теореме 4 работы (3) (см. усиление достаточной части), найдутся равносильные матрицы Тёплица $A$ и $B$ такие, что

$$\|A\| = \|B\| = 1$$

и

$$\sup_{\alpha} \|B(x)\| = f(\delta),$$

* Мы говорим $\mathfrak{A}$-топология вместо $A$-топология потому, что эта топология однозначно определяется полем $\mathfrak{A}$ и не зависит от прочих свойств матрицы $A$ (см. теорему § 3).

где

$$\alpha = \{\|x\| \leqslant 1,\ \|A(x)\| \leqslant \delta\}.$$

При этом для каждого $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, согласно теореме 1 работы ([3]), найдется последовательность $x_\delta$, для которой

$$\|x_\delta\| \leqslant 1,\quad \|A(x_\delta)\| = \delta,\ \|B(x_\delta)\| = f(\delta).$$

В таком случае для последовательностей $y_\delta = x_\delta : \sqrt{\delta}$ будет:

$$\|y_\delta\| \leqslant 1 : \sqrt{\delta},\quad \|A(y_\delta)\| = \sqrt{\delta},\quad \|B(y_\delta)\| = 1,\quad [0 < \delta \leqslant 1].$$

Зафиксируем последовательность $\delta^n \underset{\rightarrow}{>} 0$, последовательности $x_n = y_{\delta^n}$ и множество $M = \{x_n\}$. Тогда 0 входит в замыкание $M$ по $A$-нормировке, ибо $\|A(x_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Но 0 не входит в замыкание $M$ по $\mathfrak{A}$-топологии. Действительно, равносильные матрицы $A$ и $B$ определяют равносильные топологии (см. теорему нижеследующего § 3), а точка 0 не входит в окрестность $\{\|B(x)\| < 1\}$, определенную с помощью матрицы $B$. Значит, в нашем случае $\overline{M}^2 \neq \overline{M}^3$.

Наконец, если $M$ ограничено, то, очевидно, $\overline{M}^2 = \overline{M}^3$, но может случиться так, что $\overline{M}^1 \neq \overline{M}^2$. В самом деле, в примере 1 работы ([3]) построены матрицы $A_n$ и последовательности $x_n$, для которых $(n = 1, 2, \ldots)$

$$|x_n| = 1,\quad |A_n| = 1,\quad A_n^\infty(x_n) = 1,\quad \|A_1(x_n)\| < \frac{1}{n},\quad \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \cdots.$$

Положив $M = \{x_n\}$ и $A = A_1$, мы, очевидно, получим, что $\overline{M}^3 \ni 0$, но $\overline{M}^1 \not\ni 0$. Действительно, если $0 \in \overline{M}^1$, то существует разложение

$$x_n = y_n + z_n,$$

где $\|y_n\| \to 0$ и $z_n \in \mathfrak{A}_0$. Но тогда

$$A_n(x_n) = A_n(y_n) + A_n\ (z_n).$$

Так как $A^\infty(z_n) = 0$ и $\mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}$, то $A_n^\infty(z_n) = 0$. Значит,

$$\|A_n(y_n)\| = \|A_n(x_n)\| = 1,$$

откуда $\|y_n\| > 1 : \|A_n\| = 1$, вопреки $\|y_n\| \to 0$. Теорема доказана.

В доказанной теореме включения $\subseteq$ нельзя заменить строгими, так как в отдельных случаях они могут обращаться в равенства. Так, например в случае, когда матрица $A$ равносильна $E$, все три замыкания совпадают с замыканием в $R_2$. Действительно, в этом случае существует число $\delta_0 > 0$ такое, что для любой ограниченной последовательности $x$ будет $\|A(x)\| \geqslant \delta_0 \|x\|$ [см. теорему 5 работы ([3])].

Далее, если $M$ — конечное множество, то все три замыкания совпадают и дают множество, содержащее, вслед за точкой $x \in M$, только класс смежности $x + \mathfrak{A}$.

Наконец, как уже отмечалось, у ограниченного множества совпадают замыкания по $A$-нормировке и $\mathfrak{A}$-топологии.

## § 3. Взаимоотношение топологий различных матриц

ТЕОРЕМА (основная). *Нижеследующие условия 1) — 4) эквивалентны и из них вытекает условие 5):*

1) *Матрица $B$ сильнее матрицы $A$.*

2) *$\mathfrak{B}$-топология слабее $\mathfrak{A}$-топологии (т. е. для всякой окрестности $\mathcal{E}_B$ найдется окрестность $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$)*.*

3) *Существуют две окрестности $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$.*

4) *Оператор $B = B(x)$ ограничен или, что то же самое, непрерывен в $\mathfrak{A}$-топологии (в пространстве $R = \{x\}$ введена $\mathfrak{A}$-топология, в пространстве $\{B(x)\}$ — нормировка $R_2$).*

5) *Функционал $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(x)$ ограничен или, что то же самое, непрерывен в $\mathfrak{A}$-топологии (на множестве $\mathfrak{B}$ задания).*

Следствие. *Нижеследующие три условия эквивалентны:*

1. *Матрица $B$ равносильна матрице $A$.*
2. *$\mathfrak{B}$- и $\mathfrak{A}$-топологии эквивалентны.*
3. *Существуют две пары окрестностей, для которых*

$$\mathcal{E}'_A \subseteq \mathcal{E}'_B, \quad \mathcal{E}''_B \subseteq \mathcal{E}''_A.$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим фиксированную окрестность $\mathcal{E}_B$ матрицы $B$, определенную монотонно не возрастающей последовательностью $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots$ ($> 0$). Если для каждого $n$ найдется число $\delta^n > 0$ такое, что

$$\{\|x\| < n;\ \|A(x)\| < \delta^n\} \subseteq \{\|x\| < n;\ \|B(x)\| < \varepsilon^n\},$$

то окрестность $\mathcal{E}_A$, определенная последовательностью $\delta^1, \delta^2, \cdots$, будет содержаться в окрестности $\mathcal{E}_B$. Если же таких $\delta^n$ не найдется, то для некоторого $n_0$ и любого $\delta > 0$ будет

$$\{\|x\| < n_0;\ \|A(x)\| < \delta\} \not\subseteq \{\|x\| < n_0;\ \|B(x)\| < \varepsilon^{n_0}\}. \tag{1}$$

Это значит, что для каждого $\delta^k = 1:k$ найдется последовательность $x_k$, входящая в левую часть (1) и не входящая в правую, т. е.

$$\|x_k\| < n_0, \quad \|A(x_k)\| < 1:k, \quad \|B(x_k)\| > \varepsilon^{n_0} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Изменяя конечное число членов в каждой последовательности $x_k$, мы можем добиться того, чтобы было: $|x_k| < n_0$.

Применяя к матрицам $A$, $B$ и последовательностям $\pm x_k : n_0$ лемму о переползании [см. ([2])], мы получим последовательность $z$, для которой

$$|z| \leqslant 1, \quad \|A(z)\| = 0,$$

$$-\varliminf_{n\to\infty} B^n(z) = \varlimsup_{n\to\infty} B^n(z) > \varepsilon^{n_0} : n_0.$$

* Заметим, что существуют матрицы $A \subseteq B$ и окрестность $\mathcal{E}'_A$, не входящая ни в одну окрестность $\mathcal{E}_B$.

Последовательность $z$ суммируется к нулю матрицей $A$ и не суммируется матрицей $B$. Таким образом, из условия 1) следуют условия 2) и 3).

Далее, любая окрестность $\mathcal{E}_A$ содержит все последовательности $\mathfrak{A}_0$, суммируемые к нулю матрицей $A$. Таким образом, всякая последовательность $x_a \in \mathfrak{A}_0$ входит в $\mathcal{E}_A$ вместе с (бесконечной) прямой $\lambda x_a$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$. Если для какой-либо пары окрестностей $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$, то и $\mathcal{E}_B$ содержит все эти прямые. Но тогда, согласно п. 4 § 1, матрица $B$ суммирует к нулю все последовательности $\mathfrak{A}_0$. Таким образом, из условия 3) вытекает условие 1), а значит, и условие 2).

Перейдем к условиям 4) и 5). Из условия 4) вытекает условие 5) в силу равенства

$$|B^\infty(x)| = \|B(x)\|,$$

которое справедливо для всех $x \in \mathfrak{B}$. Пусть имеет место условие 4), т. е оператор $B(x)$ ограничен на некоторой окрестности $\mathcal{E}_A$. Это значит, что для всех $x_1 \in \mathcal{E}_A$ существует константа $\varepsilon$ такая, что $\|B(x_1)\| < \varepsilon$. Но тогда $\mathcal{E}_A$ входит в окрестность $\mathcal{E}_B$, заданную последовательностью $\varepsilon^n \equiv \varepsilon$ $(\mathcal{E}_B = \{\|x\| < \infty,\ \|B(x)\| < \varepsilon\})$ и, следовательно, имеет место условие 3).

Обратно, пусть имеет место условие 2), тогда для окрестности $\mathcal{E}_B = \{\|x\| < \infty,\ \|B(x)\| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon$ — любая константа, найдется окрестность $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_A$. Таким образом, и подавно $\|B(x)\| < \varepsilon$ для всех $x \in \mathcal{E}_A$, а значит, имеет место условие 4). Теорема доказана.

Институт электронных управляющих машин
АН СССР

Поступило
12. XII. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mazur S., Orlicz W., Sur les méthodes linéaires de Sommation, C. R. Acad. Sci., Paris, 196 (1933), 32—34.
[2] Брудно А. Л., Нормы полей, Доклады Ак. наук СССР, 91, № 1 (1953), 11—14.
[3] Брудно А. Л., Относительные нормы, Доклады Ак. наук СССР, 91, № 2 (1953), 197—200.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 781—808

П. Л. УЛЬЯНОВ

# БЕЗУСЛОВНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе доказывается ряд утверждений, относящихся к безусловной суммируемости (в том или ином смысле) функциональных и числовых рядов. Некоторые из результатов работы примыкают к результатам работ автора (4) — (6), причем полученные ранее утверждения частично дополняются.

Известные до сих пор теоремы выводятся как следствия более общих фактов.

## Введение

Более 30-ти лет тому назад [см. (1)] возник вопрос о том, не являются ли почти всюду безусловно суммируемые ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in [0,1])$$

безусловно сходящимися почти всюду?

Наиболее полным ответом до последнего времени был результат Орлича (1), который нашел достаточное условие для того, чтобы из безусловной суммируемости следовала безусловная сходимость. Таким условием, в случае измеримых функций, является требование

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ для почти всех } x \in [0,1].$$

Совершенно ясно, что это требование является и необходимым.

Что касается ортогональных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (x \in [0,1]),$$

безусловно суммируемых почти всюду на [0,1], то они являются безусловно сходящимися почти всюду на [0,1], если

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty.$$

Это утверждение было также доказано Орличем [(3), стр. 91, см. также (12), стр. 215].

Далее, в работах автора [4],[5],[6], где изучались свойства рядов по переставленной тригонометрической системе, было показано [см. [4], следствие 4], что если тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

безусловно суммируем почти всюду на $E\,(mE>0)$, то этот ряд безусловно сходится почти всюду на $E$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)<\infty.$$

Заметим, что в этом утверждении на коэффициенты $a_n$ и $b_n$ никакие ограничения не накладываются.

Что касается общих функциональных рядов, то было установлено [см. [4], лемма 3], что условие Орлича можно заменить условием

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=0 \text{ для почти всех } x\in[0,1],$$

где $\{n_k\}$ — некоторая подпоследовательность целых чисел. Этот факт оказался весьма полезным при исследовании безусловно суммируемых рядов. Так, в работе [4] (замечание 9 и теорема 1) было показано, что если числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n$$

безусловно суммируем и $c_{n_k}\to 0$ по некоторой подпоследовательности, то этот ряд абсолютно сходится.

Несколько позже аналогичный результат был получен Робертсоном [8] для случая условно сходящихся рядов.

Что касается безусловно суммируемых ортогональных рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x),$$

то автором было показано [см. [4], следствие 6], что они являются безусловно сходящимися, если

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}|c_n|=0,$$

т. е. условие Орлича

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n^2<\infty$$

можно заменить менее ограничительным условием.

Надавно И. И. Волков указал пример, показывающий, что из безусловной суммируемости ряда не вытекает его безусловная сходимость. В качестве такого ряда он взял ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}1. \qquad (*)$$

Исходя из этого факта, мы построили [см. ([4]), теорема 10] пример ортогонального ряда, который всюду на [0,1] безусловно суммируем и в то же время не является сходящимся ни в одной точке.

Далее, в связи с примером И. И. Волкова, начались исследования по изучению вида безусловно суммируемых рядов. Последний результат в этом направлении недавно анонсирован без доказательства А. М. Олевским ([11]) (см. следствие 5 настоящей работы).

В настоящей работе исследуется безусловная суммируемость функциональных рядов при расширенном понимании безусловной суммируемости. Благодаря этому, ранее полученные результаты вытекают как частные случаи более общих фактов. Отметим, что, по существу, все безусловно суммируемые, но расходящиеся ряды, имеют вид ряда (*).

В § 1 даются определения и доказываются леммы, из которых основными являются леммы 1 и 2. Что касается остальных лемм, то они по существу либо известны (хотя автор не знает, где они явно сформулированы), либо являются весьма элементарными утверждениями, требующими при своем доказательстве лишь умелых технических выкладок.

В § 2 приводятся основные утверждения, относящиеся как к функциональным рядам (теоремы 1—4), так и к числовым (теоремы 5 и 5′).

В § 3 доказываются утверждения, относящиеся к ортогональным рядам.

## § 1. Определения и вспомогательные утверждения

Обозначим через $B = \|B_{n,m}\|$ линейные матричные методы суммирования с помощью множителей, удовлетворяющие условиям:

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,m} = 1 \quad (m = 0,1,\ldots), \tag{1}$$

$$\lim_{m\to\infty} B_{n,m} = \gamma_n, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \ ^*. \tag{2}$$

При этом мы говорим, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

суммируем методом $B$ к числу $S$, если

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_m B_{n,m} = S.$$

---

* Условие (2) нужно лишь для леммы 1. Если же метод $B$ не удовлетворяет условию (2), то при доказательстве всех нижеследующих утверждений можно не пользоваться леммой 1. Ввиду этого, большинство доказанных ниже утверждений верно для методов $B$, которые удовлетворяют лишь условию (1).

Через $T^* = \|a_{n,m}\|$ будем обозначать линейные методы суммирования, которые удовлетворяют условиям:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,m} = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots), \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = 1. \tag{4}$$

При этом ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ называют $T^*$-суммируемым к числу $S$, если

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} S_m a_{n,m} = S,$$

где $S_m = \sum_{n=0} c_n$.

Из определений очевидно, что методы $B$ и $T^*$, вообще говоря, различны.

В случае конечно-строчных методов они сводятся друг к другу. В общем же случае, формально, всякий метод $T^* = \|a_{n,m}\|$ сводится к методу $B = \|B_{n,m}\|$ с $\gamma_n = 0$, если положить

$$B_{n,m} = \sum_{k=m}^{\infty} a_{n,k}.$$

Обратное утверждение, конечно, неверно, так как если при некотором $n_0$ последовательность $B_{n_0,m}$ не имеет нулевого предела по $m$ (кстати, предел даже может и не существовать), то метод $B$ нельзя свести ни к какому методу $T^*$.

Если проанализировать нижеследующие рассуждения, то легко заметить, что, доказав некоторое утверждение для методов $B = \|B_{n,m}\|$, мы можем это доказательство перенести и на методы $T^* = \|a_{n,m}\|$. Обратный же ход от $T^*$ к $B$ обязательно потребует дополнительных рассуждений, которые связаны с тем, что $\lim\limits_{m\to\infty} B_{n,m}$ может не существовать, а если и существует, то может быть отличным от нуля.

В указанном выше смысле методы $B$ шире методов $T^*$. Более того, методы $B$ значительно удобнее для изучения суммируемости рядов. Как правило, выкладки для методов $T^*$ более громоздки, из-за чего идея доказательства того или иного факта становится мало прозрачной из-за технических трудностей.

Ввиду этого, мы в большинстве случаев будем опускать рассуждения, относящиеся к методам $T^*$, хотя основную лемму (см. лемму 2) докажем и для методов $T^*$.

Определение 1. Пусть функции $f_n(x)$ определены на $E$. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{5}$$

мы называем *безусловно сходящимся по внешней мере на* $E$, если он при любом порядке членов сходится по внешней мере на $E$, т. е. если для

всякого переставленного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k}(x) \tag{6}$$

найдется конечная функция $F(x)$ такая, что для любого $\gamma > 0$

$$\lim_{N\to\infty} m_e E\left\{\left| F(x) - \sum_{k=0}^{N} f_{n_k}(x) \right| > \gamma\right\} = 0.$$

Если функции $f_n(x)$ измеримы на $E$, то в этом случае мы будем говорить о *безусловной сходимости по мере.*

Ясно, что функция $F(x)$ не зависит от перестановки членов ряда (5). Доказывается это следующим известным приемом. Пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k}(x) \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_{m_k}(x) \tag{6'}$$

— два переставленных ряда. Строим третий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{p_k}(x) \tag{6''}$$

следующим образом: полагаем $f_{p_1}(x) = f_{n_1}(x)$ и $N_1 = 1$. Далее берем во втором ряде (6′) $M_1$ членов $f_{m_1}, f_{m_2}, \ldots f_{m_{M_1}}$ так, чтобы среди них находился член $f_{n_1}$, и в третьем ряде (6″) после $f_{p_1}(x)$ ставим в каком-то порядке все функции группы $f_{m_1}, f_{m_2}, \ldots f_{m_{M_1}}$, из которой выброшен член $f_{p_1}$. Затем выбираем $N_2$ так, чтобы среди членов $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots f_{n_{N_2}}$ находились все члены группы $f_{p_1}, f_{p_2}, \ldots f_{p_{M_1}}$, и в третьем ряде после члена $f_{p_{M_1}}$ ставим в каком-то порядке все функции группы $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots f_{n_{N_2}}$, из которой выброшены члены $f_{p_1}, f_{p_2}, \ldots f_{p_{M_1}}$. Продолжая неограниченно этот процесс, мы получим ряд (6″), у которого частные суммы для номеров $N_k$ совпадают с частными суммами $N_k$-го порядка от первого ряда (6′), а частные суммы с номерами $M_k$ совпадают с частными суммами $M_k$-го порядка от второго ряда (6′).

Определение 2. Пусть $B \doteq \| B_{n,m} \|$ — некоторый метод суммирования. Тогда ряд (5) назовем *безусловно В суммируемым на Е по внешней мере*, если для всякого ряда (6) найдется функция $F(x)$ такая, что для любого $\gamma > 0$

$$\lim_{N\to\infty} m_e E\{|F(x) - \sigma_N(x)| > \gamma\} = 0,$$

где

$$\sigma_N(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k}(x) B_{N,k}, \tag{7}$$

а ряд в правой части (7) сходится для почти всех $x \in E$ *

Совершенно аналогично определяется *безусловная $T^*$-суммируемость ряда* (5) *по внешней мере.*

* Как будет видно из дальнейшего, существование $\sigma_N(x)$ можно понимать в смысле сходимости по внешней мере рядов (7) и потому всюду в работе существование $\sigma_N(x)$ можно понимать в указанном смысле.

Определение 3. Ряд (5) называют *безусловно B-суммируемым почти всюду на E*, если все переставленные ряды (6) суммируются методом $B$ почти всюду на $E$.

Аналогично определяется безусловная $T^*$-суммируемость почти всюду на $E$.

В определениях 2 и 3 независимость функции $F(x)$ от порядка следования членов ряда уже не очевидна.

Отметим, что один факт существования $\sigma_N(x)$ при любых порядках членов в ряде (5) позволяет найти между $\sigma_N(x)$ и членами ряда (5) весьма удобную взаимосвязь, с помощью которой легко дать характеристику всех безусловно суммируемых рядов.

Две первые леммы и посвящены нахождению этой взаимосвязи. Мы увидим, что эти леммы одинаково просты независимо от того, рассматриваем ли мы ряд числовой или функциональный.

Если $\{f_i(x)\}$, $\{\varphi_j(x)\}$, $\{\tau_k(x)\}$ — три последовательности функций, определенных на множестве $E$, то через

$$\{f_i\}+\{\varphi_j\}+\{\tau_k\}$$

будем обозначать теоретико-множественную сумму этих последовательностей.

ЛЕММА 1 (основная). *Пусть последовательность функций* $\{\psi_n\} = \{f_i\}+\{\varphi_j\}+\{\tau_k\}$, *определенных на* $E$, *такова, что* $\tau_k(x)$ — *произвольные функции, а*

$$|f_n(x)|+|\varphi_n(x)|\leqslant F_n(x) \quad (x\in E), \tag{8}$$

*где измеримые функции* $F_n(x)$ *конечны почти всюду на* $[0, 1]$. *Тогда если* **B**-*средние ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x) \tag{9}$$

*имеют смысл почти всюду на* $E$ *при любых перестановках членов, то найдутся две перестановки ряда* (9)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\psi'_n(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\psi''_n(x), \tag{9'}$$

*последовательность чисел* $\{n_k\}$ *и последовательность множеств* $U_k$ *такие, что*

$$U_1\subset\ldots\subset U_k\subset\ldots\subset E, \quad m_e(E-U_k)<\frac{1}{2^k} \tag{10}$$

*и*

$$\sigma'_{n_k}(x)-\sigma''_{n_k}(x)=f_k(x)-\varphi_k(x)+\beta_k(x) \text{ для почти всех } x\in E, \tag{11}$$

*где*

$$|\beta_k(x)|\leqslant\frac{1}{2^{k-3}} \text{ при } x\in U_k, \tag{12}$$

*а* $\sigma'_n(x)$ *и* $\sigma''_n(x)$ — *B-средние рядов* (9'). *При этом если* $F_n(x)\equiv C_n$ ($C_n$ — *постоянные*), *то неравенство* (12) *справедливо для всех* $x\in E$.

Доказательство. Так как функции $F_n(x)$ измеримы, то найдется последовательность совершенных множеств

$$P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_k \subset \ldots \subset [0, 1], \quad mP_k > 1 - \frac{1}{2^k},$$

на каждом из которых все функции $F_n(x)$ непрерывны. Положим

$$D_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} \sup_{x \in P_k} F_i(x), \quad E_k = E \cdot P_k \tag{13}$$

и возьмем любое $p_1$. В силу (1) и (2), можно найти $n_1$ такое, что

$$|1 - B_{n_1, p_1}| < \frac{1}{2^1 D_1}, \quad |\gamma_{n_1}| < \frac{1}{2^1 D_1}.$$

После этого определяем $m_1 > p_1$ так, что [см. (2)]

$$|B_{n_1, m_1}| < \frac{1}{2^1 D_1}.$$

Пусть уже определены $\{p_i\}$, $\{n_i\}$, $\{m_i\}$ для $i = 1, \ldots, k-1$. Тогда находим $p_k > m_{k-1}$ так, чтобы

$$|B_{n_i, p} - \gamma_{n_i}| < \frac{1}{2^k D_k} \quad \text{при } p \geqslant p_k, \quad i = 1, \ldots, k-1. \tag{14}$$

В силу (1), можно взять $n_k > n_{k-1}$ таким, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} |B_{n_k, p_i} - B_{n_k, m_i}| < \frac{1}{2^k D_k}, \tag{15}$$

$$|1 - B_{n_k, p_k}| < \frac{1}{2^k D_k}, \quad |\gamma_{n_k}| < \frac{1}{2^k D_k}. \tag{16}$$

После этого находим $m_k > p_k$ так, чтобы [см. (2) и (16)]

$$|B_{n_k, m_k}| < \frac{1}{2^k D_k}. \tag{17}$$

Построим теперь два ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n'(x) \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n''(x)$$

так, что у первого ряда на месте $p_n$ стоит функция $f_n$, на месте $m_n$ — функция $\varphi_n$, а у второго ряда наоборот. Оставшиеся члены $\tau_n(x)$ в обоих рядах располагаем одним и тем же способом на незаполненные места. Через $\sigma_n'(x)$ будем обозначать $B$-средние первого ряда, а через $\sigma_n''(x)$ — $B$-средние второго ряда. Ясно, что

$$\sigma_{n_k}'(x) - \sigma_{n_k}''(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} (f_j - \varphi_j)(B_{n_k, p_j} - B_{n_k, m_j}) + (f_k - \varphi_k)(B_{n_k, p_k} - B_{n_k, m_k}) +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{\infty} (f_j - \varphi_j)(B_{n_k, p_j} - B_{n_k, m_j}) = S_1 + S_2 + S_3. \tag{18}$$

В силу условия леммы, все величины имеют смысл на некотором множестве $M \subset E$ с $m(E - M) = 0$. Положим

$$U_k = E_k \cdot M = M \cdot P_k.$$

Очевидно, что тогда условие (10) справедливо, так как

$$m_e(E-U_k) \leqslant m_e(M-M\cdot P_k) \leqslant m_e(M\cdot CP_k).$$

На основании (8), (13) и (15), при $x \in U_k$

$$|S_1| \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} F_j(x)\,|B_{n_k,p_j}-B_{n_k,m_j}| \leqslant \frac{1}{2^k}. \qquad (19)$$

С другой стороны, в силу (8), (13) и (14), при $x \in U_k$

$$|S_3| \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} F_j(x)\,|B_{n_k,p_j}-B_{n_k,m_j}| \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} D_j \frac{2}{2^j D_j} = \frac{1}{2^{k-1}}. \qquad (20)$$

Оценим разность $(f_k-\varphi_k)-S_2$ при $x \in U_k$. В силу (8) (13), (16) и (17) для $x \in U_k$

$$|(f_k-\varphi_k)-S_2| \leqslant F_k(x)\,\{|1-B_{n_k,p_k}|+|B_{n_k,m_k}|\} \leqslant$$
$$\leqslant D_k\left\{\frac{1}{2^k D_k}+\frac{1}{2^k D_k}\right\} = \frac{1}{2^{k-1}}. \qquad (21)$$

Объединяя (18)—(21), устанавливаем справедливость соотношений (11) и (12).

ЛЕММА 2 (основная). *Пусть ряд* (9) *удовлетворяет условиям леммы* 1 *с заменой метода* $B$ *на метод* $T^* = \|a_{n,m}\|$. *Тогда справедливы соотношения* (11) *и* (12), *где* $\sigma'_n(x)$ *и* $\sigma''_n(x)$ — $T^*$-*средние некоторых двух переставленных рядов* (9).

Наметим основные этапы доказательства. Как в лемме 1, определяем множества $P_k$, $E_k$ и числа $D_k$. Пусть уже построены числа $\{p_i\}$, $\{n_i\}$ $\{m_i\}$ при $i=0, 1, \ldots, (k-1)$. Определяем $p_k > m_{k-1}$ так, чтобы [см. (4)

$$\left|\sum_{j=p}^{q} a_{n_i,j}\right| < \frac{1}{2^k D_k} \quad \text{при } q \geqslant p \geqslant p_k, \quad i=1, \ldots, k-1. \qquad (22)$$

После этого находим $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы [см. (3) и (4)]

$$\sum_{i=0}^{m_{k-1}} |a_{n_k,i}| < \frac{1}{2^k D_k}, \qquad (23)$$

$$\left|1-\sum_{i=p_k}^{\infty} a_{n_k,i}\right| < \frac{1}{2^k D_k}, \qquad (24)$$

а число $m_k > p_k$ берем таким, чтобы

$$\left|\sum_{i=m_k}^{\infty} a_{n_k,i}\right| < \frac{1}{2^k D_k}. \qquad (25)$$

Строим так же, как и в лемме 1, два ряда. Тогда для их $T^*$-средних будем иметь:

$$\sigma'_{n_k}(x)-\sigma''_{n_k}(x) = \sum_{\alpha=1}^{k-1}(f_\alpha-\varphi_\alpha)\sum_{i=p_\alpha}^{m_\alpha-1} a_{n_k,i} + (f_k-\varphi_k)\sum_{i=p_k}^{m_k-1} a_{n_k,i} +$$

$$+\sum_{\alpha=k+1}^{\infty}(f_\alpha-\varphi_\alpha)\sum_{i=p_\alpha}^{m_\alpha-1}a_{n_k,\,i}=S_1+S_2+S_3, \tag{26}$$

где все выражения имеют смысл на $M\subset E$ с $m(E-M)=0$. Положим $U_k=M\cdot P_k$. В силу (23), при $x\in U_k$

$$|S_1|\leqslant\frac{1}{2^k}. \tag{27}$$

В силу же (22), для $x\in U_k$

$$|S_3|\leqslant\frac{1}{2^k}. \tag{28}$$

С другой стороны, в силу (24) и (25), при $x\in U_k$

$$|(f_k-\varphi_k)-S_2|\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}. \tag{29}$$

Объединяя соотношения (26)—(29), получим утверждение леммы 2.

Замечание 1. Утверждения и доказательства лемм 1 и 2 полностью сохраняются, если мы будем понимать существование $B$-средних ($T^*$-средних) в смысле сходимости по внешней мере рядов (7) (см. сноску к определению 2).

Замечание 2. Очевидно, что леммы 1 и 2 можно распространить и на ряды по функциям $\psi_n(z)$, где $z\in E$, а $E$ — некоторое множество, лежащее в конечномерном эвклидовом пространстве.

Это замечание остается в силе и по отношению к нижеследующим утверждениям.

ЛЕММА 3. *Если $f(x)>0$ на множестве $E\subset[0,1]$ с $m_eE>0$, то найдутся число $\gamma>0$ и множество $E_1\subset E$ с $m_eE_1>0$ такие, что $f(x)\geqslant\gamma$ при $x\in E_1$.*

Доказательство. Возьмем последовательность чисел $\sigma_k\downarrow 0$. Положим

$$A_k=E\{f(x)\geqslant\sigma_k\}.$$

Ясно, что $E=\sum_{k=1}^{\infty}A_k$. Но известно [см. ([9]) стр. 60], что

$$m_eE\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m_eA_k.$$

Поэтому найдется $k_0$ такое, что $m_eA_{k_0}>0$. Положив $E_1=A_{k_0}$ и $\gamma=\sigma_{k_0}$, мы и получим утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. *Для того чтобы последовательность функций $f_n(x)$ была сходящейся на $E$ по внешней мере, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\delta>0$*

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} m_eE\{|f_n(x)-f_m(x)|>\delta\}=0.$$

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству для случая измеримых функций [см. ([10]), стр. 94—95].

Следствие 1. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *сходится по внешней мере на* $E$, *то* $f_n(x)$ *стремится к нулю по внешней мере на* $E$.

ЛЕММА 5. *Пусть последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *сходится по внешней мере на* $E$ *к нулю, т. е. для любого* $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} m_e E\{|f_n(x)| > \delta\} = 0. \tag{30}$$

*Тогда для любых последовательностей* $\delta_k \downarrow 0$, $\eta_k \downarrow 0$ *можно найти последовательность возрастающих чисел* $n_k$ *и последовательность множеств* $B_k \subset E$ *такие, что*

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots, \quad m_e B_k \leqslant \eta_k, \tag{31}$$

*и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x) \tag{32}$$

*ходится по внешней мере на* $E$ *к некоторой функции* $F(x)$ *Кроме того ряд* (32) *всюду сходится на множестве* $E - A \left( A = \prod_{k=1}^{\infty} B_k, \ mA = 0 \right)$ *и притом так, что*

$$\left| F(x_0) - \sum_{k=1}^{N} f_{n_k}(x_0) \right| \leqslant \delta_N \ \text{при} \ x_0 \in E - A, \quad N \geqslant N_0(x_0), \tag{33}$$

*и*

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |f_{n_k}(x)| < \delta_N \ \text{при} \ x \overline{\in} B_N \quad (N = 1, 2, \ldots). \tag{34}$$

Доказательство по идее совпадает с доказательством теоремы Рисса [см. ([9]), стр. 89]. Возьмем последовательности $\alpha_k \downarrow 0$ и $\beta_k \downarrow 0$ такие, что

$$\sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k \leqslant \alpha_{N-1} \leqslant \delta_N \ \text{и} \ \sum_{k=N}^{\infty} \beta_k \leqslant \beta_{N-1} \leqslant \eta_N. \tag{35}$$

Индуктивно найдем $n_1 < n_2 < \ldots$ так, что [см. (30)]

$$m_e E\{|f_{n_k}(x)| > \alpha_k\} < \beta_k, \tag{36}$$

и положим

$$A_k = E\{|f_{n_k}(x)| > \alpha_k\}, \quad B_k = \sum_{i=k}^{\infty} A_i.$$

Ясно, что [см. (35) и (36)]

$$m_e B_k \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} m_e A_i \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \beta_i \leqslant \eta_k,$$

т. е. (31) справедливо. Положим $A = \prod_{k=1}^{\infty} B_k$. Очевидно, что $mA = 0$. Пусть точка $x_0 \in E - A$. Тогда $x_0 \overline{\in} B_{k_0}$, т. е. $x_0 \overline{\in} A_i$ при $i \geqslant k_0$, откуда

следует, что $|f_{n_i}(x_0)| \leqslant \alpha_i$ при $i \geqslant k_0$, т. е. [см. (35)] ряд (32) сходится во всех точках $x_0 \in E - A$. Кроме того, если $x \bar{\in} B_N$, т. е. $x \bar{\in} A_k$ при $k \geqslant N$, то

$$\left| F(x) - \sum_{k=1}^{N} f_{n_k}(x) \right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} |f_{n_k}(x)| \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k \leqslant \delta_N. \tag{37}$$

Последнее неравенство показывает, что ряд (32) сходится по внешней мере на $E$ и что справедливо неравенство (34).

Если же $x_0 \in E - A$, то $x_0 \bar{\in} B_N$ при $N \geqslant N_0(x_0)$ и, в силу (37), справедливо неравенство (33).

ЛЕММА 6. *Пусть $T^* = \|a_{n,m}\|$ — некоторый метод суммирования и пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по внешней мере к нулю на множестве $E \subset [0, 1]$. Тогда если*

$$|f_n(x)| \leqslant F_n(x) \quad (x \in E)$$

*(где измеримые функции $F_n(x)$ конечны почти всюду на [0, 1]), то можно найти такую последовательность $\{n_k\}$, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x) \tag{38}$$

*ходится почти всюду на $E$ и сходится по внешней мере на $E$ к функции $F(x)$. Кроме того, $T^*$-средние имеют смысл почти всюду на $E$ и сходятся на $E$ по внешней мере, а также и почти всюду на $E$, к $F(x)$.*

Доказательство можно провести совершенно аналогично доказательству лемм 1 и 2 работы ([4]), только нужно будет использовать лемму 5.

Замечание 3. При предположениях леммы 6 можно сделать так, чтобы ее заключение было справедливым не только для ряда (38), но и для любого ряда, полученного из (38) «разбавлением» нулями не чаще, чем через один член.

ЛЕММА 6′. *Если метод суммирования $B = \|B_{n,m}\|$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ удовлетворяют условиям леммы 6, то заключение леммы остается справедливым при замене $T^*$-средних на $B$-средние.*

Доказательство леммы 6′ в основном аналогично доказательству леммы 6.

ЛЕММА 7. *Пусть $B = \|B_{n,m}\|$ (или $T^* = \|a_{n,m}\|$) — некоторый метод суммирования, а последовательности функций $\{f_n\}$, $\{\varphi_n\}$ определены на $E \subset [0, 1]$ и*

$$|f_n(x)| + |\varphi_n(x)| \leqslant F_n(x) \quad (x \in E),$$

*где функции $F_n(x)$ измеримы и конечны почти всюду на [0, 1]. Тогда если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{39}$$

*расходится на $E$ по внешней мере, а ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{40}$$

*сходится по внешней мере на $E$, то ряд (39) можно «разбавить» всеми членами ряда (40) так, чтобы вновь полученный ряд не был $B$-суммируемым ($T^*$-суммируемым) по внешней мере на $E$.*

Если использовать лемму 6, то доказательство леммы 7 для методов $T^*$ проходит аналогично доказательству леммы 3 работы ([4]).

Что касается методов $B$, то основная идея доказательства — та же, только следует воспользоваться леммой 6′. Отметим, что при этом следует отдельно разбирать два случая: 1) $\gamma_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и 2) $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |B_{n,m}| > 0$ при некотором $n$ [см. (2)].

Следствие 2. *Пусть $B$ (или $T^*$) — метод суммирования и ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \quad (x \in E), \tag{40′}$$

*где $|\psi_n(x)| \leqslant F_n(x)$, расходится на $E$ по внешней мере. Тогда если некоторая подпоследовательность $\psi_{n_k}(x)$ сходится к нулю по внешней мере на $E$, то члены ряда (40′) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд был несуммируем методом $B(T^*)$ по внешней мере на $E$.*

В самом деле, в силу леммы 5, из ряда (40′) можно выделить «подряд», сходящийся по внешней мере на $E$. Оставшийся ряд, очевидно, опять-таки расходится по внешней мере на $E$. Применяя лемму 7 к полученным двум рядам, убеждаемся в справедливости следствия 2.

Аналогичное предложение справедливо и в вопросах расходимости почти всюду.

Следствие 3. *Пусть $B$ (или $T^*$) — метод суммирования, а $\psi_n(x)$ — измеримые функции на $E$ такие, что некоторая последовательность $\psi_{n_k}(x) \to 0$ почти всюду на $E$. Тогда если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \tag{40″}$$

*расходится на множестве $E_1 \subset E$ с $mE_1 > 0$, то члены ряда (40″) можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд был несуммируем методом $B(T^*)$ почти всюду на $E_1$.*

Это утверждение доказывается совершенно так же, как следствие 2, только вместо леммы 7 нужно использовать лемму 3 работы ([4]).

Отметим, что следствие 3, по существу, уже было использовано нами в работе ([4]) и что для случая регулярных методов $T$ оно неявным образом содержится в работе Орлича ([1]).

ЛЕММА 8. *Пусть $B = \|B_{n,m}\|$ — метод суммирования, а $\{\varphi_n(x)\}$ — последовательность функций на $E$. Тогда если для некоторого $n_0$ ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} B_{n_0,m}$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ можно «разбавить» всеми функциями $\varphi_n(x)$ не чаще, чем через один член, так, чтобы для вновь полученного ряда $B$-среднее с номером $n_0$ не имело смысла для всех $x \in E$.*

Доказательство. По условию, найдется число $\varepsilon > 0$ и последовательность $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots < n_k < m_k < \ldots$ такие, что

$$\left| \sum_{p=n_k+1}^{m_k} B_{n_0, m} \right| > \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{41}$$

Строим новый ряд следующим образом: на места $n_k$ ставим $\varphi_k$, а на оставшиеся — располагаем единицы. Ясно, что таким образом построенный ряд не имеет $B$-среднего $\sigma_{n_0}(x)$, так как для частей ряда, которым определяется $\sigma_{n_0}(x)$, справедливо неравенство (41), что и требовалось доказать.

ЛЕММА 9. *Пусть* $B = \|B_{n, m}\|$ — *метод суммирования, а* $\{\varphi_n(x)\}$ — *последовательность функций на* $E$. *Тогда если*

$$|\varphi_n(x)| \leqslant F_n(x) \quad (x \in E), \tag{42}$$

*где измеримые функции* $F_n(x)$ *конечны почти всюду на* $[0,1]$ *и*

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{n, m} = H_n \to \infty \quad (n \to \infty), \tag{43}$$

*то ряд* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} 1$ *можно «разбавить» всеми функциями* $\varphi_n(x)$ *не чаще, чем через один член, так, что для вновь полученного ряда найдутся последовательность чисел* $\{n_k\}$ *и последовательность множеств* $\{U_k\}$ *такие, что*

$$U_1 \subset \ldots \subset U_k \subset \ldots \subset E, \quad m_e(E - U_k) < \frac{1}{2^k}, \tag{44}$$

$$\sigma_{n_k}(x) \geqslant \frac{H_{n_k}}{2} \text{ при } x \in U_k, \tag{45}$$

*где* $\sigma_n(x)$ — $B$-*средние от «разбавленного» ряда.*

Доказательство. Так как функции $F_n(x)$ измеримы, то найдется последовательность совершенных множеств

$$P_1 \subset \ldots \subset P_k \subset \ldots \subset [0,1], \quad mP_k > 1 - \frac{1}{2^k}, \tag{46}$$

на каждом из которых все функции $F_n(x)$ непрерывны.

Положим

$$U_k = E \cdot P_k, \quad D_k = 1 + \sum_{i=0}^{k} \sup_{x \in P_k} F_i(x). \tag{47}$$

Из (46) и (47) вытекает, что справедливы условия (44). Положим $p_0 = 0$. Пусть $\{p_i\}$, $\{n_i\}$ для $i = 0, \ldots, k-1$ уже определены. Тогда находим $p_k > p_{k-1} + 1$ так, чтобы

$$\left| \sum_{j=p}^{q} B_{n_i, j} \right| < \frac{1}{2^k D_k} \text{ при } i = 0, 1, \ldots, k-1, \quad q \geqslant p \geqslant p_k. \tag{48}$$

В силу же (1) и (43), можно найти $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы

$$|B_{n_k, j}| < 2 \text{ при } j = 0,1, \ldots, p_k, \tag{49}$$

$$H_{n_k} > 20 p_k D_k. \tag{50}$$

Строим новый ряд следующим образом: на место $p_k$ поставим функцию $\varphi_k(x)$, а оставшиеся места заполним единицами. Через $\sigma_n(x)$ обозначим его $B$-средние. Очевидно, что

$$\sigma_{n_k}(x) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \left[ \varphi_\alpha(x) B_{n_k, p_\alpha} + \sum_{i=p_\alpha+1}^{p_{\alpha+1}-1} B_{n_k, i} \right] + \left[ \varphi_k(x) B_{n_k, p_k} + \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}-1} B_{n_k, i} \right] +$$
$$+ \sum_{\alpha=k+1}^{\infty} \left[ \varphi_\alpha(x) B_{n_k, p_\alpha} + \sum_{i=p_\alpha+1}^{p_{\alpha+1}-1} B_{n_k, i} \right] = S_1 + S_2 + S_3. \tag{51}$$

В силу (42), (47) и (49), при $x \in U_k$

$$|S_1| \leqslant D_k \sum_{i=0}^{p_k-1} |B_{n_k, i}| \leqslant 2 p_k D_k. \tag{52}$$

С другой стороны, на основании (48), при $x \in U_k$

$$|S_3| \leqslant \sum_{\alpha=k+1}^{\infty} \left( D_\alpha \frac{1}{2^\alpha D_\alpha} + \frac{1}{2^\alpha D_\alpha} \right) < \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{53}$$

Но при $x \in U_k$ [см. (43), (49) и (48)]

$$S_2 \geqslant \sum_{i=0}^{\infty} B_{n_k, i} - \left| \sum_{i=0}^{p_k} B_{n_k, i} \right| - \left| \sum_{i=p_k+1}^{\infty} B_{n_k, i} \right| - |\varphi_k(x) B_{n_k, p_k}| \geqslant$$
$$\geqslant H_{n_k} - 2(p_k + 1) - \frac{1}{2^{k+1} D_{k+1}} - 2D_k. \tag{54}$$

Следовательно, объединяя (51) — (54), получим [см. также (50)]:

$$\sigma_{n_k}(x) \geqslant H_{n_k} - 2(p_k + 1) - 2(p_k + 1) D_k - \frac{1}{2^{k-2}} \geqslant \frac{H_{n_k}}{2}$$

при $x \in U_k$. А это и значит, что неравенство (45) справедливо.

ЛЕММА 10. *Пусть $B = \| B_{n, m} \|$ — метод суммирования, а последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 9. Тогда если*

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{q_k, m} = H'_k \to 1 \text{ и } \sum_{m=0}^{\infty} B_{\tau_k, m} = H''_k \to 0 \text{ при } k \to \infty, \tag{55}$$

*то ряд $\sum_{m=0}^{\infty} 1$ можно «разбавить» всеми функциями $\varphi_n(x)$ не чаще, чем через один член, так, что для вновь полученного ряда найдутся последовательности чисел $\{m'_k\}$, $\{m''_k\}$ и множеств $\{U_k\}$ такие, что*

$$U_1 \subset \ldots \subset U_k \subset \ldots \subset E, \quad m_e(E - U_k) < \frac{1}{2^k}$$

*и*

$$\sigma_{m'_k}(x) - \sigma_{m''_k}(x) > \frac{1-\theta}{2} \text{ при } x \in U_k \quad (k > 4), \tag{56}$$

*где $\sigma_n(x)$ — B-средние от «разбавленного» ряда.*

Доказательство. Так же, как в лемме 9, определяем $P_k$, $U_k$ и $D_k$. Метод суммирования $\|B_{q_k, m}\|$ обозначим через $B_1 = \|B'_{k, m}\|$, а метод $\|B_{\tau_k, m}\|$ — через $B_2 = \|B''_{k, m}\|$. Положим $p_0 = 0$. Пусть уже определены $\{p_i\}$, $\{n_i\}$ для $i = 0, \ldots, k-1$. Тогда находим $p_k > p_{k-1} + 1$ так, чтобы

$$\left|\sum_{j=p}^{q} B'_{n_i, j}\right| < \frac{1}{2^k D_k}, \quad \left|\sum_{j=p}^{q} B''_{n_i, j}\right| < \frac{1}{2^k D_k} \text{ при } i = 0, 1, \ldots, k-1, \; q \geqslant p \geqslant p_k. \tag{57}$$

После этого можно найти $n_k > n_{k-1}$ так, чтобы [см. (55)]

$$|B'_{n_k, i} - B''_{n_k, i}| \leqslant \frac{1}{k p_k 2^k D_k} \text{ при } i = 0, 1, \ldots, p_k \tag{58}$$

и

$$\sum_{j=0}^{\infty} B'_{n_k, j} > 1 - \frac{1}{2^k}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} B''_{n_k, j} < \frac{1}{2^k}. \tag{59}$$

Так же, как в лемме 9, строим новый ряд. Через $\sigma'_n(x)$ обозначим его $B_1$-средние, а через $\sigma''_n(x)$ — $B_2$-средние. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sigma'_{n_k}(x) - \sigma''_{n_k}(x) = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \left[\varphi_\alpha(x)(B'_{n_k, p_\alpha} - B''_{n_k, p_\alpha}) + \sum_{i=p_\alpha+1}^{p_{\alpha+1}-1} (B'_{n_k, i} - B''_{n_k, i})\right] + \\ + \left[\varphi_k(B'_{n_k, p_k} - B''_{n_k, p_k}) + \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}-1} B'_{n_k, i} - \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}-1} B''_{n_k, i}\right] + \\ + \sum_{\alpha=k+1}^{\infty} \left[\varphi_\alpha(B'_{n_k, p_\alpha} - B''_{n_k, p_\alpha}) + \sum_{i=p_\alpha+1}^{p_{\alpha+1}-1} (B'_{n_k, i} - B''_{n_k, i})\right] = S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned} \tag{60}$$

В силу (42), (47) и (58), при $x \in U_k$

$$|S_1| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{k-1} \left[D_k \frac{1}{k 2^k D_k} + \frac{1}{k 2^k D_k}\right] \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{61}$$

С другой стороны, в силу (57), при $x \in U_k$

$$|S_3| \leqslant \sum_{\alpha=k+1}^{\infty} \left[D_\alpha \frac{2}{2^\alpha D_\alpha} + \frac{2}{2^\alpha D_\alpha}\right] \leqslant \frac{1}{2^{k-2}}. \tag{62}$$

И, наконец, в силу (59), (57) и (58), при $x \in U_k$

$$S_2 \geqslant \sum_{i=0}^{\infty} B'_{n_k, i} - \sum_{i=0}^{\infty} B''_{n_k, i} - \sum_{i=p_{k+1}}^{\infty} (B'_{n_k, i} - B''_{n_k, i}) + \varphi_k(x)(B'_{n_k, p_k} - B''_{n_k, p_k}) -$$

$$- \sum_{i=0}^{p_k} (B'_{n_k, i} - B''_{n_k, i}) \geqslant \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) - \frac{1}{2^k} - \frac{2}{2^{k+1} D_{k+1}} - D_k \frac{1}{2^k D_k} - \frac{1}{2^k} \geqslant 1 - \frac{1}{2^{k-3}}. \tag{63}$$

Объединяя (60) — (63), получаем для $x \in U_k$:

$$\sigma'_{n_k}(x) - \sigma''_{n_k}(x) \geqslant 1 - \frac{1}{2^{k-4}}.$$

Но

$$\sigma'_{n_k}(x) = \sigma_{q_{n_k}}(x), \quad \sigma''_{n_k}(x) = \sigma_{\tau_{n_k}}(x)$$

и потому, полагая

$$m'_k = q_{n_k}, \quad m''_k = \tau_{n_k},$$

мы убеждаемся в справедливости (56).

Замечание 4. Примерно таким же способом доказываются утверждения, аналогичные леммам 8—10, но для методов $T^*$.

Замечание 5. Во всех леммах § 1 (не нарушая их утверждений) условие ограниченности функций $f_n$ измеримыми функциями $F_n(x)$ можно заменить требованием, что найдется последовательность множеств $U_1 \subset \subset \ldots \subset U_k \subset \ldots \subset E$ таких, что $m_e(E - U_k) \downarrow 0$ и каждая функция $f_n(x)$ ограничена на $U_k$.

## § 2. Функциональные и числовые ряды

Вспомогательные результаты, доказанные в § 1, имеют довольно общий характер и потому позволяют получать разнообразные утверждения, относящиеся к безусловной суммируемости рядов. Мы остановимся на тех, которые представляются нам наиболее интересными.

Так же, как в § 1, будем обозначать через $F_n(x)$ функции, измеримые и конечные почти всюду на [0,1].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $B = \| B_{n,m} \|$ — некоторый метод суммирования. Тогда если $|\psi_n(x)| \leqslant F_n(x)$ при $x \in E$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)$ безусловно B-суммируем на множестве E по внешней мере, то*

$$\psi_n(x) = f(x) + \gamma_n(x) \quad (x \in E), \tag{64}$$

*где $f(x)$ — конечная функция на E, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(x)$ безусловно сходится на*

*$E$ по внешней мере. При этом если ряд*

$$\sum_{m=0}^{\infty} 1 \tag{65}$$

*не суммируем методом $B$, то $f(x) \equiv 0$ на $E$.*

Доказательство. Сначала убедимся, что $\psi_n(x)$ сходится по внешней мере на $E$ к некоторой функции $f(x)$. Допустим противное. Тогда, в силу леммы 4, найдется число $\gamma > 0$ и две достаточно редкие различные подпоследовательности $\{m'_k\}$, $\{m''_k\}$ такие, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, m_e E\{|\psi_{m'_k}(x) - \psi_{m''_k}(x)| > \gamma\} > 0. \tag{66}$$

Обозначим через $Q_n(x)$ те функции из системы $\{\psi_i(x)\}$, которые не вошли в $\{\psi_{m'_k}\}$, $\{\psi_{m''_k}\}$. Положим

$$f_k = \psi_{m'_k}, \quad \varphi_k = Q_k, \quad \tau_k = \psi_{m''_k}.$$

Тогда, на основании леммы 1 и условия теоремы 1,

$$\psi_{m'_k}(x) - Q_k(x) \Rightarrow M_1(x), \tag{67}$$

где знак $\Rightarrow$ означает сходимость на $E$ по внешней мере. С другой стороны, полагая

$$f_k = \psi_{m''_k}, \quad \varphi_k = Q_k, \quad \tau_k = \psi_{m'_k},$$

мы также получим:

$$\psi_{m''_k}(x) - Q_k(x) \Rightarrow M_2(x). \tag{68}$$

Строим новую последовательность функций:

$$\{\varepsilon_k(x)\} = \{\psi_{m'_1}, \psi_{m''_2}, \ldots, \psi_{m'_{2k-1}}, \psi_{m''_{2k}}, \ldots\}.$$

Полагаем $f_k = \varepsilon_k$, $\varphi_k = Q_k$ и $\tau_k$ — равным оставшимся функциям системы $\{\psi_i\}$, не вошедшим в $\{\varepsilon_k\}$, $\{Q_k\}$. Тогда, в силу леммы 1,

$$\varepsilon_k(x) - Q_k(x) \Rightarrow M_3(x),$$

или

$$\psi_{m'_{2k-1}}(x) - Q_{2k-1}(x) \Rightarrow M_3(x), \quad \psi_{m''_{2k}}(x) - Q_{2k}(x) \Rightarrow M_3(x). \tag{69}$$

Из (67) — (69) вытекает, что $M_1(x) = M_2(x)$ при $x \in E$. А тогда из (67) и (68) следует, что

$$\psi_{m'_k}(x) - \psi_{m''_k}(x) \Rightarrow 0.$$

Но это противоречит (66). Таким образом,

$$\psi_n(x) = f(x) + \eta_n(x),$$

где $\eta_n(x) \Rightarrow 0$.

Но последовательность функций $\{\psi_n\}$ ограничена измеримыми функциями $\{F_n\}$ и поэтому найдется последовательность множеств $U_1 \subset \ldots \subset U_k \subset \ldots \subset E$ с $m_e(E - U_k) \downarrow 0$, на каждом из которых $f(x)$ ограничена. Следовательно, в силу замечания 5, не ограничивая общности

доказательства, можно считать, что $f(x)$ также ограничена измеримой функцией.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Метод $B$ суммирует ряд (65). Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}[\psi_k(x)-f(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k(x) \tag{70}$$

безусловно $B$-суммируем на $E$ по внешней мере и $\eta_k(x)\to 0$. Допустим, что ряд (70) не является безусловно сходящимся на $E$ по внешней мере, т. е. при некотором порядке членов он расходится. Предположим, что таким расходящимся рядом является ряд (70). Тогда, в силу следствия 2, члены ряда (70) можно переставить так, чтобы новый ряд был несуммируемым методом $B$ по внешней мере на $E$. Мы получили противоречие. Таким образом, ряд (70) безусловно сходится на $E$ по внешней мере.

Случай 2. Метод $B$ не суммирует ряда (65). Этот случай разбивается на три подслучая:

1) Ряд $\sum_{m=0}^{\infty}B_{n_0,m}$ не сходится. Предположим, что функция $f(x)$ не является эквивалентной нулю на $E$, например $f(x)>0$ при $x\in E_1$ с $m_eE_1>0$. Тогда, в силу леммы 3, найдется число $\gamma>0$ и множество $E_2\subset E_1$ с $m_eE_2>0$ такие, что $f(x)\geqslant\gamma$ при $x\in E_2$. Так как $\eta_n(x)\Rightarrow 0$, то, на основании леммы 6′, можно найти ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\eta_{n_k}(x), \tag{71}$$

который (даже после «разбавления» нулями не чаще, чем через один член) $B$-суммируем на $E$ по внешней мере (см. замечание 3). Строим новый ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\psi_{p_i}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}[f(x)+\eta_{p_i}(x)] \tag{72}$$

так, что он может быть получен из ряда $\sum_{k=0}^{\infty}[f(x)+\eta_{n_k}(x)]$ «разбавлением» не чаще, чем через один член, всеми членами $\psi_{q_k}(x)$, не совпадающими ни с одним $\psi_{n_k}(x)$. В ряде (72) функции $f(x)+\eta_{n_k}(x)$ заменим функциями $f(x)$. Вновь полученный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty}\psi^{*}_{p_i}(x) \tag{73}$$

все равно будет $B$-суммируем на $E$ по внешней мере. Но в ряде (73) имеется бесконечно много мест, где стоит $f(x)$, а члены $\psi_{q_k}(x)$ идут не чаще, чем через один член. А так как $f(x)\geqslant\gamma>0$ при $x\in E_2$, то,

силу леммы 8, среди рядов (73) найдется такой, для которого $B$-среднее $\sigma_{n_0}(x)$ не имеет смысла на $E_2$ с $m_e E_2 > 0$. Мы получили противоречие. Итак, в случае 1) $f(x) = 0$ и потому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k(x), \tag{74}$$

где $\eta_k(x) \Rightarrow 0$ на $E$. А тогда (см. рассуждения в случае 1) ряд (74) безусловно сходится на $E$ по внешней мере.

2) Для бесконечно многих $p_k$

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{p_k, m} = H_{p_k} \uparrow \infty \text{ при } p_k \to \infty.$$

Доказательство этого подслучая аналогично доказательству для подслучая 1), только здесь следует ссылаться не на лемму 8, а на лемму 9. Противоречие (в случае предположения $f(x) \neq 0$ при $x \in E_1 \subset E$ с $m_e E_1 > 0$) будет состоять в том, что лемма 9 гарантирует расходимость $\sigma_{n_k}(x)$ в $+\infty$ на некотором множестве $E_2 \subset E_1$ с $m_e E_2 > 0$.

3) Ряды $\sum_{m=0}^{\infty} B_{n,m} = H_n$ сходятся, $H_n$ ограничены в совокупности, но

$$\lim_{k\to\infty} H_{q_k} = a, \quad \lim_{k\to\infty} H_{\tau_k} = b \quad \text{и } a \neq b.$$

Доказательство этого подслучая также аналогично доказательству подслучая 1), только здесь нужно будет ссылаться на лемму 10, которая (в случае предположения $f(x) \neq 0$ при $x \in E_1 \subset E$, $m_e E_1 > 0$) приводит к противоречию с безусловной $B$-суммируемостью ряда по внешней мере на $E$ (см. еще лемму 4).

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $T^* = \|a_{n,m}\|$ — некоторый метод суммирования и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)$ ($|\psi_n(x)| \leqslant F_n(x)$ при $x \in E$) безусловно $T^*$-суммируем на множестве $E$ по внешней мере. Тогда*

$$\psi_n(x) = f(x) + \eta_n(x) \quad (x \in E),$$

*где $f(x)$ — конечная функция на $E$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)$ безусловно сходится на $E$ по внешней мере. При этом если ряд (65) не суммируем $T^*$, то $f(x) = 0$.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, только здесь нужно будет ссылаться на лемму 2.

Отметим, что доказательство теоремы 1 (теорема 2) можно было бы несколько сократить за счет сведения подслучаев 2) и 3) к случаю 1 при помощи рассмотрения метода $B_1(T_1^*)$, более сильного, чем $B(T^*)$ и суммирующего ряд (65). Но мы избрали другой путь по той причине, что на проведенные рассуждения нам придется в дальнейшем ссылаться.

Как частные случаи из теорем 1 и 2 вытекают следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Если метод $B$ $(T)$ регулярен, то при предположениях теоремы 1 (теоремы 2) предельные $B$-суммы ($T$-суммы) не зависят от перестановки членов ряда.*

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $B(T^*)$ — некоторый метод суммирования и ряд из измеримых функций $\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)$ безусловно $B$-суммируем ($T^*$-суммируем) на множестве $E$ по мере. Тогда*

$$\psi_n(x) = f(x) + \eta_n(x) \quad (x \in E),$$

*где $f(x)$ — конечная измеримая функция на $E$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)$ безусловно сходится на $E$ по мере и*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^2(x) < \infty \text{ для почти всех } x \in E.$$

*При этом $f(x) = 0$ на $E$, если метод $B$ $(T^*)$ не суммирует ряда* (65).

Доказательство вытекает из теорем 1, 2 и леммы Орлича ([2]).

Отметим некоторые следствия.

Следствие 4. *Пусть $B = \|B_{n,m}\|$ — некоторый метод суммирования и ряд из измеримых функций*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \quad (x \in E) \tag{75}$$

*безусловно $B$-суммируем почти всюду на $E$. Тогда*

$$\psi_n(x) = f(x) + \eta_n(x) \quad (x \in E),$$

*где $f(x)$ — конечная измеримая функция на $E$, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)$ безусловно сходится почти всюду на $E$. При этом $f(x) = 0$ на $E$, если метод $B$ не суммирует ряда* (65).

Доказательство легко провести, исходя из теоремы 4. Но сама теорема 4 довольно сложна, так как она опирается на теорему 1, доказательство которой усложняется из-за введения в рассмотрение произвольных функций и суммируемости по внешней мере, что требует ряда вспомогательных лемм. Ввиду этого, мы предложим сейчас более простой путь.

В самом деле, в силу следствия 3, для доказательства следствия 4 достаточно установить существование подпоследовательности $\{n_k\}$ такой, что $\psi_{n_k}(x) \to f(x)$ для почти всех $x \in E$. Но если бы это было не так для любой последовательности $\{\psi_{n_k}(x)\}$, то это означало бы, что *любая подпоследовательность* $\{\psi_{n_k}(x)\}$ расходится по мере на $E$. Но ряд (75) безусловно $B$-суммируем почти всюду на $E$ и, стало быть, он *безусловно $B$-суммируем на $E$ по мере*. Отмеченные два факта противоречат лемме 1, что и требовалось доказать.

Следствие 5 *. *Пусть $T^* = \|a_{n,m}\|$ — некоторый метод суммирования и ряд из измеримых функций $\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x)$ безусловно $T^*$-суммируем почти всюду на $E$. Тогда*

$$\psi_n(x) = f(x) + \eta_n(x) \quad (x \in E),$$

*где $f(x)$ — конечная измеримая функция, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)$ безусловно сходится почти всюду на $E$. При этом $f(x) \equiv 0$, если метод $T^*$ не суммирует ряда* (65).

Следствие 5 непосредственно вытекает из теоремы 4 и следствия 3. Отметим, что для следствия 5 можно также дать более простое доказательство (см. доказательство следствия 4), используя лемму 2.

Только что полученный результат (следствие 5) анонсирован без доказательства А. М. Олевским ([11]) для случая, когда существование $T^*$-средних понимается в смысле сходимости почти всюду рядов, аналогичных рядам (7).

Приведем результаты, являющиеся простыми следствиями лемм 1 и 2, но относящиеся к числовым рядам.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $B = \|B_{n,m}\|$ (или $T^* = \|a_{n,m}\|$) — некоторый метод суммирования и у числового ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \tag{76}$$

*$B$-средние (или $T^*$-средние) при каждом порядке членов имеют смысл и ограничены (постоянной, априори зависящей от порядка); тогда $c_n = A + \eta_n$, где $A$ — конечная постоянная, а ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \tag{77}$$

*абсолютно сходится.*

Доказательство. Мы рассмотрим методы $B$, так как для методов $T^*$ рассуждения в основном аналогичны.

Из леммы 1 сразу вытекает, что последовательность $c_n$ ограничена. Значит, найдется $c_{n_k} \to A$. Положим $c_n = A + \eta_n$. Ясно, что $\eta_{n_k} \to 0$.

Случай 1°. Найдется последовательность $p_k$ такая, что $\sum_{m=0}^{\infty} B_{p_k,m} = H_k \to D$ ($D$ — конечное число), т. е. метод $B_1 = \|B_{p_k,m}\|$ суммирует ряд (65). По условию, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n - A) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n$$

* Напомним, что во всех предыдущих утверждениях (в том числе и в следствиях 4 и 5) существование $B$-средних и $T^*$-средних можно понимать в смысле сходимости по мере рядов, которые определяют $B$- или $T^*$-средние.

имеет также ограниченные $B_1$-средние. Допустим, что он абсолютно расходится. Тогда его члены можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \eta_{q_i} \tag{78}$$

неограниченно расходился. А так как $\eta_{n_k} \to 0$, то, применяя аналог теоремы 1 работы (⁴) (там следует положить $h=1$, $f_k(x) \equiv 1$), мы можем члены ряда (78) переставить так, чтобы у нового ряда были неограниченные $B_1$-средние. Тем более будут неограниченными $B$-средние некоторого переставленного ряда (76). Мы получили противоречие. Следовательно, ряд (77) абсолютно сходится.

Случай 2°. Для некоторого $n_0$ ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} B_{n_0, m}$ расходится. Если $A \neq 0$, то, рассуждая так же, как в теореме 1 (случай 1), мы получим, что члены ряда (76) можно переставить так, чтобы у нового ряда $B$-среднее с номером $n_0$ не имело смысла. Поэтому $A=0$. Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n,$$

где $\eta_{n_k} \to 0$. Но тогда (см. разобранный случай 1) ряд (77) должен абсолютно сходиться.

Случай 3°. Найдется последовательность $q_k$ такая, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{q_k, m} = H_k \uparrow \infty.$$

Если $A \neq 0$, то, рассуждая так же, как в теореме 1 (см. случай 2) мы получим, что некоторый переставленный ряд (76) имеет неограниченные $B$-средние. Поэтому $A=0$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n,$$

где $\eta_{n_k} \to 0$. Значит, ряд (77) обязан абсолютно сходиться (см. случай 1°). Теорема доказана.

Следствие 6. *Пусть ряд* (76) *имеет ограниченные В средние* ($T^*$-*средние*) *при любом порядке членов и* $\underline{\lim} |c_n| = 0$. *Тогда этот ряд абсолютно сходится.*

Следствие 6 непосредственно вытекает из теоремы 5, так как $A=0$, если $\underline{\lim}_{n \to \infty} |c_n| = 0$.

Следствие 6′. *Если* $\underline{\lim}_{n \to \infty} |c_n| = 0$ *и ряд* (76) *бесусловно В-суммируем* ($T^*$-*суммируем*), *то он абсолютно сходится.*

Это утверждение вытекает из следствия 6.

Для случая методов $T^*$ указанное утверждение было отмечено нами ранее [см. (⁴), замечание 9].

Следствие 7. *Пусть дан метод суммирования $B$ (или $T^*$) и числовой расходящийся ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad (\varliminf_{n\to\infty} |c_n| = 0). \tag{79}$$

*Тогда члены ряда (79) можно переставить так, что для нового ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{m_k} \tag{80}$$

*справедливы неравенства:*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sigma_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} S_n = \varliminf_{n\to\infty} S_n^{(1)} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \varlimsup_{n\to\infty} S_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sigma_n,$$

*где $S_n^{(1)}$ $(S_n)$ — частные суммы ряда (79) [соответственно ряда (80)], а $\sigma_n$ — $B$-средние (или $T^*$-средние) ряда (80).*

Следствие 7 есть частный случай теоремы 1 работы (4).

Отметим, что это следствие 7 является более общим утверждением, чем результат Робертсона [см. (8), теорема 3], относящийся к условно сходящимся числовым рядам и регулярным методам $T$.

Следствие 8. *Если $B$ (или $T^*$) — некоторый метод суммирования и числовой ряд (76) безусловно $B$-суммируем ($T^*$-суммируем), то $c_n = A + \gamma_n$, где $A$ — постоянная, а ряд (77) абсолютно сходится. При этом если метод $B$ (или $T^*$) не суммирует ряда (65), то $A = 0$.*

В силу теоремы 5, нам нужно только убедиться в том, что $A = 0$, если метод $B$ (или $T^*$) не суммирует ряда (65). Рассмотрим метод $B$. Но метод $B$ может не суммировать ряда (65) только в трех случаях, из которых два уже разобраны (см. теорему 5, случаи 2° и 3°); следовательно, осталось рассмотреть случай, когда

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{q_k, m} = H'_k \to b, \quad \sum_{m=0}^{\infty} B_{\tau_k, m} = H''_k \to a \text{ и } a \neq b.$$

Предположим, что $A \neq 0$. Тогда, в силу леммы 10, ряд (76) не может быть безусловно $B$-суммируем (см. рассуждения теоремы 1 для подслучаев 1) и 3)), что и требовалось доказать.

Утверждение следствия (8) для случая регулярных методов Тёплица $T$ получено ранее В. Ф. Гапошкиным и А. М. Олевским и находится в печати.

Замечание 6. В теореме 5 мы не случайно не формулировали, что $A = 0$, если метод $B$ (или $T^*$) не суммирует ряда (65). Более того, при предположениях теоремы 5 мы не можем утверждать, что ряд (76) безусловно суммируем и, тем более, что его предельные $B$-суммы ($T^*$-суммы) не зависят от порядка следования элементов. Все это будет ясно из дальнейшего. Введем

Определение 4. Пусть дан метод суммирования $B = \|B_{n,m}\|$. Множество $M$ называется *ядром метода $B$*, если оно состоит из всех

тех точек $x \in [-\infty, +\infty]$, для каждой из которых найдется последовательность $\{n_k\}$ такая, что

$$\lim_{n_k \to \infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{n_k; m} = x.$$

Если хоть для одного $n_0$ ряд $\sum_{m=0}^{\infty} B_{n_0, m}$ расходится, то мы считаем, что ядро пусто.

Аналогично дается определение ядра для методов $T^*$.

Отметим, что $+\infty$ и $-\infty$ могут входить в ядро $M$. Совершенно ясно, что ядро $M$ — замкнутое множество. Верно и обратное — что всякое замкнутое множество является ядром некоторого метода суммирования $B$ (или $T^*$). Это следует из того, что для любого числа $a$ (конечного или бесконечного) можно найти регулярный метод $B_1 = \| B^{(1)}_{n, m} \|$, для которого

$$\sum_{m=0}^{\infty} B^{(1)}_{n, m} \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Если проанализировать доказательство теоремы 5, то можно заключить, что, по существу, в нем содержится

ТЕОРЕМА 5′. *Пусть $B$ (или $T$) — регулярный метод суммирования и $B$-средние ($T^*$-средние) ряда* (76) *ограничены для каждого порядка следования членов в ряде* (76). *Тогда $c_n = A + \eta_n$, где $A$ — конечная постоянная, а ряд* (77) *абсолютно сходится. При этом*

а) *если ядро метода $B$ (метода $T$) пусто или же содержит бесконечно удаленную точку, то $A = 0$;*

б) *если ядро $M$ — непустое ограниченное множество и $D = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k$, то для любого числа $y = Ax + D$ (и только для этих $y$) найдется последовательность $\{n_k\}$ такая, что $B$-средние ($T$-средние) любого переставленного ряда* (76) *удовлетворяют равенству:*

$$\lim_{n_k \to \infty} \sigma_{n_k} = y,$$

где $x \in M$.

Из теоремы 5′ вытекает

Следствие 9. *Если ядро метода $B$ (метода $T$) пусто, или состоит из одной конечной точки, или же содержит бесконечно удаленную точку, то из ограниченности $B$-средних ($T$-средних) переставленных рядов* (76) *вытекает их безусловная суммируемость к одному и тому же числу.*

Утверждение следствия 9, очевидно, теряет силу, если ядро метода суммирования не удовлетворяет высказанным требованиям.

## § 3. Ортогональные ряды

В работе ([4]) (см. теорему 10 и замечание 11) нами было показано, что существует ортогональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (x \in [0,1]),$$

который всюду на [0,1] расходится к $+\infty$ и тем не менее всюду на [0,1] безусловно суммируем некоторым регулярным методом $T$. Там же (см. следствие 4 и § 3) было показано, что для некоторого класса ортогональных рядов это невозможно даже в случае множеств неполной меры. Отметим, что это получалось как следствие значительно более общих результатов, относящихся к свойствам переставленных тригонометрических систем (а также систем, близких к тригонометрическим).

В настоящем параграфе, на основании предыдущих результатов, мы докажем некоторые утверждения, относящиеся к безусловной суммируемости (в том или ином смысле) ортогональных рядов. Через $\{\varphi_n(x)\}$ будем обозначать ортонормированные системы на [0,1].

ТЕОРЕМА 6. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{81}$$

*безусловно B-суммируем ($T^*$-суммируем) по мере на множестве $E \subset [0,1]$ с $mE > 0$. Тогда если*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} |c_n| < \infty, \tag{82}$$

*то ряд* (81) *безусловно сходится на $E$ по мере и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 f_n^2(x) < \infty$ почти всюду на $E$.*

Доказательство. В силу теоремы 4, имеем:

$$c_n \varphi_n(x) = f(x) + \eta_n(x),$$

где ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x)$ безусловно сходится на $E$ по мере. Стало быть, теорема 6 будет доказана, если мы покажем, что $f(x) = 0$ почти всюду на $E$. Допустим противное, например что $f(x) > 0$ при $x \in E_1 \subset E$, где $mE_1 > 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $c_n \varphi_n(x) \to f(x)$ равномерно на $E_1$ и все функции непрерывны на $E_1$. Следовательно [см. (82)], для некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$

$$c_{n_k} \int_{E_1} \varphi_{n_k}(x)\, dx \to \int_{E_1} f(x)\, dx, \tag{83}$$

где $|c_{n_k}| \leqslant D$, а $D$ — постоянная. Так как интегралы в левой части (83) стремятся к нулю (как коэффициенты Фурье характеристической функ-

ции), то

$$\int_{E_1} f(x)\,dx = 0.$$

Мы получили противоречие, доказывающее теорему.

Из теоремы 6 вытекает

Следствие 10. *Пусть ряд* (81) *безусловно B-суммируем* (*$T^*$-суммируем*) *почти всюду на $E$ с $mE > 0$. Тогда если*

а) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty$

*или*

б) $\lim\limits_{\overline{n\to\infty}} |c_n| = 0$,

*или*

в) $\lim\limits_{\overline{n\to\infty}} |c_n| < \infty$,

*то этот ряд безусловно сходится почти всюду на $E$.*

В самом деле, в силу предположения, ряд (81) обязан безусловно $B$-суммироваться ($T^*$-суммироваться) на $E$ по мере. Поэтому, в силу теоремы 6, при любом из условий а), б), в) почти всюду на $E$ мы имеем:

$$c_n \varphi_n(x) \to 0.$$

А это показывает (см. следствие 3), что ряд (81) безусловно сходится почти всюду на $E$, что и требовалось доказать.

Замечание 7. А) Утверждение следствия 10 в случае а) для регулярных методов $T$ было доказано Орличем [см. (3), стр. 91, см. также (12), стр. 215].

В) Утверждение следствия 10 в случае б) для методов $T^*$ было доказано нами ранее [см. (4), следствие 6].

С) Утверждение следствия 10 в случае в) для методов $T^*$ недавно анонсировано без доказательства А. М. Олевским (11) при условии несколько менее ограничительном, чем условие в).

ТЕОРЕМА 7. *Пусть ряд* (81) *безусловно B-суммируем* (*$T^*$-суммируем*) *по мере на множестве $E \subset [0,1]$ с $mE > 0$. Тогда если*

$$\lim\limits_{\overline{k\to\infty}} \int_M \varphi_k^2(x)\,dx > 0 \tag{84}$$

*при любом $M \subset E$ с $mM > 0$, то ряд* (81) *безусловно сходится по мере на* [0,1] *и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty. \tag{85}$$

Доказательство. Сначала покажем, что ряд (81) безусловно сходится по мере на $E$. Если

$$\lim\limits_{\overline{n\to\infty}} |c_n| < \infty,$$

то это утверждение вытекает из теоремы 6. Поэтому мы можем предположить, что

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = +\infty. \tag{86}$$

В силу теоремы 4, для почти всех $x \in E$

$$\lim_{n\to\infty} c_n \varphi_n(x) = f(x), \tag{87}$$

где $f(x)$ — конечная функция на $E$. Но (84) и (86) противоречат (87), если $|f(x)| < \infty$. Стало быть, случай (86) невозможен. Но если ряд (81) безусловно сходится на $E$ по мере, то, по теореме 4,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \varphi_n^2(x) < \infty \text{ для почти всех } x \in E. \tag{88}$$

Из (84) и (88) вытекает справедливость (85). Таким образом, ряд (81) безусловно сходится на [0,1] по мере.

Следствие 11. *Если $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условию* (84) *и ряд* (81) *безусловно B-суммируем ($T^*$-суммируем) почти всюду на $E$, то этот ряд безусловно сходится почти всюду на $E$ и справедливо неравенство* (85).

В самом деле, из теоремы 7 вытекает, что $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty$. Стало быть, на основании следствия 10, мы получаем, что ряд (81) безусловно сходится почти всюду на $E$.

Замечание 8. Утверждения, содержащиеся в теореме 7 и следствии 11, справедливы для тригонометрической системы (а также и для любой ее подсистемы), так как для них справедливо условие (84).

ТЕОРЕМА 8. *Пусть ряд* (81) *безусловно B-суммируем ($T^*$-суммируем) на* [0,1] *по мере. Тогда если система $\{\varphi_n(x)\}$ ограничена в совокупности на* [0,1], *то ряд* (81) *безусловно сходится на* [0,1] *по мере и справедливо условие* (85).

Доказательство. Покажем сначала, что ряд (81) безусловно сходится на [0,1] по мере. Если

$$\varliminf_{n\to\infty} |c_n| < \infty,$$

то это утверждение вытекает из теоремы 6. Поэтому мы можем предположить

$$\lim_{n\to\infty} |c_n| = +\infty.$$

В силу теоремы 4, почти всюду на [0,1]

$$\lim_{n\to\infty} c_n^2 \varphi_n^2(x) = f^2(x), \tag{89}$$

где $f(x)$ — конечная функция на [0,1]. Но система $\{\varphi_n(x)\}$ ограничена в совокупности и потому [см. ([12]), стр. 173]

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_M \varphi_n^2(x)\,dx > 0, \tag{90}$$

если множество $M \subset [0,1]$ имеет меру, достаточно близкую к 1. Из (89) и (90) вытекает, что случай $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| = \infty$ невозможен. Итак, ряд (81) безусловно сходится на [0,1] по мере и (см. теорему 4) почти всюду на [0,1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \varphi_n^2(x) < \infty. \tag{91}$$

Из (90) и (91) вытекает (85), что и требовалось доказать.

Замечание 9. 1°. Если в теореме 6 опустить условие (82), то она теряет силу. Упомянутый в начале § 3 пример показывает, что ортогональный ряд может быть безусловно суммируемым по мере на $[0,1]$ (даже безусловно суммируемым всюду на $[0,1]$) и тем не менее он расходится по мере на $[0,1]$ при любом порядке членов, так как этот ряд расходится всюду на $[0,1]$ к $+\infty$ [по поводу таких рядов см. ([7])].

2°. Теорема 8 тоже в некотором смысле является точной. Именно, если мы вместо отрезка $[0,1]$ будем брать подмножество $E\subset[0,1]$ с $0<mE<1$, то даже при абсолютной сходимости ряда (81) на множестве $E$ мы не можем гарантировать справедливости условия (85). Для построения соответствующего примера достаточно взять любую ограниченную в совокупности ортонормированную систему на $[0,1]$ такую, что $\varphi_n(x)=0$ при $x\in E$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ при любых $c_n$ будет абсолютно сходиться на $E$.

Замечание 10. Доказанные в § 2, 3 утверждения показывают, каким образом можно из безусловной суммируемости (в том или ином смысле) функционального или ортогонального ряда получать заключение о его безусловной сходимости.

Замечание 11. Утверждения, доказанные в этой работе, допускают ряд обобщений. Более подробно мы это предполагаем изложить в последующих работах.

Поступило
7.XII. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Orlicz W., Über die unabhängig von der Anordnung fast überall konvergenten Funktionenreihen, Bull. de l'Academie Polonaise (1927) 117—125.

[2] Orlicz W., Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen, Studia Math., 4 (1933), 27—32.

[3] Orlicz W., Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. de l'Academie Polonaise (1927), 81—116.

[4] Ульянов П. Л., О безусловной сходимости и суммируемости, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 811—840.

[5] Ульянов П. Л., О перестановках тригонометрической системы, Доклады Ак. наук СССР, 116, № 4 (1957), 568—571.

[6] Ульянов П Л., О рядах по переставленной тригонометрической системе, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 515—542.

[7] Ульянов П. Л., О расходимости ортогональных рядов к $+\infty$, Научные доклады высшей школы, серия физико-матем. наук, 4 (1958), 63—67.

[8] Robertson A. P., On rearrangements of infinite series, Proc. Glasgow Math. Assoc., 3, № 4 (1958), 182—193.

[9] Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, М.— Л., 1958.

[10] Халмош П., Теория меры, ИЛ, 1953.

[11] Олевский А. М., Безусловная суммируемость функциональных рядов, Доклады Ак. наук СССР, 125, № 2 (1959), 269—272.

[12] Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, М., 1958.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 809—814

А. О. ГЕЛЬФОНД

# ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ СВОЙСТВЕ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

В работе устанавливается закон распределения остатков $x_n(\alpha)$, $0<\alpha<1$, из представления $\alpha=\sum_1^n \frac{\lambda_k}{\theta^k}+\frac{x_{n+1}}{\theta^n}$, $0\leqslant\lambda_n<\theta$, $\lambda_n$ — целые, $1<\theta$, $\theta$ — нецелое, почти для всех $\alpha$. Кроме того, рассматриваются и другие задачи для $x_n$.

Пусть $\theta>1$ — действительное число. Тогда всякое число $\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, можно однозначно представить рядом

$$\alpha=\sum_1^\infty \frac{\lambda_n}{\theta^n}=\sum_1^n \frac{\lambda_k}{\theta^k}+\frac{x_{n+1}}{\theta^n},\quad 0\leqslant x_n<1,\quad x_n=x_n(\alpha), \tag{1}$$

где все $\lambda_n$ — целые числа, $0\leqslant\lambda_k<\theta$, если последовательно определять эти числа соотношениями:

$$\begin{gathered} x_1=\alpha,\ x_2=\{\theta x_1\},\ldots,x_{n+1}=\{\theta x_n\},\ldots, \\ \lambda_1=[\alpha\theta],\ldots,\ \lambda_n=[\theta x_n],\ldots. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\{x\}$ и $[x]$ обозначают соответственно дробную и целую части $x$.

Когда $\theta=q$, где $q>1$ — целое число, то мы получаем обычное $q$-ичное разложение числа $\alpha$. В этом случае

$$x_n=\{q^{n-1}\alpha\}.$$

Как хорошо известно [см. ([1])], при $\theta$ целом, $\theta=q$, числа $x_n$ почти для всех $\alpha$ (в смысле меры множества) равномерно распределены на отрезке $[0,1]$; другими словами, почти для всех $\alpha$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \psi(1-t+x_n)=t,\quad \psi(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 0>x,\,x>1,\end{cases} \tag{3}$$

при $0<t\leqslant 1$.

Если для последовательности $x_n(\alpha)$ существует предел

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_1^N \psi(1-t+x_n)=\sigma(\psi), \tag{4}$$

то говорят, что у последовательности имеется закон распределения $\sigma(t)$, а если почти для всех $\alpha$ закон распределения один и тот же, то мы будем называть его нормальным законом распределения. Для определения вида нормального закона распределения чисел $x_n(\alpha)$ при произвольном нецелом $\theta$ определим числа $t_k$ по способу (2) для $\alpha=1$ и положим

$$\sigma_0(t)=\frac{1}{\tau}\sum_1^\infty \frac{\psi(1-t_k+t)}{\theta^{k-1}},\qquad \tau=\sum_1^\infty \frac{t_k}{\theta^{k-1}},\qquad 1=\sum_1^n \frac{\lambda_n}{\theta^k}+\frac{t_{n+1}}{\theta^n}. \tag{5}$$

Тогда будет иметь место

ТЕОРЕМА I. *Если $\theta > 1$ — нецелое число, то почти для всех $\alpha$ имеет место соотношение*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \psi\,(1 - t + x_k) = \sigma(t) = \int_0^t \sigma_0(x)\,dx = \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\min(t, t_k)}{\theta^{k-1}}, \quad t_1 = 1, \tag{6}$$

*где функции $\psi(x)$, $\sigma_0(x)$ и числа $\tau$, $t_1$, $t_2$,... определены выше.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — любая ограниченная на отрезке $[0,1]$ функция. Тогда при $t \leqslant 1$

$$\begin{aligned}\int_0^t f[x_n(\alpha)]\,d\alpha &= \int_0^t f[x_{n-1}(\{\theta\alpha\})]\,d\alpha = \frac{1}{\theta}\int_0^{t\theta} f[x_{n-1}(\{\alpha\})]\,d\alpha = \\ &= \frac{\lambda_1(t)}{\theta}\int_0^1 f[x_{n-1}(\alpha)]\,d\alpha + \frac{1}{\theta}\int_0^{x_2(t)} f[x_{n-1}(\alpha)]\,d\alpha = \\ &= \sum_1^{n-1}\frac{\lambda_k(t)}{\theta^k}\int_0^1 f[x_{n-k}(\alpha)]\,d\alpha + \frac{1}{\theta^{n-1}}\int_0^{x_n(t)} f(\alpha)\,d\alpha, \\ t &= \sum_1^{n-1}\frac{\lambda_k(t)}{\theta^k} + \frac{x_n(t)}{\theta^{n-1}}, \quad n = 2, 3, \ldots .\end{aligned} \tag{7}$$

В частном случае при $t = 1$ мы будем иметь:

$$\int_0^1 f[x_n(\alpha)]\,d\alpha = \sum_1^{n-1}\frac{\lambda_k}{\theta^k}\int_0^1 f[x_{n-k}(\alpha)]\,d\alpha + \frac{1}{\theta^{n-1}}\int_0^{t_n} f(\alpha)\,d\alpha, \tag{8}$$

где $\lambda_k = \lambda_k(1)$, $t_k = x_k(1)$.

Система равенств (8) может быть записана в форме:

$$\left.\begin{aligned} &2A_n = \sum_0^{n-1}\frac{\lambda_k}{\theta^k}A_{n+k} + B_n, \\ &B_n = \frac{1}{\theta^{n-1}}\int_0^{t_n} f(\alpha)\,d\alpha = \int_0^1 f(\alpha)\,\frac{\psi(1 - t_n + \alpha)}{\theta^{n-1}}\,d\alpha, \\ &A_n = \int_0^1 f[x_n(\alpha)]\,d\alpha, \quad B_1 = A_1 = \int_0^1 f(\alpha)\,d\alpha, \quad A_0 = 0, \quad \lambda_0 = 1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Для определения величин $A_n$ рассмотрим функции

$$F(z) = \sum_1^\infty A_n z^n, \quad W(z) = \sum_1^\infty B_n z^n, \quad U(z) = \sum_0^\infty \frac{\lambda_n}{\theta^n} z^n.$$

В силу равенств (9) эти функции связаны соотношением:

$$2F(z) = F(z)\,U(z) - W(z),$$

откуда

$$F(z) = \frac{W(z)}{2 - U(z)} = \frac{1}{U'(1)}\,\frac{W(z)}{1 - z} + \sum_1^\infty C_n z^n, \tag{10}$$

где $C_n = O(\rho^{-n})$, $\theta \geqslant \rho > 1$, так как $2 - U(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z| < \theta$, $\theta > 1$, имеющая однократный нуль при $z = 1$ и не

имеющая других нулей в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$, в силу равенства (5), а $W(z)$ регулярна в круге $|z| < \theta$.

Из соотношения (10) непосредственно следует, что

$$A_n = \frac{1}{U'(1)} \sum_1^n B_k + O(\rho^{-n}),$$

откуда

$$\int_0^1 f[x_n(\alpha)]\, d\alpha = \frac{1}{\tau} \sum_1^\infty \int_0^1 f(\alpha) \frac{\psi(1 - t_n + \alpha)}{\theta^{n-1}} d\alpha + O(\rho^{-n}) =$$

$$= \int_0^1 f(\alpha)\, \sigma_0(\alpha)\, d\alpha + O(\rho^{-n}), \tag{11}$$

где

$$\tau = U'(1) = \sum_1^\infty \frac{k\lambda_k}{\theta^k} = \sum_1^\infty \frac{t_n}{\theta^{n-1}}, \quad \sigma_0(x) = \frac{1}{\tau} \sum_1^\infty \frac{1}{\theta^{n-1}} \psi(1 - t_k + x).$$

Из соотношений (7) и (11) непосредственно выводим, что

$$\int_0^t f[x_n(\alpha)]\, d\alpha = \sum_1^{n-1} \frac{\lambda_k(t)}{\theta^n} \int_0^1 f(\alpha)\, \sigma_0(\alpha)\, d\alpha + O(\rho^{-n}) =$$

$$= t \int_0^1 f(\alpha)\, \sigma_0(\alpha)\, d\alpha + O(\rho^{-n}), \tag{12}$$

так как $\sum\limits_1^\infty \frac{\lambda_k(t)}{\theta^k} = t$.

Обозначив

$$S_N(\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \psi[1 - t + x_n(\alpha)],$$

мы из соотношений (12) получим:

$$\int_0^1 S_N(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{N} \sum_1^N \int_0^1 \psi[1 - t + x_n(\alpha)]\, d\alpha =$$

$$= \int_0^1 \psi[1 - t + \alpha]\, \sigma_0(\alpha)\, d\alpha + O\left(\frac{1}{N}\right) = \sigma(t) + O\left(\frac{1}{N}\right). \tag{13}$$

Полагая в соотношении (12)

$$f(\alpha) = \psi[1 - t + x_m(\alpha)]\, \psi[1 - t + \alpha],$$

найдем:

$$\int_0^1 \psi[1 - t + x_{m+n}(\alpha)]\, \psi[1 - t + x_n(\alpha)]\, d\alpha =$$

$$= \int_0^1 \psi[1 - t + x_m(\alpha)]\, \psi(1 - t + \alpha)\, \sigma_0(\alpha)\, d\alpha + O(\rho^{-n}) =$$

$$= \int_0^t \psi[1 - t + x_m(\alpha)]\, \sigma_0(\alpha)\, d\alpha + O(\rho^{-n}). \tag{14}$$

Наконец, в силу (13), будем иметь:

$$\int_0^1 [S_N(\alpha) - \sigma(t)]^2 \, d\alpha = \int_0^1 S_N^2(\alpha)\, d\alpha - \sigma^2(t) + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Но

$$\int_0^1 S_N^2(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \frac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{N-m} \int_0^1 \psi[1 - t + x_{n+m}(\alpha)]\, \psi[1 - t + x_n(\alpha)]\, d\alpha + O\left(\frac{1}{N}\right) =$$

$$= \frac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} (N - m) \int_0^t \psi[1 - t + x_m(\alpha)]\, \sigma_0(\alpha)\, d\alpha + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

силу (14). Отсюда получаем:

$$\int_0^1 S_N^2(\alpha)\, d\alpha - \sigma^2(t) = O\left(\frac{1}{N}\right) +$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} (N - m)\, \psi[1 - t + x_m(\alpha)] - \sigma(t)\right] \sigma_0(\alpha)\, d\alpha.$$

Для оценки правой части мы можем воспользоваться теоремой о среднем значении интеграла, так как $\sigma_0(\alpha)$ монотонно не возрастает, а множитель при $\sigma_0(\alpha)$ есть ограниченная функция с конечным числом точек разрыва. Тогда, в силу (12), будем иметь:

$$\int_0^1 S_N^2(\alpha)\, d\alpha - \sigma^2(t) = \sigma_0(0) \int_0^\beta \left[\frac{2}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} \psi[1 - t + x_m(\alpha)] - \sigma(t)\right] d\alpha +$$

$$+ O\left(\frac{1}{N}\right) = \sigma_0(0) \left[\frac{N(N-1)}{N^2}\, \beta\sigma(t) - \beta\sigma(t)\right] + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad \beta \leqslant t.$$

Отсюда получаем окончательную оценку:

$$\int_0^1 [S_N(\alpha) - \sigma(t)]^2\, d\alpha = O\left(\frac{1}{N}\right). \tag{15}$$

Этой оценки достаточно для утверждения правильности нашей теоремы. Действительно, меняя $N$ по последовательности $N = q^4$, мы видим, что неравенство $T_q(\alpha) = |S_{q^4}(\alpha) - \sigma(t)| > q^{-\frac{1}{2}}$ может быть справедливо только на множестве $E_q$ меры, не превосходящей $O(q^{-\frac{3}{2}})$. Поэтому неравенство

$$T_q(\alpha) > p^{-\frac{1}{2}}$$

при $q \geqslant p$ может выполняться только на множестве $E_p' = \sum_p^\infty E_q$ меры, не превышающей $O(p^{-\frac{1}{2}})$. Так как $E_{p+1}'$ — часть множества $E_p$ и мера $E_p$ стремится к нулю с ростом $p$, то их пересечение $E'$ имеет меру нуль, а дополнение $E'$ множества $\overline{E}'$ имеет меру единица. Всякая точка

$\alpha$, $\alpha \in \overline{E}'$, начиная с некоторого $q > q_0$, принадлежит к $\overline{E}'_q$ и поэтому

$$T_q(\alpha) < q^{-\frac{1}{2}}$$

при $q > q_0$. Значит, для множества $\overline{E}'$ меры единица $\lim\limits_{q\to\infty} T_q(\alpha) = 0$ при $\alpha \in \overline{E}'$.

Мы доказали пока только то, что предел (6) существует по последовательности $N = q^4$ для $\alpha \in \overline{E}'$. Но этот предел существует и по всей последовательности натуральных чисел, так как $q^4 - (q-1)^4 = O(q^3)$ и слагаемые в сумме (6) не превышают единицы.

Итак, для каждого фиксированного $t$ существует множество $E(t)$ меры единица, на котором предел (6) существует. Для каждого рационального числа $\frac{p}{q}$ существует, вообще говоря, свое множество $E\left(\frac{p}{q}\right)$ меры единица. Так как $\overline{E}\left(\frac{p}{q}\right)$ имеет меру нуль, то $\sum\limits_{p,q} \overline{E}\left(\frac{p}{q}\right) = \overline{E}$ также имеет меру нуль. Но тогда на множестве $E$ меры единица существует предел (6) при любом $t = \frac{p}{q}$. Так как множество рациональных дробей всюду плотно и при $\frac{p}{q} < t < \frac{p_1}{q_1}$

$$\sigma\left(\frac{p}{q}\right) + o(1) < \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} \psi[1 - t + x_k] < \sigma\left(\frac{p_1}{q_1}\right) + o(1),$$

то предел (6) существует при $\alpha \in E$ и любом $t$.

При целом $\theta = q$ $\sigma(t) = t$, так как в этом случае $t_1 = 1$ и $t_k = 0$, $k \geqslant 2$. Для всякого нецелого $\theta > 1$ функция $\sigma_0(t) = \sigma'(t)$ имеет разрывы. Конечное число этих разрывов соответствует случаю конечного числа различных $t_k$. Но если $t_k = t_{k+p}$, то $\lambda_q = \lambda_{q+p}$ при $q \geqslant k$ в силу закона построения чисел $t_k$. Значит, в этом случае

$$1 = \sum_{1}^{q} \frac{\lambda_k}{\theta^k} \sum_{s=1}^{p} \frac{\lambda_{s+q}}{\theta^{q+s}} \cdot \frac{1}{\theta^p - 1} \tag{16}$$

или

$$(\theta^p - 1)\left(\theta^q - \sum_{0}^{q-1} \theta^k \lambda_{q-k}\right) - \sum_{0}^{p-1} \theta^k \lambda_{q+p-k} = 0, \tag{16'}$$

откуда следует, что $\theta$ — алгебраическое число определенного вида. Итак, $\sigma_0(t)$ может иметь конечное число точек разрыва только в том случае, когда $\theta$ — корень уравнения (16′), на коэффициенты которого наложено много условий, в частности $\lambda_1 = [\theta]$ и $|a_k| \leqslant \lambda_1$. Числами, в известном смысле близкими к целым, являются числа Пизо, другими словами, такие целые алгебраические числа, все сопряженные которых по модулю меньше единицы. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА II. *Если $\theta$ — число Пизо, то $\sigma_0(x)$ имеет конечное число разрывов.*

Доказательство. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_\nu$, $|\theta_k| \leqslant \rho < 1$, $1 \leqslant k \leqslant \nu$, — числа, сопряженные $\theta$, и пусть целое число $p$ определяется неравенством

$$\left(\frac{2\theta}{1-\rho}\right)^\nu < \theta^{p-1}.$$

Рассматривая соотношения

$$\theta^k - \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_{k-s}\theta^s = \sum_{m=1}^{p} \frac{\lambda_{k+m}}{\theta^m} + \frac{x_{k+m+1}}{\theta^p}, \quad x_n < 1,$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots,$ мы можем утверждать, что какая-либо конечная последовательность целых чисел $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+p}$ должна повториться, так как $0 \leqslant \lambda_k < \theta$ и число таких последовательностей не превышает $(1+\theta)^p$. Пусть одна и та же комбинация $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+p}$ встретится при $k = n$ и $k = q$. Тогда многочлен

$$L(\theta) = \theta^q - \sum_{s=0}^{q-1} \lambda_{q-s}\theta^s - \theta^n + \sum_{s=0}^{n-1} \lambda_{n-s}\,\theta^s = \frac{x_q - x_s}{\theta^p}$$

удовлетворяет неравенству

$$|L(\theta)| < \theta^{-p}.$$

Если $L(\theta) = 0$, то $x_q = x_n$ и теорема доказана. Если же $L(\theta) \neq 0$, то и $L(\theta_k) \neq 0$, так как $\theta_k$ — сопряженные $\theta$. Но тогда

$$N = \left| L(\theta) \prod_{1}^{\nu} L(\theta_k) \right| < \theta^{-p} \left(\frac{2\theta}{1-\rho}\right)^{\nu} \leqslant \theta^{-1} < 1,$$

что невозможно, так как $N$ — целое, отличное от нуля число. Этим теорема полностью доказана.

Назовем комбинацию знаков $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ допустимой, при фиксированном $\theta$, если

$$\sum_{s=1}^{n-k} \frac{\lambda_{k+s}}{\theta^s} \leqslant 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

В случае, если для заданного $\alpha$ существует по основанию $\theta > 1$ закон распределения, то каждая комбинация знаков имеет свою постоянную частоту повторения. Действительно, в этом случае число повторений заданной комбинации знаков $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на отрезке $[1, N]$ равно числу $x_k$ в интервале

$$\frac{\lambda_1}{\theta} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\theta^n} \leqslant x_k < \frac{\lambda_1}{\theta} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\theta^n} + \frac{1}{\theta^n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Это неравенство дает в пределе частоту встречи комбинации в виде разности

$$\left[\sigma\left(\frac{\lambda_1}{\theta} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\theta^n} + \frac{1}{\theta^n}\right) - \sigma\left(\frac{\lambda_1}{\theta} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\theta^n}\right)\right] N,$$

где $\sigma(t)$ — закон распределения для числа $\alpha$ по $\theta$. В случае $\theta$ целого [см. ([2])] эта частота зависит только от числа членов комбинации знаков. Обратное утверждение также верно. Если частота встречи комбинации знаков постоянна в пределе, то закон распределения существует.

Поступило
14. V. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy G. H. and Littlewood J. E., The fractional part of $n^k\theta$, Acta Math., 37 (1914), 155—191.

[2] Borel E., Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rendiconti del Circ. Math. di Palermo, 27 (1909), 247—271.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 815–822

Ю. Н. ШАХОВ

# К ИМИТАЦИИ ПРОСТЕЙШИХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Для конечной однородной цепи Маркова со стационарным распределением вероятностей (вероятности предполагаются числами рациональными) строится в некотором смысле имитирующая ее конечная последовательность знаков. С помощью этой последовательности дается конструкция нормальной по Маркову последовательности знаков.

Напомним определение нормальной периодической системы [см. ([1])]. Пусть $n$, $q$, $\tau$, $\delta_1, \ldots, \delta_\tau$ — целые числа, удовлетворяющие условиям:

$$n \geqslant 1, \quad q \geqslant 2, \quad \tau \geqslant n, \quad 1 \leqslant \delta_\nu \leqslant q$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, \tau).$$

Будем называть величины $\delta_\nu$ знаками, а системы знаков $\delta_{\nu_1}\delta_{\nu_2}\ldots\delta_{\nu_n}$ — $n$-значными числами (в дальнейшем знаки иногда будем обозначать через $\beta_\nu$).

Рассмотрим множество $E_n$, состоящее из $\tau$ $n$-значных чисел. Среди чисел, составляющих $E_n$, могут встречаться и одинаковые, т. е. такие, у которых все знаки соответственно совпадают. Будем говорить, что на множестве $E_n$ возможны нормальные периодические системы, если существует такая последовательность знаков

$$\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_{n-1}\delta_n\delta_{n+1}\delta_{n+2}\ldots\delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-1}, \tag{1}$$

что получающиеся из ее соседних знаков $\tau$ $n$-значных чисел

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_n, \ \delta_2\delta_3\ldots\delta_{n+1}, \ \delta_3\delta_4\ldots\delta_{n+2}, \ldots, \ \delta_\tau\delta_1\ldots\delta_{n-1}$$

совпадают с множеством $n$-значных чисел, составляющих $E_n$. Последовательность (1) называется нормальной периодической системой или системой $\rho_n$.

В работе ([1]) указаны необходимые и достаточные условия, при которых на множестве $E_n$ возможны нормальные периодические системы. Приведем их. Назовем системы знаков $\beta_1\ldots\beta_{n-1}$ и $\beta_2\ldots\beta_n$ $n-1$-значными числами, входящими в $n$-значное число $\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}\beta_n$. Назовем, далее, $n-1$-значное число входящим в $E_n$, если оно входит хотя бы в одно $n$-значное число, принадлежащее множеству $E_n$.

ТЕОРЕМА КОРОБОВА. *На множестве $E_n$ тогда и только тогда возможны системы $\rho_n$, когда выполняются следующие условия полноты и связности:*

1. *Для всякого $n-1$-значного числа $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$, входящего в $E_n$, число $n$-значных чисел вида $\beta_1 \ldots \beta_{n-1}\beta$ и $\beta'\beta_1 \ldots \beta_{n-1}$, принадлежащих множеству $E_n$, одинаково (условие полноты).*

2. *При любом разбиении множества $E_n$ на две непустые части $E_n^*$ и $E_n^{**}$ найдется хотя бы одно $n-1$-значное число, входящее в каждую из этих частей (условие связности).*

Доказательство теоремы дает также общий метод построения систем $\rho_n$.

Пусть дан однородный по времени марковский процесс с дискретным временем и $q$ состояниями (первым, вторым, ..., $q$-м). Пусть заданы начальное распределение вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_q$, где $p_i$ — вероятность того, что в начальный момент частица будет в $i$-м состоянии, и стохастическая матрица переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1q} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{q1} & p_{q2} & \cdots & p_{qq} \end{pmatrix},$$

где $p_{ij}$ — вероятность перехода частицы из $i$-го состояния в $j$-е за один шаг. Будем здесь и в дальнейшем предполагать вероятности числами рациональными.

Вероятность того, что при $n$ испытаниях получится заданная комбинация знаков

$$\Delta_n = \beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \beta_{n-1}\beta_n$$

$$(1 \leqslant \beta_\nu \leqslant q)$$

(она означает номера состояний, в которых последовательно будет находиться частица), равна

$$\mu\Delta_n = p_{\beta_1} p_{\beta_1\beta_2} p_{\beta_2\beta_3} \ldots p_{\beta_{n-1}\beta_n}.$$

Построим множество $n$-значных чисел в $q$-ичной системе счисления, в котором каждая $n$-значная комбинация будет встречаться пропорционально вероятности ее появления. Приведем к общему знаменателю переходные вероятности и (к своему общему знаменателю) вероятности начального распределения. Тогда получим:

$$p_i = \frac{a_i}{l}, \quad p_{ij} = \frac{a_{ij}}{m}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, q),$$

где $a_i$, $a_{ij}$, $l$, $m$ — положительные целые.

Обозначим через $E'_n(q)$ множество, получающееся из $E_n(q)$ (множества всех различных $n$-значных чисел в $q$-ичной системе счисления) повторением каждого $n$-значного числа $\Delta_n$ $lm^{n-1}\mu\Delta_n$ раз; это значит, что каждое $n$-значное число, первый знак которого равен $i$, в $E'_n(q)$ встречается

$$a_i \prod_{1 \leqslant i, j \leqslant q} a_{ij}^{A_{ij}}$$

раз, где $A_{ij}$ обозначает количество знаков $j$ в этом числе, непосредственно следующих за знаком $i$.

Рассмотрим вопрос о построении нормальной периодической системы для множества $E'_n(q)$. Будем говорить, что система $\rho_n(q)$, построенная для этого множества, «имитирует» данный марковский процесс в том смысле, что каждая $n$-значная комбинация ($n$ фиксировано) встречается в этой системе пропорционально вероятности ее появления. Отметим, что и любая комбинация с числом знаков, меньшим $n$, встречается в $\rho_n(q)$ пропорционально вероятности своего появления.

Предположим, что вероятности $p_i > 0$, $p_{ij} > 0$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant q$. В этом случае справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *На множестве $E'_n(q)$ тогда и только тогда возможны нормальные периодические системы, когда выполнены условия:*

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \sum_{i=1}^{q} p_i p_{i1}, \\ p_2 &= \sum_{i=1}^{q} p_i p_{i2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{q-1} &= \sum_{i=1}^{q} p_1 p_{iq-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Отметим сразу, что из условий (2) вытекает равенство

$$p_q = \sum_{i=1}^{q} p_i p_{iq}.$$

Оно получается почленным вычитанием суммы равенств (2) из тождества $1 = 1$, так как сумма правых частей равенства (2) есть

$$\sum_{j=1}^{q-1} \sum_{i=1}^{q} p_i p_{ij} = \sum_{i=1}^{q} p_i \sum_{j=1}^{q-1} \quad {}_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} p_i (1 - p_{iq}) = 1 - \sum_{i=1}^{q} p_i p_{iq}.$$

Выясним вероятностный смысл условий (2). В силу однородности по времени, условия (2) означают, что

$$p_i^{(1)} = p_i^{(2)} = \ldots = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

где $p_i^{(j)}$ — абсолютная вероятность пребывания частицы в $j$-й момент времени в $i$-м состоянии. В этом случае $p_i$ называются стационарными абсолютными вероятностями, а соответствующее распределение — стационарным распределением вероятностей.

Для доказательства теоремы 1 применим сформулированную выше теорему Коробова.

Необходимость. Условие полноты для $n-1$-значного числа $\underbrace{1.1\ldots1}_{n-1}$ дает:

$$a_1a_{11}^{n-1}+a_1a_{11}^{n-2}a_{12}+a_1a_{11}^{n-2}a_{13}+\ldots+a_1a_{11}^{n-2}a_{1q}=$$

$$=a_1a_{11}^{n-1}+a_2a_{21}a_{11}^{n-2}+a_3a_{31}a_{11}^{n-2}+\ldots+a_qa_{q1}a_{11}^{n-2},$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{q}a_1a_{1i}=\sum_{i=1}^{q}a_ia_{i1}.$$

Но

$$\sum_{i=1}^{q}a_{ji}=m,$$

следовательно, деля на $lm$, получаем:

$$p_1=\sum_{i=1}^{q}p_ip_{i1}.$$

Аналогично, условие полноты для $n-1$-значных чисел

$$\underbrace{2\ldots2}_{n-1},\ldots,\underbrace{q-1\ldots q-1}_{n-1}$$

дает:

$$p_2=\sum_{i=1}^{q}p_ip_{i2},\ldots,p_{q-1}=\sum_{i=1}^{q}p_ip_{iq-1}.$$

Достаточность. Покажем, что для множества $E_n'(q)$ выполнено условие связности. Предположим противное. Тогда множество $E_n'(q)$ можно разбить на две непустые части $E_n^*$ и $E_n^{**}$, не имеющие общих $n-1$-значных чисел. Рассмотрим произвольное $n-1$-значное число $\delta_1\ldots\delta_{n-1}$, входящее в $E_n^*$, и произвольное $n$-значное число $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$, принадлежащее $E_n'(q)$. Согласно допущению, все $n$-значные числа, в которые входит $\delta_1\ldots\delta_{n-1}$, должны принадлежать $E_n^*$, в частности множеству $E_n^*$ должно принадлежать число $\delta_1\ldots\delta_{n-1}\beta_1$. Но тогда в $E_n^*$ входит $n-1$-значное число $\delta_2\ldots\delta_{n-1}\beta_1$, а вместе с ним и $n$-значное число $\delta_2\ldots\delta_{n-1}\beta_1\beta_2$. Продолжая этот процесс, получим, что $E_n^*$ содержит число $\beta_1\beta_2\ldots\beta_n$ и, следовательно, любое $n$-значное число. Но тогда множество $E_n^{**}$ должно быть пустым. Это противоречие и доказывает выполнение условия связности.

Обратимся к доказательству выполнения условия полноты. Для этого рассмотрим произвольное $n-1$-значное число

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-2}\beta_{n-1},$$

входящее в $E_n'(q)$, и покажем, что число $n$-значных чисел вида

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-2}\beta_{n-1}\beta \text{ и } \beta'\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-2}\beta_{n-1},$$

принадлежащих $E_n'(q)$, одинаково. Для множества $E_n'(q)$ это условие рав-

équivalently выполнению равенства

$$\sum_{i=1}^{q} a_i a_{i\beta_1} a_{\beta_1\beta_2} \ldots a_{\beta_{n-2}\beta_{n-1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} a_{\beta_1} a_{\beta_1\beta_2} \ldots a_{\beta_{n-2}\beta_{n-1}} a_{\beta_{n-1}i},$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{q} a_i a_{i\beta_1} = \sum_{i=1}^{q} a_{\beta_1} a_{\beta_{n-1}i};$$

деля последнее равенство на $lm$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{q} p_i p_{i\beta_1} = p_{\beta_1},$$

а это равенство выполняется для любого $1 \leqslant \beta_1 \leqslant q$ в силу (2).

Итак, мы доказали, что (в предположении положительности вероятностей $p_i$ и $p_{ij}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant q$) в указанном выше смысле мы можем имитировать стационарный марковский процесс, и притом только стационарный, нормальной периодической системой. Идея изложенной выше имитации для схемы Бернулли (т. е. для случая $p_{ik} = p_{jk} = p_k$ для любых $1 \leqslant k, i, j \leqslant q$) принадлежит Н. М. Коробову.

Остановимся более подробно на однородных марковских процессах с двумя состояниями. В этом случае условия (2) можно переписать в виде

$$p_1 p_{12} = p_2 p_{21}. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что условие (3) остается критерием возможности имитации марковского процесса нормальной периодической системой и в тех случаях, когда некоторые из вероятностей равны нулю. Исключение составляет случай

$$p_1 \neq 0, \ p_2 \neq 0, \ p_{12} = 0, \ p_{21} = 0,$$

т. е. случай, когда множество $E_n'(2)$ состоит из последовательностей вида $\underbrace{11\ldots1}_{n}$ и $\underbrace{22\ldots2}_{n}$.

Равенство (3) является необходимым условием возможности построения систем $\rho_n$ на множестве $E_n'(2)$ во всех случаях. Доказательство этого проводится аналогично доказательству необходимости в теореме 1 с использованием условий, накладываемых на вероятности.

Разберем доказательство достаточности условия (3) в случае

$$p_1 \neq 0, \quad p_2 \neq 0, \quad p_{11} \neq 0, \quad p_{12} \neq 0, \quad p_{22} = 0.$$

Выполнение условия полноты доказывается совершенно аналогично доказательству теоремы 1. Несколько отличным будет доказательство выполнения условия связности. Предположим, что мы сумели разбить $E_n'(2)$ на две непустые части $E_n^*$ и $E_n^{**}$ так, что не существует ни одного $n-1$-значного числа, входящего в каждую из этих частей. Возьмем произвольное $n$-значное число $\beta_1 \ldots \beta_n$, принадлежащее $E_n^{**}$. Рассмотрим два случая:

1) $\beta_1 = 1$. Берем произвольное $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}\delta_n$, принадлежащее $E_n^*$. Тогда в $E_n^*$ входит $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$. Следовательно, в силу наших предположений, $n$-значное число $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}\beta_1$ принадлежит $E_n^*$. Поэтому $\delta_2 \ldots \delta_{n-1}\beta_1$ входит в $E_n^*$ и, значит, $\delta_2 \ldots \delta_{n-1}\beta_1\beta_2$ принадлежит множеству $E_n^*$ и т. д. В результате получаем, что $\beta_1 \ldots \beta_n$ принадлежит $E_n^*$.

2) $\beta_1 = 2$. Возьмем произвольное $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}\delta_n$, принадлежащее $E_n^*$. Ясно, что или $\delta_{n-1} = 1$ или $\delta_n = 1$. Если $\delta_{n-1} = 1$, то рассуждения, аналогичные рассуждениям в случае 1), проводим с $n-1$-значным числом $\delta_1 \ldots \delta_{n-1}$; если $\delta_n = 1$, то те же рассуждения проводим с $n-1$-значным числом $\delta_2 \ldots \delta_n$.

Итак, $n$-значное число $\beta_1 \ldots \beta_n$ принадлежит $E_n^*$. Полученное противоречие и доказывает выполнение условия связности.

Доказательство достаточности условия (3) в остальных случаях не представляет интереса, так как в этих случаях мы имеем детерминированные процессы.

С помощью нормальных периодических систем для множества $E_n'(q)$, которые мы обозначаем через $\rho_n(q)$, можно дать конструкцию нормальной по Маркову последовательности, отличную от рассмотренной в работе ([3]). Проводимое здесь построение аналогично построению теоремы 5 из работы ([2]).

Пусть $\varphi(\nu)$ — произвольная положительная целочисленная функция такая, что

$$\lim_{\nu\to\infty} \varphi(\nu) = \infty.$$

Через $\rho_\nu'(q)$ обозначим систему, получающуюся из $\rho_\nu(q)$ отбрасыванием последних $\nu-1$ знаков. Обозначим через $\alpha$ последовательность знаков

$$\alpha = \underbrace{\rho_1'(q)\ldots\rho_1'(q)}_{\varphi(1)}\ \underbrace{\rho_2'(q)\ldots\rho_2'(q)}_{\varphi(2)}\ldots\ \underbrace{\rho_\nu'(q)\ldots\rho_\nu'(q)}_{\varphi(\nu)}\rho_{\nu+1}'(q)\ldots =$$

$$= \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots,$$

где каждый знак каждого $\rho_\nu'(q)$ понимается как очередной знак последовательности. Рядом стоящие $\rho_\nu'(q)$ одинаковы, система $\rho_{\nu+1}'(q)$ выбирается так, чтобы ее первые $\nu-1$ знаков дополняли систему $\rho_\nu'(q)$ до системы $\rho_\nu(q)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ (это всегда можно сделать путем циклической перестановки знаков системы $\rho_{\nu+1}'(q)$). Возьмем произвольную $n$-значную комбинацию знаков $\beta_1 \ldots \beta_n = \Delta_n$ ($n \geqslant 1$ — любое) в $q$-ичной системе счисления, вероятность появления которой в $n$ испытаниях равна $\mu\Delta_n$. Обозначим через $N_T(\Delta_n)$ число, показывающее, сколько раз встречается $\beta_1 \ldots \beta_n$ среди первых $T$ $n$-значных чисел последовательности $\alpha$:

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,\quad \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n+1},\ \ldots,\ \alpha_T\alpha_{T+1}\ldots\alpha_{T+n-1}.$$

ТЕОРЕМА 2. *При* $p_i > 0$, $p_{ij} > 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, q)$ *справедливо равенство*:

$$N_T(\Delta_n) = T\mu\Delta_n + o(T).$$

Доказательство. В силу предположения $p_i$, $p_{ij} > 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, q)$, по индукции нетрудно доказать, что множество $E'_\nu(q)$ состоит из $lm^{\nu-1}$ $\nu$-значных чисел.

Обозначим

$$S_i = \sum_{\nu=1}^{i} \varphi(\nu)\, lm^{\nu-1}$$

($S_i$ — число знаков в разложении $\alpha$ до первого из $\rho'_{i+1}(q)$).

Определим $k$ из условия

$$S_k \leqslant T < S_{k+1}.$$

Тогда

$$T = S_k + (r + \theta)\, lm^k,$$

$$0 \leqslant r < \varphi(k+1), \quad 0 \leqslant \theta < 1.$$

Покажем, что на участке

$$\underbrace{\rho'_1(q) \ldots \rho'_1(q)}_{\varphi(1)} \ldots \underbrace{\rho'_n(q) \ldots \rho'_n(q)}_{\varphi(n)} \times$$

$$\times \underbrace{\rho'_{n+1}(q) \ldots \rho'_{n+1}(q)}_{\varphi(n+1)} \ldots \underbrace{\rho'_k(q) \ldots \rho'_k(q)}_{\varphi(k)} \underbrace{\rho'_{k+1}(q) \ldots \rho'_{k+1}(q)}_{r}$$

число $\beta_1 \ldots \beta_n$ встретится $\lambda$ раз, где

$$\lambda = \varphi(n)\, lm^{n-1} \mu\Delta_n + \varphi(n+1)\, mlm^{n-1} \mu\Delta_n + \ldots + \varphi(k)\, m^{k-n}\, lm^{n-1} \mu\Delta_n + $$
$$+ rm^{k-n+1} lm^{n-1} \mu\Delta_n + O(1). \qquad (4)$$

Действительно, число $\beta_1 \ldots \beta_n$ встретится в системе $\rho_{n+t}(q)$ $m^t lm^{n-1} \mu\Delta_n$ раз. Заметим, что $\beta_1 \ldots \beta_n$ будет встречаться в $\rho_{n+t}(q)$ столько раз, сколько чисел вида

$$\beta_1 \ldots \beta_n \beta_{n+1} \ldots \beta_{n+t}$$

содержит множество $E'_{n+t}(q)$, где $1 \leqslant \beta_{n+i} \leqslant q$ для $i = 1, 2, \ldots, t$.

Пусть $\beta_1 \ldots \beta_n$ встречается в $\rho_n(q)$ $A$ раз. Тогда в $\rho_{n+1}(q)$ оно будет встречаться

$$\sum_{k=1}^{q} A a_{\beta_n k} = Am$$

раз, так как в множестве $E'_{n+1}(q)$ $Aa_{\beta_n 1}$ раз встречается $n+1$-значное число $\beta_1 \ldots \beta_n 1$, $Aa_{\beta_n 2}$ раз — число $\beta_1 \ldots \beta_n 2$, и т. д., $Aa_{\beta_n q}$ раз — число $\beta_1 \ldots \beta_n q$. Дальнейшее доказательство по индукции очевидно.

В силу того, что $l$, $m$ и $n$ фиксированы, число $\beta_1 \ldots \beta_n$ до первого из $\rho'_n(q)$ могло встретиться лишь конечное число раз. Эта величина и записана в (4) в виде $O(1)$.

Ясно, что

$$N_T(\Delta_n) = \lambda + O(m^{k-1}) = (S_k + rm^k l)\, \mu\Delta_n + O(m^{k-1}) =$$
$$= T\mu\Delta_n + O(m^{k-1}).$$

Из определения $S_k$ следует:

$$T \geqslant S_k > \varphi(k)\, lm^{k-1}.$$

Отсюда при $T \to \infty$ получим:

$$\frac{m^{k-1}}{T} < \frac{1}{\varphi(k)} \to 0.$$

Таким образом,

$$N_T(\Delta_n) = T\mu\Delta_n + o(T).$$

Поступило
12. I. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коробов Н. М., О нормальных периодических системах, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 211—216.

[2] Коробов Н. М., О некоторых вопросах равномерного распределения, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 14 (1950), 215—238.

[3] Постников А. Г. и Пятецкий И. И., Нормальная по Маркову последовательность знаков и нормальная цепная дробь, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 21 (1957), 729—746.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 823—840

С. П. ДЕМУШКИН и И. Р. ШАФАРЕВИЧ

# ЗАДАЧА ПОГРУЖЕНИЯ ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

В работе исследуется задача погружения конечного расширения в большее расширение с заданной абсолютной группой Галуа. Доказывается, что в случае локальных полей условие согласности Д. К. Фаддеева необходимо и достаточно для разрешимости задачи погружения.

## Введение

В работе исследуются условия, при которых заданное нормальное конечное расширение $k/\Omega$ с группой Галуа $F$ может быть погружено в большее расширение $K/\Omega$ с группой Галуа $G$, заданное эпиморфное отображение которой $\varphi : G \to F$ должно реализоваться в качестве гомоморфизма группы Галуа поля на группу Галуа подполя. Мы рассматриваем только тот случай, когда ядро $A$ эпиморфизма $\varphi$ абелево и, следовательно, $K/k$ должно иметь абелеву группу Галуа $A$.

Вопрос заключается в разыскании инвариантов поля $k$, группы $G$ и эпиморфизма $\varphi$, от которых зависит разрешимость задачи погружения. Мы называем такие инварианты препятствиями. Ряд условий, необходимых для разрешимости задачи погружения, был найден Д. К. Фаддеевым ([3]) и переоткрыт H. Hasse ([4]). Мы называем эти условия первым препятствием. Определение первого препятствия приведено в § 1. Оно состоит из набора элементов групп $H^2(F_x, k^*)$, где $x \in \mathrm{Hom}(A, k^*)$, а $F_x$ — стационарная подгруппа $x$ (если рассматривать $\mathrm{Hom}(A, k^*)$ как $F$-операторную группу). Если первое препятствие исчезает, то поле $k/\Omega$ называется согласным с рассматриваемой задачей погружения. В общем случае согласности не достаточно для разрешимости задачи погружения.

Дальше мы пользуемся редукционной теоремой Kochendörffer'a ([5]), согласно которой исследование задачи погружения сводится к случаю, когда $G$ есть $p$-группа. Мы можем поэтому предполагать, что $A$ содержит нормальный делитель $A_1$ группы $G$ такой, что $(A : A_1) = p$. Тогда $A/A_1$ лежит в центре $G/A_1$. Если поле $k/\Omega$ согласно с исходной задачей погружения, то задача погружения того же поля в поле с группой Галуа $G/A_1$, как легко видеть, разрешима. Ее решение есть поле $k(\sqrt[p]{\mu})$, где число $\mu$ определяется однозначно с точностью до замены $\mu \to \mu m$, $m \in \Omega$. Мы выясняем, когда это поле $k(\sqrt[p]{\mu})$ может быть выбрано так, чтобы оно было согласно с задачей погружения его в поле с группой $G$.

Основной результат заключается в том, что в этом случае первое препятствие состоит из набора циклических алгебр $(a_{x_1}, b_{x_1})_{k_{x_1}}$ индекса $p$, где $x_1 \in \mathrm{Hom}(A_1, k^*)$. Здесь $k_{x_1}$ — подполе, принадлежащее стационарной подгруппе $F_{x_1}$ гомоморфизма $x_1$, $a_{x_1} \in k_{x_1}$ определяется тем, что $k_{x_1}(\sqrt[p]{a_{x_1}}) = k_x$, $k_x$ — подполе, принадлежащее стационарной подгруппе $F_x$ гомоморфизма $x$, который продолжает $x_1$ с $A_1$ на $A$, а $b_{x_1}$ — элемент $k_{x_1}$, определенный заданием $\mu$. При замене $\mu$ на $\mu m$ все $b_{x_1}$ умножаются на $m$. Эти результаты получаются как следствие выводимых нами более общих свойств первого препятствия.

Полученные сведения мы применяем к случаю локальных полей (конечных расширений поля $p$-адических чисел). Используя основные свойства групп когомологий локальных полей, мы приходим к основному результату этой работы: для локальных полей тривиальность первого препятствия (т. е. выполнение условий Д. К. Фаддеева — Н. Hasse) не только необходима, но и достаточна для разрешимости задачи погружения. Отсюда следует, что для случая поля алгебраических чисел $k/\Omega$ условие Д. К. Фаддеева — Н. Hasse разрешимости задачи погружения эквивалентно разрешимости всех соответствующих $p$-адических задач погружения для полей $k_{\mathfrak{p}}/\Omega_{\mathfrak{p}}$ и для всех простых дивизоров $\mathfrak{p}$.

## § 1. Первое препятствие в задаче погружения

Задача, которой мы будем заниматься, формулируется следующим образом. Задана конечная группа $G$, ее эпиморфное отображение $\varphi: G \to F$ и нормальное сепарабельное расширение $k_0/\Omega$ с группой Галуа $F$. Требуется найти условия, которым должны удовлетворять $k_0$, $G$ и $\varphi$ для того, чтобы существовало поле $K \supset k_0$, нормальное над $\Omega$, группа Галуа которого была бы изоморфна группе $G$, а гомоморфизм $\varphi$ совпадал бы при этом с естественным гомоморфизмом группы Галуа поля $K$ на группу Галуа подполя $k_0$. Эта задача называется задачей погружения. Мы будем называть ее задачей погружения

$$(k_0/\Omega, G, \varphi).$$

Задача погружения интересна именно в той постановке, какую мы дали, но естественная формулировка результатов получается, если в качестве решений $K$ задачи погружения допускать и регулярные алгебры. Регулярной [см. ([4])] называется полупростая коммутативная алгебра $K$, в которой задана группа автоморфизмов $G$, причем соответствующее представление $G$ в векторном пространстве $K/\Omega$ эквивалентно регулярному. С другой стороны, при индукции нам придется ставить задачи погружения над решениями некоторых других задач погружения, в качестве решения которых могут получиться регулярные алгебры. Поэтому с самого начала мы будем считать, что задача погружения ставится над некоторой регулярной алгеброй $k$. Здесь важно отметить, что все регулярные алгебры, которые встретятся в наших рассуждениях, всегда будут расширениями нормального над $\Omega$ поля $k_0$, над которым ставится наша первоначальная задача; они будут содержать поле $k_0$ в качестве подалгебры. Поле $k_0$ мы будем называть ядром регулярных алгебр.

Таким образом, мы будем рассматривать задачу погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$, где $k$ — регулярная алгебра, содержащая нормальное над $\Omega$ поле $k_0$, а в качестве решений допускаются регулярные алгебры $K$.

Обозначим через $A$ ядро гомоморфизма $\varphi$. Мы имеем тогда точную последовательность

$$1 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\varphi} F \to 1. \tag{1}$$

Будем называть задачу погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$ задачей погружения, связанной с последовательностью (1).

Дальше мы будем заниматься задачей погружения исключительно в предположении, что выполнены следующие условия:

1) группа $A$ абелева;

2) характеристика алгебры $k$ взаимно проста с порядком группы $A$;

3) поле $\Omega$ содержит бесконечное число элементов;

4) ядро $k_0$ алгебры $k$ содержит все корни степени $m$ из единицы, где $m$ есть период $A$ (общее наименьшее кратное порядков всех элементов). Кроме того, мы предполагаем, что ядро $k_0$ в алгебре $k$ принадлежит подгруппе $\mathfrak{A}_0$, для которой $\varphi^{-1}(\mathfrak{A}_0)$ абелева. Это условие оправдывается тем, что мы рассматриваем задачу погружения с абелевой группой $A$, а все встречающиеся далее регулярные алгебры получаются расширением поля $k_0$.

R. Brauer (1) решил задачу погружения в одном случае, который будет играть далее основную роль. Для формулировки результата Brauer'а заметим, что вложение $i$ группы $A$ в $G$ вследствие абелевости $A$ определяет в $A$ структуру $F$-операторной группы. Мы будем дальше считать, что в $A$ определена эта $F$-операторная структура. Кроме того, точная последовательность (1) определяет, согласно теории Schreier'а, класс когомологий $a \in H^2(F, A)$, который мы будем называть фундаментальным классом этой точной последовательности.

Определение 1. $F$-операторная группа $A$ называется $k$-элементарной, если имеется $F$-операторный мономорфизм

$$x: \quad A \to k_0^*$$

этой группы в мультипликативную группу ядра $k_0$ алгебры $k$.

Очевидно, что $k$-элементарная группа всегда циклическая. Если корни степени $m$ из единицы лежат в $\Omega$, то условие $k$-элементарности совпадает с требованием, чтобы $A$ была тривиальной операторной группой.

Мы будем называть задачу погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$ элементарной, если в точной последовательности (1) группа $A$ является $k$-элементарной $F$-операторной группой.

ТЕОРЕМА BRAUER'A. *Элементарная задача погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$ разрешима тогда и только тогда, когда класс когомологий $x^*(a)$, в который гомоморфизм $x^*: H^2(F, A) \to H^2(F, k^*)$, индуцированный гомоморфизмом $x$, переводит фундаментальный класс $a$ точной последовательности (1), распадается в $k^*$.*

Иными словами, фундаментальный класс $a$ должен лежать в ядре гомоморфизма

$$x^*: \quad H^2(F, A) \to H^2(F, k^*),$$

определенного гомоморфизмом $x$.

Во множестве всех задач погружения введем частичную упорядоченность. Для этого рассмотрим две следующие операции над задачами погружения.

I. Расширение основного поля. Если $(k/\Omega, G, \varphi)$ — некоторая задача погружения и $k'$ — произвольное подполе алгебры $k$, то, положив $G' = \varphi^{-1}(F')$, где $F'$ — группа Галуа $k/k'$, и взяв за $\varphi'$ ограничение $\varphi$ на $G'$, мы получим задачу погружения $(k/k', G', \varphi')$.

II. Замена группы $G$ ее фактор-группой по нормальному делителю, содержащемуся внутри $A$. Пусть $A' \subset A$ — нормальный делитель группы $G$. Положим

$$G' = G/A', \quad \varphi' = \varphi\,\psi'^{-1},$$

где $\psi'\colon G \to G'$ — естественное отображение на фактор-группу. Очевидно, что вместе с задачей $(k/\Omega, G, \varphi)$ задача $(k/\Omega, G', \varphi')$ также является задачей погружения.

Определение 2. Задача погружения $(k/k', G', \varphi')$ называется сопутствующей задаче погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$, если она может быть получена из последней последовательным применением некоторого числа операций I и II.

Легко проверить, что отношение «сопутствования» действительно определяет частичную упорядоченность во множестве задач погружения.

Из разрешимости данной задачи погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$ следует разрешимость всех ее сопутствующих задач погружения. Это достаточно проверить для задач погружения, получающихся применением операций I или II. Если $K/\Omega$ — решение задачи погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$, то $K/k'$ будет решением задачи $(k/k', G', \varphi')$, полученной из предыдущей при помощи операции I, и если алгебра $\overline{K} \subset K$ принадлежит нормальному делителю $A'$, то $\overline{K}/\Omega$ будет решением задачи $(k/\Omega, G', \varphi')$, полученной из первоначальной применением операции II.

Ввиду этого, всякое условие, необходимое для разрешимости некоторой задачи погружения, сопутствующей данной задаче $(k/\Omega, G, \varphi)$, будет необходимым условием для разрешимости задачи $(k/\Omega, G, \varphi)$.

Мы выпишем сейчас необходимые и достаточные условия (известные ввиду теоремы Brauer'а) для разрешимости элементарных задач погружения, сопутствующих задаче $(k/\Omega, G, \varphi)$, и получим, таким образом, некоторые необходимые условия для разрешимости задачи $(k/\Omega, G, \varphi)$.

Пусть $x: A \to \overset{*}{k_0}$ — произвольный гомоморфизм группы $A = \operatorname{Ker}\varphi$ в мультипликативную группу ядра $k_0$ алгебры $k$. Обозначим через $F_x$ подгруппу, состоящую из тех элементов $f \in F$, для которых

$$x(a^f) = x(a)^f, \quad a \in A.$$

Так как $x(a) \in k_0$, то при $f \in \mathfrak{A}_0$ будет

$$x(a)^f = x(a).$$

С другой стороны, мы предположили, что $\varphi^{-1}(\mathfrak{A}_0)$ — абелева группа; поэтому $a^f = a$ для $f \in \mathfrak{A}_0$. Отсюда вытекает, что $F_x \supset \mathfrak{A}_0$ и, следовательно принадлежащая $F_x$ подалгебра $k_x$ содержится в ядре $k_0$, т. е. является полем.

Положим

$$A_x = \mathrm{Ker}\,(x), \quad \bar{G}_x = \varphi^{-1}(F_x), \quad G_x = \bar{G}_x / A_x$$

и обозначим через $\varphi_x$ естественный гомоморфизм $G_x$ на $F_x$. Очевидно, что задача погружения $(k / k_x, G_x, \varphi_x)$ сопутствует задаче $(k / \Omega, G, \varphi)$. При этом ядро гомоморфизма $\varphi_x$ — группа $A / A_x$ — является элементарной $F_x$-операторной группой. Действительно,

$$x: \quad A / A_x \to k_0^*$$

является $F_x$-мономорфизмом. Поэтому задача погружения $(k / k_x, G_x, \varphi_x)$ элементарна.

Легко показать, что любая элементарная задача погружения, сопутствующая задаче $(k / \Omega, G, \varphi)$, сопутствует обязательно и одной из задач вида $(k / k_x, G_x, \varphi_x)$. Поэтому условия разрешимости для задач $(k / k_x, G_x, \varphi_x)$ будут одновременно условиями разрешимости для всех элементарных задач, сопутствующих задаче $(k / \Omega, G, \varphi)$. Условия же разрешимости задач $(k / k_x, G_x, \varphi_x)$ следуют из теоремы Brauer'а. Они заключаются в том, что классы когомологий

$$\rho a \in H^2(F_x, A)$$

гомоморфизмом

$$x^*: \quad H^2(F_x, A) \to H^2(F_x, k^*)$$

должны переводиться в единицу. Здесь через $\rho$ обозначен оператор ограничения классов когомологий с $F$ на $F_x$, а через $a$ — фундаментальный класс точной последовательности (1). Классы $x^* \rho a$ будем обозначать через $C_x$.

Определение 3. Классы когомологий

$$C_x = x^* \rho a \in H^2(F_x, k^*), \quad x \in \mathrm{Hom}\,(A, k_0^*),$$

называются первым препятствием для задачи погружения $(k / \Omega, G, \varphi)$. Если первое препятствие исчезает, то говорят, что поле $k / \Omega$ согласно с задачей погружения $(k / \Omega, G, \varphi)$.

## § 2. Второе препятствие

В этом параграфе мы будем рассматривать случай, когда группа $G$ есть $p$-группа. Как показывают результаты Kochendörffer'a ([5]), задачу погружения достаточно решить в этом случае. Если $G$ — $p$-группа, то в $A$ будет содержаться подгруппа $A_1$, являющаяся нормальным делителем в $G$ и имеющая в $A$ индекс $p$. Положим $G / A_1 = F^1$ и пусть $\psi$ будет естественным гомоморфизмом $F^1$ на $F$. Очевидно, что задача погружения $(k / \Omega, F^1, \psi)$ сопутствует исходной задаче погружения $(k / \Omega, G, \varphi)$.

По предположению, корни степени $p$ из единицы содержатся в ядре $k_0$ алгебры $k$, а так как $(k : \Omega)$ есть степень $p$, то они содержатся в $\Omega$. Группа $A / A_1$ есть нормальный делитель порядка $p$ в $p$-группе $F^1$ и, следовательно, лежит в ее центре. Отсюда следует, что задача $(k / \Omega, F^1, \psi)$ — элементарная. Если мы предположим, что алгебра $k / \Omega$ согласна с задачей погружения $(k / \Omega, G, \varphi)$, то задача погружения $(k / \Omega, F^1, \psi)$ будет разрешима. Обозначим через $k^1$ одно из решений последней задачи.

Предположим сначала, что исходная задача погружения разрешима и $K$ — ее решение. Подалгебра $k^1$ алгебры $K$, принадлежащая $A_1$, с одной стороны, является решением задачи $(k/\Omega, F^1, \psi)$; с другой стороны, погружение $k^1$ в $K$ есть решение некоторой новой задачи погружения, а именно той, которая связана с точной последовательностью

$$1 \to A_1 \to G \xrightarrow{\varphi_1} F^1 \to 1. \tag{2}$$

В частности, решение $k^1$ будет согласно с этой новой задачей погружения.

Ввиду этого мы исследуем в настоящем параграфе вопрос: когда решение задачи погружения $(k/\Omega, F^1, \psi)$ — поле $k^1$ — можно выбрать так, чтобы оно было согласно с задачей погружения, связанной с точной последовательностью (2)? Получающиеся условия необходимы для разрешимости исходной задачи погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$. Мы будем называть их вторым препятствием. Мы не вычисляем в общем виде второго препятствия, но выводим некоторые его свойства, которые дадут нам возможность доказать, что для локального поля $\Omega$ оно исчезает.

Дальше мы исследуем такую, несколько более общую, ситуацию. Дана задача погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$, соответствующая точной последовательности (1), и в группе $A$ — подгруппа $A_1$ индекса $p$, являющаяся нормальным делителем $G$ и такая, что задача $(k/\Omega, F^1, \psi)$, соответствующая точной последовательности

$$1 \to A/A_1 \to F^1 \to F \to 1,$$

элементарна, центральна и разрешима. Пусть $k^1$ — одно из ее решений. Исследуем связь между первым препятствием для задачи погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$ и первым препятствием для задачи погружения $(k^1/\Omega, G, \varphi_1)$, соответствующей точной последовательности (2).

Пусть $x_1 \in \mathrm{Hom}(A_1, k_0^*)$ и $x$ — продолжение $x_1$ на $A$. Обозначим через $G_x$ и $G_{x_1}$ централизаторы $x$ и $x_1$ в $G$. Очевидно, что

$$G \supset G_{x_1} \supset G_x \supset A \supset A_1.$$

Соответствующая цепочка алгебр будет:

$$\Omega \subset k^1_{x_1} \subset k_x \subset k \subset k^1.$$

В силу сделанного ранее замечания, $k^1_{x_1}$ и $k_x$ будут полями.

Положим

$$G_x/A = F_x, \quad G_{x_1}/A = F_{x_1},$$

$$G_x/A_1 = F^1, \quad G_{x_1}/A_1 = F^1_{x_1}.$$

Первое препятствие для задачи погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$ имеет вид

$$C_x = x^* \rho a,$$

а для задачи $(k^1/\Omega, G, \varphi_1)$ —

$$C_{x_1} = x_1 \rho_1 a_1,$$

где $a$ и $a_1$ — фундаментальные классы последовательностей (1) и (2), $\rho$ — гомоморфизм ограничения с $F$ на $F_x$, $\rho_1$ — гомоморфизм ограничения с $F^1$ на $F^1_{x_1}$.

ТЕОРЕМА 1. $C_{x_1} \otimes k_x \sim C_x$.

Доказательство. Как известно,

$$C_{x_1} \otimes k_x \sim (k^1 / k_{x_1},\ r x_1 \rho_1 a_1),$$

где $r$ — гомоморфизм ограничения с $F^1_{x_1}$ на $F^1_x$.

С другой стороны,

$$C_x \sim (k^1 / k_x,\ \lambda x \rho a),$$

где $\lambda$ — гомоморфизм подъема с $F_x$ на $F^1_x$. Следовательно, теорема 1 утверждает, что

$$r x_1^* \rho_1 a_1 = \lambda x^* \rho a.$$

Очевидно, что $r x_1^* = x_1^* r$. Гомоморфизм $r\rho_1$ обозначим через $r_1$ — это ограничение с $F^1$ на $F^1_x$. Нам надо доказать, что

$$x_1^* r_1 a_1 = \lambda x^* \rho a.$$

Коцикл, стоящий слева, принадлежит к $H^2(F^1_x, x_1(A_1))$, а коцикл, стоящий справа, — к $H^2(F^1_x, x(A))$.

Рассматриваются эти коциклы в $H^2(F^1_x, k^{1*})$. Мы докажем, что они совпадают уже в $H^2(F^1_x, x(A))$. Для этого достаточно применить лемму 1, которая будет доказана в следующем параграфе, к случаю, когда в качестве $a$ берется $\rho^F_{F_x} a$. Тогда, очевидно,

$$(\rho^F_{F_x} a)_1 = \rho^{F^1}_{F_x} a_1,$$

и лемма 1 дает:

$$i^* \rho^{E^1}_{F^1_x} a_1 = \lambda^{F^1_x}_{F_x} \rho^F_{F_x} a.$$

Применяя к последнему равенству $x^*$, будем иметь:

$$x_1^* \rho^{F^1}_{F^1_x} a_1 = \lambda^{F^1_x}_{F_x} x^* \rho^F_{F_x} a$$

($x$ перестановочен с $\lambda^{F^1_x}_{F_x}$).

Теорема 1 доказана.

Теорема 1 показывает, что при выполнении условия согласности для задачи погружения $(k / \Omega, G, \varphi)$, т. е. при $C_x \sim 1$, первое препятствие после первого шага $C_{x_1}$ будет разлагаться полем $k_x$, так как

$$C_{x_1} \otimes k_x \sim C_x \sim 1.$$

Это означает, что алгебра $C_{x_1}$ будет циклической алгеброй. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что $(k_x : k^1_{x_1}) = p$ или 1. Для доказательства последнего утверждения рассмотрим функцию, определенную на $F_{x_1}$:

$$f(\sigma) = \frac{x(\bar{z}^{\sigma})}{x(\bar{z})^{\sigma}},$$

где $z$ — образующий элемент $A / A_1$, $\bar{z}$ — его представитель в $A$. Функция $f$ не зависит ни от выбора представителя $\bar{z}$ в $A$, ни от выбора продолжения $x_1$ на $A$. Равенство $f(\sigma) = 1$ означает, что $\sigma \in F_x$. Кроме того, прямое вычисление показывает, что

$$f(\sigma\tau) = f(\sigma)^{\tau} f(\tau),$$

т. е. $f$ является коциклом. Ясно также, что значения $f$ — корни степени $p$ из единицы, так как

$$f(\sigma)^p = \frac{x\left((\bar{z}^p)^\sigma\right)}{x(\bar{z}^p)^\sigma} = \frac{x_1\left((\bar{z}^p)^\sigma\right)}{x_1(\bar{z}^p)^\sigma} = 1.$$

Поэтому будет выполняться равенство

$$f(\sigma\tau) = f(\sigma)f(\tau).$$

Отсюда, в частности, получается, что $F_x$ — нормальный делитель $F_{x^1}$, так как

$$f(\tau\sigma_x\tau^{-1}) = f(\tau)f(\sigma_x)f(\tau^{-1}) = f(\sigma_x) = 1$$

при $\sigma_x \in F_x$.

Докажем, что $(F_{x_1}:F_x) = p$ или 1. Достаточно рассмотреть случай $(F_{x_1}:F_x) \neq 1$ и показать, что

$$(F_{x_1}:F_x) = p.$$

Пусть $\sigma$ — такой элемент $F_{x_1}$, что $f(\sigma) = \zeta_p$. Тогда $\sigma \bar{\in} F_x$, $\sigma^p \in F_x$ и

$$F_{x_1} = \sum_{i=0}^{p-1} F_x \sigma^i,$$

т. е.

$$(F_{x_1}:F_x) = p.$$

Коцикл $f$ постоянен на классах смежности $F_{x_1}$ по $F_x$, следовательно, он получается поднятием с $F_{x_1}/F_x$ на $F_{x_1}$ некоторого коцикла. Обозначим его снова через $f$.

Рассмотрим коцикл $f$ в $\overset{*}{k}_x$. Как одномерный коцикл он распадается, т. е. в $k_x$ существует такое число $\alpha_{x_1}$, зависящее только от $x_1$, что

$$f(\sigma) = \alpha_{x_1}^{\sigma-1}.$$

Если последнее равенство возвести в степень $p$, то получим:

$$(\alpha_{x_1}^p)^{\sigma-1} = f(\sigma)^p = 1,$$

т. е. $a_{x_1} = \alpha_{x_1}^p \in k_{x_1}^1$ Отсюда получаем, что

$$k_x = k_{x_1}^1(\sqrt[p]{a_{x_1}}).$$

Таким образом, если $C_x \sim 1$, то $C_{x_1} \sim (a_{x_1}, b_{x_1})$ и является циклической алгеброй.

Перейдем к формулировке теоремы 2.

Пусть у нас имеются три точные последовательности:

$$1 \to A \to G \to F \to 1 \text{ (с классом } a),$$
$$1 \to A \to \bar{G} \to F \to 1 \text{ (с классом } b),$$
$$1 \to A \to \tilde{G} \to F \to 1 \text{ (с классом } a \cdot b).$$

Пусть $A_1$ — нормальный делитель группы $G$, содержащийся внутри $A$. Тогда $A_1$ будет нормальным делителем и в $\bar{G}$, и в $\tilde{G}$. Следовательно, можно поставить задачи погружения

$$(k/\Omega, F^1, \phi), \quad (k/\Omega, \bar{F}^1, \bar{\phi}), \quad (k/\Omega, \tilde{F}^1, \tilde{\phi}),$$

где

$$F^1 = G/A_1, \quad \bar{F}^1 = \bar{G}/A_1, \quad \tilde{F}^1 = \tilde{G}/A_1.$$

Предположим, что задачи $(k/\Omega, F^1, \psi)$ и $(k/\Omega, \overline{F}^1, \overline{\psi})$ разрешимы, и пусть $k^1$ и $\overline{k}^1$ — некоторые их решения. Рассмотрим тогда алгебру $K = k^1 \otimes_k \overline{k}^1$. Группу алгебры $K$ над $\Omega$ обозначим через $\Gamma$. Это будет прямое произведение групп $F^1$ и $\overline{F}^1$ с объединенной фактор-группой $F$. Она будет также расширением прямого произведения $A/A_1 \times \overline{A}/A_1$ с помощью группы $F$ с коциклом $aA_1 \times \overline{bA}_1$. В группе $A/A_1 \times \overline{A}/A_1$ выделим подгруппу $\widetilde{A}$, состоящую из элементов $(a, \overline{a}^{-1})$. Пусть алгебра $\widetilde{k}^1$ по определению принадлежит в $K$ подгруппе $\widetilde{A}$. Алгебра $\widetilde{k}^1$ имеет над $\Omega$ группу $\Gamma/\widetilde{A}$, которая изоморфна группе $\widetilde{F}_1$. Следовательно, $\widetilde{k}^1$ будет решением задачи погружения $(k/\Omega, \widetilde{F}^1, \widetilde{\psi})$.

Пусть $x_1 \in \mathrm{Hom}(A_1, k_0^*)$. Рассмотрим соответствующие характеру $x_1$ первые препятствия для задач погружения

$$(k^1/\Omega, G, \varphi_1), \quad (\overline{k}^1/\Omega, \overline{G}, \overline{\varphi}_1) \text{ и } (\widetilde{k}^1/\Omega, \widetilde{G}, \widetilde{\varphi}_1),$$

где $\varphi_1, \overline{\varphi}_1$ и $\widetilde{\varphi}_1$ — естественные гомоморфизмы $G, \overline{G}$ и $\widetilde{G}$ на $F^1, \overline{F}^1$ и $\widetilde{F}^1$. Они имеют вид:

$$C_{x_1} = (k^1/k^1_{x_1}, F^1_{x_1}, x_1\rho a_1),$$
$$\overline{C}_{x_1} = (\overline{k}^1/\overline{k}^1_{x_1}, \overline{F}^1_{x_1}, x_1\overline{\rho}\, b_1),$$
$$\widetilde{C}_{x_1} = (\widetilde{k}^1/\widetilde{k}^1_{x_1}, \widetilde{F}^1_{x_1}, x_1\widetilde{\rho}\,(ab)_1),$$

где $\rho, \overline{\rho}$ и $\widetilde{\rho}$ — ограничения соответственно с $F^1$ на $F^1_{x_1}$, с $\overline{F}^1$ на $\overline{F}^1_{x_1}$ и с $\widetilde{F}^1$ на $\widetilde{F}^1_{x_1}$. Но, как легко видеть, поля $k^1_{x_1}$, $\overline{k}^1_{x_1}$ и $\widetilde{k}^1_{x_1}$ совпадают (мы их обозначаем через $k^1_{x_1}$). Поэтому алгебры $C_{x_1}, \overline{C}_{x_1}$ и $\widetilde{C}_{x_1}$ определены над одним и тем же полем.

Пусть $\Gamma_{x_1}$ — подгруппа $\Gamma$, к которой принадлежит $k^1_{x_1}$ в $K$.

ТЕОРЕМА 2. $C_{x_1} \otimes \overline{C}_{x_1} \sim \widetilde{C}_{x_1}$.

Доказательство. Как известно,

$$C_{x_1} \sim (K/k^1_{x_1}, \Gamma_{x_1}, \lambda x_1 \rho a_1),$$
$$\overline{C}_{x_1} \sim (K/k^1_{x_1}, \Gamma_{x_1}, \overline{\lambda}\, x_1 \overline{\rho}\, b_1),$$
$$\widetilde{C}_{x_1} \sim (K/k^1_{x_1}, \Gamma_{x_1}, \widetilde{\lambda} x_1 \widetilde{\rho}\,(ab)_1),$$

где $\lambda$ — подъем с $F^1_{x_1}$ на $\Gamma_{x_1}$, $\overline{\lambda}$ — подъем с $\overline{F}^1_{x_1}$ на $\Gamma_{x_1}$, $\widetilde{\lambda}$ — подъем с $\widetilde{F}^1$ на $\Gamma_{x_1}$.

Теорема 2 утверждает, следовательно, что классы, в которых лежат коциклы $\lambda x_1 \rho\, a_1 \cdot \overline{\lambda} x_1 \overline{\rho}\, b_1$ и $\widetilde{\lambda} x_1 \widetilde{\rho}\,(ab)_1$, совпадают. Но, очевидно, $x_1$ коммутирует со всеми подъемами $\lambda, \overline{\lambda}$ и $\widetilde{\lambda}$, поэтому достаточно показать, что совпадают классы $\lambda\rho\, a_1 \cdot \overline{\lambda}\overline{\rho}\, b_1$ и $\widetilde{\lambda}\widetilde{\rho}\,(ab)_1$.

Для того чтобы еще больше упростить последнее утверждение, рассмотрим коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} F^1 & \xleftarrow{\Pi} & \Gamma \\ i\uparrow & & \uparrow I \\ F^1_{x_1} & \xleftarrow{\pi} & \Gamma_{x_1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overline{F}^1 & \xleftarrow{\overline{\Pi}} & \Gamma \\ \overline{i}\uparrow & & \uparrow I \\ \overline{F}^1_{x_1} & \xleftarrow{\overline{\pi}} & \Gamma^1_{x_1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{F}^1 & \xleftarrow{\widetilde{\Pi}} & \Gamma \\ \widetilde{i}\uparrow & & \uparrow I \\ \widetilde{F}^1_{x_1} & \xleftarrow{\widetilde{\pi}} & \Gamma_{x_1} \end{array}$$

Здесь гомоморфизмы, обозначенные буквами $\pi$ и $\Pi$, — проекции, а гомоморфизмы, обозначенные буквами $i$ и $I$, — вложения.

Тогда коммутативными будут и соответствующие диаграммы для групп когомологий (мы их пишем только для размерности 2):

$$\begin{array}{ccc} H^2(F^1, A_1) & \xrightarrow{\Lambda} & H^2(\Gamma, A_1) \\ \rho\downarrow & & \downarrow\mathrm{P} \\ H^2(F^1_{x_1}, A_1) & \xrightarrow{\lambda} & H^2(\Gamma_{x_1}, A_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H^2(\bar F^1, A_1) & \xrightarrow{\bar\Lambda} & H^2(\Gamma, A_1) \\ \bar\rho\downarrow & & \downarrow\mathrm{P} \\ H^2(\bar F^1_{x_1}, A) & \xrightarrow{\bar\lambda} & H^2(\Gamma_{x_1}, A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^2(\tilde F^1, A_1) & \xrightarrow{\tilde\Lambda} & H^2(\Gamma, A_1) \\ \tilde\rho\downarrow & & \downarrow\mathrm{P} \\ H^2(\tilde F^1_{x_1}, A_1) & \xrightarrow{\tilde\lambda} & H^2(\Gamma_{x_1}, A_1). \end{array}$$

Отсюда мы получаем, что

$$\lambda\rho = \mathrm{P}\Lambda,$$
$$\bar\lambda\bar\rho = \mathrm{P}\bar\Lambda,$$
$$\tilde\lambda\tilde\rho = \mathrm{P}\tilde\Lambda.$$

Равенство, которое нам нужно доказать, сводится к следующему:

$$\mathrm{P}\Lambda\, a_1 \cdot \mathrm{P}\bar\Lambda b_1 = \mathrm{P}\tilde\Lambda\,(ab)_1,$$

или

$$\Lambda a_1 \cdot \bar\Lambda b_1 = \tilde\Lambda\,(ab)_1.$$

Но последнее равенство следует из леммы 2, которая будет доказана в следующем параграфе.

Применим теорему 2 к случаю, когда $b = 1$. Решение $k^1$ задачи $(k/\Omega, F^1, \psi)$ имеет вид

$$k^1 = k(\sqrt[p]{\mu_0}).$$

Группа $\bar F^1$ будет прямым произведением $F$ и $A/A_1$, поэтому решением задачи $(k/\Omega, \bar F^1, \bar\psi)$ будет

$$\bar k^1 = k(\sqrt[p]{m}), \quad m \in \Omega.$$

По самому построению,

$$\tilde k^1 = k(\sqrt[p]{\mu_0\, m})$$

и поэтому является решением задачи $(k/\Omega, F^1, \psi)$.

Теорема 2 дает в таком случае для $x_1 \in \mathrm{Hom}(A_1, k_0^*)$:

$$C_{x_1}(\mu_0) \otimes \bar C_{x_1}(m) \sim \tilde C_{x_1}(\mu_0 m).$$

Так как в рассматриваемом случае $ab = a$ и $\tilde G = G$, то

$$\tilde C_{x_1}(\mu_0 m) = C_{x_1}(\mu_0\, m)$$

и теорема 2 показывает, что при переходе от решения $k(\sqrt[p]{\mu_0})$ задачи $(k/\Omega, F^1, \psi)$ к решению $k(\sqrt[p]{\mu_0 m})$ алгебра $C_{x_1}(\mu_0)$ умножается на некоторую алгебру $\bar C_{x_1}(m)$.

Прямое вычисление показывает, что

$$\bar{C}_{x_1}(m) \sim (a_{x_1}, m).$$

Из только что сделанного замечания и из замечания к теореме 1 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Если для задачи погружения* $(k/\Omega, G, \varphi)$ *выполняется условие согласности, то после первого шага (построения поля* $k^1 = k(\sqrt[p]{\mu_0})$*) первое препятствие для задачи* $(k^1/\Omega, G, \varphi_1)$ *будет набором циклических алгебр вида*

$$(a_{x_1} b_{x_1})_{k_{x_1}}, \quad x_1 \in \operatorname{Hom}(A_1, k_0^*),$$

*причем при переходе от решения* $k^1 = k(\sqrt[p]{\mu_0})$ *к решению* $k(\sqrt[p]{\mu_0 m})$ *все они умножаются на циклические алгебры* $(a_{x_1}, m)_{k_{x_1}}$.

Таким образом, второе препятствие заключается в невозможности выбрать такое $m \in \Omega$, что

$$(a_{x_1}, m) \sim (a_{x_1}, b_{x_1})^{-1}$$

для всех $x_1 \in \operatorname{Hom}(A_1, k_0^*)$.

Задача погружения распадается, следовательно, на две задачи:

1) можно ли для данного $x_1 \in \operatorname{Hom}(A_1, k_0^*)$ найти $m_{x_1} \in \Omega$ такое, что $(a_{x_1}, m_{x_1}) \sim (a_{x_1}, b_{x_1})^{-1}$?

2) Если для каждого $x_1$ можно найти такое $m_{x_1} \in \Omega$, то каковы условия того, что выбор можно сделать согласованно?

Остановимся на некоторых нужных нам свойствах гомоморфизма переноса $t$, который определяется так [см. (2)]: если $f \in \operatorname{Hom}_H(A, B)$, $H$ — подгруппа $G$, $A$ и $B$ — $G$-модули и $G = \sum_i H s_i$ — разложение $G$ на смежные классы по $H$, то

$$(tf)(a) = \sum_i f(a^{s_i^{-1}})^{s_i}.$$

При таком определении $tf$ будет уже $G$-гомоморфизмом $A$ в $B$. Если классы когомологий понимать как гомоморфизмы членов резольвенты в соответствующий модуль, то гомоморфизм переноса становится определенным для классов когомологий.

Гомоморфизм переноса обладает свойствами:

1. Инварианты алгебр $C_{x_1}$ и $tC_{x_1}$ совпадают (в локальном случае).

2. $tC_{x_1} = C_{tx_1}$.

Утверждение 1 следует из теории алгебр над локальными полями.

Доказательство утверждения 2. Класс когомологий $a_1$ есть некоторый $F^1$-гомоморфизм второго члена $X_2$ резольвенты для $F^1$ в $A_1$: $a_1 \in \operatorname{Hom}_{F^1}(X_2, A_1)$; $\rho a_1$ — это тот же самый гомоморфизм, только понимаемый как $F^1_{x_1}$-гомоморфизм. К последнему коциклу применяем $x_1$. Тогда

$$x_1 \rho a_1 \in \operatorname{Hom}_{F^1_{x_1}}(X_2, k_0^*).$$

Пусть $\xi$ — некоторый элемент из $X_2$. Тогда

$$(t(x_1 \rho a_1))(\xi) = \prod_i [(x_1 \rho a_1)(\xi^{s_i^{-1}})]^{s_i}.$$

Но $a_1 \in \mathrm{Hom}_{F^1}(X_2, A_1)$, поэтому

$$(t(x_1 \rho a_1))(\xi) = \prod_i [x_1(a_1(\xi)^{s_i^{-1}})]^{s_i} = \prod_i x_1^{s_i}(a_1(\xi)) = (\prod_i x_1^{s_i})(a_1(\xi)) = (tx_1)(a_1(\xi)),$$

т. е.

$$tC_{x_1} = C_{tx_1}.$$

## § 3. Две леммы

В этом параграфе доказываются две групповые леммы, которые мы использовали при доказательстве теорем 1 и 2.

Пусть группа $G$ получается из точной последовательности

$$1 \to A \to G \to F \to 1$$

с коциклом $a$ и $A_1$ — нормальный делитель $G$, лежащий внутри $A$. Тогда группу $G$ мы можем рассматривать как расширение $A_1$. Это приводит к точной последовательности

$$1 \to A_1 \to G \to F^1 \to 1,$$

фундаментальный коцикл которой мы обозначаем через $a_1$.

Пусть у нас имеются три точные последовательности:

$$1 \to A \to G \to F \to 1 \text{ (с фундаментальным коциклом } a), \quad (1)$$

$$1 \to A \to \bar{G} \to F \to 1 \text{ (с фундаментальным коциклом } b), \quad (\bar{1})$$

$$1 \to A \to \tilde{G} \to F \to 1 \text{ (с фундаментальным коциклом } a \cdot b).$$

Если $G_1$ и $G_2$ имеют нормальные делители $A_1$ и $A_2$ и $\varepsilon$: $G_1/A_1 \to G_2/A_2 = E$ — изоморфизм, то элементы $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, для которых

$$g_2 A_2 = \varepsilon(g_1 A_1)$$

образуют подгруппу $G'$, называемую прямым произведением $G_1$ и $G_2$ с объединенной фактор-группой $E$. Мы эту подгруппу обозначаем через $G_1 \times^E G_2$. Эта группа содержит подгруппу, изоморфную $A_1 \times A_2$, и

$$G'/A_1 \times A_2 \cong E.$$

Группы $A_1$ и $A_2$ — нормальные делители $G'$ и

$$G'/A_1 \cong G_1, \quad G'/A_2 \cong G_2.$$

Если $\nu$: $A_1 \to A_2 = A$ — изоморфизм, то элементы $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, для для которых $a_2 \nu(a_1) = 1$, образуют нормальный делитель группы $G'$, который мы обозначаем через $U$. Фактор-группа $G'/U$ обозначается через $G_1 \times^{E}_{A'} G_2$.

Пусть $\Gamma = F^1 \times^F \bar{F}^1$ и $i: A_1 \to A$ — вложение для первоначальных нормальных делителей группы $G$.

Тогда имеют место следующие утверждения.

ЛЕММА 1. $i^* a_1 = \lambda_F^{F^1} a$.

ЛЕММА 2. $\lambda_{F^1}^{\Gamma} a_1 \cdot \lambda_{\bar{F}^1}^{\Gamma} b_1 = \lambda_{\bar{F}^1}^{\Gamma} (ab)_1$.

Здесь $\lambda$ обозначает гомоморфизм подъема. Мы докажем эти соотношения между двумерными классами когомологий, интерпретируя их как соотношения между соответствующими расширениями групп. Это удобно, так как переход от $a$ к $a_1$ определяется теоретико-групповым образом. Но для этого нам нужно напомнить теоретико-групповую характеристи-

ку умножения классов когомологий и оператора подъема $\lambda$ (они хорошо известны).

1°. Умножение. Если $a$ и $b$ — фундаментальные коциклы последовательностей (1) и ($\overline{1}$), то $a \cdot b$ — фундаментальный класс последовательности

$$1 \to A \to G \times {}^F_A \overline{G} \to F \to 1.$$

2°. Подъем. Если $a$ — фундаментальный класс последовательности (1) и

$$\Phi \to F \tag{2}$$

— эпиморфизм с ядром $N$, причем $N$ действует на A тривиально, то $\lambda_F^\Phi\, a$ — фундаментальный класс последовательности

$$1 \to A \to G \times {}^F\Phi \xrightarrow{P} \Phi \to 1.$$

Обратно, если задан эпиморфизм (2), ядро которого $N$ действует на $A$ тривиально, а в последовательности

$$1 \to A \to \mathfrak{G} \xrightarrow{P} \Phi \to 1$$

$P^{-1}(N) = A \times N'$, где $N' \cong N$ и $N'$ является нормальным делителем $\mathfrak{G}$, то фундаментальный класс $\mathfrak{A}$ этой последовательности представляется в виде

$$\mathfrak{A} = \lambda_F^\Phi a,$$

где $a$ — фундаментальный класс последовательности

$$1 \to A \to \mathfrak{G}/N' \to F \to 1.$$

Доказательство леммы 1. Класс $a_1$ является фундаментальным классом последовательности

$$1 \to A_1 \to G \to F^1 \to 1.$$

При вложении $A_1$ в $A$ группа $G$ переходит в группу $\mathfrak{G}$, которая получается простым расширением ее нормального делителя $A_1$ до $A$. В группе $\mathfrak{G}$ будут, таким образом, содержаться два нормальных делителя, изоморфных $A$, причем пересечение их есть $A_1$. Для того чтобы их различать, мы второй из них, до которого $A_1$ расширяется формальным образом, обозначим через $\overline{A}$. Так как $A \cap \overline{A} = A_1$, то $\overline{A}_1 = A_1$.

Рассмотрим в $\mathfrak{G}$ подгруппу, образованную элементами вида $a \cdot \overline{a}^{-1}$. Эту подгруппу мы обозначим через $D$ и отображение $a \to a \cdot \overline{a}^{-1}$ будем записывать в виде:

$$d(a) = a\overline{a}^{-1}.$$

Это будет гомоморфизм с ядром $A_1$. Таким образом, $d : A/A_1 \to D$ есть изоморфизм. Подгруппа $D$, как легко видеть, будет в $\mathfrak{G}$ нормальным делителем, даже прямым множителем, изоморфным $A/A_1$. Подгруппа $A$ не пересекается с $D$, поэтому в $\mathfrak{G}$ содержится нормальный делитель $A \times D$. При проекции $p$ группы $\mathfrak{G}$ на $F^1$ этот нормальный делитель переходит в

$$p(A \times D) = p(D) = A/A_1,$$

причем $p$ есть изоморфизм $D$ с $A/A_1$. Таким образом,

$$p^{-1}(A/A_1) = A \times D$$

и

$$D \cong A/A_1.$$

Согласно 2°, коцикл $i^* a_1$ постоянен на классах смежности $\mathfrak{G}/D$ и получается поднятием на $F^1$ фундаментального коцикла последовательности

$$1 \to A \to \mathfrak{G}/D \to F \to 1.$$

Но $\mathfrak{G}/D$ изоморфно $G$, поэтому окончательно имеем:

$$i^* a_1 = \lambda_F^{F^1} a.$$

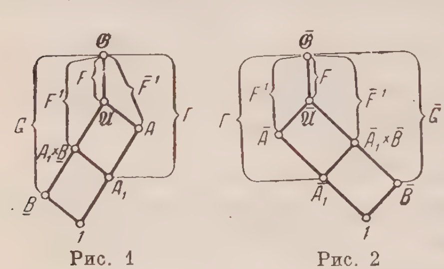



Рис. 1 Рис. 2

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Согласно 2°, $\lambda_{F^1}^{\Gamma} a_1$ является фундаментальным классом последовательности

$$1 \to A_1 \to \mathfrak{G} \to \Gamma \to 1,$$

где $\mathfrak{G} = G \times^{F^1} \Gamma$. Нормальный делитель $A/A_1$ группы $F^1$ обозначим через $B$, аналогично $\overline{A/A_1}$ — через $\underline{B}$. Тогда $\Gamma \supset B \times \underline{B}$ и

$$\Gamma/\underline{B} \cong F^1, \quad \Gamma/B \cong \overline{F^1}, \quad \Gamma/B \times \underline{B} \cong F.$$

По определению прямого произведения с объединенной фактор-группой, $\mathfrak{G}$ содержит подгруппу, изоморфную $A_1 \times \underline{B}$.

В группе $\mathfrak{G}$ содержится подгруппа, порожденная элементами $(a, aA_1)$. Эта подгруппа изоморфна $A$, и мы обозначим ее снова через $A$. Обозначим $A \times \underline{B} \subset \mathfrak{G}$ через $\mathfrak{A}$. Тогда

$$\mathfrak{G}/A \times \underline{B} = F.$$

Иначе говоря, мы видим, что

$$\mathfrak{G} = G \times^F \overline{F^1}.$$

Обозначая аналогичные объекты для $b$ чертой наверху, получим:

$$\overline{\mathfrak{G}} = \overline{G} \times^F F^1.$$

Для того чтобы получить $\lambda_{F^1}^{\Gamma} a_1 \cdot \lambda_{\overline{F^1}}^{\Gamma} b_1$, мы должны, согласно 1°, рассмотреть прямое произведение $\mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$.

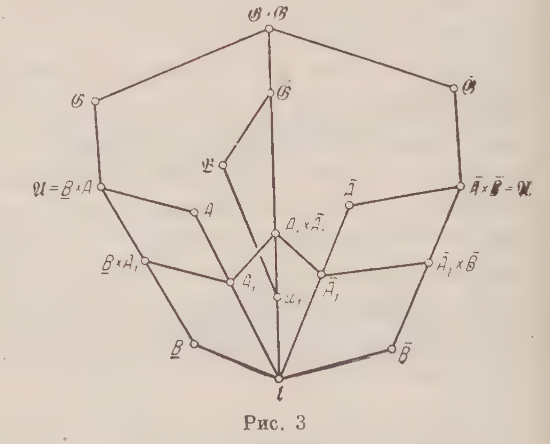



Рис. 3

Положим $\mathfrak{G} \times^{\Gamma} \overline{\mathfrak{G}} = \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$. Для того чтобы получить эту группу, нам надо рассмотреть те элементы $(g, \overline{h}) \in \mathfrak{G} \times \overline{\mathfrak{G}}$, для которых $\varepsilon(gA_1) = \overline{h}\overline{A}_1$, где $\varepsilon$ — изоморфизм:

$$\varepsilon: \ \mathfrak{G}/A_1 \to \overline{\mathfrak{G}}/\overline{A}_1 = \Gamma.$$

Заметим, что

$$\varepsilon B = \varepsilon A / A_1 = \overline{B}, \quad \varepsilon \underline{B} = \underline{\overline{B}}.$$

В группе $\underline{B} \times A \times \bar{A} \times \bar{B} \subset \mathfrak{S} \times \bar{\mathfrak{S}}$ рассмотрим подгруппу, состоящую из элементов вида

$$\underline{a^{-1} A_1} \times a \times \bar{a}^{-1} \times aA_1.$$

Эту подгруппу обозначим через $\mathfrak{B}$. Очевидно, что $\mathfrak{B} \subset \bar{\bar{\mathfrak{S}}}$, так как

$$\varepsilon(\underline{a^{-1} A_1} \times aA_1) = \overline{\underline{a^{-1} A_1}} \times \overline{aA_1}.$$

В заключение обозначим через $U_1$ подгруппу элементов вида

$$(a_1,\ \bar{a}_1^{-1}) \in A_1 \times \bar{A}_1 \subset \bar{\bar{\mathfrak{S}}}.$$

По определению,

$$\bar{\bar{\mathfrak{S}}} / U_1 = \mathfrak{S} \times^{\Gamma}_{A_1} \bar{\mathfrak{S}}.$$

Ясно, что $U_1 \subset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} / U_1 \cong A / A_1$. Подгруппу $\mathfrak{B} / U_1$ группы $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}/U_1$ обозначим через $\widetilde{B}$.

Рассмотрим гомоморфизм

$$\pi: \quad \bar{\bar{\mathfrak{S}}} \to \bar{\bar{\mathfrak{S}}} / U_1.$$

Непосредственная проверка показывает, что гомоморфизм $\pi$ действует на $A$ изоморфно и что $\widetilde{B}$ является нормальным делителем $\pi\bar{\bar{\mathfrak{S}}}$.

Так как $\lambda^{\Gamma}_{F^1} a_1 \cdot \lambda^{\Gamma}_{\bar{F}^1} b_1$ является фундаментальным классом последовательности

$$1 \to A_1 \to \pi\bar{\bar{\mathfrak{S}}} \to \Gamma \to 1,$$

то из сказанного выше следует, что коцикл $\lambda^{\Gamma}_{F^1} a_1 \cdot \lambda^{\Gamma}_{\bar{F}^1} b_1$ постоянен на классах смежности $\Gamma/\widetilde{B}$ (здесь $\widetilde{B}$ отождествляется со своим образом в $\pi\bar{\bar{\mathfrak{S}}} / \pi A_1 \cong \Gamma$). В группе $\Gamma$ подгруппа $\widetilde{B}$ состоит из элементов $b_1 \times \bar{b}_2 \in B \times \bar{B}$, для которых $b_1 b_2 = 1$. Таким образом, $\Gamma/\widetilde{B} \cong \bar{F}^1$ и мы видим, что

$$\lambda^{\Gamma}_{F^1} a_1 \cdot \lambda^{\Gamma}_{\bar{F}^1} b_1 = \lambda^{\Gamma}_{\widetilde{F}^1} c,$$

где $c$ — некоторый класс из $H^2(\widetilde{F}^1,\ A_1)$. Чтобы найти этот класс, нам надо, согласно 2°, рассмотреть $\pi\bar{\bar{\mathfrak{S}}}/\widetilde{B} = \hat{G}$. Класс $c$ будет фундаментальным классом последовательности

$$1 \to A_1 \to \hat{G} \to \hat{F}^1 \to 1.$$

Рис. 4

Так как $\widetilde{B} = \pi\mathfrak{B}$, то $\hat{G} = \pi\bar{\bar{\mathfrak{S}}}/\pi\mathfrak{B} \cong \bar{\bar{\mathfrak{S}}}/\mathfrak{B}$, и нам достаточно доказать, что

$$\hat{G} \cong \bar{\bar{\mathfrak{S}}}/\mathfrak{B} \cong \widetilde{G}.$$

Для этого заметим, что

$$\mathfrak{S} / \underline{B} \cong G, \qquad \bar{\mathfrak{S}}/\bar{B} \cong \bar{G}$$

и, следовательно, существует изоморфизм

$$\eta: \quad \mathfrak{S} \times \bar{\mathfrak{S}} / \underline{B} \times \bar{B} \to G \times \bar{G}.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\eta\bar{\bar{\mathfrak{S}}} \cong G \times^{F} \bar{G}, \qquad \eta \cong U, \qquad \eta\mathfrak{B} \cong U,$$

где $U \subset A \times \bar{A} \subset G \times \bar{G}$ есть подгруппа, состоящая из элементов вида $(a, \bar{a}^{-1})$.

Таким образом,

$$\hat{G} \cong \bar{\bar{\mathfrak{G}}}/\mathfrak{B} \cong \eta\bar{\bar{\mathfrak{G}}}/\eta\mathfrak{B} \cong G \times^F \bar{G}/U = G \times_A^F G = \tilde{G},$$

что и требовалось доказать.

## § 4. Задача погружения над локальным полем

Предположим теперь, что поле $\Omega$ локальное. В этом случае имеет место

ТЕОРЕМА 4. *При выполнении условия согласности задача погружения* $(k/\Omega, G, \varphi)$ *будет разрешима.*

Доказательство. Как уже отмечалось, теорему достаточно доказать для случая, когда $G$ есть $p$-группа. Тогда внутри $A$ будет содержаться нормальный делитель $A_1$ группы $G$ и $(A : A_1) = p$. Задача погружения, соответствующая точной последовательности

$$1 \to A/A_1 \to F^1 \to F \to 1,$$

будет сопутствующей к исходной задаче и, следовательно, должна быть разрешима.

Пусть одним из ее решений будет $k^1 = k(\sqrt[p]{\mu_0})$, где $\mu_0 \in k$. Элемент $\mu_0$ определяется с точностью до множителя $m$ из основного поля $\Omega$. Задача заключается в таком выборе множителя $m$, чтобы алгебра $k(\sqrt[p]{\mu_0 m})$, тоже являющаяся решением задачи погружения $(k/\Omega, F^1, \psi)$, была согласна с группой $G$. Покажем, что выбор такого множителя $m$ возможен. Для этого заметим, что так как $tC_{x_1}$ имеет такой же инвариант, что и $C_{x_1}$, то достаточно рассматривать только алгебры $tC_{x_1}$. Но $tC_{x_1} = C_{tx_1}$ и характер $tx_1$ инвариантен относительно всей группы $F^1$. Поэтому достаточно рассматривать только препятствия для характеров $x_1 \in \mathrm{Hom}_{F^1}(A_1, \overset{*}{k_0})$.

Обозначим через $x$ продолжение характера $x_1$ на всю группу $A$.

В силу теоремы 3, алгебра $C_{x_1}(\mu_0)$ имеет вид $(a_{x_1}, b_{x_1})$ и при переходе от решения $k(\sqrt[p]{\mu_0})$ задачи $(k/\Omega, F^1, \psi)$ к решению $k(\sqrt[p]{\mu_0 m})$ умножается на $(a_{x_1}, m)$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все $F^1$-инвариантные характеры группы $A_1$. Множитель $m$ нам нужно выбрать так, чтобы алгебра $(a_{x_i}, m)$ принимала наперед заданное значение $C_{x_i}^{-1}(\mu_0)$. Выражение $(a_{x_i}, m)$ является характером при фиксированном $m$, и система уравнений

$$(a_{x_i}, m) = C_{x_i}^{-1}(\mu_0)$$

будет разрешима, если из любого соотношения

$$\prod_i (a_{x_i}, m)^{\beta_i} = 1$$

(при всех $m$) следует, что

$$\prod_i (C_{x_i}^{-1}(\mu_0))^{\beta_i} = 1.$$

Покажем, что это действительно так. Равенство

$$\prod_i (a_{x_i},\ m)^{\beta_i} = 1$$

означает, что $\prod\limits_i a_i^{\beta_i}$ — $p$-я степень в $\Omega$, т. е.

$$\prod_i \alpha_{x_i}^{\beta_i} \in \Omega.$$

Это в свою очередь означает, что

$$\prod_i f_i^{\beta_i} = 1,$$

где $f_i$ — коцикл, построенный по формуле

$$f_i(\sigma) = \frac{x_i'(\bar{z}^\sigma)}{x_i'(z)^\sigma}$$

($x_i'$ — продолжение $x_i$ на $A$). Отсюда следует, что

$$(C_{\prod\limits_i x_i^{\beta_i}}(\mu_0))^{-1} \sim 1.$$

Остается заметить, что для $F^1$-инвариантных характеров $x_1$ и $x_2$

$$C_{x_1x_2}(\mu_0) \sim C_{x_1}(\mu_0) \otimes C_{x_2}(\mu_0).$$

Из $C_{\prod\limits_i x_i^{\beta_i}}(\mu_0)^{-1} \sim 1$ получаем:

$$\prod_i (C_{x_i}^{-1}(\mu_0))^{\beta_i} \sim 1.$$

Доказательство теоремы закончено.

Замечание 1. Условие согласности для задачи погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$ заключается в том, что все алгебры $C_x = x\rho a$, где $\rho$ — ограничение с $F$ на $F_x$, распадаются. Но, как мы видели, $tC_x$ и $C_x$ имеют один и тот же инвариант в локальном случае, $tC_x = C_{tx}$ и $tx$ уже инвариантно относительно всей группы $F$. Поэтому в локальном случае условие согласности достаточно проверять только для характеров $x \in \mathrm{Hom}_F(A,\ k_0^{\bullet})$.

Остановимся на вопросе о том, когда решение задачи погружения $(k/\Omega,\ G,\ \varphi)$ ($k$ — локальное поле) будет полем. В случае, когда $G$ — $p$-группа, этот вопрос решает

Предложение. *Если число образующих группы $G$ равно числу образующих группы $F$, то любое решение задачи погружения $(k/\Omega, G, \varphi)$ будет полем.*

Для доказательства утверждения предложения нужно решать задачу погружения последовательными центральными шагами степени $p$ (сделать это можно, так как $G$ — $p$-группа). Тогда в случае равенства числа образующих $G$ и $F$ при каждом шаге число образующих не будет увеличиваться. Достаточно, следовательно, проверить утверждение только для случая, когда $(G:F) = p$. Решение такой задачи $K = k(\sqrt[p]{\mu})$ будет полем тогда и только тогда, когда $\mu \neq \mu'^p$, $\mu' \in k$.

Если $\mu = \mu'^p$ в $k$, то $G$ будет прямым произведением $F$ и $A$ (это легко проверяется). Отсюда получается доказательство предложения.

Поступило
18.VI.1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Brauer R., Über die Konstruktion der Schiefkörper, die von endlichem Rang in Bezug auf ein gegebenes Zentrum sind, J. f. die reine und angew. Mathem., 168 H. 1 (1932), 44—64.

[2] Cartan H. und Eilenberg S., Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.

[3] Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К., Исследования по геометрии теории Галуа, Матем. сборн., 15 (57) : 2 (1944), 243—276.

[4] Hasse H., Existenz und Mannigfaltigkeit Abelscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe über einem Teilkörper des Grundkörpers, Mathem. Nachrichten, B. 1., H. 1 (1948), 40—61.

[5] Kochendörffer R., Zwei Reduktionenssätse zum Einbettungsproblem für Abelsche Algebren, Mathem. Nachrichten, B. 10, H. 1—2 (1953), 75—84.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 841—870

Л. М. ГЛУСКИН

# ПОЛУГРУППЫ И КОЛЬЦА ЭНДОМОРФИЗМОВ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(*Представлено академиком* **А. И. Мальцевым**)

В настоящей работе свойства вполне простых полугрупп $(F, A, A_1^*)$ используются для исследования полугрупп и колец линейных преобразований и некоторых классов абстрактных колец.

Настоящая работа, ставя своей целью изучение полугрупп и колец эндоморфизмов линейных пространств, является одновременно опытом приложения методов теории полугрупп в теории колец. Основным аппаратом является использование свойств минимальных идеалов $(F, A, A_1^*)$ мультипликативных полугрупп колец $P(F, A, A_1^*)$ (см. п. 2.10). Для конечномерных пространств единственной полугруппой $(F, A, A_1^*)$ является полугруппа $(F, A, A^*)$ всех эндоморфизмов пространства $A$ в свои одномерные подпространства.

Значение полугрупп $(F, A, A_1^*)$, помимо их роли в изучении полугрупп и колец эндоморфизмов (см., например, теоремы 2.8, 2.10, 3.5.1, 6.4, 6.10, 6.11) и характеристики линейного пространства $A$ (теоремы 3.3, 3.3.2), состоит в том, что они являются фактически вполне простыми идеалами мультипликативных полугрупп некоторых классов полупростых колец. В частности, полугруппы $(F, A, A_1^*)$ полностью характеризуют простые кольца, содержащие минимальные односторонние идеалы (теорема 5.5).

В § 2 рассматриваются вполне простые правые идеалы полугруппы $(F, A, A^*)$ и прежде всего правые идеалы типа $(F, A, A_1^*)$, а также порожденные ими кольца эндоморфизмов.

В § 3 исследуются изоморфизмы полугрупп $(F, A, A_1^*)$ и полугрупп $S_A$, содержащих $(F, A, A_1^*)$ в качестве двустороннего идеала. Теорема 3.3 устанавливает, что любая полугруппа $(F, A, A_1^*)$ с точностью до изоморфизма характеризует само пространство $A$. Перечисление изоморфизмов широкого класса полугрупп и колец линейных преобразований является тривиальным следствием результатов этого параграфа. В частности, в нем получен бесконечномерный аналог теоремы об изоморфизмах матричных полугрупп $G_n^r$ [см. ([8])].

§ 4 носит вспомогательный характер, однако теорема 4.8 представляет самостоятельный интерес в теории абстрактных полугрупп.

В § 5 рассматриваются кольца с минимальными односторонними идеалами. Теорема 5.2 устанавливает, что минимальные двусторонние идеалы мультипликативных полугрупп полупростых колец этого класса являются вполне простыми полугруппами. Теоремы 5.3, 5.4 указывают на классы колец, допускающих изоморфные представления кольцами эндоморфизмов линейных пространств; сюда относятся, в частности, прямые слагаемые всех атомичных колец. Теорема 5.5 дает представление простых колец правыми идеалами кольца $P(F, A)$ всех эндоморфизмов пространства $A$. Отсюда вытекает известная теорема Джекобсона (теорема 6.4.3) о структуре простых колец, содержащих минимальный односторонний идеал, и, как частный случай, — теорема Веддербёрна — Нётер. Далее находится внутренняя характеристика ряда колец эндоморфизмов (теоремы 5.5, 5.8, 5.9, 5.11, 5.11.1), причем характеристика колец $P(F, A)$ и $P(F, A, A_1^*)$ дается только в терминах их мультипликативных полугрупп. Это связано с тем, что указанные кольца являются кольцами с единственным сложением (см. 5.10, 5.10.1). Указывается класс абстрактных колец, являющихся кольцами с единственным сложением.

В § 6 рассматриваются транзитивные полугруппы и кольца эндоморфизмов. Основными теоремами здесь являются теорема 6.11, обобщающая аналогичный результат Джекобсона, полученный им для дважды транзитивных колец, а также теорема 6.12.

Основные результаты работы сформулированы в заметке ([13]).

## § 1. Некоторые определения

1.1. *Полугруппой* называется множество $S$ с однозначным бинарным ассоциативным действием. Действие в $S$ будем записывать мультипликативно. Если $A$, $B$ — два подмножества $S$, то через $AB$ будем обозначать множество всех элементов $ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Простейшие понятия теории полугрупп (подполугруппа, идеал, нуль и т. д.) предполагаются известными [см. ([1])].

1.2. Левый идеал $L$ полугруппы $S$ называется минимальным, если $L \neq 0$ и $L$ не содержит отличных от $L$ и 0 левых идеалов полугруппы $S$. Аналогично определяются правые и двусторонние минимальные идеалы. Полугруппа $S$ называется $i$-простой *, если она не содержит отличных от нуля и $S$ двусторонних идеалов.

Если $G = G^* \cup O$, где $G^*$ — группа, а $O$ — нуль полугруппы $G$, то $G$ называется *группой с внешне присоединенным нулем.*

1.3. $i$-простая полугруппа $S$, содержащая минимальный левый идеал $L$, называется *вполне простой* [см. ([1]) — ([4])], если $S$ содержит по крайней мере один ненулевой идемпотент.

Пусть $G$ — группа с внешне присоединенным нулем $o$; $I$, $\Lambda$ — два множества индексов. Каждой паре индексов $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ поставим в соответствие элемент $p_{\lambda i} \in G$ так, что для любого $i \in I$ (аналогично для лю-

---

* Обычно в литературе такую полугруппу называют простой. Автор предпочитает не употреблять этого термина, которому часто придают и другие значения [см., например, ([9])].

бого $\lambda \in \Lambda$) найдется элемент $p_{\lambda i} \neq 0$. Пусть $S = S(G, I, \Lambda, p_{\lambda i})$ — множество всех троек $(a, i\lambda)$, где $a \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Все тройки $(o, i\lambda)$ отождествим между собой и обозначим их символом $O$. $S$ является вполне простой полугруппой с нулем $O$ относительно действия

$$(a, i\varkappa)(b, j\lambda) = (ap_{\varkappa j}b, i\lambda).$$

Всякая вполне простая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе $S(G, I, \Lambda, p_{\lambda i})$. Обозначим

$$(G, i\lambda) = \bigcup_{a \in G}(a, i\lambda), \quad L_\lambda = \bigcup_{i \in I}(G, i\lambda), \quad R_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda}(G, i\lambda).$$

При $p_{\lambda i} \neq 0$ полугруппа $(G, i\lambda)$ изоморфна полугруппе $G$, т. е. является группой с внешне присоединенным нулем. Каждое множество $L_\lambda$ является минимальным левым идеалом полугруппы $S$, а множество $R_i$ — ее минимальным правым идеалом. Всякий ненулевой правый идеал полугруппы $S$ является объединением некоторого множества ее минимальных правых идеалов $R_i$ и имеет вид

$$R' = \bigcup_{i \in I'} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G, i\lambda),$$

где $I' \subseteq I$. $R'$ тогда и только тогда является вполне простой полугруппой, когда для всякого $\lambda \in \Lambda$ найдется такой индекс $i \in I'$, что $p_{\lambda i} \neq 0$. Каждый идеал $R_i$ содержит хотя бы один ненулевой идемпотент $e_i$, причем $R_i = e_i R_i$.

Пусть $r_i$, $l_\lambda$ — любые элементы из $G \setminus o$, $\psi$ — изоморфизм $G$ на полугруппу $G'$, а $i \to i'$, $\lambda \to \lambda'$ — взаимно однозначные отображения $I$ и $\Lambda$ на некоторые множества $I'$ и $\Lambda'$. Отображения $\theta$ и $\varphi$ полугруппы $S$ на полугруппы $S(G, I, \Lambda, l_\lambda, p_{\lambda i} r_i)$ и $S(G', I', \Lambda', q_{\lambda' i'})$:

$$(a, i\lambda)\theta = (r_i^{-1} a l_\lambda^{-1}, i\lambda), \tag{1}$$

$$(a, i\lambda)\varphi = (a\psi, i'\lambda'), \quad q_{\lambda' i'} = p_{\lambda i}\psi \tag{2}$$

являются ее изоморфизмами. Каждый изоморфизм полугруппы $S$ можно представить в виде произведения изоморфизмов типа (1) и (2).

1.4. Пусть $\Omega$ — некоторое множество, $A$ — некоторая совокупность отображений $\Omega$ в себя; отображения $f \in A$ и их суперпозицию будем записывать мультипликативно:

$$f(x) = xf, \quad (xf)\varphi = xf\varphi \quad (x \in \Omega, \quad f, \varphi \in A);$$

через $\Omega' A$ обозначим множество всех элементов $xf$, где $x \in \Omega'$, $f \in A$ ($\Omega'$ — подмножество $\Omega$).

1.5. Пусть $P$ — кольцо. Всюду в настоящей работе через $\mathfrak{M}P$ будем обозначать мультипликативную полугруппу кольца $P$.

Если $A$ — подполугруппа $\mathfrak{M}P$, то через $\mathfrak{P}A$ обозначим множество всех элементов из $P$ вида $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$, где $a_i \in A$. $\mathfrak{P}A$ является минимальным подкольцом кольца $P$, содержащим множество $A$. Если $A$ — левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы $\mathfrak{M}P$, то $\mathfrak{P}A$ является пересечением всех левых (соответственно правых, двусторонних) идеалов кольца $P$, содержащих множество $A$.

1.6. Идеал $A$ полугруппы (кольца) $P$ называется нильпотентным, если $A^n = 0$ при некотором натуральном $n$. Полугруппа (кольцо) $P$ назы-

вается *полупростой*, если она не содержит собственных или несобственных ненулевых двусторонних нильпотентных идеалов.

Кольцо $P$ называется *простым*, если оно не нильпотентно и не содержит собственных двусторонних идеалов.

1.7. Пусть $F$ — тело, т. е. кольцо, в котором $\mathfrak{M}F$ является группой с внешне присоединенным нулем. *Линейным пространством* над телом $F$ (линейным многообразием над телом $F$, $F$-пространством *) называется аддитивная абелева группа $A = (F, A)$ с областью (левых) операторов $F$. Мы будем считать известными понятия подпространства, дополнения подпространства, ранга $r(A')$ подпространства $A' \subseteq A$ базиса, линейной зависимости и т. д.

Линейной формой (линейной функцией) над $F$-пространством $A$ называется отображение $f$

$$\mathbf{x} \to [\mathbf{x}f] = [\mathbf{x}, f] \quad (\mathbf{x} \in A, [\mathbf{x}f] \in F),$$

удовлетворяющее условиям:

$$[\mathbf{x}+\mathbf{y}, f] = [\mathbf{x}f] + [\mathbf{y}f], \quad [\lambda\mathbf{x}, f] = \lambda[\mathbf{x}f] \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \lambda \in F).$$

Обозначим через $A^*$ совокупность всех линейных форм над $A$ и определим следующим образом сложение линейных форм и умножение их на числа $\lambda \in F$ (элементы из $F$ будем называть числами, элементы из $A$ — точками):

$$[\mathbf{x}, f_1 + f_2] = [\mathbf{x}f_1] + [\mathbf{x}f_2], \quad [\mathbf{x}, f\lambda] = [\mathbf{x}f]\lambda \quad (\mathbf{x} \in A, \quad f, f_1, f_2, \in A^*).$$

Относительно введенных таким образом операций $A^*$ является $F$-пространством, которое называется пространством, сопряженным пространству $A$. В отличие от $A$, $A^*$ допускает $F$ в качестве области правых операторов.

1.8. *Эндоморфизмом* пространства $A$ (линейным преобразованием $A$) называется такое однозначное отображение $a$ пространства $A$ в себя, что

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})a = \mathbf{x}a + \mathbf{y}a, \quad (\lambda\mathbf{x})a = \lambda(\mathbf{x}a) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \lambda \in F). \tag{3}$$

Множество $P(F, A)$ всех эндоморфизмов $A$ является кольцом относительно операций

$$\mathbf{x}(a+b) = \mathbf{x}a + \mathbf{x}b, \quad \mathbf{x}(ab) = (\mathbf{x}a)b \quad (\mathbf{x} \in A, a, b \in P(F, A)).$$

Обозначим $\mathfrak{M}P(F, A) = S(F, A)$ (см. 1.5). Эндоморфизм, отображающий все пространство $A$ в его нулевой элемент, обозначим через $O$; подкольцо $P(F, A)$, состоящее из нуля и всех эндоморфизмов $a \in P(F, A)$, для которых $r(Aa)$ конечен,— через $P_0(F, A)$.

1.9. Подмножество $N \subseteq P(F, A)$ называется *n-кратно транзитивным* [см. ([6])], если для любых линейно независимых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in A$ и любых $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n \in A$ найдется эндоморфизм $a \in N$ такой, что $\mathbf{x}_i a = \mathbf{y}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В частности, множество $N$ 1-транзитивно (мы будем называть его транзитивным), если для любой ненулевой точки $\mathbf{x} \in A$ и любой точки $\mathbf{y} \in A$ найдется эндоморфизм $a \in N$ такой, что $\mathbf{x}a = \mathbf{y}$.

1.10. Пусть $F$ и $H$ — два тела, $A = (F, A)$ — $F$-пространство, $B = (H, B)$ — $H$-пространство. Взаимно однозначное отображение $a = a_\psi$

---

* См. ([5]).

пространства $A$ на пространство $B$ называется *полулинейным преобразованием*, если существует такой изоморфизм $\psi$ тела $F$ на тело $H$, что для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, $\lambda \in F$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})\,a = \mathbf{x}a + \mathbf{y}a, \quad (\lambda\mathbf{x})\,a = \lambda\psi\cdot\mathbf{x}a.$$

Пространство $A$ называется изоморфным пространству $B$, если существует полулинейное преобразование пространства $A$ на $B$.

Пусть $A = (F, A)$, $B = (H, B)$ — два изоморфных пространства, $a = a_\psi$ — полулинейное преобразование $A$ на $B$, $E = \{\mathbf{e}_\nu\}$ — какой-либо базис пространства $A$. Тогда множество $E' = \{\mathbf{e}_\nu a\}$ является, очевидно, базисом пространства $B$.

Пусть $f$ — произвольная форма из $A^*$ и $[\mathbf{e}_\nu f] = \alpha_\nu$ для любого $\mathbf{e}_\nu \in E$. Форме $f$ поставим в соответствие форму $f' = fa^* \in B^*$ такую, что

$$[\mathbf{e}_\nu a,\ f'] = \alpha_\nu\,\psi.$$

Легко проверить, что $a^*$ является взаимно однозначным отображением $A^*$ на $B^*$, не зависит от выбора базиса, является полулинейным преобразованием $A^*$ на $B^*$ и что для любых $\mathbf{x} \in A$, $f \in A^*$ имеет место условие

$$[\mathbf{x}a,\ fa^*] = [\mathbf{x}f]\,\psi. \qquad (4)$$

Преобразование $a^*$ назовем *сопряженным* преобразованию $a$.

Аналогично, для любого $c \in P(F, A)$ однозначно определяется сопряженный ему эндоморфизм $c^*$ пространства $A^*$, удовлетворяющий при любых $\mathbf{x} \in A$, $f \in A^*$ условию

$$[\mathbf{x}c,\ f] = [\mathbf{x},\ fc^*]$$

[см. ([5])].

1.11. Если для любых элементов $a$, $b$ полугруппы $S$ существует элемент $x \in S$ такой, что $xa = b$, то $S$ называется *полугруппой с левым делением*. Уравнение $xa = b$ для любой пары элементов такой полугруппы $S$ разрешимо однозначно тогда и только тогда, когда $S$ является группой.

## § 2. Полугруппы $(F, A, B^*)$

2.1. Обозначим через $(F, A, A^*)$ подполугруппу $S(F, A)$, состоящую из нуля и всех эндоморфизмов пространства $A = (F, A)$ в свои одномерные подпространства. Поскольку $(F, A, A^*)$, как мы увидим ниже, в значительной мере характеризует структуру всего кольца $P(F, A)$, мы рассмотрим в настоящем параграфе строение $(F, A, A^*)$ и некоторых ее подполугрупп.

Каждому одномерному подпространству $A_\varkappa$ пространства $A$ сопоставим взаимно однозначно некоторый индекс $\varkappa$, а одномерному подпространству $A_i^* \subset A^*$ — индекс $i$. Множество всех индексов $\varkappa$ обозначим через $\Lambda_A$, множество всех индексов $i$ — через $I_A$. Выберем произвольно по одному ненулевому элементу $\mathbf{e}_\varkappa \in A_\varkappa$, $f_i \in A_i^*$.

2.2. ТЕОРЕМА*. *Полугруппа* $(F, A, A^*)$ *изоморфна вполне простой полугруппе* $S(\mathfrak{M}F,\ I_A,\ \Lambda_A,\ [\mathbf{e}_\varkappa f_i])$ (см. 1.3).

---

* Для $F$-пространств конечного ранга см. ([7]). В приведенном ниже доказательстве по существу использован метод Веддербёрна так же, как и в работе ([2]).

Доказательство. Обозначим через 1 какой-нибудь индекс из $\Lambda$. Если $a_1$ — любой эндоморфизм $A$ в $A_1$, то для произвольного $\mathbf{x} \in A$ имеем

$$\mathbf{x}a_1 = f(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_1.$$

Из (3) следует, что $f$ является линейной формой над $A$ и

$$\mathbf{x}a_1 = [\mathbf{x}/]\,\mathbf{e}_1. \tag{5}$$

Пусть $\varkappa$, $\lambda$ — произвольные индексы из $\Lambda$, $a_{\varkappa\lambda}$ — такой эндоморфизм из $(F, A, A^*)$, что

$$\mathbf{e}_\varkappa a_{\varkappa\lambda} = \mathbf{e}_\lambda, \quad \mathbf{e}_\mu a_{\varkappa\lambda} = 0 \text{ при } \mu \neq \varkappa,$$

$a$ — произвольный эндоморфизм $A$ в $A_\lambda$. Тогда $aa_{\lambda 1}$ является эндоморфизмом $A$ в $A_1$ и, в силу (5), найдется форма $f \in A^*$ такая, что для любого $\mathbf{x} \in A$

$$\mathbf{x}aa_{\lambda 1} = [\mathbf{x}/]\,\mathbf{e}_1.$$

В силу того, что $aa_{\lambda 1}a_{1\lambda} = a$ и в силу определения $a_{\varkappa\lambda}$, для любого $\mathbf{x} \in A$ имеем:

$$\mathbf{x}a = [\mathbf{x}/]\,\mathbf{e}_\lambda.$$

Обратно, каждой форме $f = f_i\alpha \in A^*$ однозначно соответствует такой эндоморфизм $a \in (F, A, A^*)$, что для любой точки $\mathbf{x} \in A$

$$\mathbf{x}a = [\mathbf{x}/_i]\,\alpha\mathbf{e}_\lambda. \tag{6}$$

Эндоморфизму $a$, определенному в (6), взаимно однозначно соответствует тройка $a\varphi = (\alpha, i\lambda)$. Обозначим

$$K = \bigcup_{\alpha \in F} \bigcup_{i \in I_A} \bigcup_{\lambda \in \Lambda_A} (\alpha, i\lambda), \quad (0, i\lambda) = 0.$$

Каждой тройке $(\alpha, i\lambda) \in K$, по формуле (6), соответствует один и только один эндоморфизм $a = (\alpha, i\lambda)\varphi^{-1}$. Если $b\varphi = (\beta, j\mu) \in K$, то из (6) для любой точки $\mathbf{x} \in A$ следует:

$$\mathbf{x}(ab) = (\mathbf{x}a)\,b = ([\mathbf{x}/_i]\,\alpha\mathbf{e}_\lambda)\,b = [[\mathbf{x}/_i]\,\alpha\mathbf{e}_\lambda,\ f_j]\,\beta\mathbf{e}_\mu = [\mathbf{x}/_i]\,\alpha\,[\mathbf{e}_\lambda/_j]\,\beta\mathbf{e}_\mu$$

и

$$(ab)\,\varphi = (\alpha\,[\mathbf{e}_\lambda/_j]\,\beta,\ i\mu).$$

Таким образом,

$$(\alpha, i\lambda)(\beta, j\mu) = (\alpha\,[\mathbf{e}_\lambda/_j]\,\beta,\ i\mu), \quad K = S(\mathfrak{M}F,\ I_A,\ \Lambda_A,\ [\mathbf{e}_\varkappa/_i])$$

(см. 1.3), что и доказывает теорему.

2.2.1. Всюду в дальнейшем для любого подмножества $M \subseteq S(\mathfrak{M}F, I_A, \Lambda_A, [\mathbf{e}_\varkappa/_i])$ будем обозначать через $M'$ прообраз множества $M$ при изоморфизме $\varphi$ полугруппы $(F, A, A^*)$ на $S(\mathfrak{M}F, I_A, \Lambda_A[\mathbf{e}_\varkappa/_i])$, установленном в конце п. 2.2. В частности, элемент $a = (\alpha, i\lambda)\varphi^{-1}$ в формуле (6) будем обозначать через $a = (\alpha, i\lambda)'$.

2.3. Подпространство $B^* \subseteq A^*$ (см. 1.7) назовем *t-подпространством*, если для любой ненулевой точки $\mathbf{x} \in A$ найдется такая форма $f \in B^*$, что $[\mathbf{x}, f] = 1$.

ЛЕММА. *Если $B^*$ — t-подпространство пространства $A^*$, то для любых линейно независимых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \in A$ найдется такая форма $f \in B^*$, что $[\mathbf{x}_1/] = 1$, $[\mathbf{x}_2/] = \ldots = [\mathbf{x}_n/] = 0$.*

Доказательство. При $n=1$ лемма тривиальна. Будем считать ее доказанной для $n-1$, и пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — любые линейно независимые элементы из $A$ ($n \leqslant r(A)$). По предположению, существует такая форма $f_1 \in B^*$, что

$$[\mathbf{x}_1 f_1] = 1, \quad [\mathbf{x}_2 f_1] = \ldots = [\mathbf{x}_{n-1} f_1] = 0. \tag{7}$$

Пусть $[\mathbf{x}_n f_1] = \alpha$. Если $\alpha = 0$, то достаточно принять $f = f_1$. Будем считать, что $\alpha \neq 0$. По предположению, найдется такая форма $f_2 \in B^*$, что

$$[\mathbf{x}_1 - \alpha \mathbf{x}_n,\ f_2] = 1, \quad [\mathbf{x}_2 f_2] = \ldots = [\mathbf{x}_{n-1} f_2] = 0. \tag{8}$$

Обозначим $f = f_2 - f_1 \alpha^{-1} \gamma$, где $\gamma = [\mathbf{x}_n f_2]$. Из (7) и (8) следует:

$$[\mathbf{x}_2 f] = \ldots = [\mathbf{x}_{n-1} f] = 0$$

и, кроме того,

$$[\mathbf{x}_1 f] = [\mathbf{x}_1 f_2] - [\mathbf{x}_1 f_1] \alpha^{-1} \gamma = (1 + \alpha^{-1}\gamma) - \alpha^{-1}\gamma = 1, \quad [\mathbf{x}_n f] = 0.$$

2.3.1. ЛЕММА. *Пространство $A^*$ тогда и только тогда не содержит собственных $t$-подпространств, когда ранг $A$ конечен.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_\nu\}_{\nu \in N}$ — какой-либо базис пространства $A$, $B^*$ — подпространство $A^*$ с базисом $\{f_\nu\}_{\nu \in N}$, где $[\mathbf{e}_\nu f_\nu] = 1$ и $[\mathbf{e}_\mu f_\nu] = 0$ при $\mu \neq \nu$. $B^*$ является $t$-подпространством $A^*$, причем

$$r(B^*) = r(A).$$

$B^* = A^*$ тогда и только тогда, когда $r(A)$ конечен, так как только в этом случае $r(A^*) = r(A)$ [см. ([5])]. Если $r(A)$ конечен и $C^*$ — произвольное $t$-подпространство $A^*$, то, по лемме 2.3, $B^* \subseteq C^*$ и, значит, $C^* = A^*$.

2.4. Пусть $I$ — произвольное непустое подмножество $I_A$ (см. 2.1, 2.2). Из 1.3, 2.2, 2.2.1 следует, что ненулевыми правыми идеалами полугруппы $(F, A, A^*)$ являются полугруппы $R(I) = S(\mathfrak{M}F,\ I,\ \Lambda_A,\ [\mathbf{e}_\varkappa f_i])$ и только они. Обозначим через $IF$ множество всех форм вида $f_i \alpha$, где $i \in I$, $\alpha \in F$, через $A^*(I)$ — подпространство пространства $A^*$, порожденное всеми формами из $IF$.

ЛЕММА. *Пусть $R(I)$ — правый идеал полугруппы $(F, A, A^*)$. Следующие предложения эквивалентны:* 1) *$R(I)$ вполне прост,* 2) *$R(I)$ транзитивен,* 3) *$A^*(I)$ является $t$-подпространством $A^*$.*

Доказательство. Пусть $R(I)$ вполне прост, $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{e}_\varkappa$, $\mathbf{y} = \beta \mathbf{e}_\lambda$ — любые точки из $A$, $\mathbf{x} \neq 0$. В силу п. 1.3, найдется такой индекс $i \in I$, что $p_{\varkappa i} \neq 0$. Тогда

$$a = (p_{\varkappa i}^{-1} \alpha^{-1} \beta,\ i\lambda)' \in R(I).$$

Из (6) следует, что $\mathbf{x}a = \mathbf{y}$, $R(I)$ транзитивен, и из 1) вытекает 2).

Пусть теперь $R(I)$ транзитивен, $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{e}_\lambda$ — любая точка из $A$. Тогда найдется такой элемент $a \in R(I)$, что $\mathbf{x}a = \mathbf{e}_\lambda$. Из (6) и 2.2.1 следует, что

$$a = (\gamma,\ i\lambda)', \quad \mathbf{x}a = [\mathbf{x},\ f_i\gamma]\,\mathbf{e}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda \text{ и } [\mathbf{x},\ f_i\gamma] = 1,$$

где $i \in I$. Таким образом, $A^*(I)$ является $t$-подпространством $A^*$; из 2) вытекает 3).

Наконец, пусть $A^*(I)$ — $t$-подпространство $A^*$, $\lambda$ — любой индекс из $\Lambda$. Если бы $[\mathbf{e}_\lambda f_i]=0$ для всех $i \in I$, то $[\mathbf{e}_\lambda f]=0$ для всех $f \in A^*(I)$. Следовательно, существует индекс $i \in I$, для которого $[\mathbf{e}_\lambda f_i] \neq 0$, и, в силу 2.2 и 1.3, из 3) следует 1).

ТЕОРЕМА. *Всякая транзитивная подполугруппа $S \subseteq (F, A, A^*)$ является правым идеалом полугруппы $(F, A, A^*)$.*

Доказательство. Пусть $(\gamma, i\varkappa)'$ — любой ненулевой элемент из $S$. Для любых $\alpha \in F$, $\lambda \in \Lambda$ найдется элемент $s \in S$ такой, что

$$(\gamma \mathbf{e}_\varkappa) s = \alpha \mathbf{e}_\lambda.$$

Тогда $(\gamma, i\varkappa)' s = (\alpha, i\lambda)' \in S$ (см. 2.2, 2.2.1) и $R_i \subseteq S$ (см. 1.3). Таким образом, $S$ является объединением некоторого множества идеалов $R_i$, т. е. правым идеалом $(F, A, A^*)$.

2.5. ЛЕММА. $P_0(F, A) = \mathfrak{P}(F, A, A^*)$ (см. 1.5, 1.8).

Доказательство. Пусть $c$ — любой эндоморфизм из $P_0(F, A)$, $\mathbf{h}_r = \alpha_r \mathbf{e}_{\lambda_r}$ $(r=1, 2, \ldots, n)$ — базис пространства $Ac$. Для любого элемента $\mathbf{x} \in A$ имеем:

$$\mathbf{x}c = \sum_{r=1}^{n} \alpha_r \mathbf{h}_r. \tag{9}$$

Из (9) при $r = 1, 2, \ldots, n$ следует

$$\mathbf{x} c a_{\lambda_r \lambda_r} = \alpha_r \mathbf{h}_r.$$

(см. 2.2). Вместе с (9) это дает:

$$\mathbf{x}c = \sum_{r-1}^{n} \mathbf{x} c a_{\lambda_r \lambda_r},$$

т. е.

$$c = \sum_{r=1}^{n} c a_{\lambda_r \lambda_r}.$$

Отсюда и из того, что $c a_{\lambda_r \lambda_r} \in (F, A, A^*)$, выводим:

$$c \in \mathfrak{P}(F, A, A^*).$$

2.6. ЛЕММА. *Пусть $I \subseteq I_A$, $IF = A^*(I)$. Каждый ненулевой элемент кольца $\mathfrak{P}R(I)$ можно представить в виде*

$$c = \sum_{r=1}^{n} (\alpha_r, i_r \varkappa_r)', \quad \alpha_r \neq 0, \quad i_r \in I, \tag{10}$$

*где все $\mathbf{e}_{\varkappa_r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ линейно независимы.*

Доказательство. Каждый ненулевой элемент $c \in \mathfrak{P}R(I)$ имеет, в силу 1.5, вид (10), где точки $\mathbf{e}_{\varkappa_r}$ могут быть, вообще говоря, линейно зависимыми. Если найдется такой индекс $r$, что

$$\mathbf{e}_{\varkappa_r} = \sum_{r<k} \beta_k \mathbf{e}_{\varkappa_k},$$

то для любого $\mathbf{x} \in A$, в силу 2.2.1 и (6),

$$\mathbf{x}(\alpha_r, i_r \varkappa_r)' = [\mathbf{x} f_{i_r} \alpha_r] \mathbf{e}_{\varkappa_r} = \sum_{k<r} [\mathbf{x}, f_{i_r} \alpha_r \beta_k] \mathbf{e}_{\varkappa_k} = \mathbf{x} \sum_{k<r} (\alpha_r \beta_k, i_r \varkappa_k)',$$

т. е.

$$(\alpha_r, i_r \varkappa_r)' = \sum_{k<r} (\alpha_r \beta_k, i_r \varkappa_k)'.$$

Повторяя это преобразование нужное число раз, мы снова придем к выражению для $c$ типа (10), но различные точки $e_{\varkappa_r}$ будут в нем уже линейно независимыми. Если при этом окажется, что $\varkappa_r = \varkappa_k$ при $r \neq k$, то

$$\mathbf{x}\{(\alpha_r, i_r\varkappa_r)' + (\alpha_k, i_k\varkappa_k)'\} = [\mathbf{x}, f_{i_r}\alpha_r + f_{i_k}\alpha_k]\, e_{\varkappa_r} \quad (\mathbf{x} \in A).$$

Так как $IF$ — подпространство $A^*$, то найдется такой индекс $i \in I$, что

$$f_{i_r}\alpha_r + f_{i_k}\alpha_k = f_i\alpha$$

и

$$(\alpha_r, i_r\varkappa_r)' + (\alpha_k, i_k\varkappa_k)' = (\alpha, i\varkappa)' \in R(I).$$

Используя эту замену необходимое число раз, получим для $c$ выражение типа (10), где все $e_{\varkappa_r}$ линейно независимы (в частности, различны) и $\alpha_r \neq 0$.

2.7. В дальнейшем особую роль будут играть те правые идеалы $R(I)$ полугруппы $(F, A, A^*)$, для которых $IF = A^*(I)$, причем $A_1^* = A^*(I)$ является $t$-подпространством пространства $A^*$. Мы будем обозначать их через $(F, A, A_1^*)$. Из 2.3.1 следует, что $(F, A, A^*)$ является единственной полугруппой типа $(F, A, A^*)$ в том, и только в том случае, когда ранг $A$ конечен.

Из 1.5 следует, что всякое подмножество $\mathfrak{P}R(I)$ является правым идеалом кольца $P_0(F, A)$.

ЛЕММА. *Всякий ненулевой правый идеал кольца* $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$ *имеет вид* $\mathfrak{P}R(I)$, *где* $IF = A^*(I) \subseteq A_1^*$.

Доказательство. Пусть $C$ — любой ненулевой правый идеал кольца $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$, $c$ — произвольный ненулевой элемент из $C$. Представим $c$ в виде (10), где все $e_{\varkappa_r}$ линейно независимы, $\alpha_r \neq 0$. Существует форма $f_i \in A_1^*$ такая, что

$$[e_{\varkappa_r} f_i] = \gamma_r \neq 0, \quad [e_{\varkappa_s} f_i] = 0 \text{ при } s \neq r.$$

Если $a_r = (\gamma_r^{-1}, i\varkappa_r)$, то

$$ca_r \neq 0, \quad ca_r = (\alpha_r, i_r\varkappa_r)' \in C \cap (F, A, A_1^*).$$

$C \cap (F, A, A_1^*)$ является ненулевым правым идеалом полугруппы $(F, A, A_1^*)$ и, в силу 1.3, 2.4, имеет вид $R(I)$, где $IF \subseteq A_1^*$ (см. 2.4).

Обозначим через $I_1$ множество всех индексов $i \in I_A$, для которых $f_i \in A^*(I)$. Из $I \subseteq I_1$ следует:

$$R(I) \subseteq R(I_1)$$

и

$$\mathfrak{P}R(I) \subseteq \mathfrak{P}R(I_1).$$

Пусть $i$ — любой индекс из $I_1$. Тогда

$$f_i = \sum_{r=1}^{n} f_{j_r}\gamma_r,$$

где $j_r \in I$, $\gamma_r \in F$. Для произвольной точки $\mathbf{x} \in A$ и любого элемента

$(\alpha, i\varkappa)' \in R(I_1)$ имеем:

$$\mathbf{x}(\alpha, i\varkappa)' = [\mathbf{x}/_i\alpha]\, \mathbf{e}_\varkappa = \left[\mathbf{x}, \sum_{r=1}^{n} j_{j_r}\gamma_r\alpha\right] \mathbf{e}_\varkappa = \mathbf{x}\sum_{r=1}^{n}(\gamma_r\alpha, j_r\varkappa)',$$

$$(\alpha, i\varkappa)' \in \mathfrak{P}R(I), \quad R(I_1) \subseteq \mathfrak{P}R(I)$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{P}R(I_1) \subseteq \mathfrak{P}R(I).$$

Вместе с обратным включением это дает:

$$\mathfrak{P}R(I) = \mathfrak{P}R(I_1).$$

Так как $ca_r \in R(I)$ для любого элемента $c \in C$, то

$$C \subseteq \mathfrak{P}R(I) = \mathfrak{P}R(I_1).$$

С другой стороны, $R(I) \subseteq C$, $\mathfrak{P}R(I) \subseteq C$ и $C = \mathfrak{P}R(I_1)$.

2.8. ТЕОРЕМА. *Правый идеал $P$ кольца $P_\nu(F, A)$ тогда и только тогда является простым кольцом, когда $P = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$.*

Доказательство. Из леммы п. 2.7 следует, что $P = \mathfrak{P}R(I)$, причем $IF = A_1^* = A^*(I)$ — подпространство $A^*$. Если $R(I_1) = (F, A, A_1^*)$ и $C$ — ненулевой двусторонний идеал $P$, то, по лемме 2.7, $C = \mathfrak{P}R(I_2)$, где $A_2^* = I_2F = A^*(I_2) \subseteq A_1^*$. Полугруппа $C \cap (F, A, A_1^*) = R(I_2)$ является ненулевым двусторонним идеалом вполне простой полугруппы $(F, A, A_1^*)$ (см. лемму 2.4). Из 1.3 следует, что

$$R(I_2) = (F, A, A_1^*), \quad C = \mathfrak{P}R(I_2) = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*) = P.$$

Не будучи нильпотентным, $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$ является простым кольцом.

Обратно, если $A_1^*$ не является $I$-подпространством, то, в силу 2.4, полугруппа $R(I)$ не вполне проста и найдется такой индекс $\lambda \in \Lambda$, что

$$p_{\lambda i} = [e_\lambda j_i] = 0$$

для любого $i \in I$. Тогда множество

$$L'_\lambda = \bigcup_{i \in I}(G, i\lambda)'$$

является собственным двусторонним идеалом кольца $P = \mathfrak{P}R(I)$ и $P$ не является простым.

2.9. Обозначим через $S_\nu = S_\nu(F, A)$ множество всех таких эндоморфизмов $a \in S(F, A)$, что $r(Aa) < \nu$, где $\nu$ — некоторое (конечное или бесконечное) кардинальное число. Так как

$$r(A\,ab) \leqslant r(Aa), \; r(A\,ab) \leqslant r(Ab)$$

для произвольных $a, b \in S(F, A)$, то все $S_\nu$ являются двусторонними идеалами полугруппы $S(F, A)$. В случае конечного $\nu$ $S_\nu$ не является идеалом кольца $P(F, A)$, так как может оказаться, что

$$r(Aa) < \nu, \quad r(Ab) < \nu, \quad r(A(a-b)) \geqslant \nu.$$

Нетрудно показать, что всякий ненулевой идеал полугруппы $S(F, A)$ совпадает с одним из идеалов $S_\nu$*. Если $r(A) < \nu$, то $S_\nu = S(F, A)$.

---

* Доказательство по сути содержится в книге Бэра [illegible]. Там правда, это утверждение доказывается для двусторонних идеалов кольца $P(F, A)$ при условии, что $\nu$ — бесконечное кардинальное число.

2.10. Пусть $A_1^*$ — произвольное $t$-подпространство $A^*$. Обозначим через $P(F, A, A_1^*)$ множество всех $c \in P(F, A)$, для которых $A_1^* c^* \subseteq A_1^*$ (см. 1.10). Очевидно, что $P(F, A, A_1^*)$ является подкольцом кольца $P(F, A)$.

ТЕОРЕМА. *$P(F, A, A_1^*)$ является объединением всех подколец $P$ кольца $P(F, A)$, содержащих $(F, A, A_1^*)$ в качестве двустороннего идеала полугруппы $\mathfrak{M}P$.*

Доказательство. Пусть $k = (\alpha, i\lambda)'$ — любой элемент из $(F, A, A_1^*)$, $c$ — любой элемент из $P(F, A)$, $\mathbf{x}$ — произвольная точка из $A$. Из (6) следует, что

$$\mathbf{x}ck = [\mathbf{x}c, f_i\alpha]\mathbf{e}_\lambda = [\mathbf{x}, c^* f_i \alpha]\mathbf{e}_\lambda.$$

Таким образом, $c$ тогда и только тогда содержится в $P(F, A, A_1^*)$, когда $ck \in (F, A, A_1^*)$ при любом $k \in (F, A, A_1^*)$. Аналогично из (6) следует, что $kc \in (F, A, A_1^*)$ при любых $k \in (F, A, A_1^*)$, $c \in P(F, A)$.

2.10.1. Из 1.5 следует, что $P(F, A, A_1^*)$ является максимальным подкольцом кольца $P(F, A)$, содержащим $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$ в качестве идеала.

## § 3. Изоморфизмы колец и полугрупп линейных преобразований

3.1. Пусть $F$ и $H$ — два тела, $A = (F, A)$, $B = (H, B)$, $a$ — полулинейное преобразование $A$ на $B$. Отображение $\varphi_a$

$$p\varphi_a = a^{-1}pa \quad (p \in P(F, A)) \tag{11}$$

кольца $P(F, A)$ на $P(H, B)$ является, очевидно, изоморфизмом. Говорят, что $\varphi_a$ *индуцируется* полулинейным преобразованием $a$.

Отображение (11) является также изоморфизмом всякой подполугруппы или подкольца кольца $P(F, A)$ на некоторую подполугруппу или подкольцо кольца $P(H, B)$. Ниже (теоремы 3.3, 3.3.2, 3.5, 3.6, 3.7) мы покажем, что этими отображениями исчерпываются изоморфизмы ряда подполугрупп и подколец кольца $P(F, A)$ при $r(A) \geqslant 2$. Всюду в этом параграфе будем считать (не оговаривая этого особо), что $r(A) \geqslant 2$.

3.2. ЛЕММА. *Пусть $A = (F, A)$, $B = (H, B)$, $r(A) \geqslant 2$, $A_1^*$ — $t$-подпространство $A^*$* (см. 2.3), *$I$ — такое подмножество $I_B$* (см. 2.1), *что для любых линейно независимых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B$ найдется индекс $i \in I$, удовлетворяющий условию $[\mathbf{x}_1 f_i] \neq 0$, $[\mathbf{x}_2 f_i] = 0$; $\psi$ — изоморфизм $\mathfrak{M}F$ на $\mathfrak{M}H$, $a$ и $b$ — взаимно однозначные отображения $A$ на $B$ и $A_1^*$ на $IH$ такие, что при любых $\mathbf{x} \in A$, $f \in A_1^*$*

$$[\mathbf{x}a, fb] = [\mathbf{x}, f]\psi. \tag{12}$$

*Тогда $\psi$ является изоморфизмом тела $F$ на тело $H$, $a$ — полулинейным преобразованием $a_\psi$ пространства $A$ на $B$, $IH$ — $t$-подпространством пространства $B^*$; $fb = fa^*$ для любой формы $f \in A_1^*$* (см. 1.10).

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — любые линейно независимые точки из $A$. Покажем, что точки $\mathbf{x}_1 a, \mathbf{x}_2 a, \ldots, \mathbf{x}_n a$ также линейно независимы. В самом деле, найдутся формы $f_1, f_2, \ldots, f_n \in A_1^*$ такие, что

$$[\mathbf{x}_k f_k] = 1, \quad [\mathbf{x}_i f_k] = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Тогда из (12) будет следовать, что

$$[\mathbf{x}_k a, f_k b] = 1, \quad [\mathbf{x}_i a, f_k b] = 0.$$

Допустив, что

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1 a) + \lambda_2(\mathbf{x}_2 a) + \cdots + \lambda_n(\mathbf{x}_n a) = 0,$$

получим при $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\lambda_k = \lambda_k [\mathbf{x}_k a, f_k b] = \sum_{i=1}^{n} [\lambda_i(\mathbf{x}_i a), f_k b] = [0, f_k b] = 0.$$

Аналогично, если $\mathbf{x}_1 a$, $\mathbf{x}_2 a$ — любые линейно независимые точки из $B$, то пайдем такие формы $f_1 b$, $f_2 b \in IH$, что

$$[\mathbf{x}_1 f_1] = [\mathbf{x}_2 f_2] = 1, \quad [\mathbf{x}_1 f_2] = [\mathbf{x}_2 f_1] = 0,$$

и покажем, что $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ линейно независимы. В частности, $\mathbf{x}a = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = 0$.

Если $\mathbf{x}$ — любая точка из $A \setminus 0$, $\lambda$ — любое число из $F \setminus 0$, то $\mathbf{x}a$ и $(\lambda\mathbf{x})a$ являются ненулевыми линейно зависимыми точками из $B$ и

$$(\lambda\mathbf{x})a = \mu(\mathbf{x}a)$$

при некотором $\mu \in H$. Из (12), выбрав $f \in A_1^*$ так, что $[\mathbf{x}f] = [\mathbf{x}a, fb] = 1$, получим:

$$\begin{aligned}\mu = \mu[\mathbf{x}a, fb] = [\mu(\mathbf{x}a), fb] = [(\lambda\mathbf{x})a, fb] = \\ = [\lambda\mathbf{x}, f]\psi = \lambda\psi[\mathbf{x}, f]\psi = \lambda\psi, \quad (\lambda\mathbf{x})a = \lambda\psi(\mathbf{x}a).\end{aligned} \tag{13}$$

В силу $0a = 0$, $0\psi = 0$, формула (13) остается справедливой при $\lambda = 0$ или $\mathbf{x} = 0$.

Пусть теперь $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — любые линейно независимые точки из $A$. Тогда точки $\mathbf{x}a$, $\mathbf{y}a$, $\mathbf{x}a + \mathbf{y}a$ линейно зависимы. Следовательно, и

$$(\mathbf{x}a)a^{-1} = \mathbf{x}, \quad (\mathbf{y}a)a^{-1} = \mathbf{y}, \quad (\mathbf{x}a + \mathbf{y}a)a^{-1}$$

линейно зависимы. Так как $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ линейно независимы, то

$$(\mathbf{x}a + \mathbf{y}a)a^{-1} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}$$

при некоторых $\lambda, \mu \in F$ или

$$\mathbf{x}a + \mathbf{y}a = (\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y})a.$$

Отсюда, пользуясь (12), получим:

$$\begin{aligned}[\mathbf{x}, f]\psi + [\mathbf{y}, f]\psi = [\mathbf{x}a, fb] + [\mathbf{y}a, fb] = [\mathbf{x}a + \mathbf{y}a, fb] = \\ = [(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y})a, fb] = [\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, f]\psi = (\lambda[\mathbf{x}, f] + \mu[\mathbf{y}, f])\psi.\end{aligned}$$

Выбрав $f \in A_1^*$ так, что $[\mathbf{x}f] = 1$, $[\mathbf{y}f] = 0$, найдем: $\lambda\psi = 1$, $\lambda = 1$ и аналогично, $\mu = 1$. Следовательно,

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})a = \mathbf{x}a + \mathbf{y}a \tag{14}$$

для любых линейно независимых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$. Если $\mathbf{x} = 0$ или $\mathbf{y} = 0$, то соотношение (14) тривиально. Если же точки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ линейно зависимы, то выберем произвольную точку $\mathbf{z} \in A$ так, чтобы $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ были линейно независимы. Тогда $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y} + \mathbf{z}$ линейно независимы; $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ линейно независимы или $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 0$. В силу (14),

$$\begin{aligned}\mathbf{x}a + \mathbf{y}a + \mathbf{z}a = \mathbf{x}a + (\mathbf{y} + \mathbf{z})a = \{\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})\}a = \\ = \{(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}\}a = (\mathbf{x} + \mathbf{y})a + \mathbf{z}a,\end{aligned}$$

откуда следует справедливость равенства (14) для линейно зависимых точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Пусть $\lambda$, $\mu$ — любые числа из $F$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — любые линейно независимые точки из $A$, $f_1$ и $f_2$ — такие формы из $A_1^*$, что

$$[\mathbf{x}f_1] = [\mathbf{y}f_2] = 1, \quad [\mathbf{x}f_2] = [\mathbf{y}f_1] = 0.$$

Обозначив $f = f_1\lambda + f_2\mu$, получим:

$$[\mathbf{x}f] = \lambda, \quad [\mathbf{y}f] = \mu,$$

и, в силу (12), (14),

$$(\lambda + \mu)\psi = ([\mathbf{x}f] + [\mathbf{y}f])\psi = [\mathbf{x} + \mathbf{y}, f]\psi =$$
$$= [(\mathbf{x} + \mathbf{y})a, fb] = [\mathbf{x}a, fb] + [\mathbf{y}a, fb] = \lambda\psi + \mu\psi,$$

т. е. $\psi$ является изоморфизмом тела $F$. Из (13) и (14) следует тогда, что $a$ есть полулинейное преобразование $a_\psi$ пространства $A$ на $B$. Из (4) и (12) для любых $\mathbf{x}a \in B$, $fb \in IH$ выводим:

$$[\mathbf{x}a, fb] = [\mathbf{x}a, fa^*]$$

и, следовательно, $fb = fa^*$ для любой формы $f \in A_1^*$. Так как $A_1^*$ — $t$-подпространство $A^*$, то и $A_1^*a^* = IH$ также является $t$-подпространством.

3.3. ТЕОРЕМА *. *Пусть* $A = (F, A)$, $B = (H, B)$, $A_1^*$ — *$t$-подпространство* $A^*$, $I \subseteq I_B$. *Полугруппы* $K_1 = (F, A, A_1^*)$ *и* $K_2 = S(\mathfrak{M}H, I, \Lambda_B, [e_\varkappa f_i])$ (см. 2.4, 2.1, 2.2.1) *изоморфны тогда и только тогда, когда существует такое полулинейное преобразование* $a$ *пространства* $A$ *на* $B$, *что* $A_1^*a^* = IH$ (*в частности,* $IH$ *является $t$-подпространством* $B_1^*$ *пространства* $B^*$, $K_2 = (H, B, B_1^*)$). *Всякий изоморфизм полугруппы* $K_1$ *на* $K_2$ *имеет вид* (11), *где* $p \in K_1$, $a$ — *такое полулинейное преобразование* $A$ *на* $B$, *что* $A_1^*a^* = B_1^*$. $\varphi_a = \varphi_b$ *тогда и только тогда, когда* $b = \lambda a$ $(\lambda \in F)$ **.

Доказательство. Достаточность условий теоремы легко проверяется непосредственно. Докажем их необходимость, используя тот же метод, что и в статье ([7]). Пусть $\theta_1$ и $\theta_2$ — изоморфизмы полугрупп $K_1$ и $K_2$ на полугруппы $S_1 = S(\mathfrak{M}F, I_1, \Lambda_A[\mathbf{e}_\varkappa f_i])$ и $S_2 = S(\mathfrak{M}H, I_2, \Lambda_B, [\mathbf{e}'_{\varkappa'} f'_{i'}])$, где $I_1F = A_1^*$, $I_2 \subseteq I_B$, $i \in I_1$, $\varkappa \in \Lambda_A$, $i' \in I_2, \varkappa' \in \Lambda_B$; $\varphi$ — произвольный изоморфизм $K_1$ на $K_2$. Как и в ([7]), можно считать, что изоморфизм $\varphi_1 = \theta_1^{-1}\varphi\theta_2$ полугруппы $S_1$ на $S_2$ имеет вид (2), где $\psi$ — изоморфизм $\mathfrak{M}F$ на $\mathfrak{M}H$, $i \to i'$, $\lambda \to \lambda'$ — взаимно однозначные отображения $I_1$ на $I_2$ и $\Lambda_A$ на $\Lambda_B$, причем

$$[\mathbf{e}'_{\lambda'}, f'_{i'}] = [\mathbf{e}_\lambda, f_i]\psi. \tag{15}$$

Определим взаимно однозначные отображения $a$ и $b$ пространств $A$ и $A_1^*$ на $B$ и $IH$:

$$(\alpha\mathbf{e}_\lambda)a = \alpha\psi\mathbf{e}'_{\lambda'}, \qquad (f'_i\beta)b = f'_{i'}\cdot\beta\psi. \tag{16}$$

В силу (15) и (16), для отображений $a$, $b$ выполняется соотношение (12).

* Для пространств конечного ранга частный случай см. в работе ([7]).

** $\mathbf{x}(\lambda a) = (\lambda\mathbf{x})a$; $a$ и $\lambda a$ индуцируют одно и то же проективное отображение $A$ на $B$ [см. ([5])].

Пусть $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{e}'_{\varkappa'}$, $\mathbf{y} = \beta \mathbf{e}'_{\lambda'}$ — любые линейно независимые точки из $B$. Тогда $\varkappa' \neq \lambda'$. Так как $A_1^*$ — $t$-подпространство $A^*$, то найдется индекс $i \in I_1$ такой, что

$$p_{\varkappa i} = [\mathbf{e}_\varkappa f_i] \neq 0, \quad p_{\lambda i} = [\mathbf{e}_\lambda f_i] = 0.$$

Из (2) следует, что

$$q'_{\varkappa' i'} = [\mathbf{e}'_{\varkappa'} f'_{i'}] = \gamma \neq 0, \quad q'_{\lambda' i'} = [\mathbf{e}'_{\lambda'} f'_{i'}] = 0.$$

Обозначив

$$f = f'_i \gamma^{-1} \alpha^{-1},$$

получим:

$$[\mathbf{x} f] = 1, \quad [\mathbf{y} f] = 0.$$

Таким образом, отображения $a$ и $b$ удовлетворяют условиям леммы 3.2, из которой следует, что $\psi$ — изоморфизм $F$ на $H$, $a$—полулинейное преобразование $a_\psi$ и $fb = fa^*$ для любой формы $f \in A_1^*$. В частности,

$$\mathbf{e}'_{\lambda'} = \mathbf{e}_\lambda a, \quad f'_{i'} = f_i a^*$$

для любых $i \in I_1$, $\lambda \in \Lambda_A$.

Если $\mathbf{x}$ — любая точка из $B$, $p$ — любой элемент из $K_1$, $p\theta_1 = (\alpha, i\lambda)$, то из (2), (12), (16) имеем:

$$\mathbf{x}(p\varphi) = \mathbf{x}(p\,\theta_1\varphi_1\theta_2^{-1}) = \mathbf{x}\{(\alpha\psi, i'\lambda')\,\theta_2^{-1}\} = [\mathbf{x} f'_{i'}]\,\alpha\psi \mathbf{e}'_{\lambda'}\,[\mathbf{x}, f_i b]\cdot\alpha\psi\cdot(\mathbf{e}^\lambda a) =$$
$$= [\mathbf{x}a^{-1}, f_i\alpha]\,\psi\cdot(\mathbf{e}_\lambda a) = \{[\mathbf{x}a^{-1}, f_i\alpha]\,\mathbf{e}_\lambda\}\,a = \mathbf{x}(a^{-1}pa) = \mathbf{x}(p\,\varphi_a),$$
$$p\varphi = p\varphi_a, \quad \varphi = \varphi_a.$$

Пусть для любых $\mathbf{x} \in B$, $p = (\alpha, i\lambda)\,\theta_1 \in K$ и некоторых полулинейных преобразований $a, b$ пространства $A$ на $B$ имеет место равенство

$$\mathbf{x}(p\,\varphi_a) = \mathbf{x}(p\,\varphi_b),$$

т. е.

$$[\mathbf{x}a^{-1}, f_i\,\alpha]\,\mathbf{e}_\lambda a = [\mathbf{x}b^{-1}, f_i\,\alpha]\,\mathbf{e}_\lambda b.$$

Тогда при любом $\lambda \in \Lambda$ точки $\mathbf{e}_\lambda a, \mathbf{e}_\lambda b$ коллинеарны и полулинейные преобразования $a$, $b$ индуцируют одно и то же проективное отображение $A$ на $B$ [см. ([5])]. Поэтому $b = \lambda a$, где $\lambda \in F$.

Из теоремы 3.3 вытекают следующие теоремы.

3.3.1. ТЕОРЕМА. *Всякий автоморфизм полугруппы* $(F, A, A_1^*)$ *имеет вид* (11), *где* $a$ — *такое полулинейное преобразование пространства* $A$ *на себя, что* $A_1^* a^* = A_1^*$.

3.3.2. ТЕОРЕМА *. *Полугруппы* $(F, A, A^*)$ *и* $(H, B, B^*)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны пространства* $A$ *и* $B$. *Всякий изоморфизм* $(F, A, A^*)$ *на* $(H, B, B^*)$ *имеет вид* (11).

3.3.3. ТЕОРЕМА *. *Всякий автоморфизм полугруппы* $(F, A, A^*)$ *имеет вид* (11), *где* $a$ — *полулинейное преобразование* $A$ *на себя.*

3.4. ЛЕММА **. *Полугруппа* $(F, A, A^*)$ *не изоморфна никакому собственному правому идеалу полугруппы* $(H, B, B^*)$ (см. 2.4).

---

* Для пространств конечного ранга см. ([7]), ([8]).
** Лемма тривиально проверяется и при $r(A) = 1$.

Доказательство. Пусть $\varphi$ — изоморфизм полугруппы $(F, A, A^*)$ на правый идеал $R(I)$ полугруппы $(H, B, B^*)$. Из теоремы 3.3 следует, что $\varphi$ индуцируется полулинейным преобразованием $a$ пространства $A$ на $B$ таким, что

$$A^*a^* = IH.$$

По определению преобразования $a^*$ (см. 1.10),

$$A^*a^* = B^*,$$

откуда

$$IH = B^*, \quad R(I) = (H, B, B^*).$$

3.5. ТЕОРЕМА. *Пусть* $A = (F, A)$, $B = (H, B)$, $S_A$ *и* $S_B$ — *подполугруппы* $S(F, A)$ *и* $S(H, B)$, *содержащие соответственно* $K_1 = (F, A, A_1^*)$ *и* $K_2 = (H, B, B_1^*)$ *в качестве двустороннего идеала. Всякий изоморфизм* $\varphi$ $S_A$ *на* $S_B$ *имеет вид* (11), *причем* $K_1\varphi = K_2$.

Доказательство. Пусть $C$ — любой ненулевой двусторонний идеал полугруппы $S_A$, $c$ — произвольный элемент из $C \setminus 0$. Тогда найдутся элемент $a \in K_1$ и точки $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A \setminus 0$ такие, что $\mathbf{x}c \neq 0$, $\mathbf{y}a = \mathbf{x}$. Следовательно, $\mathbf{y}ac \neq 0$, $ac \in (C \cap K_1) \setminus 0$ и, так как полугруппа $K_1$ $i$-проста (см. 2.4, 2.7), $C \cap K_1 = K_1$, $K_1 \subseteq C$, $K_1$ является пересечением всех ненулевых идеалов полугруппы $S_A$. Поэтому $K_1\varphi = K_2$ для любого изоморфизма $\varphi$ полугруппы $S_A$ на $S_B$. Из теоремы 3.3 следует, что

$$K_1\varphi = K_1 \cdot \varphi_a.$$

Но тогда $\varphi_a^{-1}\varphi = \varphi_1$ является изоморфизмом $S_A$ в $S(F, A)$, индуцирующим тождественный автоморфизм на $K_1$.

Если $(\alpha, i\lambda)'$ — любой элемент из $K_1$, $c$ — любой элемент из $S_A$, то $(\alpha, i\lambda)' c \in K_1$ и

$$(\alpha, i\lambda)' c = \{(\alpha, i\lambda)' c\} \varphi_1 = (a, i\lambda)' \varphi_1 \cdot c\varphi_1 = (\alpha, i\lambda)' c\varphi_1.$$

Отсюда для любой точки $\mathbf{x} \in A$ имеем:

$$\mathbf{x}(\alpha, i\lambda)'c = \mathbf{x}(\alpha, i\lambda)' c\varphi_1, \quad [\mathbf{x}, f_i\alpha]\,\mathbf{e}_\lambda c = \{[\mathbf{x}, f_i\alpha]\,\mathbf{e}_\lambda\} c\varphi_1.$$

Выбрав $f_i \in A_1^*$ так, чтобы $[\mathbf{x}, f_i] \neq 0$, получим:

$$(\alpha\mathbf{e}_\lambda) c = (\alpha\, \mathbf{e}_\lambda) c\varphi_1,$$

откуда следует: $c\varphi_1 = c$, $\varphi_1$ — тождественный автоморфизм полугруппы $S_A$, $\varphi = \varphi_a$.

3.5.1. Из 3.5, 3.1 следует

ТЕОРЕМА. *При условиях теоремы* 3.5 *всякий изоморфизм полугруппы* $S_A$ *на* $S_B$ *может быть однозначно продолжен до изоморфизма полугруппы* $S(F, A)$ *на полугруппу* $S(H, B)$.

В частности, взяв $A = B$, $S_A = K_1$, $S_B = K_2$, получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Всякий изоморфизм полугруппы* $(F, A, A_1^*)$ *на* $(F, A, A_2^*)$ *можно однозначно продолжить до автоморфизма полугруппы* $S(F, A)$.

3.6. Всякое полулинейное преобразование $a$ пространства $A$ на $B$ сохраняет ранг любого подпространства [см. ([5])]. Так как $(F, A, A^*) \subseteq \subseteq S_\nu(F, A)$ при любом $\nu$ (см. 2.9), то из теоремы 3.5 следует

ТЕОРЕМА *. *Полугруппы* $S_\nu(F, A)$ *и* $S_\mu(H, B)$ (*в частности*, $S(F, A)$ *и* $S(H, B)$) *изоморфны тогда и только тогда, когда* $A$ *изоморфно* $B$ *и* $\mu = \nu$. *Всякий изоморфизм полугруппы* $S_\nu(F, A)$ *на* $S_\nu(H, B)$ *имеет вид* (11). *В частности, всякий автоморфизм* $S_\nu(F, A)$ *имеет вид* (11).

3.7. Всякий изоморфизм кольца $P$ является и изоморфизмом полугруппы $\mathfrak{M}P$ (см. 1.5). С другой стороны, из 3.5 и 3.1 следует

ТЕОРЕМА. *Пусть* $P$ — *произвольное подкольцо кольца* $P(F, A)$, *содержащее некоторую полугруппу* $(F, A, A_1^*)$ *в качестве двустороннего идеала полугруппы* $\mathfrak{M}P$, $\varphi$ — *изоморфизм* $P$ *в кольцо* $P(H, B)$, *при котором* $(F, A, A_1^*)\varphi = (H, B, B_1^*)$. *Тогда* $\varphi$ *имеет вид* (11).

Эта теорема дает, например, возможность найти все изоморфизмы колец $P(F, A)$, $P_\nu(F, A)$ [см. ([5])], $P(F, A, A_1^*)$, $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$ (см. § 5, 6).

## § 4. Структура $i$-простых полугрупп, содержащих минимальные левые идеалы

Настоящий параграф носит вспомогательный характер. Его результаты будут использованы в § 5.

4.1. Если $i$-простая полугруппа не является полупростой (см. 1.2, 1.6), то легко показать, что она изоморфна полугруппе $V = \{0, a\}$, $a^2 = 0$ [см. ([2]), ([10])]. В дальнейшем, говоря об $i$-простой полугруппе $S$, мы будем считать, что $S \neq V$, $S \neq 0$ и, следовательно, $S$ является полупростой.

4.2. ЛЕММА. *Пусть* $S$ — *полупростая полугруппа (или кольцо),* $L$ — *ее левый идеал.* $L$ *тогда и только тогда является минимальным левым идеалом* $S$, *когда* $Sc = L$ *для любого элемента* $c \in L \setminus 0$.

Доказательство. Если $Sc = 0$, то $S(cS) = 0$, $(cS)^2 = 0$ и $cS$ (или $0 \cup c$) было бы ненулевым нильпотентным идеалом $S$. Следовательно, $Sc$ является ненулевым левым идеалом $S$, содержащимся в $L$. $L$ тогда и только тогда является минимальным левым идеалом $S$, когда $Sc = L$.

4.3. ЛЕММА. *Пусть* $S$ — *полупростая полугруппа, содержащая минимальный левый идеал* $L$, $a \in S$, $c \in L \setminus 0$. *Если* $ca = 0$, *то и* $La = 0$.

Доказательство. Из $ca = 0$ и леммы 4.2 следует:

$$La = Sca = 0.$$

4.4 ЛЕММА [см. ([3])]. *Пусть* $L$ — *минимальный левый идеал полугруппы* $S$, $c$ — *любой элемент из* $S$. *Тогда либо* $Lc = 0$, *либо* $Lc$ *также является минимальным левым идеалом полугруппы* $S$.

4.5. ЛЕММА [см. ([3])]. *Пусть* $M$ — *минимальный двусторонний идеал полупростой полугруппы* $S$. *Если* $M$ *содержит хотя бы один минимальный левый идеал полугруппы* $S$, *то всякий левый идеал полугруппы* $M$ *является левым идеалом полугруппы* $S$.

4.6. Пусть $S$ — полупростая полугруппа, содержащая минимальный левый идеал $L$. По лемме 4.4, полугруппа $K = LS$ является объединением некоторого множества минимальных левых идеалов полугруппы $S$.

* Для пространств конечного ранга см. ([7]), ([8]). Аналогичное предложение можно сформулировать для полугрупп $S_\nu(F, A, A_1^*)$ (см. 6.1).

Каждому из них взаимно однозначно сопоставим некоторый индекс $\lambda$ и обозначим его через $L_\lambda$. Пусть $\Lambda$ — множество всех таких индексов $\lambda$. Тогда $L_\varkappa \cap L_\lambda = 0$ при $\varkappa \neq \lambda$ и

$$K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda. \tag{17}$$

ЛЕММА. *При любых* $\varkappa, \lambda \in \Lambda$ *существует такой элемент* $a_\lambda \in L_\lambda$, *что* $L_\varkappa a_\lambda = L_\lambda$.

Доказательство. Допустим сначала, что $LL_\varkappa = 0$. Из леммы 4.2 следует, что $L_\varkappa = SL_\varkappa$ и тогда мы имели бы:

$$LL_\varkappa = L(SL_\varkappa) = (LS)L_\varkappa = KL_\varkappa = 0,$$

в частности $L_\varkappa^2 = 0$, и $L_\varkappa$ был бы левым нильпотентным идеалом полугруппы $S$. Тогда $S$ содержала бы и некоторый двусторонний нильпотентный идеал [см. ([3])]. Аналогично, допустив, что $L_\varkappa L = 0$, мы имели бы

$$L_\varkappa K = L_\varkappa LS = 0, \quad L_\varkappa^2 = 0.$$

Следовательно, $L_\varkappa L \neq 0$. Из леммы 4.4 вытекает, что

$$LL_\varkappa = L_\varkappa, \quad L_\varkappa L = L.$$

Поэтому для любых $\varkappa, \lambda \in \Lambda$ имеем:

$$L_\varkappa L_\lambda = L_\varkappa (LL_\lambda) = (L_\varkappa L) L_\lambda = LL_\lambda = L_\lambda.$$

4.6.1. ЛЕММА. $K = LS$ *является i-простым двусторонним идеалом полугруппы* $S$.

Доказательство. По лемме 4.6, $L = L^2 \subset S$ и $K$ является ненулевым двусторонним идеалом полугруппы $S$. Допустим, что $K$ содержит идеал $A$ полугруппы $S$, и пусть $c$ — произвольный элемент из $A \setminus 0$. Из (17) следует, что $c$ содержится в каком-то из левых идеалов $L_\varkappa$. Но тогда $A$ содержит и все множество $L_\varkappa = Sc$ (см. лемму 4.2). По лемме 4.6, при любом $\lambda \in \Lambda$ имеем:

$$L_\lambda = L_\varkappa L_\lambda \subset AL_\lambda \subseteq A, \quad K \subseteq A, \quad K = A.$$

4.7. Пусть $I = \{i, j, k, \ldots\}$ и $\Lambda = \{\varkappa, \lambda, \mu, \ldots\}$ — два множества индексов; каждому индексу $i \in I$ поставим в соответствие непустое множество $\Lambda_i \subseteq \Lambda$ так, что

1) из $\Lambda_i = \Lambda_j$ следует $i = j$;

2) каждый индекс $\lambda \in \Lambda$ содержится хотя бы в одном подмножестве $\Lambda_i$.

Пусть, далее, $K$ — полугруппа с нулем 0, являющаяся объединением нуля и попарно не пересекающихся подмножеств $A_{i\lambda}$ $(i \in I, \lambda \in \Lambda)$:

$$K \setminus 0 = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{i\lambda},$$

причем для любого элемента $a_{j\mu} \in A_{j\mu}$

$$A_{i\lambda} a_{j\mu} = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \notin \Lambda_j, \\ A_{i\mu}, & \text{если } \lambda \in \Lambda_j. \end{cases} \tag{18}$$

Нетрудно проверить, что такая полугруппа $i$-проста и что каждое ее подмножество

$$L_\lambda = 0 \cup (\bigcup_{i \in I} A_{i\lambda})$$

является минимальным левым идеалом полугруппы $K$. Если $\lambda \in \Lambda_i$, то $A_{i\lambda}$ является полугруппой с левым делением (см. 1.11).

4.8. ТЕОРЕМА. *Всякая i-простая полугруппа S с нулем, содержащая минимальный левый идеал L, изоморфна некоторой полугруппе K п.* 4.7.

Доказательство. Из п. 4.6 следует, что $S = LS$ имеет вид (17). Пусть $c$ — какой-нибудь ненулевой элемент из $L = L_1$. По лемме 4.2, $Sc = L_1$. Из леммы 4.4 следует, что элементу $c$ однозначно соответствует непустое подмножество $\Lambda_i \subseteq \Lambda$ такое, что

$$L_\varkappa c = L_1, \text{ если } \varkappa \in \Lambda_i, \quad L_\varkappa c = 0, \text{ если } \varkappa \notin \Lambda_i. \tag{19}$$

Обозначим через $I$ множество всех таких индексов $i$, а через $A_{i1}$ — множество всех элементов $c \in L_1$, которым сопоставляется одно и то же подмножество $\Lambda_i \subseteq \Lambda$. Тогда

$$L_1 \setminus 0 = \bigcup_{i \in I} A_{i1}. \tag{20}$$

По лемме п. 4.6, при любом $\lambda \in \Lambda$ существует такой элемент $a_\lambda \in L_\lambda$, что

$$L_1 a_\lambda = L_\lambda.$$

Допустим, что при некоторых $x_i \in A_{i1}$, $x_j \in A_{j1}$ $(i \neq j)$ имеет место равенство

$$x_i a_\lambda = x_j a_\lambda.$$

Если $\varkappa \in \Lambda_i \setminus \Lambda_j$ (аналогично рассуждаем в случае, когда $\varkappa \in \Lambda_j, \setminus \Lambda_i$ то, в силу (19),

$$L_\lambda = L_1 a_\lambda = (L_\varkappa x_i) a_\lambda = (L_\varkappa x_j) a_\lambda = 0.$$

Обозначим $A_{i1} a_\lambda = A_{i\lambda}$. Тогда $A_{i\lambda} \cap A_{j\lambda} = \emptyset$ при $i \neq j$; из (20) и леммы 4.3 следует:

$$L_\lambda \setminus 0 = (L_1 \setminus 0) a_\lambda = (\bigcup_{i \in I} A_{i1}) a_\lambda = \bigcup_{i \in I} A_{i\lambda}.$$

Пусть $\varkappa$ — любой индекс из $\Lambda$, $x_{i\lambda} = z_1 a_\lambda$ — произвольный элемент из $A_{i\lambda}$. Тогда $z_1 \in A_{i1}$ и если $\varkappa \notin \Lambda_i$, то при любом $j \in I$ из (19) имеем:

$$A_{j\varkappa} x_{i\lambda} = A_{j\varkappa} z_1 a_\lambda \subset L_\varkappa z_1 a_\lambda = 0.$$

Если же $\varkappa \in \Lambda_i$, то существует такой элемент $a_\varkappa \in L_\varkappa$, что $A_{j\varkappa} = A_{j1} a_\varkappa$. Тогда

$$L_1 a_\varkappa = L_\varkappa, \quad L_\varkappa x_{i\lambda} = L_\varkappa z_1 a_\lambda = L_1 a_\lambda = L_\lambda$$

и, следовательно,

$$L_1 a_\varkappa x_{i\lambda} = L_\lambda.$$

По определению множества $A_{i\lambda}$,

$$A_{j\varkappa} x_{i\lambda} = (A_{j1} a_\varkappa) x_{i\lambda} = A_{j1} (a_\varkappa x_{i\lambda}) = A_{j\lambda}.$$

Тем самым доказана справедливость соотношения (18) *.

---

* По существу теорема 4.8 доказана в работе ([10]). Для доказательства теоремы 5.2 достаточно более слабое утверждение: при $\varkappa \in \Lambda_1$ множество $A_{1\varkappa}$ является полугруппой с левым делением. Однако теорема 4.8 представляет интерес для исследования полугрупп с минимальными левыми идеалами. С ее помощью можно, например, определить структуру полугрупп с минимальными левыми идеалами, не обладающих нетривиальными гомоморфизмами (другим способом это сделано в работе ([9])), или вполне простых полугрупп (см. 1.3).

4.9. Пусть $A$ — произвольное подмножество полугруппы $S$ с нулем 0. Обозначим через $(A)_l$ множество всех таких $x \in S$, что $xA = 0$, через $(A)_r$ — множество всех таких $x \in S$, что $Ax = 0$.

ЛЕММА. *Пусть $L$ — левый идеал полугруппы $S$. Тогда $(L)_l$ является двусторонним идеалом $S$.*

Действительно,

$$S(L)_l L = S0 = 0, \quad (L)_l SL \subseteq (L)_l L = 0.$$

## § 5. Кольца с минимальными левыми идеалами

5.1 ЛЕММА. *Полупростое кольцо $P$ тогда и только тогда содержит минимальный левый идеал, когда полугруппа $\mathfrak{M}P$ содержит минимальный левый идеал. Минимальные левые идеалы полугруппы $\mathfrak{M}P$ и только они являются минимальными левыми идеалами кольца $P$.*

Доказательство. Полугруппа $\mathfrak{M}P$ полупроста: если бы $\mathfrak{M}P$ содержала ненулевой нильпотентный идеал $N$, то $\mathfrak{P}N$ было бы, по 1.5, ненулевым нильпотентным идеалом кольца $P$. Если $L$ — минимальный левый идеал кольца $P$ (полугруппы $\mathfrak{M}P$), то, по лемме 4.2, $L$ является минимальным левым идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P$ (кольца $P$).

5.2. ТЕОРЕМА. *Пусть $L$ — минимальный левый идеал полупростого кольца $P$. Тогда $K = LP$ является вполне простым идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P$;*

$$K = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (G, i\lambda). \tag{21}$$

*Каждое из множеств $(G, i\lambda)$ является подкольцом кольца $P$.*

Доказательство. Из леммы 5.1 следует, что $L$ является минимальным левым идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P$. По лемме 4.6.1, $K$ является $l$-простым двусторонним идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P$ и, по теореме 4.8, $K$ имеет структуру, описанную в п. 4.7. Пусть $\lambda$ — любой индекс из $\Lambda$; тогда найдется такой индекс $i \in I$, что $\lambda \in \Lambda_i$, следовательно, множество $A_{i\lambda}$ является полугруппой с левым делением (см. 1.11).

Если бы множество $A_{i\lambda}$ не было группой, то нашлись бы такие элементы $a, b, x_1, x_2 \in A_{i\lambda}$, $x_1 \neq x_2$, что $x_1 a = x_2 a = b$, и мы имели бы:

$$x_1 - x_2 \neq 0, \quad (x_1 - x_2) a = 0.$$

Из $A_{i\lambda} \subseteq L_\lambda$, в силу леммы 5.1, следует, что $x_1 - x_2 \in L_\lambda$. Так как $x_1 - x_2 \neq 0$, то, по лемме 4.2,

$$P(x_1 - x_2) = L_\lambda.$$

Значит,

$$L_\lambda a = P(x_1 - x_2) a = 0.$$

В то же время

$$0 \neq A_{i\lambda} = A_{i\lambda} a \subseteq L_\lambda a.$$

Таким образом, $A_{i\lambda}$ — группа. Из п. 1.3 следует, что полугруппа $K$ вполне проста, т. е. имеет вид (21). Для любых $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$

$$(G, i\lambda) = R_i \cap L_\lambda, \tag{22}$$

где $R_i$ и $L_\lambda$ — соответственно минимальные правый и левый идеалы полугруппы $K$ и, в силу 4.5, — полугруппы $\mathfrak{M}P$. Из 5.1 и (22) следует

(см. 1.5):

$$\mathfrak{P}(G, i\lambda) \subseteq \mathfrak{P}L_\lambda = L_\lambda;$$

аналогично,

$$\mathfrak{P}(G, i\lambda) \subseteq R_i,$$

т. е.

$$\mathfrak{P}(G, i\lambda) \subseteq R_i \cap L_\lambda = (G, i\lambda).$$

5.2.1. Из теоремы 5.2 и п.п. 4.5, 5.1 следует, что для полупростого кольца $P$ эквивалентны следующие условия:

1) $P$ содержит минимальный левый идеал;

2) $P$ содержит минимальный правый идеал;

3) $\mathfrak{M}P$ содержит вполне простой двусторонний идеал.

5.3. ТЕОРЕМА. *Пусть $P$ — полупростое кольцо, содержащее минимальный правый идеал $A$, $K = PA$. Если* $(A)_r = 0$ (см. 4.9), *то $A$ является $F$-пространством над некоторым телом $F$ и существует изоморфизм $\theta$ кольца $P$ в некоторое кольцо* $P(F, A, A^*)$ (см. 2.10), *при котором*

$$K\theta = (F, A, A_1^*), \quad (\mathfrak{P}K)\theta = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*).$$

Доказательство. Из 5.2, 5.2.1 следует, что $K$ является вполне простым двусторонним идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P$ и имеет вид (21). Если $A = R_i$ (см. 1.3), то существует такой индекс $\varkappa \in \Lambda$, что $p_{\varkappa i} \neq 0$. Вследствие 1.3, 5.2, $F = (G, i\varkappa)$ является телом. $A$ — аддитивная группа и, в силу 1.3, $FA = A$; таким образом, $A$ является $F$-пространством.

Так как $A$ — правый идеал $P$, то $xa \in A$ для любых $x \in A$, $a \in P$. При этом очевидно, что для любых $x, y \in A$, $a, b \in P$, $\alpha \in F$

$$(x + y)a = xa + ya, \quad (\alpha x)a = \alpha(xa), \tag{23}$$

$$x(a + b) = xa + xb, \quad (xa)b = x(ab). \tag{24}$$

Каждому элементу $a \in P$, в силу (23), соответствует такой эндоморфизм $a\theta \in P(F, A)$, что $x(a\theta) = xa$ для любого $x \in A$. Если бы существовали различные элементы $a, b \in P$, для которых $a\theta = b\theta$, то, по определению $\theta$, при $a - b \neq 0$ мы имели бы:

$$A(a - b) = 0, \quad (A)_r \neq 0,$$

что противоречит условию теоремы. Следовательно, отображение $\theta$ кольца $P$ в $P(F, A)$ взаимно однозначно. Из (24) следует, что оно является изоморфизмом.

Если $(\alpha, j\lambda)$ — любой элемент из $K$, то

$$A\{(\alpha, j\lambda)\theta\} = A(\alpha, j\lambda) = (G, i\lambda) = F(\alpha, i\lambda)$$

является одномерным подпространством $A$ и $K\theta \subseteq (F, A, A^*)$ (см. 2.1). Если $x = (\alpha, i\lambda) \neq 0$, $y = (\beta, j\mu)$ — любые элементы из $A$, то найдется такой индекс $j \in I$, что $p_{\lambda j} \neq 0$. Пусть

$$a = (p_{\lambda j}^{-1}\alpha^{-1}\beta, j\mu);$$

тогда $a \in K$, $x(a\theta) = xa = y$ и $K\theta$ является транзитивной подполугруппой $(F, A, A^*)$. Из теоремы 2.4 следует, что $K\theta$ является правым иде-

алом полугруппы $(F, A, A^*)$. Тогда кольцо

$$(\mathfrak{P}K)\theta = \mathfrak{P}(K\theta),$$

в силу п.п. 1.5, 4.5, является правым идеалом кольца $P_0(F, A)$ и по леммам 2.7, 2.4

$$(\mathfrak{P}K)\theta = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*),$$

где $A_1^*$ — $t$-подпространство $A^*$. Имеем:

$$K\theta \subseteq (\mathfrak{P}K)\theta \cap (F, A, A^*) = (F, A, A_1^*),$$

и $K\theta$ является ненулевым двусторонним идеалом полугруппы

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{P}K)\theta = \mathfrak{M}\mathfrak{P}(F, A, A_1^*),$$

а следовательно, и полугруппы $(F, A, A_1^*)$. Так как полугруппа $(F, A, A_1^*)$ вполне проста, то

$$K\theta = (F, A, A_1^*).$$

Из п. 2.10 следует, что $P\theta \subseteq P(F, A, A_1^*)$.

5.4. ТЕОРЕМА. *Пусть $K$ — вполне простой идеал полугруппы $\mathfrak{M}P$, содержащийся во всяком ненулевом двустороннем идеале кольца $P$. Существует изоморфизм $\theta$ кольца $P$ в некоторое кольцо $P(F, A, A_1^*)$, причем*

$$K\theta = (F, A, A_1^*), \quad (\mathfrak{P}K)\theta = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*).$$

Доказательство. Если $C$ — любой ненулевой идеал кольца $P$, то $K \subseteq C$, $K^2 = K$, $C^2 \neq 0$ и $P$ является полупростым кольцом. Пусть $A$ — минимальный правый идеал полугруппы $K$. Тогда, по 4.5, 5.1, $A$ является минимальным правым идеалом кольца $P$, $PA$ — двусторонним идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P$, содержащимся в $K$, $A = A^2 \subseteq PA$, $PA \neq 0$, следовательно, $PA = K$.

Допустив, что $(A)_r \neq 0$, мы имели бы, в силу 4.9, $K \subseteq A_r$, $AK = 0$, $A^2 = 0$, тогда как $A^2 = A$ (см. 1.3). Таким образом, $P$ удовлетворяет условию теоремы 5.3.

5.4.1. Заметим, что для выполнения условий теоремы 5.4 достаточно, чтобы $C \cap K \neq 0$ для любого ненулевого идеала $C$ кольца $P$. Действительно, в этом случае $C \cap K$ является ненулевым двусторонним идеалом полугруппы $K$ и, в силу 1.3,

$$C \cap K = K, \quad K \subseteq C.$$

5.5. Обозначим через $\mathfrak{K}_1$ класс всех простых колец, содержащих минимальный левый идеал или минимальный правый идеал.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы кольцо $P$ было изоморфно некоторому кольцу $\mathfrak{P}(F, A, A^*)$, необходимо и достаточно, чтобы $P \in \mathfrak{K}_1$.*

Доказательство. В силу 2.8, всякое кольцо $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$ содержится в классе $\mathfrak{K}_1$. Пусть теперь $P$ — произвольное кольцо класса $\mathfrak{K}_1$ и $L$ — его минимальный левый идеал. Из теоремы 5.2 следует, что полугруппа $K = LP$ является вполне простым идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P$. Единственным ненулевым двусторонним идеалом кольца $P$ является $P$. Из п.п. 1.5, 5.4 вытекает, что $P = \mathfrak{P}K$ и $P$ изоморфно некоторому кольцу $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$.

5.5.1. Аналогично доказывается следующее утверждение:

*Если вполне простая полугруппа* $K \subset \mathfrak{M}P$ *порождает полупростое кольцо* $\mathfrak{P}K$, *то* $\mathfrak{P}K$ *изоморфно некоторому кольцу* $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$.

5.6. ТЕОРЕМА *. *Кольцо* $P$ *тогда и только тогда изоморфно некоторому кольцу* $P_0(F, A)$, *когда* $P \in \mathfrak{K}_1$ *и* $P$ *не изоморфно никакому собственному правому идеалу простого кольца* $P'$.

Доказательство. Из 5.5 следует, что $P_0(F, A) \in \mathfrak{K}_1$. Допустим, что существует изоморфизм $\varphi$ кольца $P_0(F, A)$ на некоторый правый идеал $P''$ простого кольца $P'$. Пусть $R$ — минимальный правый идеал кольца $P_0(F, A)$, $b$ — любой элемент из $P'$. В силу 1.3, существует идемпотент $e \in R$ такой, что $eR = R$. Тогда

$$R\varphi \cdot b \in P'', \quad R\varphi \cdot b = (Re)\varphi \cdot b = e\varphi(R\varphi \cdot b) \subseteq R\varphi$$

и $R\varphi$ является минимальным правым идеалом кольца $P'$.

По теореме 5.4, существует изоморфизм $\theta$ кольца $P'$ на некоторое кольцо $\mathfrak{P}(H, B, B_1^*)$. Значит, $\varphi\theta$ является изоморфизмом кольца $P_0(F, A)$ на некоторый правый идеал кольца $\mathfrak{P}(H, B, B_1^*)$. Из леммы 2.7 и теоремы 2.8 следует, что

$$P_0(F, A)\varphi\theta = \mathfrak{P}(H, B, B_2^*),$$

где $B_2^*$ — $t$-подпространство пространства $B_1^*$. По теореме 5.4,

$$(F, A, A^*)\varphi\theta = (H, B, B_2^*).$$

Из леммы 3.4 следует, что $B_2^* = B^*$ и, в силу $B_2^* \subseteq B_1^*$, имеем:

$$B_1^* = B^*, \quad P_0(F, A)\varphi\theta = P'\theta = P_0(H, B), \quad P_0(F, A)\varphi = P'.$$

Обратно, пусть $P$ — кольцо, удовлетворяющее условиям теоремы. По теореме 5.5, существует изоморфизм $\varphi$ кольца $P$ на некоторое кольцо $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$. Если бы $A_1^*$ было собственным подпространством $A$, то $P\varphi = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$ являлось бы собственным правым идеалом кольца $P_0(F, A)$ (см. 2.8), что противоречит условиям теоремы. Следовательно,

$$A_1^* = A^*, \quad \mathfrak{P}(F, A, A_1^*) = P\varphi = P_0(F, A).$$

5.7. Двусторонний идеал $K$ полугруппы $S$ называется плотно вложенным в $S$ [см. (1), (4)], если для него выполняются условия:

1) всякий нетривиальный ** гомоморфизм полугруппы $S$ индуцирует нетривиальный гомоморфизм полугруппы $K$;

2) для всякой надполугруппы $T$ полугруппы $S$, содержащей $K$ в качестве идеала, существует нетривиальный гомоморфизм, индуцирующий изоморфизм на $K$.

В работе (4) доказана следующая теорема.

*Пусть* $K$ — *транзитивная подполугруппа* $S(F, A)$, $S_K$ — *максимальная подполугруппа* $S(F, A)$, *содержащая* $K$ *в качестве идеала. Для того чтобы некоторая подполугруппа* $S$ *была изоморфна полугруппе* $S_K$, *необходимо и достаточно, чтобы* $S$ *содержала плотно вложенный идеал, изоморфный* $K$.

---

* Другая характеристика кольца $P_0(F, A)$ дана в статье (11).

** Отличный от изоморфизма.

5.8. Обозначим через $\mathfrak{K}_2$ класс всех таких колец $P$, что $\mathfrak{M}P$ содержит плотно вложенный вполне простой идеал $K(P)$.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы кольцо $P$ было изоморфно некоторому кольцу $P(F, A, A_1^*)$, необходимо и достаточно, чтобы $P \in \mathfrak{K}_2$.*

Доказательство. Из п.п. 5.7, 2.10, 2.4, 2.7 следует, что вполне простая полугруппа $(F, A, A_1^*)$ является плотно вложенным идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P(F, A, A_1^*)$. Пусть теперь полугруппа $\mathfrak{M}P$ кольца $P$ содержит плотно вложенный вполне простой идеал $K$, $C$ — произвольный идеал полугруппы $\mathfrak{M}P$. Если бы $C \cap K = 0$, то отображение $\varphi$ полугруппы $\mathfrak{M}P$ на разностную фактор-полугруппу Риса $\mathfrak{M}P - C$ [см. [1], [2]] было бы нетривиальным гомоморфизмом полугруппы $\mathfrak{M}P$, индуцирующим изоморфизм на $K$, что противоречит условию 1) п. 5.7. Если же $C \cap K \neq 0$ для любого ненулевого идеала $C$ полугруппы $\mathfrak{M}P$, то из 5.4.1 и теоремы 5.4 следует существование изоморфизма $\varphi$ кольца $P$ в некоторое кольцо $P(F, A, A_1^*)$, причем

$$K\varphi = (F, A, A_1^*).$$

Так как $K\varphi$ является плотно вложенным идеалом в $(\mathfrak{M}P)\varphi$ и в $P(F, A, A_1^*)$, то, по теореме п. 5.7, существует изоморфизм $\theta$ полугруппы $(\mathfrak{M}P)\varphi$ на полугруппу $\mathfrak{M}P(F, A, A_1^*)$. $F(A, A_1^*)$ является единственным минимальным двусторонним идеалом полугрупп $(\mathfrak{M}P)\varphi$ и $\mathfrak{M}P(F, A, A_1^*)$, поэтому

$$(F, A, A_1^*)\,\theta = (F, A, A_1^*).$$

По теореме 3.5, изоморфизм $\theta$ индуцируется некоторым полулинейным преобразованием $a$ пространства $A$ на себя и, следовательно, является изоморфизмом кольца $P\varphi$ на кольцо $P(F, A, A_1^*)$. $\varphi\theta$ является, таким образом, изоморфизмом кольца $P$ на кольцо $P(F, A, A_1^*)$.

5.9. Из теоремы 5.8 вытекает следующая теорема, дающая внутреннюю характеристику кольца $P(F, A)$ всех эндоморфизмов пространства $A$.

ТЕОРЕМА *. *Кольцо $P$ тогда и только тогда изоморфно некоторому кольцу $P(F, A)$, когда: 1) $P \in \mathfrak{K}_2$, 2) полугруппа $K(P)$ не изоморфна никакому собственному правому идеалу полугруппы $K(P')$ кольца $P'$ класса $\mathfrak{K}_2$.*

Доказательство. По теореме 5.8, $P(F, A) \in \mathfrak{K}_2$. Пусть $\varphi$ — изоморфизм $K(P(F, A)) = (F, A, A^*)$ на некоторый правый идеал $R$ полугруппы $K(P')$ кольца $P'$ класса $\mathfrak{K}_2$. По теореме 5.8, существует изоморфизм $\theta$ кольца $P'$ на некоторое кольцо $P(H, B, B_1^*)$; по теореме 5.4,

$$K(P')\,\theta = (H, B, B_1^*).$$

Значит, $(F, A, A^*)\varphi\theta$ является правым идеалом полугруппы $(H, B, B^*)$ (см. 1.3). Из леммы 3.4 следует:

$$(F, A, A^*)\,\varphi\,\theta = (H, B, B^*) = K(P')\,\theta, \quad (F, A, A^*)\,\varphi = K(P)$$

и $P(F, A)$ удовлетворяет условию 2).

Обратно, если кольцо $P$ удовлетворяет условиям 1), 2), то, по теореме 5.8, оно изоморфно некоторому кольцу $P(F, A, A_1^*)$. Если $A_1^* \neq A^*$, то полугруппа $K(P)$ изоморфна собственному правому идеалу

* Другая характеристика кольца $P(F, A)$ дана в статье [11].

$(F, A, A_1^*)$ полугруппы $K(P(F,A)) = (F, A, A^*)$, что противоречит условию 2).

5.10. Кольцо $P$ называется *кольцом с единственным сложением* [см. ([12])], если всякий изоморфизм полугруппы $\mathfrak{M}P$ на полугруппу $\mathfrak{M}P'$ является изоморфизмом кольца $P$ на кольцо $P'$.

ТЕОРЕМА. *Пусть полугруппа $\mathfrak{M}P$ содержит собственный вполне простой идеал $K$, входящий во всякий ее ненулевой идеал. Тогда $P$ является кольцом с единственным сложением.*

Доказательство. Пусть $\varphi$ — изоморфизм полугруппы $\mathfrak{M}P$ на полугруппу $\mathfrak{M}P'$ некоторого кольца $P'$. Тогда $K\varphi$ является собственным вполне простым идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P'$, входящим во всякий ее ненулевой идеал. По теореме 5.4, существуют изоморфизмы $\theta$ и $\theta'$ колец $P$ и $P'$ в кольца $P(F, A, A_1^*)$ и $P(H, B, B_1^*)$, причем

$$K\theta = (F, A, A_1^*), \quad K\varphi\theta' = (H, B, B_1^*).$$

Значит, $\theta^{-1}\varphi\theta' = \varphi_1$ является изоморфизмом полугруппы

$$(\mathfrak{M}P)\,\theta \subseteq P(F, A, A_1^*)$$

на полугруппу

$$(\mathfrak{M}P')\,\theta' \subseteq P(H, B, B_1^*),$$

причем

$$(F, A, A_1^*)\,\varphi_1 = (H, B, B_1^*).$$

Если бы $r(A) = 1$, то $P(F, A, A_1^*) = (F, A, A_1^*)$, $P\theta = K\theta$, $P = K$ и $K$ не было бы собственным идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P$. Следовательно, $r(A) \geqslant 2$ и, аналогично, $r(B) \geqslant 2$. По теореме 3.5, $\varphi_1$ индуцируется некоторым полулинейным преобразованием $a$ пространства $A$ на $B$; значит, $\varphi_1$ является изоморфизмом кольца $P\theta$ на кольцо $P'\theta'$, а $\varphi = \theta\varphi_1\theta'^{-1}$ — изоморфизмом кольца $P$ на кольцо $P'$.

5.10.1. Из теоремы 5.10 следует

ТЕОРЕМА. *При $r(A) \geqslant 2$, все кольца $P(F, A, A_1^*)$, $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$ (в частности все кольца $P(F, A)$ и $P_0(F, A)$) являются кольцами с единственным сложением.*

5.11. Следующая теорема вместе с теоремой 5.6 (или с упомянутой в 5.6 характеристикой кольца $P_0(F, A)$, принадлежащей Вулфсону) дает еще одну внутреннюю характеристику кольца $P(F, A)$.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы кольцо $P$ было изоморфно кольцу $P(F, A)$, необходимо и достаточно, чтобы полугруппа $\mathfrak{M}P$ содержала плотно вложенный идеал, изоморфный $\mathfrak{M}P_0(F, A)$.*

Доказательство. $\mathfrak{M}P_0(F, A)$ является, в силу 2.4, 2.7, транзитивным идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P(F, A) = S(F, A)$. Из теоремы п. 5.7 следует, что условие теоремы является необходимым и достаточным для существования изоморфизма $\varphi$ полугруппы $\mathfrak{M}P$ на $\mathfrak{M}P(F, A)$. Из теоремы 5.10.1 следует, что $\varphi$ является изоморфизмом кольца $P$ на $P(F, A)$.

5.11.1. Из теорем 5.8, 5.6, 2.8 и из леммы 2.3.1 вытекают следующие две теоремы, каждая из которых дает внутреннюю характеристику

кольца $P(F, A)$ в случае конечного $r(A)$, отличную от характеристик, предложенных Вулфсоном ([11]). Доказательства этих теорем мы опустим.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы кольцо $P$ было изоморфно кольцу $P(F, A)$, где $A$ — пространство конечного ранга, необходимо и достаточно, чтобы $P$ было простым кольцом класса $\mathfrak{K}_2$.*

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы кольцо $P$ было изоморфно кольцу $P(F, A)$, где $A$ — пространство конечного ранга, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) $P \in \mathfrak{K}_1$, 2) $P$ не изоморфно никакому собственному правому идеалу простого кольца $P'$, 3) никакой собственный правый идеал кольца $P$ не является простым кольцом.*

## § 6. Транзитивные полугруппы и кольца эндоморфизмов

Всюду в настоящем параграфе мы предполагаем, что $r(A) \geqslant 2$.

6.1. Пусть $A_1^*$ — $t$-подпространство $A^*$ (см. 2.3, 2.7, 2.10). Обозначим

$$(F, A, A_1^*)_\nu = S_\nu(F, A) \cap P(F, A, A_1^*)$$

(см. 2.9). Будучи пересечением идеала $S_\nu$ полугруппы $S(F, A)$ с подполугруппой

$$\mathfrak{M}P(F, A, A_1^*) \subseteq S(F, A),$$

$(F, A, A_1^*)$ является двусторонним идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P(F, A, A_1^*)$. В частности,

$$(F, A, A_1^*)_2 = (F, A, A_1^*).$$

Если $n$ — конечное число, то, в силу 2.4, 2.7, $(F, A, A_1^*)_n$ является правым идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P_0(F, A)$.

ТЕОРЕМА. *Пусть $n$ — любое конечное число, не превосходящее $r(A)$. Полугруппа $(F, A, A_1^*)_{n+1}$ $n$-кратно транзитивна* (см. 1.9).

Доказательство. Если $\mathrm{x}_j, \mathrm{y}_j = \beta_j \mathrm{e}_{\mathrm{x}_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n,\ n \leqslant r(A))$ — любые точки из $A$ и $\mathrm{x}_j$ линейно независимы, то, в силу п. 2.3, найдутся такие формы

$$f_j = f_{i_j} \alpha_j \in A_1^* \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

что $[\mathrm{x}_j f_j] = 1$, $[\mathrm{x}_k f_j] = 0$ при $k \neq j$. Обозначим

$$c = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \beta_j, i_j \varkappa_j)'$$

(см. 2.2.1). По определению, $c \in (F, A, A_1^*)_{n+1}$. Тогда при $k = 1, 2, \ldots, n$ $\mathrm{x}_k c = \mathrm{y}_k$ и $(F, A, A_1^*)_{n+1}$ является $n$-кратно транзитивной полугруппой.

6.1.1. Так как

$$\mathfrak{P}(F, A, A_1^*) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F, A, A_1^*)_n,$$

то из теоремы 6.1 следует

ТЕОРЕМА. *Кольцо $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$ $n$-кратно транзитивно при любом $n \leqslant r(A)$.*

6.2. ЛЕММА. *Всякий ненулевой двусторонний идеал $C$ транзитивной полугруппы $S \subseteq P(F, A)$ также является транзитивной полугруппой.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ — любые элементы из $A, \mathbf{x} \neq 0$. Существуют такие $\mathbf{z} \in A$, $c \in C$, что $\mathbf{z} c \neq 0$. Так как полугруппа $S$ транзитивна, то она содержит такие элементы $a, b$, что

$$\mathbf{x} a = \mathbf{z}, \quad (\mathbf{z} c) b = \mathbf{y}.$$

Значит, $acb \in C$, $\mathbf{x}(acb) = \mathbf{y}$ и идеал $C$ транзитивен.

6.3. ТЕОРЕМА. *Всякая дважды транзитивная полугруппа $S \subseteq S(F, A)$, имеющая непустое пересечение с $P_0(F, A)$, содержит двусторонний идеал, являющийся вполне простым правым идеалом полугруппы $(F, A, A^*)$.*

Доказательство. Предположим, что $c$ — любой ненулевой элемент из $S \cap P_0(F, A)$, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис пространства $Ac$. Допустим, что $n > 1$. Существует эндоморфизм $a_1 \in S$ такой, что

$$\mathbf{e}_1 a_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 a_1 = 0.$$

Обозначим $ca_1 = c_1$, $c_1 \in S$. Тогда

$$r(Ac_1) \neq 0, \quad r(Ac_1) \leqslant n - 1.$$

Повторяя процесс достаточное число раз, найдем элемент $c_k \in S$ такой, что $r(Ac_k) = 1$ и $c_k \in (F, A, A^*)$. Таким образом, $K = S \cap (F, A, A^*)$ не пусто. $K$ является ненулевым двусторонним идеалом $S$. Из лемм 6.2, 2.4 и теоремы 2.4 следует, что $K$ является вполне простым правым идеалом полугруппы $(F, A, A^*)$.

6.3.1. Можно показать, что при $r(A) \leqslant 3$ всякая транзитивная подполугруппа $S \subseteq S(F, A)$ либо содержится в полной линейной группе $GL(F, A)$, либо содержит двусторонний идеал, являющийся вполне простым правым идеалом полугруппы $(F, A, A^*)$. При $r(A) > 3$ это утверждение неверно.

6.4. ТЕОРЕМА. *Всякое дважды транзитивное подкольцо $P \subseteq P_0(F, A)$ совпадает с одним из колец $\mathfrak{P}(F, A, A_1^*)$.*

Доказательство. Пусть $P$ — дважды транзитивное подкольцо $P_0(F, A)$. Из теоремы 6.3 следует, что $R(I) = P \cap (F, A, A^*)$ является вполне простым правым идеалом полугруппы $(F, A, A^*)$. Пространство $A^*(I) = A_1^*$ является, по лемме 2.4, $t$-подпространством $A^*$. Кольцо $\mathfrak{P}R(I)$ (см. 1.5) является правым идеалом кольца $P_0(F, A)$. По лемме 2.7,

$$\mathfrak{P}R(I) = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*).$$

Так как $\mathfrak{P}R(I) \subseteq P$, то

$$(F, A, A_1^*) \subseteq (F, A, A^*) \cap P = R(I)$$

и, вследствие $R(I) \subseteq (F, A, A_1^*)$, имеем:

$$(F, A, A_1^*) = R(I) = P \cap (F, A, A^*).$$

Пусть $c$ — любой элемент из $P$. По лемме п.2.6, $c$ можно представить в виде (10), где все $\mathbf{e}_{x_r}$ линейно независимы, $\alpha_r \neq 0$. Тогда найдется такая форма $f_i \in A_1^*$, что

$$[\mathbf{e}_{x_r} f_i] = \gamma \neq 0, \quad [\mathbf{e}_{x_s} f_i] = 0$$

при $s \neq r$. Значит, $(\gamma^{-1}, ix_r)' \in (F, A, A_1^*)$ и, так как $(F, A, A_1^*)$ — идеал

полугруппы $\mathfrak{M}P$,

$$(\alpha_r, i_r\, \varkappa_r)' = c(\gamma^{-1}, i_r\, \varkappa_r)' \in (F, A, A_1^*),$$
$$c \in \mathfrak{P}(F, A, A_1^*), \quad P \subseteq \mathfrak{P}(F, A, A_1^*).$$

Таким образом,

$$P = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*).$$

6.4.1. Из п.п.6.4, 2.7 вытекает следующее утверждение:

*Если $r(A)$ конечен, то единственным дважды транзитивным подкольцом $P(F, A)$ является само $P(F, A)$.*

6.4.2. Из теорем 6.4, 6.1.1 следует [см. ([6])]:

*Всякое дважды транзитивное подкольцо кольца $P_0(F, A)$ $n$-кратно транзитивно при любом $n \leqslant r(A)$.*

6.4.3. Из теорем 6.4, 5.5, 2.8 следует

ТЕОРЕМА [см. ([6])]. *Всякое дважды транзитивное подкольцо кольца $P_0(F, A)$ является простым кольцом, содержащим минимальный левый и минимальный правый идеалы. Всякое простое кольцо, содержащее минимальный левый идеал, изоморфно некоторому дважды транзитивному подкольцу кольца $P_0(F, A)$.*

Ниже (см. теорему 6.11) этот результат будет усилен: мы докажем, что всякое транзитивное подкольцо кольца $P_0(F, A)$ (без предположения о двукратной транзитивности) является простым кольцом, содержащим минимальный левый и минимальный правый идеалы.

6.5. Пусть $P$ — транзитивное подкольцо кольца $P(F, A)$ такое, что $P \cap P_0(F, A) \neq 0$, и положим $n = \min\limits_{a \in P \setminus 0} r(Aa)$.

Обозначим через $K$ множество, состоящее из 0 и всех элементов $a \in P$, для которых $r(Aa) = n$. $K$ является двусторонним идеалом полугруппы $\mathfrak{M}P$ и, в силу леммы 6.2, транзитивной подполугруппой $S(F, A)$. Если $n = 1$, то, как и в теореме 6.4, легко показать, что

$$P = \mathfrak{P}(F, A, A_1^*).$$

Будем в дальнейшем предполагать, что $n \geqslant 2$.

ЛЕММА. *Пусть $a$, $b$ — любые элементы из $K$. Если из $\mathrm{x}a = 0\ (\mathrm{x} \in A)$ следует $\mathrm{x}b = 0$ и существует такая точка $\mathrm{e} \in A$, что $\mathrm{e}a = \mathrm{e}b \neq 0$, то $a = b$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{e}a = \mathrm{e}_1', \mathrm{e}_2', \ldots, \mathrm{e}_r'$ — какой-либо базис пространства $Aa$, $\mathrm{e}_1 = \mathrm{e}$, $\mathrm{e}_2, \ldots, \mathrm{e}_n$ — такие точки из $A$, что $\mathrm{e}_i a = \mathrm{e}_i'$. Дополним множество $E = \{\mathrm{e}_i\}$ до какого-либо базиса $\{\mathrm{h}_\nu\}$ пространства $Aa$. Если

$$\mathrm{h}_\nu a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\nu i} \mathrm{e}_i'$$

и $\mathrm{h}_\nu \notin E$, то обозначим

$$\mathrm{e}_\nu = \mathrm{h}_\nu - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\nu i} \mathrm{e}_i.$$

Множество $\{\mathrm{e}_\nu\}$ образует, очевидно, базис пространства $A$, причем

$\mathbf{e}_i a = \mathbf{e}_i$, если $\mathbf{e}_i \in F$, и $\mathbf{e}_\nu a = 0$, если $\mathbf{e}_\nu \notin E$. Тогда, по условию, $\mathbf{e}_\nu b = 0$, если $\mathbf{e}_\nu \notin E$, $\mathbf{e}_1 b = \mathbf{e}_1 a$ и $\mathbf{e}_1 (a - b) = 0$, $\mathbf{e}_\nu (a - b) = 0$ при $\mathbf{e}_\nu \notin E$, $r(A(a-b)) \leqslant n-1$; следовательно, $a - b = 0$, $a = b$.

6.6. ЛЕММА. *Пусть $a, c$ — любые элементы из $K$, $\mathbf{e}c = \mathbf{e}$ для некоторой точки $\mathbf{e} \in Aa$. Тогда $ac = a$.*

Доказательство. Если $\mathbf{x}a = 0$ для $\mathbf{x} \in A$, то и $\mathbf{x}ac = 0$. Пусть $\mathbf{e}_1 a = \mathbf{e}$; тогда

$$\mathbf{e}_1 (ac) = \mathbf{e}c = \mathbf{e} = \mathbf{e}_1 a.$$

Из леммы 6.5 следует $ac = a$.

6.7. ЛЕММА. *Если $a, b$ — любые элементы из $K$ и $Aa \cap Ab \neq 0$, то $Aa = Ab$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in A \setminus 0$, $\mathbf{x} \in Aa \cap Ab$. Существует элемент $c \in K$ такой, что $\mathbf{x}c = \mathbf{x}$. По лемме 6.6, $ac = a$, $bc = b$. Из

$$Aac \subseteq Ac, \quad r(Aac) = r(Ac) = n$$

следует, что $Aa = Aac = Ac$ и, аналогично, $Ab = Ac$.

6.7.1. ЛЕММА. *Пусть $s$ — любой элемент из $P$, $a$ — любой элемент из $K$. Если $As \cap Aa \neq 0$, то $Aa \subseteq As$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{x}s \in Aa$, $\mathbf{y}$ — любая точка из $A$. Тогда найдется элемент $c \in K$ такой, что $\mathbf{y}c = \mathbf{x}$. Значит, $\mathbf{y}cs \in Aa$ и, так как $K$ — идеал $\mathfrak{M}P$, $cs \in K$. Из леммы 6.7 следует, что $Aa = Acs \subseteq As$.

6.8. ЛЕММА. *Полугруппа $K$ вполне проста.*

Доказательство. Пусть $a$, $b$ — любые ненулевые элементы из $K$. Существуют точки $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in A$ такие, что $\mathbf{e}_1 b = \mathbf{e}_3 \neq 0$, $\mathbf{e}_2 a = \mathbf{e}_4 \neq 0$. Тогда найдутся элементы $c, d \in K$, для которых $\mathbf{e}_3 c = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_4 d = \mathbf{e}_3$. Значит,

$$\mathbf{e}_1 (bcad) = \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 b.$$

Если $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{x}b = 0$, то и $\mathbf{x}(bcad) = 0$. По лемме 6.5, $bcad = b$. Таким образом, для любых ненулевых элементов $a, b \in K$ в $K$ разрешимо уравнение $(bc)ad = b$, и полугруппа $K$ $i$-проста [см. (2)].

Для любой точки $\mathbf{e} \in A$ существует элемент $c \in K$ такой, что $\mathbf{e}c = \mathbf{e}$. Из леммы 6.6 следует: $c^2 = c$. Допустим, что в $K$ существует идемпотент $f \neq 0$ со свойством

$$fc = cf = f.$$

Если $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{x}c = 0$, то

$$\mathbf{x}f = \mathbf{x}cf = 0.$$

Если $\mathbf{e} \in A$, $\mathbf{e}f \neq 0$, то

$$(\mathbf{e}f) f = \mathbf{e}f = \mathbf{e}(fc) = (\mathbf{e}f) c.$$

Из леммы 6.5 следует, что $f = c$. Таким образом, $i$-простая полугруппа $K$ содержит примитивный идемпотент $c$, т. е. полугруппа $K$ вполне проста [см. (3)].

6.9. ЛЕММА. $P \cap P_0(F; A) = \mathfrak{P}K$.

Доказательство. Пусть $s$ — любой элемент из $P \setminus 0$, $\mathbf{e}_1 s, \mathbf{e}_2 s, \ldots, \mathbf{e}_m s$ — какой-либо базис пространства $As$. Как и в доказательстве леммы 6.5, выберем множество $\{\mathbf{e}_\nu\}$ так, чтобы $\mathbf{e}_\nu s = 0$ и чтобы оно вместе с $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ образовало базис пространства $A$.

Существует элемент $c_1 \in K$ такой, что $(\mathbf{e}_1 s) c_1 = \mathbf{e}_1 s$. Тогда $sc \in K$ и, по лемме 6.7.1, $Asc_1 \subseteq As$. Обозначив $s - sc_1 = s_1$, получим $As_1 \subseteq As$; кроме того, $\mathbf{e}_\nu s_1 = 0$, $\mathbf{e}_1 s_1 = 0$ и $r(As_1) < r(As)$.

Повторяя процесс, найдем последовательность элементов $c_i \in K$ и $s_i = s_{i-1} - s_{i-1} c_i \in P$ со свойством

$$r(As_i) < r(As_{i-1}).$$

Очевидно, что процесс конечен. Следовательно,

$$s = sc_1 + s_1 c_2 + \ldots + s_{k-1} c_k$$

и, так как $s_i c_{i+1} \in K$, $s \in \mathfrak{P}K$, $P = \mathfrak{P}K$.

6.10. ТЕОРЕМА. *Пусть $P$ — транзитивное подкольцо кольца $P(F, A)$ и $P \cap P_0(F, A) \neq 0$. Существует изоморфизм $\varphi$ кольца $P$ в некоторое кольцо $P(H, B, B_1^*)$*, при котором

$$\{P \cap P_0(F, A)\} \varphi = \mathfrak{P}(H, B, B_1^*).$$

Доказательство. Пусть $C$ — любой ненулевой идеал кольца $P$ $s$ — произвольный элемент из $C \setminus 0$, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A \setminus 0$, $\mathbf{x}s = \mathbf{y}$. Тогда найдется элемент $c \in K$ такой, что $\mathbf{z}c = \mathbf{x}$. Значит, $\mathbf{z}(cs) = \mathbf{y}$, $cs \in (K \cap C) \setminus 0$. По теореме 5.4 и лемме 6.8, существует изоморфизм $\varphi$ кольца $P$ в некоторое кольцо $P(H, B, B_1^*)$, причем

$$\mathfrak{P}K\varphi = \mathfrak{P}(H, B, B_1^*).$$

По лемме 6.9, $\mathfrak{P}K = P \cap P_0(F, A)$.

6.10.1. Из теоремы 6.10 вытекает следующее утверждение:

*Всякое транзитивное подкольцо кольца $P_0(F, A)$ изоморфно некоторому кольцу $\mathfrak{P}(H, B, B_1^*)$.*

6.11. Из 6.10.1 и 2.8 следует

ТЕОРЕМА. *Всякое транзитивное подкольцо кольца $P_0(F, A)$ является простым.*

6.12. ТЕОРЕМА. *Если $r(A)$ — простое число и $P$ — транзитивное подкольцо кольца $P(F, A)$, то либо $P$ является телом, либо $P = P(F, A)$.*

Доказательство. Пусть $n = \min\limits_{a \in P \setminus 0} r(Aa)$. Из леммы 6.7 следует, что $A$ является прямой суммой своих $n$-мерных подпространств $Aa$, где $a \in K$. $r(A)$ делится на $n$; следовательно, или $n = r(A)$ (и тогда $P$ — тело) или $n = 1$, $K \subseteq (F, A, A^*)$ и тогда, как и в доказательстве теорем 6.4, 6.4.1, устанавливаем, что $P = P(F, A)$.

Поступило
7. IV. 1959

ЛИТЕРАТУРА

1 Ляпин Е. С., Теория полугрупп, М., Физматгиз, 1959.
2 Rees D., On semigroups, Proc. Cambridge Phil. Soc., 36, № 4 (1940), 387—400.
3 Clifford A. H., Semigroups without nilpotent ideals, Amer. J. Math., 71, № 4 (1948), 834—844.
4 Глускин Л. М., Идеалы полугрупп преобразований, Математ. сборн., 47 (89):1 (1959), 155—175.
5 Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, М., И. Л., 1955.

[6] J a c o b s o n N., Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, Trans. Amer. Math. Soc., 57, № 2, (1945), 228—245.
[7] Г л у с к и н Л. М., О матричных полугруппах, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 22 (1958), 439—448.
[8] Х а л е з о в Е. А., Автоморфизмы матричных полугрупп, Доклады Ак. наук СССР, 96, № 2 (1954), 245—248.
[9] Г л у с к и н Л. М., Простые полугруппы с нулем, Доклады Ак. наук СССР, 103, № 1 (1955), 5—8.
[10] Г л у с к и н Л. М., О гомоморфизмах ассоциативных систем, Диссертация, Харьков, 1951.
[11] W o l f s o n K. G., An ideal-theoretic characterisation of the ring of all linear transformations, Amer. J. Math., 75, № 2, (1953), 358—386.
[12] J o h n s o n R. E., Rings with unique addition, Proc. Amer. Math. Soc., 9, № 1 (1958), 57—61.
[13] Г л у с к и н Л. М., Полугруппы и кольца линейных преобразований, Доклады Ак. наук СССР, 127, № 6 (1959), 1151—1154.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 871—892

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

# ОТОБРАЖЕНИЯ КОМПАКТОВ В ЭВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

(*Представлено академиком* **П. С. Александровым**)

В работе решается задача о нахождении наименьшей размерности эвклидова пространства, для которой $k$-регулярные отображения любого $n$-мерного компакта образуют всюду плотное множество во множестве всех отображений этого компакта в рассматриваемое эвклидово пространство. Доказывается, что эта наименьшая размерность равна $nk+$ $+n+k$.

## 1. Введение

Проблема вложения (т. е. гомеоморфного погружения) компактов в эвклидовы пространства, нашедшая свое решение в классических работах Л. С. Понтрягина, Нёбелинга и Ван-Кампена, может быть сформулирована в двух различных, a priori неэквивалентных формах:

1) *Найти такое (наименьшее) натуральное* $N$, *что любой* $n$*-мерный компакт* $X$ *может быть вложен в эвклидово пространство* $E$ *при* $\dim E \geqslant N$.

2) *Найти такое (наименьшее) натуральное* $N'$, *что при* $\dim E \geqslant N'$ *множество всех вложений любого* $n$*-мерного компакта* $X$ *в эвклидово пространство* $E$ *всюду плотно в множестве всех непрерывных отображений* $X \to E$.

Ясно, что имеет место неравенство $N' \geqslant N$, связывающее числа $N$ и $N'$; совпадение же этих чисел отнюдь не очевидно заранее.

Теорема вложения Понтрягина — Нёбелинга [см. ([1]), ([2])] утверждает, что при $\dim E = 2n+1$ ситуация, указанная во второй из приведенных выше проблем, имеет место, и потому $N' \leqslant 2n+1$. Ван-Кампеном ([3]) были построены примеры $n$-мерных полиэдров, не допускающих вложения в $2n$-мерное эвклидово пространство; тем самым было показано, что $N \geqslant 2n+1$. Таким образом,

$$N = N' = 2n+1.$$

Проблему отыскания чисел $N$ и $N'$ можно рассматривать также для *$k$-регулярных вложений*, определенных К. Борсуком в докладе на 3-м Всесоюзном математическом съезде [см. ([4])]. Будем, следуя Борсуку, называть отображение $f$ компакта $X$ в некоторое эвклидово пространство *$k$-регулярным* ($k \geqslant 1$), если для любых $k+1$ различных точек $x_0, x_1, \ldots, x_k$ компакта $X$ точки $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_k)$ не лежат в одной $(k-1)$-мерной плоскости, т. е. являются вершинами $k$-мерного симплекса. Например,

1-регулярные отображения представляют собой вложения компакта $X$ в рассматриваемое эвклидово пространство; 2-регулярные отображения — это такие вложения, для которых образы любых трех различных точек не лежат на одной прямой, и т. д.

Будем теперь рассматривать проблемы 1) и 2), указанные выше, заменив в них «вложения» $k$-регулярными отображениями. Мы покажем в настоящей работе, что

$$N' = nk + n + k.$$

Число же $N$, которым интересуется Борсук, будет при $k > 1$ несколько меньше $N'$ (гипотеза Борсука: $N = 2n + k$). Таким образом, при $k > 1$ проблема $k$-регулярных вложений расщепляется (т. е. две указанные выше проблемы не эквивалентны в случае $k$-регулярных вложений).

Для установления соотношения $N' = nk + n + k$ доказываются два неравенства:

$$N' \leqslant nk + n + k, \qquad N' \geqslant nk + n + k,$$

первое из которых может быть сформулировано в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Если $E$ — эвклидово пространство размерности $\geqslant nk + n + k$, а $f$ — произвольное отображение $n$-мерного компакта $X$ в $E$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует $k$-регулярное отображение $\varphi : X \to E$, отстоящее от $f$ менее чем на $\varepsilon$.*

Заметим, что при $k > 1$, $n > 0$ теорема 1 нетривиальна даже для полиэдров, ибо никакое кусочно-линейное вложение полиэдра в пространство $E^{nk+n+k}$ неприемлемо: ведь никакие три точки не должны лежать на одной прямой, т. е. полиэдр должен быть весьма замысловатым образом искривлен в сколь угодно малом своем куске.

Теорема 1 (и ее бесконечномерный аналог — теорема 4) доказывается в п. 4. Для доказательства используется результат, представляющий собой усиление теоремы вложения Понтрягина — Нёбелинга (он был получен автором ([5]) в 1948 г. в связи с работой о размерной полноценности компактов, но не был опубликован, так как оказался излишним для той цели). Эта теорема вложения формулируется и доказывается в п. 2. Содержание п.3 не связано с вычислением числа $N'$ и включено в работу как иллюстрация к теореме вложения, изложенной в п. 2. Здесь доказывается следующая теорема Гуревича ([6]):

ТЕОРЕМА 2. *Если $F$ — эвклидово пространство размерности $k \leqslant n$, а $f$ — произвольное отображение $n$-мерного компакта $X$ в $F$, то при любом $\varepsilon > 0$ существует такое отображение $g : X \to F$, отстоящее от $f$ менее чем на $\varepsilon$, что*

$$\dim g^{-1}(z) \leqslant n - k$$

*для любой точки $z \in F$.*

Доказательство неравенства $N' \geqslant nk + n + k$ проводится в п.6. Предварительно, в п. 5, вводится понятие индекса расположения трех и более

цепей по модулю 2. Этот индекс определяется для $\nu$ цепей $z_1, \ldots, z_\nu$, расположенных определенным образом в пространстве $E^N$ и имеющих сумму размерностей, равную $N - \nu + 2$. (Для двух цепей индекс расположения сводится к индексу пересечения.)

## 2. Теорема вложения

Пусть $E$ — эвклидово пространство. Предположим, что каждому (прямолинейному) симплициальному разбиению $K$, расположенному в $E$, поставлено в соответствие (без соблюдения каких бы то ни было условий непрерывности) определенное число $\delta(K)$; тогда мы будем говорить, что в $E$ задана *симплициальная функция* $\delta$. Симплициальную функцию $\delta$ условимся называть *почти всюду положительной*, если выполнено следующее условие:

(*) *Каковы бы ни были симплициальное разбиение $K$ и число $\varepsilon > 0$, существует симплициальное разбиение $K'$, которое получается из $K$ $\varepsilon$-сдвигом вершин и удовлетворяет условию $\delta(K') > 0$.*

Можно также рассматривать симплициальные функции, заданные не на множестве всех симплициальных разбиений, а, например, на множестве всех симплициальных разбиений размерности $k$ (или размерности $\leqslant k$) и т. п.

Пусть, например, $p$ — фиксированная прямая на плоскости $P$. Каждому отрезку $l$, расположенному в плоскости $P$, поставим в соответствие число

$$\delta(l) = |l| \cdot \cos^2 \alpha,$$

где $|l|$ — длина отрезка $l$, а $\alpha$ — угол, образованный этим отрезком с прямой $p$. Далее, каждому одномерному симплициальному разбиению $K$, расположенному в $P$, поставим в соответствие число

$$\delta(K) = \min \delta(l),$$

где минимум берется по всем одномерным симплексам разбиения $K$. Тогда $\delta$ есть симплициальная функция, заданная на множестве одномерных разбиений; легко видеть, что функция $\delta$ почти всюду положительна.

Докажем следующее предложение, являющееся усилением теоремы вложения Понтрягина — Нёбелинга.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $E$ — эвклидово пространство размерности $\geqslant 2n+1$, на множестве всех не более чем $n$-мерных симплициальных разбиений которого задана почти всюду положительная функция $\delta$. Пусть, далее, $X$ — некоторый $n$-мерный компакт, $f: X \to E$ — непрерывное отображение, а $\varepsilon$ — произвольное положительное число. Тогда существуют такое отображение $\varphi: X \to E$ и такая последовательность $\{K_\alpha\}$ симплициальных разбиений, расположенных в $E$, что выполняются условия:*

(1) *отображение $\varphi: X \to E$ гомеоморфно;*

(2) $\rho(f, \varphi) < \varepsilon$;

(3) *полиэдры $|K_\alpha|$ сходятся к компакту $\varphi(X)$;*

(4) *все числа $\delta(K_\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ положительны;*

(5) *все полиэдры* $|K_{\alpha+1}|, |K_{\alpha+2}|, \ldots$ *и компакт* $\varphi(X)$ *расположены в* $\delta(K_\alpha)$*-окрестности полиэдра* $|K_\alpha|$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$;

(6) *степени мелкости симплициальных разбиений* $K_\alpha$ *стремятся к нулю при* $\alpha \to \infty$.

Доказательство. Будем называть открытые звезды $O(a)$ и $O(b)$ вершин $a$ и $b$ некоторого симплициального разбиения $K$ *разделенными*, если замыкания этих звезд не пересекаются. Минимум расстояний между разделенными открытыми звездами симплициального разбиения $K$ будем обозначать через $\sigma(K)$.

Для доказательства теоремы 3 построим следующие элементы:

1) последовательность покрытий $\beta_1, \beta_2, \ldots$ компакта $X$;

2) последовательность $n$-мерных симплициальных разбиений $K_1, K_2, \ldots$, расположенных в $E$;

3) последовательность отображений $\varphi_0 = f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ компакта $X$ в $E$;

4) последовательность положительных чисел $d_0 = \frac{\varepsilon}{2}, d_1, d_2, \ldots$.

Построение будем проводить индуктивно, причем так, чтобы были выполнены следующие условия:

(а) $d_\alpha < \frac{1}{2} d_{\alpha-1}$;

(б) $d_\alpha < \frac{1}{4} \sigma(K_\alpha)$;

(в) $d_\alpha < \delta(K_\alpha)$;

(г) $\rho(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha-1}) < d_{\alpha-1}$;

(д) *степени мелкости покрытий* $\beta_\alpha$ *стремятся к нулю при* $\alpha \to \infty$;

(е) *степени мелкости симплициальных разбиений* $K_\alpha$ *стремятся к нулю при* $\alpha \to \infty$;

(ж) *симплициальное разбиение* $K_\alpha$ *является нервом покрытия* $\beta_\alpha$;

(з) *если* $M$ — *элемент покрытия* $\beta_\alpha$, $m$ — *соответствующая ему вершина нерва* $K_\alpha$, *а* $O(m)$ — *открытая звезда этой вершины, то* $\varphi_\alpha(M) \subset O(m)$;

(и) $|K_\alpha| \subset U(|K_\beta|, d_\beta)$ *при* $\alpha > \beta$.

Предполагая построение элементов $\beta_\alpha, K_\alpha, \varphi_\alpha, d_\alpha$ проведенным, мы легко докажем теорему 3. Действительно, из условий (а) и (г) следует, что

$$\rho(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha-1}) < \frac{d_0}{2^{\alpha-1}},$$

так что последовательность $\{\varphi_\alpha\}$ непрерывных отображений равномерно сходится. Обозначим предел этой последовательности через $\varphi$:

$$\varphi = \lim_{\alpha \to \infty} \varphi_\alpha.$$

Докажем справедливость условий (1) — (6), указанных в формулировке теоремы 3.

Условие (1). Достаточно доказать, что отображение $\varphi$ взаимно однозначно. Пусть $x$ и $y$ — две различные точки компакта $X$, $r$ — расстояние между ними, а $\alpha$ — настолько большое натуральное число, что степень мелкости покрытия $\beta_\alpha$ меньше $\frac{1}{3} r$ [см. условие (д)]. Пусть, далее, $M$ и $N$ — такие элементы покрытия $\beta_\alpha$, что $x \in M$, $y \in N$, а $m$ и $n$ — соответ-

ствующие элементам $M$ и $N$ вершины симплициального разбиения $K_\alpha$ [см. условие (ж)]. Тогда звезды $O(m)$ и $O(n)$ разделены. (Предположим противное; тогда в $K_\alpha$ существует такая вершина $p$, что отрезки $mp$ и $np$ являются одномерными симплексами разбиения $K_\alpha$, т. е. в $\beta_\alpha$ существует такое множество $P$, что $M \cap P \neq 0$, $N \cap P \neq 0$; выбрав произвольно точки $u \in M \cap P$, $v \in N \cap P$, мы получаем противоречивое соотношение $r = \rho(x, y) \leqslant \rho(x, u) + \rho(u, v) + \rho(v, y) < \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3}$.) Из разделенности звезд $O(m)$ и $O(n)$ вытекает, что

$$\rho(\varphi_\alpha(x), \varphi_\alpha(y)) \geqslant \rho(O(m), O(n)) \geqslant \sigma(K_\alpha) > 4d_\alpha$$

[см. условия (з) и (б)]. Далее, из условий (а) и (г) получаем:

$$\rho(\varphi_\alpha, \varphi) \leqslant \rho(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}) + \rho(\varphi_{\alpha+1}, \varphi_{\alpha+2}) + \ldots < d_\alpha + d_{\alpha+1} + \ldots <$$
$$< d_\alpha + \frac{1}{2} d_\alpha + \frac{1}{4} d_\alpha + \ldots = 2d_\alpha.$$

Таким образом,

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \geqslant \rho(\varphi_\alpha(x), \varphi_\alpha(y)) - \rho(\varphi_\alpha(x), \varphi(x)) - \rho(\varphi_\alpha(y), \varphi(y)) >$$
$$> 4d_\alpha - 2d_\alpha - 2d_\alpha,$$

т. е. $\rho(\varphi(x), \varphi(y)) > 0$, и потому $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Условие (2). Из условий (а) и (г) находим (учитывая соотношения $\varphi_0 = f$, $d_0 = \frac{\varepsilon}{2}$):

$$\rho(f, \varphi) = \rho(\varphi_0, \varphi) \leqslant \rho(\varphi_0, \varphi_1) + \rho(\varphi_1, \varphi_2) + \rho(\varphi_2, \varphi_3) + \ldots <$$
$$< d_0 + d_1 + d_2 + \ldots < d_0 + \frac{1}{2} d_0 + \frac{1}{4} d_0 + \ldots = 2d_0 = \varepsilon.$$

Условие (3). Пусть $\xi$ — произвольное положительное число. Выберем такое натуральное число $k$, что при $\alpha > k$

$$\rho(\varphi_\alpha, \varphi) < \xi$$

и, кроме того, диаметры всех открытых звезд симплициального разбиения $K_\alpha$ меньше $\xi$ [см. условие (е)]. Из условия (з) вытекает, что

$$\varphi_\alpha(X) \subset |K_\alpha|,$$

так что имеет место включение:

$$\varphi(X) \subset U(|K_\alpha|, \xi) \text{ при } \alpha > k.$$

Далее, в каждой открытой звезде симплициального разбиения $K_\alpha$ имеются точки множества $\varphi_\alpha(X)$ [см. условия (ж) и (з)], и потому при $\alpha > k$ имеем

$$|K_\alpha| \subset U(\varphi_\alpha(X), \xi) \subset U(\varphi(X), 2\xi).$$

Из доказанных включений следует, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} |K_\alpha| = \varphi(X).$$

Условие (4). Так как все числа $d_\alpha$ положительны, то из условия (в) вытекает, что $\delta(K_\alpha) > 0$.

Условие (5). Из условия (и) следует, что полиэдры $|K_{\alpha+1}|$, $|K_{\alpha+2}|, \ldots$,

а потому и их предел $\varphi(X)$, расположены в $\overline{U(|K_\alpha|, d_\alpha)}$, т. е. и подавно в $U(|K_\alpha|, \delta(K_\alpha))$ [см. условие (в)].

Условие (б) совпадает с условием (е).

Итак, из выполнимости условий (а) — (и) вытекает справедливость теоремы 3. Остается показать, что эти условия осуществимы.

Допустим, что для некоторого $i > 0$ все элементы $\beta_\alpha$, $K_\alpha$, $\varphi_\alpha$, $d_\alpha$, индексы $\alpha$ которых меньше $i$, уже построены и удовлетворяют условиям (а) — (и) (для $i = 1$ это выполнено, ибо элементы с индексом нуль нам известны: $\varphi_0 = f$, $d_0 = \frac{\varepsilon}{2}$) . Построим элементы $\beta_i$, $K_i$, $\varphi_i$, $d_i$. Для этого выберем положительное число $\zeta$ так, чтобы оно было меньше, чем $\frac{1}{9} d_{i-1}$ и чтобы были выполнены включения [см. (и)]:

$$U(|K_{i-1}|, 8\zeta) \subset U(|K_\beta|, d_\beta) \quad (\beta = 1, 2, \ldots, i-1).$$

В силу равномерной непрерывности отображения $\varphi_{i-1}$, существует такое положительное число $\eta$, что при $\rho(x, y)) < \eta$ $(x, y \in X)$ имеет место неравенство

$$\rho(\varphi_{i-1}(x), \varphi_{i-1}(y)) < \zeta.$$

Пусть $\beta_i$ — какое-либо $\eta$-покрытие компакта $X$, имеющее кратность $n+1$. В каждом элементе $M$ покрытия $\beta$ выберем произвольную точку $a_M$. При помощи $\zeta$-сдвига приведем систему точек $\{\varphi_{i-1}(a_M)\}$ в общее положение в пространстве $E$ и полученные точки будем обозначать через $\{b_M\}$ (таким образом, для любого элемента $M$ покрытия $\beta_i$ имеем: $\rho(\varphi_{i-1}(a_M), b_M) < \zeta$). Тогда точки $\{b_M\}$ можно принять за вершины нерва покрытия $\beta_i$ (ибо этот нерв является $n$-мерным симплициальным разбиением, а пространство $E$ имеет размерность $\geqslant 2n+1$). Наконец, при помощи $\zeta$-сдвига вершин приведем этот нерв в такое положение $K_i$, что $\delta(K_i) > 0$ [см. условие (*)]. Вершины нерва $K_i$ будем обозначать через $\{m_M\}$, так что для любого элемента $M$ покрытия $\beta_i$ мы имеем:

$$\rho(\varphi_{i-1}(a_M), m_M) < 2\zeta.$$

Пусть $\beta_i'$ — открытое покрытие компакта $X$, которое имеет ту же схему пересечений, что и покрытие $\beta_i$, и в которое покрытие $\beta_i$ вписано. Тогда можно определить *барицентрическое отображение* [см. ([7]), стр. 208] $\varphi_i$ компакта $X$ в полиэдр $|K_i|$.

Итак, элементы $\beta_i$, $K_i$, $\varphi_i$ построены. Прежде чем определить число $d_i$, мы покажем, что условия (г), (ж), (з), (и) выполнены при $\alpha = i$ (для меньших значений $\alpha$ они выполнены по предположению индукции).

Условие (ж) выполняется в силу проведенного построения.

Условие (з) выполняется в силу свойств барицентрического отображения.

Условие (и). Покажем прежде всего, что степень мелкости симплициального разбиения $K_i$ не превосходит $6\zeta$. Пусть $M$ и $N$ — такие элементы покрытия $\beta_i$, что отрезок $m_M m_N$ является одномерным симплексом разбиения $K_i$; тогда множество $M \cap N$ непусто. Выберем произвольную точку $c \in M \cap N$; тогда

$$\rho(a_M, c) < \eta, \quad \rho(a_N, c) < \eta,$$

и потому

$$\rho(\varphi_{i-1}(a_M),\ \varphi_{i-1}(c)) < \zeta, \quad \rho(\varphi_{i-1}(a_N),\ \varphi_{i-1}(c)) < \zeta.$$

Следовательно,

$$\rho(\varphi_{i-1}(a_M),\ \varphi_{i-1}(a_N)) < 2\zeta.$$

Так как, кроме того (согласно построению),

$$\rho(\varphi_{i-1}(a_M),\ m_M) < 2\zeta, \quad \rho(\varphi_{i-1}(a_N),\ m_N) < 2\zeta,$$

то

$$\rho(m_M,\ m_N) < 6\zeta.$$

Таким образом, длина каждого ребра (одномерного симплекса) разбиения $K_i$ меньше $6\zeta$.

Так как все вершины разбиения $K_i$ находятся от полиэдра $|K_{i-1}|$ на расстоянии, меньшем чем $2\zeta$ (ибо $\rho(\varphi_{i-1}(a_M),\ m_m) < 2\zeta$), а степень мелкости разбиения $K_i$ меньше $6\zeta$, то

$$|K_i| \subset U(|K_{i-1}|,\ 8\zeta),$$

и, в силу определения числа $\zeta$, условие (и) выполнено для $\alpha = i$.

Условие (г). Пусть $x$ — произвольная точка компакта $X$, а $M$ — содержащий ее элемент покрытия $\beta_i$. Тогда

$$\rho(x,\ a_M) < \eta$$

и потому

$$\rho(\varphi_{i-1}(x),\ \varphi_{i-1}(a_M)) < \zeta.$$

Отсюда мы заключаем, что

$$\rho(\varphi_{i-1}(x),\ m_M) < 3\zeta.$$

Так как, в силу уже доказанного условия (з), $\varphi_i(x) \in O(m_M)$ и так как степень мелкости разбиения $K_i$ меньше $6\zeta$, то

$$\rho(\varphi_i(x),\ m_M) < 6\zeta.$$

Таким образом,

$$\rho(\varphi_i(x),\ \varphi_{i-1}(x)) < 9\zeta < d_{i-1}$$

(в силу определения числа $\zeta$).

Перейдем теперь к определению числа $d_i$ и к проверке оставшихся условий.

Условия (а), (б), (в). Выберем положительное число $d_i$ таким образом, чтобы выполнялись условия (а), (б), (в) для $\alpha = i$ (заметим, что $\delta(K_i) > 0$).

Условие (е). Мы видели, что степень мелкости разбиения $K_i$ меньше $6\zeta$, т. е. и подавно меньше чем $d_{i-1}$. Поэтому справедливость условия (е) вытекает из условия (а).

Условие (д). На покрытие $\beta_\alpha$ налагалось каждый раз единственное условие: его степень мелкости должна была быть меньше некоторого (определяемого из построения) числа $\eta$. Поэтому ничто не мешает нам потребовать дополнительно, чтобы степень мелкости покрытия $\beta_i$ была по крайней мере вдвое меньше степени мелкости покрытия $\beta_{i-1}$. При таком выборе покрытий $\beta_\alpha$ условие (д), очевидно, будет выполнено.

Итак, теорема 3 полностью доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 3 видно, что заранее можно не требовать задания некоторой почти всюду положительной симплициальной функции. Достаточно, чтобы после построения нерва покрытия $\beta_i$ (в доказательстве этот нерв натягивался на точки $\{b_M\}$) можно было (при сколь угодно малом $\zeta$) $\zeta$-сдвигом вершин перевести этот нерв в такое симплициальное разбиение $K_i$, для которого по определенному правилу находится положительное число $\delta(K_i)$. Иначе говоря, можно не предполагать числа $\delta(K)$ заранее определенными для всех симплициальных разбиений, а считать, что положительные числа $\delta(K_1)$, $\delta(K_2), \ldots, \delta(K_i), \ldots$ определяются (с помощью некоторого индуктивного правила) постепенно, по мере построения симплициальных разбиений $K_1$, $K_2, \ldots, K_i, \ldots$.

Замечание 2. Если $E$ — гильбертово пространство (или какое-либо другое бесконечномерное банахово пространство), $X$ — произвольный компакт (не предполагаемый, вообще говоря, конечномерным), а $\delta$ — почти всюду положительная симплициальная функция, заданная на множестве всех расположенных в $E$ симплициальных разбиений (любой размерности), то теорема 3 остается справедливой. Доказательство также не меняется (только покрытия $\beta_i$ уже не предполагаются имеющими кратность $n+1$).

### 3. Отображения $n$-мерного компакта в эвклидовы пространства размерности $\leqslant n$

ЛЕММА 1. *Пусть $E$ — эвклидово пространство, $F$ — его $k$-мерное подпространство, а $K$ — некоторое $n$-мерное симплициальное разбиение, расположенное в $E$. Тогда сколь угодно малым сдвигом вершин можно перевести симплициальное разбиение $K$ в такое симплициальное разбиение $K'$, что прообраз каждой точки $x \in F$ при ортогональном проектировании $p: |K'| \to F$ является полиэдром размерности $\leqslant n-k$.*

Утверждение леммы эквивалентно тому, что несущая плоскость каждого симплекса разбиения $K'$ пересекается с ортогональным дополнением $H$ подпространства $F$ по подпространству размерности $\leqslant n-k$. Так как

$$\dim K' + \dim H = \dim E + (n-k)$$

(ибо $\dim H = \dim E - k$), то это требование будет выполнено, если несущая плоскость каждого симплекса разбиения $K'$ будет находиться в общем положении с подпространством $H$. Этого легко добиться сколь угодно малым сдвигом вершин комплекса $K$.

ЛЕММА 2. *Пусть $E$ — эвклидово пространство, $F$ — его подпространство, а $K$ — такое симплициальное разбиение, расположенное в $E$, что прообраз каждой точки $y \in F$ при ортогональном проектировании $p$: $|K| \to F$ является полиэдром размерности $\leqslant n-k$. Тогда при любом $\zeta > 0$ существует такая окрестность $U$ полиэдра $|K|$ в $E$, что прообраз каждой точки $y \in F$ при ортогональном проектировании $U \to F$ допускает открытое $\zeta$-покрытие кратности $\leqslant (n-k)+1$.*

Будем обозначать через $H_x$, где $x \in F$, ортогональное дополнение плоскости $F$, проходящее через точку $x$. Так как полиэдр $|K| \cap H_x$ име-

ет размерность $\leqslant n-k$, то существует замкнутое $\frac{\zeta}{3}$-покрытие $(\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$ этого полиэдра, имеющее кратность $\leqslant n-k+1$. Пусть $2\sigma$ — лебегово число [см. (7), стр. 61] этого покрытия; мы можем предполагать, что $\sigma < \frac{\zeta}{3}$. Тогда $\sigma$-окрестности $U(\Phi_i, \sigma)$ множеств $\Phi_i$ $(i=1, \ldots, s)$, взятые в подпространстве $H_x$, образуют систему кратности $\leqslant n-k+1$, причем диаметр каждого из открытых множеств $U(\Phi_i, \sigma)$ меньше $\zeta$. Обозначим через $V_i$ прообраз множества $U(\Phi_i, \sigma)$ при ортогональном проектировании $q: E \to H_x$ $(i=1, \ldots, s)$. Тогда $V_1, \ldots, V_s$ суть открытые множества пространства $E$, причем пересечение $V_i \cap H_y$ имеет (для любой точки $y \in F$) диаметр $< \zeta$, а открытое множество $V_1 \cup \ldots \cup V_s$ содержит полиэдр $|K| \cap H_x$. Так как полиэдр $|K'|$ компактен, то существует такое положительное число $\xi_x$, что

$$\overline{U(|K|, \xi_x)} \cap H_x \subset V_1 \cup \ldots \cup V_s.$$

Далее, существует такая окрестность $O_x$ точки $x$ в $F$, что при $y \in O_x$ имеем

$$\overline{U(|K|, \xi_x)} \cap H_y \subset V_1 \cup \ldots \cup V_s.$$

В силу компактности полиэдра $p(|K|)$, существует конечное число таких точек $x_1, \ldots, x_t$ этого полиэдра, что

$$p(|K|) \subset O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_t}.$$

Выберем такое положительное число $\bar{\xi}$, что

$$U(p(|K|), \bar{\xi}) \subset O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_t};$$

тогда $p(U(|K|, \bar{\xi})) \subset O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_t}$.

Наконец, обозначим через $\xi$ наименьшее из чисел $\bar{\xi}, \xi_{x_1}, \ldots, \xi_{x_t}$. Тогда $U = U(|K|, \xi)$ есть искомая окрестность полиэдра $|K'|$. Действительно, если $y \notin O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_t}$, то пересечение $U \cap H_y$ пусто (ибо $\xi \leqslant \bar{\xi}$). Если же $y \in O_{x_i}$, то

$$U \cap H_y \subset \overline{U(|K|, \xi_{x_i})} \cap H_y \subset (V_1 \cup \ldots \cup V_s) \cap H_y;$$

поэтому множества $V_1 \cap H_y, \ldots, V_s \cap H_y$ образуют открытое $\zeta$-покрытие множества $U \cap H_y$, имеющее кратность $\leqslant n-k+1$.

Перейдем к доказательству теоремы 2, сформулированной во введении.

Доказательство теоремы 2. Пусть $E$ — эвклидово пространство размерности $2n+1$, содержащее $F$ в качестве своего подпространства. Мы сейчас определим в $E$ почти всюду положительную симплициальную функцию $\delta$, заданную на множестве всех симплициальных разбиений размерности $\leqslant n$. Пусть $K$ — симплициальное разбиение размерности $\leqslant n$, расположенное в $E$, а $N$ — число симплексов этого разбиения. Если имеется точка $x \in F$, прообраз которой при ортогональном проектировании $p: |K| \to F$ является полиэдром размерности $> n-k$, то положим $\delta(K) = 0$. Если же все прообразы отображения $p: |K| \to F$

являются полиэдрами размерности $\leqslant n-k$, то выполнены условия леммы 2; поэтому, приняв $\zeta=\frac{1}{N}$, мы сможем найти такое $\xi>0$, что окрестность $U=U(|K|, \xi)$ обладает свойствами, указанными в лемме 2. Мы положим: $\delta(K)=\xi$. Таким образом, *если $\delta(K)>0$, то прообраз каждой точки $y \in F$ при ортогональном проектировании $U(|K|, \delta(K)) \to F$ допускает открытое $\frac{1}{N}$-покрытие кратности $\leqslant(n-k)+1$* (где $N$ — число симплексов разбиения $K$). Отсюда следует, что если $\delta(K)>0$, а $Y$ — компакт, расположенный в $\delta(K)$-окрестности полиэдра $|K|$, то прообраз каждой точки $y \in F$ при ортогональном проектировании $Y \to F$ допускает открытое (а следовательно, и замкнутое) $\frac{1}{N}$-покрытие кратности $\leqslant(n-k)+1$.

Из леммы 1 вытекает, что функция $\delta$ почти всюду положительна. Применяя теорему 3, мы найдем такое гомеоморфное отображение $\varphi$: $X \to E$ и такие симплициальные разбиения $\{K_\alpha\}$, что

$$\rho(f, \varphi)<\varepsilon, \quad \varphi(X)=\lim_{\alpha \to \infty}|K_\alpha|$$

и

$$\varphi(X) \subset U(|K_\alpha|, \delta(K_\alpha)) \quad (\alpha=1, 2, \ldots).$$

Покажем, что отображение $g=p \circ \varphi$ (где $p$ — ортогональное проектирование на подпространство $F$) является искомым. Соотношение $\rho(f, g)<\varepsilon$ очевидно. Остается доказать, что прообразы всех точек при отображении $g: X \to F$ имеют размерности $\leqslant n-k$. Пусть $\eta$ — произвольное положительное число; выберем такое натуральное число $\alpha$, что число $N$ симплексов разбиения $K_\alpha$ больше, чем $\frac{1}{\eta}$ (существование такого числа $\alpha$ вытекает при $n \geqslant 1$ из условия (6) теоремы 3). Тогда $\frac{1}{N}<\eta$, и так как

$$\varphi(X) \subset U(|K_\alpha|, \delta(K_\alpha)),$$

то прообразы всех точек при отображении $p$: $\varphi(X) \to F$ допускают (открытое или замкнутое) $\eta$-покрытие кратности $\leqslant n-k+1$. Ввиду произвольности положительного числа $\eta$, отсюда следует, что прообразы всех точек $y \in F$ при отображении $p: \varphi(X) \to F$ имеют размерности $\leqslant n-k$. Наконец, так как отображение $\varphi$ гомеоморфно, то прообраз точки $y \in F$ при отображении $g=p \circ \varphi$ гомеоморфен прообразу точки $y$ при отображении $p: \varphi(X) \to F$. Таким образом, прообразы всех точек при отображении $g: X \to F$ имеют размерности $\leqslant n-k$.

Теорема 2 полностью доказана.

## 4. Доказательство теоремы 1

ЛЕММА 3. *Пусть $E$ — эвклидово пространство размерности $\geqslant nk+n+k$, а $K$ — некоторое $n$-мерное симплициальное разбиение, вершины которого находятся в общем положении в пространстве $E$. Тогда если $T_0, T_1, \ldots, T_k$ — произвольные попарно не пересекающиеся замкнутые симплексы разбиения $K$, то никакие точки $x_0 \in T_0$, $x_1 \in T_1, \ldots, x_k \in T_k$ не лежат в одной $(k-1)$-мерной плоскости.*

Допустим противное: пусть некоторые точки $x_0 \in T_0$, $x_1 \in T_1, \ldots, x_k \in T_k$ лежат в одной $(k-1)$-мерной плоскости $L$. Размерность симплекса $T_i$ обозначим через $r_i$ $(i=0, 1, \ldots, k)$. Пусть $T_i'$ — какая-либо грань симплекса $T_i$, не содержащая точки $x_i$ и имеющая размерность $r_i - 1$ (если $r_i = 0$, то $T_i'$ есть пустое множество). Тогда несущая плоскость $H$ множеств $L$, $T_0'$, $T_1', \ldots, T_k'$ (т. е. наименьшей размерности плоскость, содержащая эти множества) содержит все симплексы $T_0$, $T_1, \ldots, T_k$, т. е. содержит

$$(r_0+1)+(r_1+1)+\ldots+(r_k+1)=r_0+r_1+\ldots+r_k+k+1$$

вершин разбиения $K$.

С другой стороны, размерность плоскости $H$ не превосходит числа

$$\dim L+\dim T_0'+\dim T_1'+\ldots+\dim T_k'+k+1=k-1+(r_0-1)+ \\ +(r_1-1)+\ldots+(r_k-1)+k+1=r_0+r_1+\ldots+r_k+k-1 \leqslant \\ \leqslant n(k+1)+k-1<\dim E$$

(ибо $r_i \leqslant n$), и потому $H$ не может содержать больше, чем

$$\dim H+1=r_0+r_1+\ldots+r_k+k$$

вершин разбиения $K$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

ЛЕММА 4. *Пусть $E$ — эвклидово пространство размерности $\geqslant nk+n+k$, а $K$ — некоторое $n$-мерное симплициальное разбиение, вершины которого находятся в общем положении в пространстве $E$. Тогда существует такое число $\xi>0$, что если $T_0$, $T_1, \ldots, T_k$ — произвольные попарно не пересекающиеся замкнутые симплексы разбиения $K$, то никакие точки $x_0 \in U(T_0, \xi)$, $x_1 \in U(T_1, \xi), \ldots$, $x_k \in U(T_k, \xi)$ не лежат в одной $(k-1)$-мерной плоскости.*

Эта лемма легко следует из предыдущей (доказательством «от противного»).

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Пусть $E$ — эвклидово пространство размерности $\geqslant nk+n+k$. Мы сейчас определим в $E$ почти всюду положительную симплициальную функцию $\delta$, заданную на множестве всех симплициальных разбиений размерности $\leqslant n$. Именно, если вершины разбиения $K$ не находятся в $E$ в общем положении, то мы положим

$$\delta(K)=0,$$

а если вершины разбиения $K$ находятся в $E$ в общем положении, то положим

$$\delta(K)=\min\left(\xi, \frac{1}{N}\right),$$

где $\xi$ — число, существование которого утверждается в лемме 4, а $N$ — число симплексов разбиения $K$. Так как сколь угодно малым сдвигом можно привести вершины любого разбиения в общее положение, то построенная симплициальная функция $\delta$ почти всюду положительна.

Применяя теорему 3, мы найдем такое (гомеоморфное) отображение

$\varphi : X \to E$ и такие симплициальные разбиения $\{K_\alpha\}$, что

$$\rho(f, \varphi) < \varepsilon, \quad \varphi(X) = \lim_{\alpha\to\infty} |K_\alpha|$$

и

$$\varphi(X) \subset U(|K_\alpha|, \delta(K_\alpha)) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Покажем, что отображение $\varphi$ является искомым. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_k$ — попарно различные точки компакта $X$. Тогда точки $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)$ также попарно различны; обозначим минимум попарных расстояний между этими точками через $\eta$ и пусть $\alpha$ — такое натуральное число, что степень мелкости разбиения $K_\alpha$ меньше $\frac{\eta}{4}$ и, кроме того, число симплексов разбиения $K_\alpha$ больше, чем $\frac{4}{\eta}$, т. е. $\delta(K_\alpha) < \frac{\eta}{4}$ (существование такого числа $\alpha$ в случае, если компакт $X$ содержит бесконечно много точек, вытекает из условия (6) теоремы 3). Так как

$$\varphi(X) \subset U(|K_\alpha|, \delta(K_\alpha)),$$

то в $K_\alpha$ существуют такие замкнутые симплексы $T_0, T_1, \ldots, T_k$, что

$$x_0 \in U(T_0, \delta(K_\alpha)), \; x_1 \in U(T_1, \delta(K_\alpha)), \; x_k \in U(T_k, \delta(K_\alpha)).$$

Легко видеть, что *симплексы* $T_0, T_1, \ldots, T_k$ *попарно не пересекаются.* В самом деле, если бы существовала точка $z \in T_i \cap T_j$, то, взяв точки $y_i \in T_i$ и $y_j \in T_j$, удовлетворяющие условию

$$\rho(\varphi(x_i), y_i) < \delta(K_\alpha), \quad \rho(\varphi(x_j), y_j) < \delta(K_\alpha),$$

мы получили бы противоречивую оценку:

$$\eta \leqslant \rho(\varphi(x_i), \varphi(x_j)), \leqslant \rho(\varphi(x_i), y) + \rho(y_i, z) + \rho(z, y_j) + \rho(y_j, \varphi(x_j)) <$$
$$< \delta(K_\alpha) + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} + \delta(K_\alpha) < \eta.$$

Но так как симплексы $T_0, T_1, \ldots, T_k$ попарно не пересекаются, а число $\delta(K_\alpha)$ выбрано так, что при $K = K_\alpha$, $\xi = \delta(K_\alpha)$ справедливо утверждение леммы 4, то точки $x_0, x_1, \ldots, x_k$ не лежат в одной $(k-1)$-мерной плоскости.

Итак, теорема 1 полностью доказана.

Почти дословным повторением доказательства теоремы 1 устанавливается следующая

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $f$ — непрерывное отображение произвольного компакта $X$ в гильбертово пространство $E$, а $\varepsilon$ — положительное число. Тогда существует $\infty$-регулярное отображение $\varphi : X \to E$, отстоящее от $f$ менее чем на $\varepsilon$* ($\infty$-регулярность отображения $\varphi$ означает, что оно является $k$-регулярным при любом $k$, т. е. что для любого конечного числа точек компакта $X$ их образы при отображении $\varphi$ являются вершинами симплекса в $E$).

Единственным изменением, которое нужно произвести в доказательстве теоремы 1, чтобы получить доказательство теоремы 4, является следующее: симплициальная функция $\delta$ оказывается заданной на множестве в с е х симплициальных разбиений (произвольной размерности) в $E$, а ссылка на теорему 3 заменяется ссылкой на замечание 2 к теореме 3.

### 5. Индексы расположения по модулю 2

ЛЕММА 5. *Пусть $E$ — эвклидово пространство, $T_0$, $T_1 \ldots, T_k$ — расположенные в нем попарно не пересекающиеся симплексы, вершины которых (в своей совокупности) находятся в $E$ в общем положении, а $s$ — сумма размерностей этих симплексов. Тогда при $s \leqslant \dim E - k$ не существует $(k-1)$-мерной плоскости в $E$, пересекающейся со всеми симплексами $T_0$, $T_1, \ldots, T_k$. При $s = \dim E - k + 1$ может существовать не более одной такой $(k-1)$-мерной плоскости, причем эта плоскость (если она существует) пересекается с каждым из симплексов $T_i$ в единственной точке, являющейся внутренней точкой симплекса $T_i$.*

Первое утверждение доказывается дословно по той же схеме, что и лемма 3. Из этого утверждения сразу же следует, что при $s = \dim E - k + 1$ каждая $(k-1)$-мерная плоскость, пересекающая все симплексы $T_i$, должна пересекать их только во внутренних точках и потому не может пересекать какой-либо из этих симплексов более чем в одной точке (т. е. не может иметь с каким-либо из симплексов $T_i$ общий отрезок).

Остается доказать, что при $s = \dim E - k + 1$ не может существовать двух различных $(k-1)$-мерных плоскостей $L$ и $L'$, пересекающихся со всеми симплексами $T_0$, $T_1, \ldots, T_k$. Допустим, что такие плоскости $L$ и $L'$ существуют. Без ограничения общности мы можем считать (изменив, если нужно, нумерацию симплексов), что при значениях $i$, меньших некоторого $q$, плоскости $L$ и $L'$ пересекаются с симплексом $T_i$ в одной и той же точке $x_i$, а при $i \geqslant q$ плоскости $L$ и $L'$ пересекаются с $T_i$ в двух различных точках $x_i$, $x_i'$ (если с каждым из симплексов $T_i$ плоскости $L$ и $L'$ пересекаются в различных точках, то $q = 0$). Так как плоскости $L$ и $L'$ различны, то хотя бы с одним из симплексов $T_i$ они пересекаются в различных точках, т. е. $q \leqslant k$. Обозначим через $r_i$ размерность симплекса $T_i$; далее, при $i < q$ обозначим через $T_i'$ произвольную $(r_i - 1)$-мерную грань симплекса $T_i$ (эта грань не содержит точки $x_i$, так как эта точка является внутренней), а при $i \geqslant q$ через $T_i''$ обозначим какую-либо $(r_i - 2)$-мерную грань симплекса $T_i$, несущая плоскость которой не пересекается с прямой, проходящей через точки $x_i$ и $x_i'$. Тогда несущая плоскость $H$ всех множеств $L$, $L'$, $T_i'$, $T_j''$ $(i < q,\ j \geqslant q)$ содержит все симплексы $T_0$, $T_1, \ldots, T_k$, т. е. содержит

$$(r_0 + 1) + (r_1 + 1) + \ldots + (r_k + 1) = s + k + 1$$

точек (вершин этих симплексов), находящихся в общем положении.

С другой стороны, при $q > 0$ точки $x_0, \ldots, x_{q-1}$ не лежат в одной $(q-2)$-мерной плоскости, так как иначе вершины симплексов $T_0, \ldots, T_{q-1}$ не находились бы в общем положении. Поэтому плоскости $L$ и $L'$ пересекаются самое меньшее по $(q-1)$-мерной плоскости (это верно и при $q = 0$), и потому несущая плоскость множеств $L$ и $L'$ имеет размерность

$$\leqslant (k-1) + (k-1) - (q-1) = 2k - q - 1,$$

а размерность плоскости $H$ не превосходит числа

$$2k-q-1+\sum_{i=0}^{q-1}(r_i-1)+\sum_{i=q}^{k}(r_i-2)+k+1=s+k-2<\dim E.$$

Но это противоречит тому, что в плоскости $H$ имеются $s+k+1$ точек, находящихся в общем положении. Лемма доказана.

Если при выполнении условий леммы 5 имеет место случай $s=\dim E-k+1$, то мы будем писать $\chi(T_0, T_1, \ldots, T_k)=1$ или 0, в зависимости от того, существует или не существует $(k-1)$-мерная плоскость, пересекающая все симплексы $T_0, T_1, \ldots, T_k$. Мы будем считать, что $\chi(T_0, T_1, \ldots, T_k)$ есть вычет по модулю 2.

Далее, пусть $z_0, z_1, \ldots, z_k$ — цепи пространства $E$ по модулю 2, сумма размерностей которых равна $\dim E-k+1$. Предположим, кроме того, что тела этих цепей попарно не пересекаются, а все точки, являющиеся вершинами симплексов, входящих в эти цепи, находятся (в своей совокупности) в общем положении. При этих условиях мы определим вычет $\chi(z_0, z_1 \ldots, z_k)$ по модулю 2, полагая

$$\chi(z_0, z_1, \ldots, z_k)=\sum_{T_i\in z_i}\chi(T_0, T_1, \ldots, T_k),$$

где суммирование распространено на всевозможные системы симплексов $(T_0, T_1, \ldots, T_k)$, для которых $T_i$ входит в цепь $z_i$ с коэффициентом 1 $(i=0, 1, \ldots, k)$. Очевидно, что вычет $\chi(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ не меняется при любых перестановках аргументов $z_0, z_1, \ldots, z_k$.

ЛЕММА 6. *Пусть $F$ — эвклидово пространство, $T_1, T_2, \ldots, T_k$ — расположенные в нем попарно не пересекающиеся симплексы, вершины которых (в своей совокупности) находятся в $F$ в общем положении, и пусть сумма размерностей этих симплексов равна* $\dim F-k+1$. *Обозначим через $R_i$ несущую плоскость симплекса $T_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, а через $T$ — симплекс, натянутый на все вершины всех симплексов $T_1, \ldots, T_k$. Поставим задачу нахождения таких точек $m_1\in R_1, m_2\in R_2, \ldots, m_k\in R_k$, что $(k-1)$-мерная плоскость, определяемая этими точками, содержит заданную точку $x\in F$. Наконец, обозначим через $F_\rho$ $(0\leqslant\rho\leqslant\infty)$ множество тех точек $x\in F$, для которых поставленная задача имеет ровно $\rho$ решений $m_1\in T_1, \ldots, m_k\in T_k$. Тогда $F=F_0\cup F_1\cup F_\infty$, причем $F_\infty$ содержится в объединении несущих плоскостей всех* $(\dim F-2)$-*мерных граней симплекса $T$, а $F_0=H\setminus F_\infty$, где $H$ — объединение конечного числа гиперплоскостей пространства $F$.*

Для доказательства обозначим вершины симплекса $T_i$ через

$$a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \ldots, a_{r_i}^{(i)}, \quad i=1, \ldots, k.$$

Так как размерность симплекса $T$ равна $\dim F$, то во всем пространстве $F$ можно ввести барицентрические координаты $\lambda_j^{(i)}$, соответствующие вершинам $a_j^{(i)}$ $(i=1, \ldots, k;\ j=0, 1, \ldots, r_i)$. Пусть $m_i$ — некоторая точка плоскости $R_i$ $(i=1, \ldots, k)$, а $\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \ldots, \mu_{r_i}^{(i)}$ — барицентрические координаты этой точки относительно вершин симплекса $T_i$. Если мы предположим, что точка $x\in F$ с барицентрическими координатами $\lambda_j^{(i)}$ лежит

в $(k-1)$-мерной плоскости, определяемой точками $m_1 \in R_1, \ldots, m_k \in R_k$, то, обозначая через $\nu_1, \ldots, \nu_k$ барицентрические координаты точки $x$ относительно точек $m_1, \ldots, m_k$, мы легко найдем:

$$\lambda_j^{(i)} = \mu_j^{(i)}\nu_i, \quad \sum_{i,\, j}\lambda_j^{(i)} = 1, \quad \sum_j \mu_j^{(i)} = 1, \quad \sum_i \nu_i = 1. \tag{1}$$

Таким образом, поставленная в формулировке леммы 6 задача эквивалентна решению системы (1) при заданных координатах $\lambda_j^{(i)}$, определяющих точку $x \in F$. Суммируя по $j$, получаем из соотношений (1):

$$\sum_{j=0}^{r_i}\lambda_j^{(i)} = \nu_i \cdot \sum_{j=0}^{r_i}\mu_j^{(i)} = \nu_i \cdot 1 = \nu_i \quad (i = 1, \ldots, k),$$

так что неизвестные $\nu_i$ из системы (1) определяются однозначно. После этого должны определяться неизвестные $\mu_j^{(i)}$. Для тех индексов $i$, для которых $\nu_i \neq 0$, неизвестные $\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \ldots, \mu_{r_i}^{(i)}$ однозначно определяются из уравнений

$$\lambda_j^{(i)} = \mu_j^{(i)}\nu_i.$$

Далее, для тех индексов $i$, для которых $r_i = 0$, неизвестное $\mu_0^{(i)}$ (единственное неизвестное с индексом $i$ наверху) также определяется однозначно, так как соотношение

$$\sum_{j=0}^{r_i}\mu_j^{(i)} = 1$$

принимает в этом случае вид

$$\mu_0^{(i)} = 1.$$

Этим и исчерпываются случаи однозначной разрешимости (т. е. случаи $\rho = 1$) уравнений (1). Действительно, если существует такое $i\,(1 \leqslant i \leqslant k)$, что $\nu_i = 0$, $r_i > 0$, но не все числа $\lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_{r_i}^{(i)}$ равны нулю, то уравнения

$$\lambda_j^{(i)} = \mu_j^{(i)}\nu_i$$

неразрешимы (т. е. $\rho = 0$). Если же, наконец, для всех тех значений $i$, для которых $\nu_i = 0$, $r_i > 0$, выполнены соотношения

$$\lambda_0^{(i)} = \lambda_1^{(i)} = \ldots = \lambda_{r_i}^{(i)} = 0,$$

то уравнения

$$\lambda_j^{(i)} = \mu_j^{(i)}\nu_i, \quad \sum_j \mu_j^{(i)} = 1$$

(первое из которых становится тождеством) имеют бесконечно много решений (т. е. $\rho = \infty$). Итак,

$$F = F_0 \cup F_1 \cup F_\infty,$$

причем множество

$$F_0 \cup F_\infty = H$$

состоит из тех точек $x$, для которых выполнено хотя бы одно из соотношений

$$\lambda_0^{(i)} + \lambda_1^{(i)} + \ldots + \lambda_{r_i}^{(i)} = 0, \quad r_i > 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Таким образом, множество $H$ определяется конечным числом (не более чем $k$) линейных уравнений, т. е. является объединением конечного числа гиперплоскостей пространства $F$. Наконец, в множество $F_\infty$ могут входить лишь такие точки, для которых при некотором $i\,(1 \leqslant i \leqslant k)$ выполнены соотношения

$$\lambda_0^{(i)} = \lambda_1^{(i)} = \ldots = \lambda_{r_i}^{(i)} = 0, \quad r_i > 0,$$

а эти соотношения означают, что точка $x$ лежит в несущей плоскости некоторой грани симплекса $T$, причем размерность этой грани равна

$$\dim T - (r_i + 1) \leqslant \dim F - 2.$$

ЛЕММА 7. *Пусть $E$ — эвклидово пространство, $T_0, T_1, \ldots, T_k$ — расположенные в нем попарно не пересекающиеся симплексы, вершины которых (в своей совокупности) находятся в $E$ в общем положении, и пусть сумма размерностей этих симплексов равна* $(\dim E - k) + 2$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\chi(\Delta T_0, T_1, \ldots, T_k) + \chi(T_0, \Delta T_1, \ldots, T_k) + \ldots + \chi(T_0, T_1, \ldots, \Delta T_k) = 0, \qquad (2)$$

*где симплексы $T_0, T_1, \ldots, T_k$ и их границы рассматриваются как цепи по модулю* 2.

Если все симплексы $T_0, T_1, \ldots, T_k$ нульмерны, то соотношение (2) очевидно (ибо $\Delta T_0 = \Delta T_1 = \ldots = \Delta T_k = 0$). Пусть поэтому хотя бы один из симплексов $T_0, T_1, \ldots, T_k$ имеет положительную размерность. Так как под знаком $\chi$ можно производить любую перестановку аргументов, то мы можем без ограничения общности предполагать, что $\dim T_0 > 0$. Тогда сумма размерностей симплексов $T_1, T_2, \ldots, T_k$ равна

$$\dim E - k + 2 - \dim T_0,$$

а общее число вершин этих симплексов равно

$$\dim E + 2 - \dim T_0 \leqslant \dim E + 1.$$

Обозначим через $T$ симплекс, натянутый на вершины всех симплексов $T_1, T_2, \ldots, T_k$, а через $F$ — несущую плоскость симплекса $T$. Размерность плоскости $F$ равна

$$\dim E + 1 - \dim T_0;$$

для симплексов $T_1, T_2, \ldots, T_k$, расположенных в плоскости $F$, выполнены все условия леммы 6.

Предположим, что существует хотя бы одна $(k-1)$-мерная плоскость $L$, пересекающая все (замкнутые) симплексы $T_0, T_1, \ldots, T_k$ (если такой плоскости не существует, то соотношение (2) очевидно). Тогда плоскость $L$ имеет с $F$ $k$ общих точек, находящихся в общем положении (а именно, точки пересечения плоскости $L$ с симплексами $T_1, T_2, \ldots, T_k$). Поэтому $L \subset F$; так как, кроме того, $L \cap T_0$ непусто, то плоскость $F$ пересекается с несущей плоскостью $R_0$ симплекса $T_0$. Плоскости $R_0$ и $F$ находятся в общем положении (так как вершины симплексов $T_0$ и $T$ нахо-

дятся в общем положении), и поэтому их пересечение имеет размерность

$$\dim R_0 + \dim F - \dim E = \dim T_0 + (\dim E + 1 - \dim T_0) - \dim E = 1.$$

Итак, $R_0 \cap F$ есть прямая линия; обозначим ее через $P_0$. По построению ясно, что любая $(k-1)$-мерная плоскость, пересекающая все плоскости $R_0, R_1, \ldots, R_k$ (в частности, пересекающая все симплексы $T_0, T_1, \ldots, T_k$), лежит в $F$ и потому может пересекаться с плоскостью $R_0$ только в точках прямой $P_0$.

Прямая $P_0$ не пересекается с несущими плоскостями $(\dim F - 2)$-мерных граней симплекса $T$ (ибо $P_0 \subset R_0$, а плоскость $R_0$, в силу общего расположения вершин, не пересекается с несущими плоскостями $(\dim F - 2)$-мерных граней симплекса $T$), т. е., в обозначениях леммы 6, $P_0$ не пересекается с $F_\infty$. Поэтому через каждую точку прямой $P_0$ проходит не более одной $(k-1)$-мерной плоскости, пересекающейся со всеми плоскостями $R_1, R_2, \ldots, R_k$. Далее, прямая $P_0$ не содержится целиком в множестве $H$, построенном в лемме 6. Действительно, включение

$$P_0 \subset H = F_0 \cup F_\infty$$

означало бы (в силу пустоты множества $P_0 \cap F_\infty$), что $P_0 \subset F_0$, т. е. что не существует $(k-1)$-мерной плоскости, пересекающейся со всеми плоскостями $R_0, R_1, \ldots, R_k$; между тем такая плоскость (а именно $L$) существует. Таким образом, прямая $P_0$ пересекается с каждой из гиперплоскостей, входящих в $H$, не более чем в одной точке, т. е. пересечение $H \cap P_0$ состоит из конечного числа точек.

Поставим следующую задачу: для заданной точки $x \in P_0$ найти такие точки $m_i(x) \in R_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, что все точки $x, m_1(x), \ldots, m_k(x)$ лежат в одной $(k-1)$-мерной плоскости. Тогда сказанное выше означает, что на прямой $P_0$ существует лишь конечное число точек (будем называть их «исключительными»), для которых эта задача неразрешима, а для всех остальных точек прямой $P_0$ указанная задача однозначно разрешима.

Рассмотрим теперь вопрос о зависимости точек $m_i(x)$ от точки $x \in P_0$. Напишем параметрические уравнения прямой $P_0$ в плоскости $F$:

$$\lambda_j^{(i)} = c_j^{(i)} + p_j^{(i)} \cdot t \quad (-\infty < t < +\infty, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 0, 1, \ldots, r_i).$$

Тогда, рассматривая задачу нахождения точек $m_1(x), \ldots, m_k(x)$ как задачу решения рассматривавшейся выше системы (1), мы легко найдем, что неизвестные $\nu_i$, однозначно определяемые системой (1), также являются линейными функциями параметра $t$. Наконец, неизвестные $\mu_j^{(i)}$, являющиеся барицентрическими координатами искомых точек $m_i(x)$, определяются из соотношений

$$\lambda_j^{(i)} = \mu_j^{(i)} \nu_i$$

как дробно-линейные функции параметра $t$. Исключительные точки прямой $P_0$ соответствуют тем значениям параметра $t$, для которых некоторые из этих дробно-линейных функций обращаются в бесконечность, т. е. тем значениям параметра $t$, при приближении к которым хотя бы

одна из точек $m_i(x)$ удаляется в бесконечность. Так как координаты $\mu_0^{(i)}, \mu_1^{(i)}, \ldots, \mu_{r_i}^{(i)}$ точки $m_i(x)$ дробно-линейно зависят от параметра $t$, то либо точка $m_i(x)$ остается неподвижной при изменении $x$ (это будет, если указанные координаты не зависят в действительности от $t$), либо же точка $m_i(x)$ описывает некоторую прямую линию $P_i$ в плоскости $R_i$, причем отображение $x \to m_i(x)$ прямой $P_0$ на $P_i$ является проективным. Следовательно, если точка $x$ монотонно перемещается по прямой $P_0$, не проходя через исключительные точки, то точка $m_i(x)$ либо стоит на месте, либо монотонно перемещается по прямой $P_i \subset R_i$.

Исключительные точки разбивают прямую $P_0$ на конечное число интервалов (среди которых имеются один или два бесконечных интервала), которые мы условимся называть *допустимыми интервалами*. Концами этих интервалов являются исключительные точки прямой $P_0$ и точки $t = -\infty$, $t = +\infty$ этой прямой. Поэтому, когда точка $x$, двигаясь по некоторому допустимому интервалу, приближается к какому-нибудь концу этого интервала, одна из точек $x, m_1(x), \ldots, m_k(x)$ уходит в бесконечность.

Пусть $x \in P_0$ — такая точка, что точки $x, m_1(x), \ldots, m_k(x)$ принадлежат соответственно симплексам $T_0, T_1, \ldots, T_k$. Согласно лемме 5, не более чем одна из этих точек может лежать на границе соответствующего симплекса, т. е. все точки $x, m_1(x), \ldots, m_k(x)$, кроме, может быть, одной, являются внутренними точками соответствующих симплексов. Допустим, что точка $m_i(x)$ лежит на границе симплекса $T_i$ (а остальные точки являются внутренними). Тогда из леммы 5 следует, что точка $m_i(x)$ является внутренней точкой некоторой $(r_i - 1)$-мерной грани $T_i'$ симплекса $T_i$ (где $r_i$ — размерность симплекса $T_i$). Из общности положения вершин симплексов $T_0, T_1, \ldots, T_{i-1}, T_i', T_{i+1}, \ldots, T_k$ вытекает, что $(k-1)$-мерная плоскость $L_x$, содержащая все точки $x, m_1(x), \ldots$ $\ldots, m_k(x)$, не может пересекаться с симплексом $T_0$ более чем в одной точке, и потому никакая точка прямой $P_0$, кроме рассматриваемой точки $x$, не принадлежит плоскости $L_x$. Но $L_x$ есть единственная плоскость, пересекающая все симплексы $T_0, \ldots, T_{i-1}, T_i', T_{i+1}, \ldots, T_k$ (лемма 5). А так как для точки $x' \in P_0$, достаточно близкой к $x$, все точки $x', m_1(x'), \ldots, m_{i-1}(x'), m_{i+1}(x'), \ldots, m_k(x')$ будут (по непрерывности) внутренними точками соответствующих симплексов, то $(k-1)$-мерная плоскость, содержащая точки $x', m_1(x'), \ldots, m_k(x')$, не может пересекаться с симплексом $T_i'$, т. е. точка $m_i(x')$ не лежит в грани $T_i'$ симплекса $T_i$, т. е. является либо внутренней, либо внешней точкой симплекса $T_i$. Если точка $m_i(x')$ является внешней по отношению к симплексу $T_i$, то, взяв такую, достаточно близкую к $x$, точку $x'' \in P_0$, что $x'$ и $x''$ расположены по разные стороны от $x$, мы получим, что все точки $x'', m_1(x''), \ldots, m_k(x'')$ являются внутренними точками соответствующих симплексов. Итак, если точки $x, m_1(x), \ldots, m_k(x)$ принадлежат соответственно симплексам $T_0, T_1, \ldots, T_k$, то как угодно близко к $x$ найдется такая точка $\bar{x}$, что все точки $\bar{x}, m_1(\bar{x}), \ldots, m_k(\bar{x})$ являются внутренними точками этих симплексов.

Пусть $I$ — один из допустимых интервалов прямой $P_0$. Если на интервале $I$ имеется такая точка $x$, что точки $x$, $m_1(x), \ldots, m_k(x)$ принадлежат симплексам $T_0, T_1, \ldots, T_k$, то найдется и такая точка $\bar{x} \in I$, что все точки $\bar{x}$, $m_1(\bar{x}), \ldots, m_k(\bar{x})$ являются внутренними точками этих симплексов. Обозначим концы интервала $I$ через $a$ и $b$ и допустим, что переменная точка $\tilde{x}$ монотонно движется по интервалу $I$ от точки $\bar{x}$ по направлению к концу $a$. Тогда каждая из точек $\tilde{x}$, $m_1(\tilde{x}), \ldots, m_k(\tilde{x})$ либо неподвижна, либо монотонно перемещается по некоторой прямой линии, причем при $\tilde{x} \to a$ хотя бы одна из этих точек уходит в бесконечность. Отсюда, в силу выпуклости любого симплекса, вытекает, что на интервале $(\bar{x}, a)$ существует такая точка $x_a$, что при $\tilde{x} \in [\bar{x}, x_a]$ все точки $\tilde{x}$, $m_1(\tilde{x}), \ldots, m_k(\tilde{x})$ принадлежат, соответственно, симплексам $T_0, T_1, \ldots, T_k$, а при $\tilde{x} \in (x_a, a)$ это не выполняется. Ясно, что при $\tilde{x} \in [\bar{x}, x_a)$ все точки $\tilde{x}$, $m_1(\tilde{x}), \ldots, m_k(\tilde{x})$ являются внутренними точками рассматриваемых симплексов, а при $\tilde{x} = x_a$ одна из них (и только одна, как было отмечено ранее) становится граничной. Аналогично, если точка $\tilde{x}$ монотонно движется по интервалу $I$ от точки $\bar{x}$ по направлению к концу $b$, то она лишь один раз пройдет через такое положение $x_b$, что все точки $x_b$, $m_1(x_b), \ldots, m_k(x_b)$ принадлежат соответственно симплексам $T_0, T_1, \ldots, T_k$, причем одна из них является граничной точкой симплекса. Итак, на интервале $I$ имеется ровно две таких точки $\tilde{x}$ (а именно, $\tilde{x} = x_a$, $\tilde{x} = x_b$), что точки $\tilde{x}$, $m_1(\tilde{x}), \ldots, m_k(\tilde{x})$ принадлежат симплексам $T_0, T_1, \ldots, T_k$, причем одна из этих точек является граничной. На произвольном же допустимом интервале таких точек имеется четное число (0 или 2). Значит и общее количество таких точек четно. Но так как только эти точки следует принимать во внимание при вычислении левой части соотношения (2), указанного в лемме 7, а каждая такая точка дает в левой части слагаемое, равное единице, то соотношение (2) справедливо (по модулю 2).

ЛЕММА 8. *Пусть $z_0, z_1, \ldots, z_k$ — цепи пространства $E$ по модулю 2, сумма размерностей которых равна $\dim E - k + 2$. Предположим, кроме того, что тела этих цепей попарно не пересекаются, а все точки, являющиеся вершинами симплексов, входящих в эти цепи, находятся (в своей совокупности) в общем положении. Тогда справедливо соотношение* $\chi(\Delta z_0, z_1, \ldots, z_k) + \chi(z_0, \Delta z_1, \ldots, z_k) + \ldots + \chi(z_0, z_1, \ldots, \Delta z_k) = 0.$

Это утверждение непосредственно вытекает из леммы 7.

Пусть $K$ — некоторое симплициальное разбиение, а $f$ — непрерывное отображение полиэдра $|K|$ в эвклидово пространство $E$. Отображение $f$ будем называть *правильным*, если, каковы бы ни были попарно не пересекающиеся замкнутые симплексы $T_0, T_1, \ldots, T_k$ разбиения $K$, сумма размерностей которых $\leqslant \dim E - k$, не существует $(k-1)$-мерной плоскости в $E$, пересекающейся со всеми множествами $f(T_0)$, $f(T_1), \ldots, f(T_k)$. Легко видеть, что, каковы бы ни были непрерывное отображение $f : |K| \to E$ и положительное число $\varepsilon$, существует правильное отображение $g : |K| \to E$, удовлетворяющее условию

$$\rho(f, g) < \varepsilon.$$

(Достаточно взять триангуляцию пространства $E$, вершины которой находятся в общем положении, а степень мелкости меньше $\varepsilon$, и рассмотреть симплициальную аппроксимацию отображения $f$.) Далее, всякое отображение, достаточно близкое к правильному, само является правильным. Наконец, если $f:|K|\to E$ — правильное отображение, то существует такое число $\delta>0$, что, каковы бы ни были попарно не пересекающиеся замкнутые симплексы $T_0, T_1, \ldots, T_k$ разбиения $K$, сумма размерностей которых $\leqslant \dim E - k$, не существует $(k-1)$-мерной плоскости в $E$, пересекающейся со всеми множествами $U(f(T_0), \delta)$, $U(f(T_1), \delta), \ldots, U(f(T_k), \delta)$. Такое число $\delta$ назовем *степенью правильности* отображения $f$.

Пусть $f:|K|\to E$ — правильное отображение и $\delta$ — его степень правильности. Возьмем триангуляцию $E'$ пространства $E$, вершины которой находятся в общем положении, а степень мелкости меньше $\delta$, и допустим, что $K'$ — настолько мелкое подразделение разбиения $K$, что существует симплициальное отображение $g:K'\to E'$, являющееся симплициальной аппроксимацией отображения $f$. Пусть, далее, $T_0, T_1, \ldots, T_k$ — попарно не пересекающиеся замкнутые симплексы разбиения $K$, сумма размерностей которых равна

$$(\dim E - k)+1.$$

Обозначим через $z_i$ $(i=0, 1, \ldots, k)$ цепь разбиения $K'$ по модулю 2, в которую все симплексы размерности $\dim T_i$, содержащиеся в $T_i$, входят с коэффициентом 1, а все остальные симплексы — с коэффициентом 0. Тогда цепи

$$g_*(z_0),\ g_*(z_1), \ldots,\ g_*(z_k)$$

попарно не пересекаются, ибо они расположены соответственно в множествах

$$U(f(T_0), \delta),\ U(f(T_1), \delta), \ldots,\ U(f(T_k), \delta),$$

которые попарно не пересекаются. Кроме того, все вершины цепей

$$g_*(z_0),\ g_*(z_1), \ldots,\ g_*(z_k)$$

находятся (в своей совокупности) в общем положении, а сумма размерностей этих цепей равна $\dim E - k + 1$. Поэтому определен вычет

$$\chi(g_*(z_0),\ g_*(z_1), \ldots,\ g_*(z_k))$$

по модулю 2.

Нетрудно видеть, что этот вычет не зависит от случайностей построения, а всецело определяется (при заданных $K$, $f$) симплексами $T_0, T_1, \ldots, T_k$ разбиения $K$. В самом деле, пусть $\overline{K}'$ — другое подразделение разбиения $K$, а $\bar{g}:\overline{K}'\to\overline{E}'$ — симплициальная аппроксимация отображения $f$. Возьмем цепи $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k$, аналогичные цепям $z_0, z_1, \ldots, z_k$. Тогда цепи

$$\bar{g}_*(\bar{z}_0),\ \bar{g}_*(\bar{z}_1), \ldots,\ \bar{g}_*(\bar{z}_k)$$

соответственно гомотопны цепям

$$g_*(z_0),\ g_*(z_1), \ldots,\ g_*(z_k)$$

в окрестностях

$$U(f(T_0), \delta),\ U(f(T_1), \delta), \ldots,\ U(f(T_k), \delta).$$

Более точно, существуют такие цепи $u_0, u_1, \ldots, u_k$, лежащие в

$$U(f(\dot{T}_0), \delta),\ U(f(\dot{T}_1), \delta), \ldots, U(f(\dot{T}_k), \delta),$$

что

$$\bar{g}_*(\bar{z}_i) + g_*(z_i) + u_i \sim 0$$

в $U(f(T_i), \delta)$, т. е.

$$\bar{g}_*(\bar{z}_i) + g_*(z_i) + u_i = \Delta v_i, \quad (v_i \subset U(f(T_i), \delta), \quad i = 0, 1, \ldots, k).$$

Мы можем при этом предполагать, что все вершины разбиений $E'$, $\bar{E}'$ и цепей $u_i$, $v_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ находятся (в совокупности) в общем положении, так как в цепи $g_*(z_i)$, $\bar{g}_*(\bar{z}_i)$ входит лишь конечное число симплексов, и потому достаточно малый сдвиг всех вершин не изменит значений символов

$$\chi(g_*(z_0), \ldots, g_*(z_k)), \quad \chi(\bar{g}_*(\bar{z}_0), \ldots, \bar{g}_*(\bar{z}_k)).$$

В силу леммы 8, мы имеем:

$$\chi(\Delta v_0, g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)) = \chi(v_0, \Delta g_*(z_1), g_*(z_2), \ldots, g_*(z_k)) + \\ + \chi(v_0, g_*(z_1), \Delta g_*(z_2), \ldots, g_*(z_k)) + \ldots + \\ + \chi(v_0, g_*(z_1), g_*(z_2), \ldots, \Delta g_*(z_k)) = \chi(v_0, g_*(\Delta z_1), g_*(z_2), \ldots, g_*(z_k)) + \\ + \chi(v_0, g_*(z_1), g_*(\Delta z_2), \ldots, g_*(z_k)) + \ldots + \chi(v_0, g_*(z_1), g_*(z_2), \ldots, g_*(\Delta z_k)).$$

Но последнее выражение равно нулю. Действительно, из включений

$$v_0 \subset U(f(T_0), \delta), \quad g_*(\Delta z_1) \subset U(f(\dot{T}_1), \delta),$$
$$g_*(z_2) \subset U(f(T_2), \delta), \ldots, g_*(z_k) \subset U(f(T_k), \delta)$$

вытекает (в силу определения числа $\delta$), что не существует $(k-1)$-мерной плоскости, пересекающейся с телами всех этих цепей, т. е.

$$\chi(v_0, g_*(\Delta z_1), g_*(z_2), \ldots, g_*(z_k)) = 0.$$

Аналогично показывается, что и все остальные слагаемые равны нулю.

Итак,

$$\chi(\Delta v_0, g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)) = 0,$$

т. е.

$$\chi(\bar{g}_*(\bar{z}_0), g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)) + \chi(g_*(z_0), g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)) + \\ + \chi(u_0, g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)) = 0.$$

Последнее слагаемое в левой части этого равенства обращается в нуль, так как

$$u_0 \subset U(f(\dot{T}_0), \delta), \quad g_*(z_1) \subset U(f(T_1), \delta), \ldots, g_*(z_k) \subset U(f(T_k)\ \delta).$$

Следовательно,

$$\chi(\bar{g}_*(\bar{z}_0), g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)) = \chi(g_*(z_0), g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)),$$

т. е. замена цепи $g_*(z_0)$ цепью $\bar{g}_*(\bar{z}_0)$ не изменяет значения символа

$$\chi(g_*(z_0), g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)).$$

Аналогично, заменяя цепи $g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)$ последовательно цепями $\bar{g}_*(\bar{z}_1), \ldots, \bar{g}_*(\bar{z}_k)$, мы найдем, наконец, что

$$\chi(\bar{g}_*(\bar{z}_0), \bar{g}_*(\bar{z}_1), \ldots, \bar{g}_*(\bar{z}_k)) = \chi(g_*(z_0), g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)).$$

Таким образом, вычет $\chi(g_*(z_0), g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k))$ не зависит от случайностей построения, и мы можем положить:

$$\chi(f(T_0), f(T_1), \ldots, f(T_k)) = \chi(g_*(z_0), g_*(z_1), \ldots, g_*(z_k)).$$

Легко устанавливается следующая

ЛЕММА 9. *Пусть $K$ — некоторое симплициальное разбиение, а $f$ — правильное отображение полиэдра $|K|$ в эвклидово пространство $E$. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что*

$$\chi(f(T_0), f(T_1), \ldots, f(T_k)) = \chi(g(T_0), g(T_1), \ldots, g(T_k))$$

*для любого отображения $g: |K| \to E$, удовлетворяющего условию $\rho(f, g) < \varepsilon$, и любых попарно не пересекающихся замкнутых симплексов $T_0, T_1, \ldots, T_k$ разбиения $K$, сумма размерностей которых равна $\dim E - k + 1$.*

## 6. Доказательство неравенства $N' \geqslant nk + n + k$

Пусть $E$ — эвклидово пространство размерности $nk + n + k - 1$, а $T_0, T_1, \ldots, T_k$ — такие $n$-мерные симплексы этого пространства, что

$$\chi(T_0, T_1, \ldots, T_k) = 1.$$

Положим $X = T_0 \cup T_1 \cup \ldots \cup T_k$ и примем за $f$ тождественное отображение компакта $X$ в $E$. Нетрудно видеть, что отображение $f$ не может быть произвольно малым сдвигом переведено в $k$-регулярное отображение. Действительно, определив число $\varepsilon$, как указано в лемме 9 (для симплициального разбиения $X$ и отображения $f$), мы найдем, что для любого отображения $g$, удовлетворяющего условию $\rho(f, g) < \varepsilon$, будет выполнено соотношение

$$\chi(g(T_0), g(T_1), \ldots, g(T_k)) = \chi(T_0, T_1, \ldots, T_k) = 1,$$

т. е. отображение $g$ не является $k$-регулярным. Таким образом, в $\varepsilon$-окрестности отображения $f$ нет $k$-регулярных отображений.

Поступило
3. I. 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1] Pontrjagin L., Tolstowa G., Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes, Math. Ann., 105 (1931), 734—745.

[2] Nöbeling G., Über eine $n$-dimensionale Universalmenge in $R_{2n+1}$, Math. Ann., 104 (1930), 71—80.

[3] Van-Kampen E. R., Komplexe in euklidischen Räumen, Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 9 (1933), 72—78.

[4] Борсук К., Замечания к вложимости множеств в эвклидовы пространства, Труды 3-го Всесоюзн. Матем. съезда, т. IV (1959), 197—199.

[5] Болтянский В., О размерной полноценности компактов, Доклады Ак. наук СССР, 67, № 5 (1949), 773—776.

[6] Hurewicz W., Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räuman auf Teilmengen Cartesischer Räume, Sitzb. Preuss. Akad. Wiss., phys. math. Klasse, (1933), 754—768.

[7] Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., Гостехиздат, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 893–912

К. В. БРУШЛИНСКИЙ

# О РОСТЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ НЕПОЛНОТЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

Рассматривается смешанная задача для системы уравнений
$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x)u$$
с распадающимися граничными условиями, решение которой находится при помощи преобразования Лапласа по $t$. Доказывается, что рост решения при $t \to \infty$ определяется правой границей спектра оператора $A\frac{d}{dx} + B$, хотя он и не имеет полной системы собственных функций.

## § 1. Постановка задачи и результаты

В настоящей работе рассматривается смешанная задача для линейной гиперболической системы уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x)u_j \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.1}$$

Коэффициенты $a_{ij}$, $b_{ij}$ являются дифференцируемыми функциями только от $x$. Гиперболичность системы означает, что матрица $A = (a_{ij}(x))$ при всех рассматриваемых $x$ имеет действительные и различные собственные значения $a_i(x)$. Предполагается, что система (1.1) не имеет особенностей, т. е. детерминант матрицы $A(x)$ ни в одной точке не обращается в нуль. Другими словами, все $a_i(x)$ отличны от нуля.

Задача рассматривается на конечном отрезке, например, для определенности, при $0 \leqslant x \leqslant 1$. На концах отрезка заданы в совокупности $n$ так называемых распадающихся краевых условий — линейных однородных соотношений между функциями $u_i$, часть которых связывает значения функций только на левом конце отрезка, т. е. $u_i(t, 0)$, а остальные — только на правом, т. е. $u_i(t, 1)$. При этом число условий слева и справа определяется числом характеристик системы (1.1), выходящих с данной границы. Характеристики задаются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = -a_i(x) \quad (i = 1, \ldots, n);$$

таким образом, выходящими с левой границы будут те характеристики, для которых $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=0} > 0$, т. е. $a_i(0) < 0$, а для выходящих справа должно быть $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=1} < 0$, т. е. $a_i(1) > 0$. Поскольку мы предполагаем, что $a_i(x)$

нигде на отрезке не обращаются в нуль, они не должны менять знака, и поэтому в неравенствах $a_i > 0$ или $a_i < 0$ можно опускать указание точки, для которой неравенство пишется.

Итак, пусть $a_1(x), \ldots, a_p(x)$ отрицательны при $0 \leqslant x \leqslant 1$, а $a_{p+1}(x), \ldots$ $\ldots, a_n(x)$ положительны. Тогда на левом конце, в соответствии со сказанным выше, должно быть задано $p$, а на правом $n-p$ краевых условий:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} u_j(t, 0) = 0, \quad k = 1, \ldots, p,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{lj} u_j(t, 1) = 0, \quad l = p+1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

где $\alpha_{kj}$, $\beta_{lj}$ не зависят от $t$, т. е. суть константы. Такие краевые условия мы будем называть согласованными с матрицей $A$. Число $p$ предполагается отличным от 0 и $n$.

Кроме того, при $t = 0$ заданы начальные условия $u_i(0, x)$.

Основной вопрос, которым интересуются в подобных задачах, — это поведение решения при $t \to \infty$. В частности, важно выяснить, при каких условиях решение остается ограниченным или стремится к нулю при возрастании $t$, а при каких — неограниченно возрастает.

Задача решается переходом к преобразованиям Лапласа в уравнениях и краевых условиях, причем решение выписывается с помощью формулы обращения в виде интегрального представления через решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работе устанавливаются свойства спектра дифференциального оператора

$$L = A\frac{d}{dx} + B, \tag{1.3}$$

где $A = (a_{ij}(x))$, $B = (b_{ij}(x))$ — матрицы коэффициентов системы (1.1), и в терминах спектра дается ответ на вопрос о росте решения при $t \to \infty$. Доказывается, что рост решения определяется функцией $e^{st}$, где $s$ ограничивает сверху действительные части собственных значений оператора $L$, т. е. при $s < 0$ решение убывает, при $s = 0$ ограничено, а при $s > 0$ могут быть экспоненциально растущие решения.

В работе показано, что часто применяющийся в подобных вопросах метод Фурье не приводит к решению задачи, так как оператор (1.3) не имеет, вообще говоря, полной системы собственных функций *. Однако вопрос о росте функций $u_i(t, x)$ решается с помощью «самого правого» собственного значения, т. е. так же, как если бы решение составлялось из собственных функций.

В § 2 описано решение задачи методом Фурье и с помощью преобразования Лапласа.

В § 3 исследуется поведение функции Грина оператора $L - \lambda I$ при больших $|\lambda|$.

---

* Поскольку это не приведет здесь к недоразумениям, мы будем понимать под полнотой системы собственных функций возможность разложить по ним любую вектор-функцию из некоторого разумного класса начальных данных нашей задачи.

§ 4 посвящен полноте собственных функций.

В § 5 доказывается, что задачу всегда можно решить преобразованием Лапласа.

В § 6 вводится преобразование Лапласа от обобщенных функций и в терминах этих последних формулируются результаты § 5.

## § 2. Метод Фурье и преобразование Лапласа

Укажем вкратце, в чем состоят оба упомянутых метода и к каким трудностям приводит каждый из них. Сделаем это в следующей более общей постановке.

Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \tag{2.1}$$

где $u(t, x)$ — искомая вектор-функция, а $L$ — дифференциальный оператор по $x$ на конечном отрезке, не зависящий от $t$, с какими-нибудь граничными условиями. При $t = 0$ заданы начальные условия

$$u(0, x) = u_0(x).$$

Метод Фурье предполагает решение уравнений в виде

$$u(t, x) = y(x)\, e^{\lambda t}. \tag{2.2}$$

Тогда функция $y(x)$ должна быть решением задачи $Ly = \lambda y$, т. е. собственным вектором оператора $L$ с собственным значением $\lambda$. Пусть $y_k(x)$ и $\lambda_k$ — все собственные функции и собственные значения оператора $L$. Решение задачи можно искать в виде

$$u(t, x) = \sum_k c_k y_k(x)\, e^{\lambda_k t}. \tag{2.3}$$

Мы удовлетворим таким способом любым начальным данным $u_0(x)$, если $u_0(x)$ можно разложить в ряд по собственным функциям оператора $L$. Следовательно, метод Фурье приводит к цели, и любое решение представимо рядом (2.3), если $L$ имеет полную систему собственных функций. Рост решения на бесконечности, очевидно, определяется функцией $e^{st}$, где $s$ — «самое правое» собственное значение.

Исследование полноты оператора $L$ обычно проводится с помощью функции Грина оператора $L - \lambda I$, где $I$ — единичный оператор [см. ([1]), гл. III]. Это — матричная функция $G(x, \xi; \lambda)$ — ядро интегрального оператора $(L - \lambda I)^{-1}$, которая определена при всех $\lambda$, не являющихся собственными значениями $L$. Последние суть ее полюсы. Для полноты достаточно, чтобы в комплексной плоскости $\lambda$ существовала система замкнутых контуров $C_n$, радиус которых стремится к бесконечности, таких, что

$$\oint_{C_n} \frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda}\, d\lambda \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Это условие обеспечивается, во-первых, возможностью проводить такие контуры не ближе фиксированного расстояния от полюсов и, во-вторых, нужным характером убывания $G(x, \xi, \lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ вдали от полюсов.

Метод использования преобразования Лапласа [см., например, ([3]), гл. VI] предполагает, что решения уравнений (2.1) имеют первый порядок роста по $t$ и конечный тип, т. е. растут не быстрее $e^{st}$, где $s<\infty$. Как будет показано ниже, это предположение оправдано, если спектр $L$ ограничен справа. Тогда в уравнениях и граничных условиях можно перейти к преобразованиям Лапласа

$$v_i(x, \lambda) = \int_0^\infty u_i(t, x)\, e^{-\lambda t} dt. \tag{2.4}$$

Интегралы сходятся и являются аналитическими функциями от $\lambda$ при $\operatorname{Re}\lambda > s$. Очевидно, что дифференцирование по $x$ или умножение на функцию от $x$ перестановочно с преобразованием (2.4), поэтому

$$\int_0^\infty L u\, e^{-\lambda t}\, dt = Lv(x, \lambda)$$

(напомним, что граничные условия мы также включаем в понятие оператора $L$). Преобразование производных по $t$ дает:

$$\int_0^\infty \frac{\partial u_i}{\partial t} e^{-\lambda t} dt = \lambda v_i(x, \lambda) - u_i(0, x).$$

Таким образом, применив (2.4) к уравнениям (2.1) и рассматривая $v_i(x, \lambda)$ как функции одного переменного $x$, а $\lambda$ — как параметр, мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(L - \lambda I)\, v = - u_0(x),$$

откуда имеем:

$$v(x,\lambda) = -\int_0^1 G(x, \xi, \lambda)\, u_0(\xi)\, d\xi. \tag{2.5}$$

Решение (2.1) найдем по формуле обращения [см. ([3])]:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} v(x, \lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda, \tag{2.6}$$

где $\sigma$ — любое действительное число, большее, чем $s$, а интеграл следует понимать в смысле главного значения.

$s$ определяется ближайшим полюсом $v(x, \lambda)$ как функции от $\lambda$ или, что то же самое, полюсом $G(x, \xi, \lambda)$. Поэтому контур интегрирования в (2.6) должен проходить правее всех полюсов функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$, т. е. для применимости метода нужно, чтобы спектр оператора $L$ был ограничен справа. Кроме того, для того чтобы функция $v(x, \lambda)$ могла служить преобразованием Лапласа некоторого решения (2.6), должны выполняться определенные ограничения, наложенные на ее убывание при $|\lambda| \to \infty$ в правой полуплоскости. Ниже мы покажем, что это имеет место для задачи, поставленной в § 1, при дифференцируемых начальных данных. Здесь отметим, что это обстоятельство связано опять-таки с убыванием функции Грина примерно такого же типа, как для полноты собственных функций, но с той разницей, что оно

требуется лишь в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > s$ правее всех полюсов. Отсюда уже на первый взгляд видны преимущества этого метода по сравнению с методом Фурье.

Если, в частности, $G(x, \xi, \lambda)$ убывает всюду при $|\lambda| \to \infty$, то мы можем замкнуть контур интегрирования в (2.6) полуокружностью сколь угодно большого радиуса слева. На ней $G(x, \xi, \lambda)$ и $e^{t\lambda}$ малы, и интеграл стремится к нулю при возрастании радиуса. Таким образом, при том же значении интеграла контур становится замкнутым и интеграл превращается в сумму вычетов по полюсам функции Грина. Последние являются собственными значениями, а вычеты пропорциональны собственным функциям оператора $L$ [см. ([1])]. Следовательно, в этом случае, который, как указано выше, обеспечивает полноту собственных функций, выражение (2.6) дает разложение по ним типа (2.3).

Если $G(x, \xi, \lambda)$ убывает лишь справа, а слева растет, как это имеет место для оператора (1.3), то это означает, по-видимому, что «недостающая» до полноты часть спектра $L$ сосредоточена на бесконечности, но только в левой полуплоскости, и задача может быть решена лишь с помощью преобразования Лапласа.

## § 3. Функция Грина оператора $L - \lambda I$

Вернемся к исходной задаче. Мы можем без ограничения общности считать матрицу $A$ диагональной. Этого всегда можно добиться, если перейти от $u_i$ к их линейным комбинациям, т. е. если произвести замену

$$u(t, x) = C(x)\tilde{u}(t, x),$$

где $C(x)$ — невырожденная матрица такая, что $C^{-1}AC$ диагональна. При этом, очевидно, краевые условия (1.2) не перестанут быть распадающимися, и число их справа и слева не изменится.

Итак, рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x)u_j \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Функции $a_i(x)$ действительны, различны и не обращаются в нуль на этом отрезке. Их нумерацию нам удобно выбрать следующим образом. Пусть

$$\gamma_i(x) = \frac{1}{a_i(x)};$$

тогда

$$\gamma_1(x) < \ldots < \gamma_p(x) < 0 < \gamma_{p+1}(x) < \ldots < \gamma_n(x). \tag{3.2}$$

На концах отрезка заданы согласованные краевые условия:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}u_j = 0, \quad k = 1, \ldots, p, && \text{при } x = 0, \\ &\sum_{j=1}^{n} \beta_{lj}u_j = 0, \quad l = p+1, \ldots, n, && \text{при } x = 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Мы будем предполагать, что $p \geqslant n - p$; если это не так, то замена $x$ на $1-x$ приведет нас к этому случаю.

При $t=0$ заданы начальные условия

$$u(0,\ x) = u_0(x).$$

Как это следует из § 2, нас будет интересовать дифференциальный оператор

$$L = A\frac{d}{dx} + B$$

с граничными условиями (3.3), точнее его спектр и резольвента (функция Грина) оператора $L - \lambda I$. В обзорной статье Birkhoff'а и Langer'а ([2]) изучен этот оператор с граничными условиями

$$w_0 y(0) + w_1 y(1) = 0,$$

где $w_0$, $w_1$ — невырожденные матрицы (в книге ([1]) такие условия называются регулярными). Кроме того, там предполагалось, что $\gamma_i(x)$ — комплексные и $\arg \gamma_i \neq \arg \gamma_j$ при $i \neq j$, что, впрочем, не влияет на основной результат, который состоит в том, что оператор имеет дискретный спектр, собственные значения располагаются асимптотически в конечном числе арифметических прогрессий и система собственных функций полна.

Распадающиеся граничные условия не входят в указанный класс и поэтому требуют особого рассмотрения. Некоторые промежуточные факты, не использующие регулярности граничных условий, мы будем заимствовать из рассуждений Birkhoff'а и Langer'а.

Функция Грина $G(x,\ \xi,\ \lambda)$, которой посвящен этот параграф, полностью определяется следующими свойствами [см. ([1]), гл. III]:

1) при любом $\xi$ из отрезка $[0,\ 1]$ она является непрерывно дифференцируемой функцией от $x$ в каждом из интервалов $[0,\ \xi)$ и $[\xi,\ 1]$ в отдельности и удовлетворяет внутри них однородному уравнению

$$A\frac{\partial G}{\partial x} + BG = \lambda G;$$

2) в точке $x = \xi$ она имеет заданный разрыв

$$G(\xi + 0,\ \xi,\ \lambda) - G(\xi - 0,\ \xi,\ \lambda) = R(\xi),$$

где $R(\xi) = A^{-1}(\xi)$, т. е. $R_{ij}(\xi) = \delta_{ij}\gamma_j(\xi)$;

3) при любом $\xi$ из $[0,\ 1]$ каждый ее столбец, рассматриваемый как вектор-функция от $x$, удовлетворяет граничным условиям (3.3).

Последнее свойство можно записать следующим образом. Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pn} \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \\ \beta_{p+1,1} & \dots & \beta_{p+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда должно иметь место равенство

$$\alpha G(0,\ \xi,\ \lambda) + \beta G(1,\ \xi,\ \lambda) = 0.$$

Исходя из этих трех свойств, мы построим $G(x, \xi, \lambda)$. Пусть $Y(x, \lambda)$ — матрица фундаментальных решений системы $Ly - \lambda y = 0$. Из первого свойства следует, что

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} Y(x, \lambda) G_1(\xi, \lambda) & \text{при } x < \xi, \\ Y(x, \lambda) G_2(\xi, \lambda) & \text{при } x > \xi, \end{cases}$$

где $G_1$, $G_2$ — не зависящие от $x$ матрицы, подлежащие определению. Второе свойство приводит к соотношению

$$Y(\xi, \lambda)[G_2(\xi, \lambda) - G_1(\xi, \lambda)] = R(\xi),$$

откуда следует:

$$G_2(\xi, \lambda) = G_1(\xi, \lambda) + Z(\xi, \lambda) R(\xi),$$

где

$$Z(\xi, \lambda) = Y^{-1}(\xi, \lambda).$$

Третье свойство позволяет определить $G_1$ из уравнения

$$[\alpha Y(0, \lambda) + \beta Y(1, \lambda)] G_1(\xi, \lambda) + \beta Y(1, \lambda) Z(\xi, \lambda) R(\xi) = 0.$$

Матрица $F(\lambda) = \alpha Y(0, \lambda) + \beta Y(1, \lambda)$ при интересующих нас $\lambda$ не вырождена, ибо, как легко убедиться, нули ее детерминанта

$$K(\lambda) = \det |F(\lambda)|$$

суть собственные значения оператора $L$. Таким образом,

$$G(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) H(\lambda) Z(\xi, \lambda) R(\xi), \tag{3.4}$$

где

$$H(\lambda) = \begin{cases} -F^{-1}(\lambda) \beta Y(1, \lambda) & \text{при } x < \xi, \\ I - F^{-1}(\lambda) \beta Y(1, \lambda) \equiv F^{-1}(\lambda) \alpha Y(0, \lambda) & \text{при } x > \xi. \end{cases} \tag{3.5}$$

Для проведения асимптотических оценок удобно преобразовать формулу (3.5), следуя работе ([2]). Введем в рассмотрение символы

$$\delta^{*}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{при } \operatorname{Re} \lambda\gamma_j \leqslant 0, \\ 0 & \text{при } \operatorname{Re} \lambda\gamma_j > 0, \end{cases}$$

$$\delta^{**}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{Re} \lambda\gamma_j \leqslant 0, \\ \delta_{ij} & \text{при } \operatorname{Re} \lambda\gamma_j > 0. \end{cases}$$

Матрицы, составленные из них, обозначим через $I^{*}(\lambda)$ и $I^{**}(\lambda)$. Очевидно,

$$I^{*}(\lambda) + I^{**}(\lambda) \equiv I.$$

Нетрудно проверить [см. также ([2])], что

$$H(\lambda) = U(\lambda) + \begin{cases} -I^{**}(\lambda) & \text{при } x < \xi, \\ I^{*}(\lambda) & \text{при } x > \xi, \end{cases} \tag{3.6}$$

где

$$U(\lambda) = F^{-1}(\lambda) [\alpha Y(0, \lambda) I^{**}(\lambda) - \beta Y(1, \lambda) I^{*}(\lambda)].$$

Как показано в работе ([2]), матрицу $Y(x, \lambda)$ можно выбрать так, что в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и $\operatorname{Re}\lambda < 0$ ее элементы при $|\lambda| \to \infty$ представляются асимптотическим рядом

$$Y_{ij}(x, \lambda) = e^{\lambda \Gamma_j(x) + B_j(x)} \left[ \delta_{ij} + \frac{\varphi^{0}_{ij}(x)}{\lambda} + \ldots + \frac{\varphi^{(m-1)}_{ij}(x)}{\lambda^m} + O\left(\frac{1}{\lambda^{m+1}}\right)\right], \text{*} \tag{3.7}$$

* Отметим, что эти ряды в разных полуплоскостях — разные.

где

$$\Gamma_j(x) = \int_0^x \gamma_j(t)\,dt, \quad B_j(x) = -\int_0^x b_{jj}(t)\,\gamma_j(t)\,dt\,.$$

В этом параграфе нам достаточно ограничиться главным членом ряда (3.7), а именно, будем писать

$$Y_{ij}(x,\ \lambda) = e^{\lambda\Gamma_j(x)+B_j(x)}\left(\delta_{ij} + \frac{\varphi_{ij}(x,\ \lambda)}{\lambda}\right), \tag{3.8}$$

где $\varphi_{ij}(x,\ \lambda)$ — аналитическая и ограниченная в данной полуплоскости функция от $\lambda$. В § 5 понадобятся более точные сведения о зависимости $\varphi_{ij}$ от $\lambda$. Из (3.7) следует, что

$$\varphi_{ij}(x,\ \lambda) = \varphi_{ij}^{(0)}(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{3.9}$$

причем само выражение для $\varphi_{ij}^{(0)}(x)$ нам не потребуется.

Из (3.8) очевидно, что для обратной матрицы $Z(x,\ \lambda)$

$$Z_{ij}(x,\ \lambda) = e^{-\lambda\Gamma_i(x)-B_i(x)}\left(\delta_{ij} + \frac{\psi_{ij}(x,\ \lambda)}{\lambda}\right), \tag{3.10}$$

где $\psi_{ij}(x,\ \lambda)$ — функции того же типа, что и $\varphi_{ij}(x,\ \lambda)$.

Будем обозначать символом $[f]$ такую функцию от $\lambda$, которая при больших $|\lambda|$ ведет себя, как

$$[f] = f + O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где $f$ не зависит от $\lambda$. В частности, (3.8) можно записать так:

$$Y_{ij}(x,\ \lambda) = e^{\lambda\Gamma_j(x)+B_j(x)}\,[\delta_{ij}]\,.$$

Теперь нетрудно написать асимптотику:

$$K(\lambda) = \det|\alpha Y(0,\ \lambda) + \beta Y(1,\ \lambda)|\,.$$

Если обозначить для краткости $\Gamma_i = \Gamma_i(1)$, $B_i = B_i(1)$, то

$$K(\lambda) =$$

$$= \begin{vmatrix} [\alpha_{11}], \ldots, & [\alpha_{1p}], & [\alpha_{1,\,p+1}], \ldots, & [\alpha_{1n}] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [\alpha_{p1}], \ldots, & [\alpha_{pp}], & [\alpha_{p,\,p+1}], \ldots, & [\alpha_{pn}] \\ [\beta_{p+1,1}]\,e^{\lambda\Gamma_1+B_1}, \ldots, & [\beta_{p+1,\,p}]\,e^{\lambda\Gamma_p+B_p}, & [\beta_{p+1,\,p+1}]\,e^{\lambda\Gamma_{p+1}+B_{p+1}}, \ldots & \\ & & \ldots, & [\beta_{p+1,\,n}]\,e^{\lambda\Gamma_n+B_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ [\beta_{n1}]\,e^{\lambda\Gamma_1+B_1}, \ldots, & [\beta_{np}]\,e^{\lambda\Gamma_p+B_p}, & [\beta_{n,\,p+1}]\,e^{\lambda\Gamma_{p+1}+B_{p+1}}, \ldots, & [\beta_{nn}]\,e^{\lambda\Gamma_n+B_n} \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

Отсюда видно, что существует такое $s > 0$, для которого при $\operatorname{Re}\lambda > s$ детерминант $K(\lambda)$ не имеет корней: разлагая его по минорам последних $n-p$ строк, мы получим:

$$K(\lambda) = e^{\lambda\sum\limits_{k=p+1}^{n}\Gamma_k + \sum\limits_{k=p+1}^{n}B_k}\left(\det|\beta_{ij}|_{i,j>p}\cdot\det|\alpha_{ij}|_{i,j\leqslant p} + \varepsilon\right),$$

где $\varepsilon$ — функция, убывающая к нулю при $\operatorname{Re}\lambda \to \infty$. Если один из написанных детерминантов равен нулю, то главным членом будет следую-

щий минор такого же типа. Таким образом, спектр $L$ ограничен справа. Аналогично доказывается, что он ограничен и слева, т. е. весь заключен в конечной вертикальной полосе плоскости $\lambda$.

Асимптотическое поведение $K(\lambda)$ в каждом из секторов

$$|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad |\arg\lambda - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

при любом $\varepsilon > 0$ определяется возрастающими экспонентами $e^{\lambda\Gamma_j}$. Рассмотрим сначала правый сектор

$$|\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Предположим дополнительно, что

$$\alpha_1 = \det|\alpha_{ij}|_{i,j\leqslant p} \neq 0, \quad \beta_1 = \det|\beta_{ij}|_{i,j>p} \neq 0. \tag{3.12}$$

Эти условия имеют следующий наглядный смысл. Пусть в (3.1) $b_{ij} = 0$, т. е. уравнения сводятся к тому, что функции $u_1, \ldots, u_p$ переносятся по характеристикам слева направо, а $u_{p+1}, \ldots, u_n$ — справа налево. Тогда на левой границе первые $u_i$ должны выражаться из краевых условий через последние, а на правой — наоборот. Это и обеспечивается условиями (3.3) с помощью условий (3.12).

Разлагая (3.11) по минорам нижних $n-p$ строк, мы получим в указанном секторе:

$$K(\lambda) = e^{\lambda \sum\limits_{k=p+1}^{n} \Gamma_k + \sum\limits_{k=p+1}^{n} B_k} [\alpha_1\beta_1] = e^{\lambda \sum\limits_{k=p+1}^{n} \Gamma_k} [w_1], \tag{3.13}$$

где $w_1 \neq 0$.

Для построения $F^{-1}(\lambda)$ нам нужны алгебраические дополнения $K_{ij}(\lambda)$ элементов $F_{ij}(\lambda)$ матрицы $F(\lambda)$.

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что

$$K_{ij}(\lambda) = \begin{cases} e^{\lambda \sum\limits_{k=p+1}^{n} \Gamma_k} [V_{ij}] & \text{при } i \leqslant p,\ j \leqslant p, \\ e^{\lambda \sum\limits_{k=p+2}^{n} \Gamma_k} [V_{ij}] & \text{при } i > p,\ j \leqslant p, \\ e^{\lambda \sum\limits_{\substack{k=p \\ k\neq j}}^{n} \Gamma_k} [V_{ij}] & \text{при } i \leqslant p,\ j > p. \\ e^{\lambda \sum\limits_{\substack{k=p+1 \\ k\neq j}}^{n} \Gamma_k} [V_{ij}] & \text{при } i > p,\ j > p. \end{cases} \tag{3.14}$$

Здесь и ниже мы будем обозначать через $V_{ij}$ числа или функции от $x$, $\xi$, значение которых нас не интересует. В этом смысле можно написать $\frac{V_{ij}}{w_1} = V_{ij}$ (так как $w_1 \neq 0$) и т. д.

Если обозначить элементы матрицы $F^{-1}(\lambda)$ через

$$\Phi_{ij}(\lambda) = \frac{K_{ji}(\lambda)}{K(\lambda)},$$

то из (3.13), (3.14) будем иметь:

$$\Phi_{ij}(\lambda) = \begin{cases} [V_{ij}] & \text{при } i \leqslant p, \ j \leqslant p, \\ e^{-\lambda \Gamma_{p+1}} [V_{ij}] & \text{при } i \leqslant p, \ j > p, \\ e^{\lambda(\Gamma_p - \Gamma_i)} [V_{ij}] & \text{при } i > p, \ j \leqslant p, \\ e^{-\lambda \Gamma_i} [V_{ij}] & \text{при } i > p, \ j > p. \end{cases}$$

Дальше уже простыми арифметическими действиями мы найдем оценки для матрицы $U(\lambda)$ и соответствующего ей первого слагаемого функции Грина $g^{(1)}(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) U(\lambda) Z(\xi, \lambda) R(\xi)$:

$$g_{ij}^{(1)}(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} e^{\lambda(\Gamma_j - \Gamma_j(\xi) + \Gamma_i(x) - \Gamma_{p+1})} [V_{ij}] & \text{при } i \leqslant p, \ j \leqslant p, \\ e^{\lambda(\Gamma_i(x) - \Gamma_j(\xi))} [V_{ij}] & \text{при } i \leqslant p, \ j > p, \\ e^{\lambda(\Gamma_j - \Gamma_j(\xi) - \Gamma_i + \Gamma_i(x))} [V_{ij}] & \text{при } i > p, \ j \leqslant p, \\ e^{\lambda(\Gamma_p - \Gamma_i(\xi) - \Gamma_i + \Gamma_i(x))} [V_{ij}] & \text{при } i > p, \ j > p. \end{cases} \quad (3.15)$$

Из неравенств (3.2) и монотонности $\Gamma_i(x)$ следует, что все коэффициенты при $\lambda$ в показателях степени отрицательны при всех $x$, $\xi$, за исключением, быть может, точек $x = 0$, $\xi = 0$ и $x = 1$, $\xi = 1$, где некоторые из них равны нулю.

Рассмотрим второе слагаемое функции Грина:

$$g^{(2)}(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} -Y(x, \lambda) I^{**}(\lambda) Z(\xi, \lambda) R(\xi) & \text{при } x < \xi, \\ Y(x, \lambda) I^{*}(\lambda) Z(\xi, \lambda) R(\xi) & \text{при } x > \xi. \end{cases}$$

При $\operatorname{Re} \lambda > 0$ все элементы $g^{(2)}$ содержат при $x < \xi$ экспоненциальные множители

$$e^{\lambda(\Gamma_i(x) - \Gamma_i(\xi))} = e^{\lambda \int_\xi^x \gamma_i(t) dt}$$

с $i > p$, а при $x > \xi$ — те же множители с $i \leqslant p$, т. е. коэффициенты в показателях опять отрицательны, кроме случая $x = \xi$, когда они равны нулю.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ оператора $L - \lambda I$, где $L = A \dfrac{d}{dx} + B$ удовлетворяет условиям* (3.2), (3.3), (3.12), *имеет в секторе $|\arg \lambda| \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$ асимптотическое представление при $|\lambda| \to \infty$:*

$$G_{ij}(x, \xi, \lambda) = e^{\lambda f_{ij}(x, \xi)} \left[ V_{ij}(x, \xi) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right], \quad (3.16)$$

*причем функции $f_{ij}(x, \xi) < 0$ при всех $0 \leqslant x, \xi \leqslant 1$, за исключением точек $x = \xi$, где некоторые $f_{ij} = 0$.*

Теперь рассмотрим левый сектор

$$|\arg \lambda - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Асимптотика $K(\lambda)$ будет определяться опять экспонентами $e^{\lambda \Gamma_j}$, но уже

с наименьшими номерами $j$. Если предположить, что

$$\alpha_2 = \det|\alpha_{ij}|_{\substack{i\leqslant p\\ j>n-p}} \neq 0, \quad \beta_2 = \det|\beta_{ij}|_{\substack{i>p\\ j\leqslant n-p}} \neq 0, \tag{3.17}$$

то, аналогично (3.13), будем иметь в секторе:

$$K(\lambda) = e^{\lambda\sum\limits_{k=1}^{n-p}\Gamma_k + \sum\limits_{k=1}^{n-p} B_k}\left[(-1)^{n(n-p)}\alpha_2\beta_2\right] = e^{\lambda\sum\limits_{k=1}^{n-p}\Gamma_k}[w_2], \tag{3.18}$$

где $w_2 \neq 0$. Дальше можно, рассуждая как и выше, получить следующие оценки для $g^{(1)}$:

$$g_{ij}^{(1)}(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} e^{\lambda(\Gamma_{n-p+1}-\Gamma_j(\xi)-\Gamma_i+\Gamma_i(x))}[V_{ij}] & \text{при } i\leqslant n-p,\ j\leqslant p, \\ e^{\lambda(\Gamma_j-\Gamma_j(\xi)-\Gamma_i+\Gamma_i(x))}[V_{ij}] & \text{при } i\leqslant n-p,\ j>p, \\ e^{\lambda(\Gamma_i(x)-\Gamma_j(\xi))}[V_{ij}] & \text{при } i>n-p,\ j\leqslant p, \\ e^{\lambda(\Gamma_j-\Gamma_j(\xi)+\Gamma_i(x)-\Gamma_{n-p})}[V_{ij}] & \text{при } i>n-p,\ j>p. \end{cases} \tag{3.19}$$

Здесь уже не все экспоненты убывающие. Например, при $n-p<i\leqslant \leqslant j\leqslant p$ и $x>\xi$

$$\Gamma_i(x)-\Gamma_j(\xi)<0$$

и соответствующее слагаемое $g_{ij}^{(1)}(x, \xi, \lambda)$ может неограниченно возрастать при $|\lambda|\to\infty$. Подтверждением этому служат примеры отсутствия полноты собственных функций в § 4.

Тем не менее в случае $p=n-p$ (т. е. при $n=2p$) подобные неприятности исчезают, и $g^{(1)}$, как видно из (3.19), убывает в левом секторе так же, как (3.15) — в правом.

Относительно слагаемого $g^{(2)}$ устанавливается, что оно убывает, как и в предыдущем случае, т. е., в частности, не может погасить возрастания $G$ за счет $g^{(1)}$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Функция Грина* $G(x, \xi, \lambda)$ *при условиях* (3.2), (3.3), (3.17) *имеет в секторе* $|\arg\lambda-\pi|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ *с любым* $\varepsilon>0$ *асимптотическое представление* (3.16) *при* $|\lambda|\to\infty$, *причем если* $n=2p$, *то все* $f_{ij}(x, \xi)>0$, *за исключением точек* $x=\xi$, *где некоторые* $f_{ij}=0$.

*При* $p>n-p$ *некоторые* $f_{ij}(x, \xi)$ *отрицательны, т. е. соответствующие* $G_{ij}(x, \xi, \lambda)$ *могут экспоненциально возрастать.*

## § 4. О полноте собственных функций

Результаты предыдущего параграфа можно использовать и частично дополнить, изучая полноту собственных функций оператора $L$. Мы докажем, что полнота имеет место в случае $n=2p$. Из теорем 1 и 2 следует, что в этом случае $G(x, \xi, \lambda)$ убывает экспоненциально в обоих рассмотренных в § 3 секторах. Устремляя $\varepsilon$ к нулю, мы можем в пределе утверждать во всяком случае ограниченность $G$ вблизи мнимой оси, если только мы находимся на конечном расстоянии от собственных значений.

Повторяя рассуждения работы ([2]), можно установить, что при $|\lambda|\to\infty$ собственные значения асимптотически приближаются к корням целой

функции, которая получится, если в детерминанте (3.11) выражения $[\alpha_{ij}]$ и $[\beta_{ij}]$ заменить их главными членами $\alpha_{ij}$, $\beta_{ij}$. Эта функция имеет вид (после разложения по минорам нижних $n-p$ строк):

$$K_0(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} A_k e^{\lambda b_k}, \tag{4.1}$$

где $b_k$ расположены в порядке возрастания от $b_1=\sum_{k=1}^{n-p}\Gamma_k$ до $b_N=\sum_{k=p+1}^{n}\Gamma_k$, а ее корни, как мы уже отмечали, заключены в вертикальной полосе, и в любом конечном отрезке этой полосы их содержится конечное число, асимптотически пропорциональное длине отрезка. Таким образом, собственные значения оператора $L$ расположены не слишком часто и это позволяет нам провести контуры $C_n$, указанные в § 2, так, что все они пройдут не ближе некоторого фиксированного расстояния от спектра.

Теперь нетрудно показать, что для любой ограниченной функции $f(x)$ интегралы

$$J_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n}\int_0^1 \frac{G(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi}{\lambda}\,d\lambda$$

стремятся к нулю при $n\to\infty$.

Разобьем интеграл по $\xi$ на два:

$$\int_0^1=\int_{|x-\xi|<\delta_1}+\int_{|x-\xi|>\delta_1}$$

и выберем $\delta_1$ так, чтобы

$$\left|\int_{|x-\xi|<\delta_1} G(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi\right|<\varepsilon.$$

При этом, очевидно,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n}\frac{1}{\lambda}\int_{|x-\xi|<\delta_1} G(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi\,d\lambda\right|<\varepsilon.$$

Оставшийся интеграл разобьем на два по $\lambda$:

$$\oint_{C_n}=\int_{C_{n1}}+\int_{C_{n2}}$$

где $C_{n1}$ — часть $C_n$ внутри секторов

$$|\arg\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta_2,\quad |\arg\lambda-\pi|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta_2,$$

а $C_{n2}$ — остальная часть $C_n$. Выберем $\delta_2$ так, чтобы

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{n2}}\int_0^1\frac{G(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi}{\lambda}\,d\lambda\right|<\varepsilon.$$

Стремление к нулю

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{n1}}\int\limits_{|x-\xi|>\delta_1}\frac{G(x,\ \xi,\ \lambda)\,f(\xi)\,d\xi}{\lambda}\,d\lambda$$

следует из теорем 1 и 2 § 3. В силу произвольности $\varepsilon$, утверждение доказано.

Заменяя, далее, $J_n$ суммой вычетов по полюсам [см. ([1])], мы получим разложение функции

$$y(x)=\int\limits_0^1 G(x,\ \xi,\ 0)\,f(\xi)\,d\xi$$

в ряд по собственным функциям оператора $L$. Такой вид имеет любая функция из области определения $L$, если точка $\lambda=0$ не принадлежит спектру. Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор* $L=A\frac{d}{dx}+B$, *удовлетворяющий условиям* (3.2), (3.3), (3.12), (3.17), *обладает полной системой собственных функций, если число уравнений $n$ четно и граничные условия* (3.3), *согласованные с матрицей $A$, заданы на обоих концах отрезка в одинаковом числе* ($p=n-p$).

В остальных случаях, т. е. при $p>n-p$, теорема 2 не обеспечивает убывания $G(x,\ \xi,\ \lambda)$ влево, и полнота, вообще говоря, не имеет места. Мы проиллюстрируем неполноту двумя примерами.

1. Пусть $B=0$, т. е. система уравнений $Ly=\lambda y$ распадается на $n$ отдельных уравнений

$$a_i(x)\frac{dy_i}{dx}=\lambda y_i \tag{4.2}$$

с граничными условиями (3.3). Пусть $p=n-1$, т. е.

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\,y_i(0)=0,\quad k=1,\ldots,n-1,\\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i\,y_i(1)=0.\end{gathered}\tag{4.3}$$

Знаки $a_i(x)$ могут быть произвольными, в том числе и согласованными с (4.3).

Общее решение системы (4.2) имеет вид

$$y_i(x)=C_i\,e^{\lambda\Gamma_i(x)}.$$

Подставляя это решение в (4.3), мы получим систему уравнений для констант $C_i$:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\,C_i=0,\quad k=1,\ldots,n-1,\\ \sum_{i=1}^{n}\beta_i\,e^{\lambda\Gamma_i}\,C_i=0.\end{gathered}\tag{4.4}$$

Приравнивая нулю ее детерминант, мы найдем собственные значения

которые обозначим через $\lambda_k$. После этого $C_i$ определяется из любых $n-1$ уравнений системы (4.4), например из первых. Следовательно, в качестве $C_i$ можно взять миноры $(n-1)$-го порядка матрицы $(\alpha_{ki})$ и они не будут зависеть от $\lambda_k$.

Таким образом, собственные функции равны

$$y_i^{(k)}(x) = C_i e^{\lambda_k \Gamma_i(x)},$$

где $C_i$ не зависят от $k$. Допустим, что любую вектор-функцию $f(x)$ можно разложить по ним в ряд:

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k y_i^{(k)}(x) = C_i \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k \Gamma_i(x)}. \tag{4.5}$$

Если $n \geqslant 3$, то среди $\Gamma_i(x)$ всегда найдутся две функции одного знака. Пусть, например, $\Gamma_i(x) > \Gamma_j(x) > 0$. Образуем функцию

$$\varphi(x) = \Gamma_i^{-1} \Gamma_j(x),$$

что возможно вследствие монотонности $\Gamma_i(x)$. Она существует при всех $0 \leqslant x \leqslant 1$, так как $\Gamma_j(x)$ всегда принадлежит области значений $\Gamma_i(x)$. Тогда, очевидно, $\Gamma_j(x) = \Gamma_i(\varphi(x))$, и из (4.5) следует, что

$$\frac{1}{C_j} f_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k \Gamma_j(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k \Gamma_i(\varphi(x))} = \frac{1}{C_i} f_i(\varphi(x)).$$

Таким образом, компоненты $f_i(x)$ и $f_j(x)$ не могут быть произвольными функциями.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 4. *Система собственных функций оператора* $L = A \frac{d}{dx}$ *с граничными условиями* (4.3), *т. е. при* $p = n-1$, *всегда неполна при* $n \geqslant 3$.

2. Второй пример относится к условиям (3.12), (3.17), используемым в теореме 3. Покажем, что они существенны.

Рассмотрим снова оператор $L = A \frac{d}{dx}$ с граничными условиями (3.3). Допустим, что среди этих условий можно выделить $m < n$ соотношений, содержащих только $m$ функций $y_i$, для определенности, $y_1, \ldots, y_m$. Остальные $n-m$ соотношений могут содержать все $n$ функций. Тогда, поскольку система (4.2) распалась на отдельные уравнения, мы можем рассмотреть оператор $L_1$ — часть $L$ в пространстве вектор-функций $(y_1, \ldots, y_m)$ и получить для него собственные значения $\lambda_k$ и собственные функции. $\lambda_k$ будут собственными значениями также и оператора $L$, а собственные функции $L$ получатся из собственных функций $L_1$, если доопределить константы $C_i$, $i > m$, из оставшихся $n-m$ граничных условий. Отсюда следует, что система собственных функций $L$ не может быть полной независимо от полноты $L_1$.

Действительно, если собственные функции $L_1$ полны, то разложение $f = (f_1, \ldots, f_n)$ по собственным функциям $L$ полностью определяется

первыми $m$ компонентами и, значит, функции $f_{m+1}, \ldots, f_n$ не могут быть произвольными.

Если у $L_1$ нет полноты, то нам уже не удастся разложить по собственным функциям любой вектор $(f_1, \ldots, f_m)$, т. е. и подавно мы не сможем сделать этого с вектором $(f_1, \ldots, f_n)$.

Сказанное относится к любым $n$ и $p < n$. В случае $n = 2p$ теорема 3 утверждает полноту при условиях (3.12), (3.17), которые и исключают рассмотренный пример.

## § 5. Обоснование формулы обращения Лапласа

Если смешанная задача решается, как указано в § 2, с помощью преобразования Лапласа, то мы получим решение в виде (2.6), если только функция

$$v(x, \lambda) = -\int_0^1 G(x, \xi, \lambda)\, u_0(\xi)\, d\xi, \tag{5.1}$$

рассматриваемая как функция от $\lambda$ при каждом $x$, может служить преобразованием Лапласа некоторой функции от $t$. Мы докажем это в предположении известной гладкости начальных данных $u_0(x)$. Кроме того, в дальнейшем изложении мы потребуем выполнения условия (3.12) для коэффициентов $\alpha_{ik}$, $\beta_{lj}$.

Будем обозначать символом $Q(\lambda)$ функции вида

$$Q(\lambda) = \frac{e^{-a\lambda}}{1 - \sum\limits_{k=1}^{N} A_k\, e^{-b_k\lambda}}, \tag{5.2}$$

где $a \geqslant 0$, $b_k > 0$, $A_k$ — произвольные числа, а число слагаемых в знаменателе ограничено для всех функций одним и тем же числом $N$.

ЛЕММА 1. *Если начальные данные $u_{0i}(x)$ имеют ограниченные первые производные, то функции $v_i(x, \lambda)$, определенные формулой* (5.1) *в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > s$ *правее всех полюсов $G(x, \xi, \lambda)$, имеют вид*

$$v_i(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} v_i^0(x, \lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{5.3}$$

*где $v_i^0(x, \lambda)$ при каждом фиксированном $x$ есть линейная комбинация конечного числа функций $Q(\lambda)$ или интегралов от них по $\xi$ в конечных пределах.*

Для доказательства рассмотрим функцию Грина $G(x, \xi, \lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda > s$. Как и в § 3, будем исходить из формулы (3.11), но теперь в ней нужно учесть все экспоненты, а не только старшую. Записывая главный член в форме (4.1), находим:

$$K(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{b_k\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{5.4}$$

Такой же вид имеют алгебраические дополнения матрицы $F(\lambda)$, а также матрицы $Y(x, \lambda)$ и $Z(x, \lambda)$. Значит, в соответствии с (3.4) и (3.5),

элементы $G(x, \xi, \lambda)$ представляют собой отношение функций типа (5.4), т. е.

$$G_{ij}(x, \xi, \lambda) = \frac{\sum_{1}^{N'} A'_k e^{b'_k \lambda}}{\sum_{1}^{N} A_k e^{b_k \lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (5.5)$$

Члены, включенные в символ $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, содержат малый параметр в виде $\frac{\varphi_{ij}(x, \lambda)}{\lambda}$ [см. (3.8)], или, в силу (3.9), в виде

$$\frac{\varphi_{i\,j}^{0}(x)}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Коэффициентами при этом малом параметре будут, очевидно, отношения конечных сумм типа (5.4). Из теоремы 1 следует, что старшие показатели $b'_k$ в числителях этих дробей не превосходят старших показателей в знаменателях (иначе функция $G(x, \xi, \lambda)$ стремилась бы к бесконечности при $\operatorname{Re}\lambda \to \infty$). Поэтому если мы разделим числители и знаменатели на старший член знаменателя, то все дроби станут конечными суммами функций $Q(\lambda)$. Тем самым лемма доказана только для остаточного члена, а в главном нужно еще выделить множитель $\frac{1}{\lambda}$.

Из (3.4) следует, что зависимость $G_{ij}(x, \xi, \lambda)$ от $\xi$ осуществляется в главном члене (5.5) множителем

$$e^{-\lambda\Gamma_j(\xi) - B_j(\xi)}\gamma_j(\xi).$$

В силу дифференцируемости $u_{0j}(\xi)$ мы можем проинтегрировать главную часть выражения $G_{ij}(x, \xi, \lambda)\, u_{0j}(\xi)$ по частям, после чего получим функции того же вида или интегралы от них по $\xi$, но уже с множителем $\frac{1}{\lambda}$. Лемма доказана полностью.

ЛЕММА 2. *Функция* $\frac{1}{\lambda} Q(\lambda)$ *является преобразованием Лапласа функции от* $t$.

Выберем $s_1 > s$ такое, что при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant s_1$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} A_k e^{-b_k\lambda}\right| \leqslant \theta < 1.$$

Тогда $Q(\lambda)$ можно представить в виде ряда

$$Q(\lambda) = e^{-a\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} A_k e^{-b_k\lambda}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1+\ldots+k_N=n} A_1^{k_1}\ldots A_N^{k_N} e^{-\left(a + \sum_{i=1}^{N} k_i b_i\right)\lambda},$$

который сходится абсолютно и равномерно при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant s_1$. Про такой ряд (ряд Дирихле) известно [см. ([4]), гл. 2, § 6], что, будучи поделен на $\lambda$, он является преобразованием Лапласа функции от $t$ в области $\operatorname{Re}\lambda \geqslant s_1$. Однако интеграл типа (2.6) не зависит от $\sigma$, и мы вправе двигать контур

интегрирования влево до ближайшего нуля знаменателя, т. е. в нашем случае до $s$. Из лемм 1 и 2 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 5. *Функция $v(x, \lambda)$, определенная формулой* (5.1) *при дифференцируемых начальных данных $u_0(x)$, является преобразованием Лапласа функции*

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} v(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda. \tag{5.6}$$

*Контур интегрирования берется правее всех полюсов $G(x, \xi, \lambda)$, а интеграл понимается в смысле главного значения.*

Действительно, первое слагаемое в (5.3) есть преобразование Лапласа (или его интеграл по $\xi$, что не меняет дела), согласно лемме 2, а остаточный член является таковым на основании хорошо известных теорем о преобразовании Лапласа [см. ([3])].

Таким образом, доказав законность, мы получаем решение нашей смешанной задачи в интегральной форме (5.6). Отсюда можно сделать заключение о росте решения по $t$. Так как $v_i(x, \lambda)$ определены при $\operatorname{Re} \lambda > s$, где $s = \sup \operatorname{Re} \lambda_k$, а $\lambda_k$ — собственные значения оператора $L$, и являются преобразованиями Лапласа $u_i(t, x)$, то интегралы

$$\int_0^\infty u_i(t, x) e^{-\lambda t} dt$$

сходятся при указанных $\lambda$. Значит, подынтегральная функция стремится к нулю при $t \to \infty$, и во всяком случае

$$|u_i(t, x)| < e^{(s+\varepsilon)t} \tag{5.7}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Наше решение имеет, таким образом, конечный экспоненциальный тип, определяемый спектром дифференциального оператора $L$.

В заключение этого параграфа отметим, что полученные результаты существенно зависят от согласованности краевых условий с матрицей $A$. При отсутствии согласованности мы не можем утверждать, что теорема 5 имеет место. Например, если, сохранив неравенства (3.2), задать краевые условия наоборот: $p$ — на правом конце отрезка, и $n - p$ — на левом, то тем же путем придем к результату, противоположному теоремам 1 и 2: функция Грина будет убывать в левой полуплоскости и может экспоненциально возрастать в правой, т. е. мы не сможем, вообще говоря, обратить преобразование Лапласа.

## § 6. Решение задачи в обобщенных функциях

В предыдущем параграфе теорема 5 требовала дифференцируемости начальных данных. Это было существенно, когда речь шла об обычных дифференцируемых функциях в качестве решений задачи. Иногда, однако, бывает полезно обратиться к обобщенным функциям, т. е. к функционалам в каком-либо пространстве функций. Такие вопросы подробно излагаются И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым в работе ([5]) и книге ([6]) с применениями в основном к задаче Коши. По совету И. М. Гельфанда,

мы воспользуемся обобщенными функциями для случая смешанной задачи. С этой целью объясним коротко в удобной для нас форме преобразование Лапласа для обобщенных функций.

В качестве основного пространства функций рассмотрим пространство $\Phi = \{\varphi(t)\}$ финитных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(t)$, заданных при $t \geqslant 0$ и обращающихся в нуль вместе со всеми производными при $t = 0$. Обобщенной функцией $u(t)$ назовем любой линейный непрерывный функционал в пространстве $\Phi$ и обозначим его через $(u, \varphi)$. В частности, если $u(t)$ — обычная функция, заданная на полупрямой $t \geqslant 0$, то она определяет функционал

$$(u, \varphi) = \int_0^\infty u(t)\varphi(t)\,dt, \tag{6.1}$$

т. е. является обобщенной функцией.

Двойственное пространство $\Psi$ сконструируем из аналитических функций $\psi(\lambda)$, являющихся преобразованиями Лапласа функций $\varphi(t)$:

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(t)e^{-\lambda t}\,dt. \tag{6.2}$$

ТЕОРЕМА 6. *Пространство* $\Psi = \{\psi(\lambda)\}$ *преобразований Лапласа функций* $\varphi(t) \in \Phi$ *полностью характеризуется следующими свойствами:*

1) $\psi(\lambda)$ — *целые аналитические функции.*

2) *В любой фиксированной полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > s$ $\psi(\lambda)$ *убывает с ростом* $|\lambda|$ *быстрее любой степени* $\frac{1}{\lambda}$.

3) *Для каждой функции* $\psi(\lambda)$ *существуют* $t_0 > 0$ *и* $C$ *такие, что*

$$|\psi(\lambda)| < Ce^{-t_0\operatorname{Re}\lambda} \text{ при } \operatorname{Re}\lambda < 0.$$

Доказательство. Докажем сначала *необходимость* перечисленных условий, пользуясь формулой (6.2).

Свойство 1) очевидно. Свойство 2) получается интегрированием (6.2) по частям с использованием финитности функции $\varphi(t)$, равенства нулю всех ее производных при $t = 0$ и ограниченности $e^{-\lambda t}$ при $\operatorname{Re}\lambda > s$.

Докажем необходимость условия 3). Пусть $\varphi(t) = 0$ при $t > t_0$. Тогда при $\operatorname{Re}\lambda < 0$

$$|\psi(\lambda)| = \left|\int_0^{t_0}\varphi(t)e^{-\lambda t}\,dt\right| \leqslant e^{-t_0\operatorname{Re}\lambda}\int_0^{t_0}|\varphi(t)|\,dt = Ce^{-t_0\operatorname{Re}\lambda}.$$

Установим *достаточность* условий. Пусть $\psi(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Тогда [см. ([3])] она является преобразованием Лапласа функции

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\psi(\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda, \tag{6.3}$$

где интеграл абсолютно сходится при любом конечном $\sigma$ и не зависит от $\sigma$. Нужно доказать принадлежность $\varphi(t)$ к классу $\Phi$.

Дифференцируя (6.3) по $t$, мы, в силу условия 2, будем опять получать сходящиеся интегралы, т. е. $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема.

Пусть $t \leqslant 0$. Тогда, в силу ограниченности $e^{\lambda t}$ при $\operatorname{Re}\lambda > \sigma$ и малости $\psi(\lambda)$ при больших $|\lambda|$, мы можем замкнуть контур интегрирования (6.3) справа полуокружностью сколь угодно большого радиуса, не меняя при этом значения интеграла. Поскольку под интегралом стоит целая функция, отсюда следует, что $\varphi(t) = 0$. Аналогично доказывается равенство нулю всех производных при $t = 0$.

Пусть $t > t_0$, где $t_0$ определено условием 3) для данной $\psi(\lambda)$. Тогда при $\operatorname{Re}\lambda < 0$

$$|\psi(\lambda)e^{\lambda t}| < Ce^{(t-t_0)\operatorname{Re}\lambda},$$

т. е. подынтегральная функция убывает влево настолько быстро, что мы можем замкнуть контур таким же образом полуокружностью слева. Отсюда опять получим $\varphi(t) = 0$, т. е. финитность $\varphi(t)$. Итак, формула (6.3) определяет для любой $\psi(\lambda) \in \Psi$ функцию $\varphi(t) \in \Phi$. Теорема доказана.

Введем в пространстве $\Psi$ линейные непрерывные функционалы $(v, \psi)$ и назовем их обобщенными функциями $v(\lambda)$.

Определение. *Преобразованием Лапласа обобщенной функции $u(t)$ назовем обобщенную функцию $v(\lambda)$, определяемую равенством*

$$(v, \psi) = (u, \varphi), \tag{6.4}$$

*где $\varphi(t)$ — обращение Лапласа (6.3) функции $\psi(\lambda)$.*

Обращение $u(t)$ функции $v(\lambda)$ задается той же формулой (6.4), а $\psi(\lambda)$ есть преобразование Лапласа (6.2) от $\varphi(t)$.

Пусть $u(t)$ — обычная функция экспоненциального типа при $t \geqslant 0$, а $v(\lambda)$ — ее обычное преобразование Лапласа. Тогда из (6.4) можно получить явный вид функционала $(v, \psi)$:

$$(v, \psi) = (u, \varphi) = \int_0^\infty u(t)\varphi(t)\,dt = \int_0^\infty u(t)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\psi(\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\int_0^\infty u(t)e^{-\lambda t}\psi(-\lambda)\,dt\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} v(\lambda)\psi(-\lambda)\,d\lambda;$$

прямую $\operatorname{Re}\lambda = -\sigma$ нужно брать при этом правее полюсов $v(\lambda)$. Таким образом, в рассмотренном случае

$$(v, \psi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} v(\lambda)\psi(-\lambda)\,d\lambda, \tag{6.5}$$

где $s$ расположено правее полюсов $v(\lambda)$.

Но формула (6.5) определяет линейный непрерывный функционал в пространстве $\Psi$ и не только тогда, когда $v(\lambda)$ есть преобразование Лапласа функции. Мы сформулируем достаточные условия в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Аналитическая функция $v(\lambda)$ определяет обобщенную функцию в пространстве $\Psi$ с помощью формулы* (6.5), *если она не имеет полюсов правее некоторой прямой $\operatorname{Re}\lambda = s_0$ и возрастает в полуплоскости*

$\operatorname{Re}\lambda > s_0$ *при* $|\lambda| \to \infty$ *не быстрее некоторой степени* $\lambda$. *В этом случае она является преобразованием Лапласа обобщенной функции* $u(t)$, *определенной с помощью* (6.4).

Доказательство очевидно.

Используя теорему 7, можно повторить результаты теоремы 5 для любых интегрируемых начальных данных $u_0(x)$, если понимать решение задачи как обобщенную функцию, и при этом не производить громоздких оценок § 5. Непосредственно из теоремы 1 следует ограниченность $G(x, \xi, \lambda)$, а значит, и $v(x, \lambda)$, правее некоторой вертикальной прямой. В силу теоремы 7, это оказывается достаточным для того, чтобы $v(x, \lambda)$ определяло обобщенную функцию $u(t, x)$, являющуюся решением поставленной в § 1 смешанной задачи.

В заключение автор приносит искреннюю благодарность И. М. Гельфанду, под руководством которого выполнена эта работа.

Поступило
19. XII. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1954.
[2] Birkhoff G. D., Langer R. E., The boundary problems and developments associated with a sistem of ordinary linear differential equations of the first order, Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences, 58, № 2 (1923), 51—128.
[3] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, М.— Л., 1951.
[4] Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation. I, Basel, 1950.
[5] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, Успехи матем. наук, VIII, № 6 (1953), 3—54.
[6] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, вып. 1, М.— Л., 1958.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 913–924

Ю. Н. ЧЕРЕМНЫХ

# ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)

В работе рассматривается однородное линейное параболическое уравнение, определенное в области $(0 < x < \psi(t),\ t > 0)$. Исследуется вопрос о характере убывания при $t \to \infty$ решения, обращающегося в нуль (или убывающего) на боковых границах этой области, в зависимости от функции $\psi(t)$. Работа примыкает к результату Кшижанского ([1]), показавшего, что решение параболического уравнения, коэффициенты которого удовлетворяют некоторым неравенствам, равномерно стремится к нулю при $t \to \infty$ в области $(0 < x < 1,\ t > 0)$, если оно стремится к нулю при $x=0$ и $x=1$.

Рассмотрим однородное линейное параболическое уравнение:

$$Lu \equiv a(x,t)\,u_{xx} + b(x,t)\,u_x + c(x,t)\,u - u_t = 0, \tag{1}$$

заданное в области $G$, граница $\overline{G}\setminus G$ которой состоит из отрезка $[a, b]$ оси $x$ и двух непересекающихся гладких кривых $x = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$ $(\varphi(t) < \psi(t),\ t \geqslant 0)$.

Коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a(x, t),\ b(x, t),\ c(x, t) \in C^{(0)} \text{ в } G, \\ 2)\ a(x, t) \geqslant a_0 > 0,\ c(x, t) \leqslant 0,\ b(x, t) \leqslant B \text{ в } G \end{array}\right\} \tag{I}$$

($a_0$, $B > 0$ — постоянные).

Мы скажем, что функция $f(x, t) \in \Gamma$ в $G$, если она непрерывна в $\overline{G}$ и обладает в $G$ непрерывной второй производной по $x$ и непрерывной первой — по $t$.

Под решением $u(x, t)$ уравнения (1) в $G$ будем понимать функцию, принадлежащую классу $\Gamma$ в $G$.

При сделанных предположениях справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Пусть существует функция* $v(x, t) \in \Gamma$ *в* $G$ ($\mathcal{V}(x, t) \in \Gamma$ *в* $G$), *удовлетворяющая требованию*

$$Lv \geqslant 0\ (L\mathcal{V} \leqslant 0) \text{ в } G,$$

*и пусть* $u(x, t)$ — *решение уравнения* (1) *в* $G$, *для которого выполняется условие:*

$$u(x, t) \geqslant v(x, t)\ (\leqslant \mathcal{V}(x, t)) \text{ на } \overline{G}\setminus G.$$

*Тогда в* $\overline{G}$

$$u(x, t \geqslant v(x, t)\ \ (\leqslant \mathcal{V}(x, t)).$$

ЛЕММА 2. *Пусть существует функция* $V(x, t) \in \Gamma$ *в* $G$, *удовлетворяющая требованиям:*

1) $V(x, t) > 0$ *в* $\overline{G}$,

2) $LV \leqslant 0$ *в* $G$,

*и пусть* $u(x, t)$ — *решение уравнения* (1) *в* $G$, *для которого выполняется условие*

$$u(x, t)|_{x=\varphi(t)} = u(x, t)|_{x=\psi(t)} = 0 \text{ при } t \geqslant 0. \tag{*}$$

*Тогда в* $\overline{G}$

$$|u(x, t)| \leqslant kV(x, t), \tag{2}$$

*где*

$$k = \frac{\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |u(x, 0)|}{\min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} V(x, 0)}.$$

Лемма 2 легко доказывается с помощью леммы 1 *.

Рассмотрим частный случай области $G$ — область

$$G_1 (0 \equiv \varphi(t) < x < \psi(t) \equiv \varepsilon \leqslant 1, \ t > 0).$$

Заметим, что если $z(x)$ есть решение дифференциального уравнения

$$a_0 z'' + Bz' + 1 = 0, \tag{3}$$

обладающее второй непрерывной производной на $[0, \varepsilon]$ и удовлетворяющее условиям:

$$z(x) > 0, \quad z'(x) \geqslant 0, \quad z''(x) \leqslant 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon, \tag{4}$$

то для него справедливо неравенство:

$$a(x, t) z'' + b(x, t) z' + c(x, t) z \leqslant a_0 z'' + Bz' = -1.$$

Решение

$$z(x) = -\frac{a_0}{B^2} e^{\frac{B}{a_0}(\varepsilon - x)} - \frac{x}{B} + \frac{1}{2a_0} \varepsilon^2 e^{\frac{B}{a_0}\varepsilon} + \frac{a_0}{B^2} e^{\frac{B}{a_0}\varepsilon} \tag{5}$$

уравнения (3) ** удовлетворяет условиям (4) и условию

$$0 < \frac{1}{2a_0} \varepsilon^2 e^{\frac{B}{a_0}\varepsilon} \leqslant z(x) \leqslant z(\varepsilon) < \frac{1}{a_0} \varepsilon^2 e^{\frac{B}{a_0}\varepsilon} \quad (0 \leqslant x \leqslant \varepsilon). \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 1 ***. *Пусть граница области* $G_1$ *образована осью* $t$ $(t \geqslant 0)$, *прямой* $x = \varepsilon \leqslant 1$ *и отрезком* $[0, \varepsilon]$ *оси* $x$, *и пусть* $u(x, t)$ — *решение уравнения* (1) *в* $G_1$, *удовлетворяющее условию* (*). *Тогда в* $\overline{G}_1$

$$|u(x, t)| < 2 \max_{0 \leqslant x \leqslant \varepsilon} |u(x, 0)| e^{-\frac{a_0}{2H} \cdot \frac{t}{\varepsilon^2}},$$

*где* $H = e^{\frac{B}{a_0}}$.

---

* См. также теорему 1 работы (1).

** Решение (5) получается из общего интеграла уравнения (3)

$$z(x) = -c_0 e^{-\frac{B}{a_0}x} - \frac{x}{B} + c_1.$$

*** Теорема 1 доказывается почти так же, как теорема 2 работы (1).

Доказательство. Положим $V(x, t) = z(x) e^{-\lambda t}$ и подберем $\lambda > 0$ так, чтобы $V(x, t)$ удовлетворяло неравенству $LV \leqslant 0$.

Мы имеем:

$$LV \equiv a(x, t) z'' e^{-\lambda t} + b(x, t) z' e^{-\lambda t} + c(x, t) z e^{-\lambda t} + z \cdot e^{-\lambda t} \cdot \lambda,$$

или

$$\frac{e^{\lambda t} LV}{z} \equiv \frac{a(x, t) z'' + b(x, t) z' + c(x, t) z}{z} + \lambda < -\frac{1}{z} + 2\lambda < -\frac{a_0}{\varepsilon^2} e^{-\frac{B}{a_0}\varepsilon} + 2\lambda.$$

Приравнивая правую часть последнего неравенства нулю, находим, что

$$\lambda = \frac{a_0}{2\varepsilon^2} e^{-\frac{B}{a_0}\varepsilon}.$$

Мы нашли функцию $V(x, t)$, для которой выполняются требования леммы 2. Поэтому, поскольку $u(x, t)$ удовлетворяет условию (*), можно написать:

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{\max\limits_{0 \leqslant x < \varepsilon} |u(x, 0)|}{\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant \varepsilon} V(x, 0)} V(x, t) < \frac{\max\limits_{0 < x \leqslant \varepsilon} |u(x, 0)|}{\frac{1}{2a_0} \varepsilon^2 e^{\frac{B}{a_0}\varepsilon}} \cdot \frac{1}{a_0} \varepsilon^2 e^{\frac{B}{a_0}\varepsilon} \cdot e^{-\frac{a_0 t}{2\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{B}{a_0}\varepsilon\right)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \max_{0 \leqslant x \leqslant \varepsilon} |u(x, 0)| \cdot e^{-\frac{a_0}{2H} \cdot \frac{t}{\varepsilon^2}} \quad (t \geqslant 0),$$

где $H = e^{\frac{B}{a_0}}$.

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть рассматривается область* $G_2 (0 < x < \psi(t), t > 0)$, *где функция* $x = \psi(t)$ *удовлетворяет при* $t \geqslant 0$ *требованиям*:

1) $\psi(t) \in C^{(1)}$,

2) $0 < \psi(t) \leqslant 1$,

3) $-\frac{B}{4H} \leqslant \psi'(t) \leqslant 0$ * $\quad (H = e^{\frac{B}{a_0}})$.

*Пусть* $u(x, t)$ — *решение уравнения* (1) *в* $G_2$, *для которого выполняется условие* (*). *Тогда в* $\overline{G}_2$

$$|u(x, t)| < 2 \cdot \max_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} |u(x, 0)| e^{-\frac{a_0}{2H} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}}.$$

Доказательство. Заменив в решении (5) и условии (6) $\varepsilon$ на $\psi(t)$, получим:

$$z(x, t) = -\frac{a_0}{B^2} e^{\frac{B}{a_0}(\psi(t) - x)} - \frac{x}{B} + \frac{1}{2a_0} \psi^2(t) e^{\frac{B}{a_0}\psi(t)} + \frac{a_0}{B^2} e^{\frac{B}{a_0}\psi(t)},$$

$$0 < \frac{1}{2a_0} \psi^2(t) e^{\frac{B}{a_0}\psi(t)} \leqslant z(x, t) < \frac{1}{a_0} \psi^2(t) e^{\frac{B}{a_0}\psi(t)} \quad (0 \leqslant x \leqslant \psi(t)).$$

---

* Условия 2) и 3) теоремы будут выполнены для всех $t$, больших некоторого $t_0$, если $\psi(t) \underset{t \to \infty}{\to} 0$ $(\psi(t) > 0)$ и $\psi'(t) \underset{t \to \infty}{\to} 0$ $(\psi'(t) \leqslant 0)$.

Для частной производной $z_t(x, t)$ справедливо неравенство

$$-z_t \leqslant -\psi'(t)\, e^{\frac{B}{a_0}\psi(t)}\left[\frac{1}{B} + \frac{B}{2a_0^2}\psi^2(t) + \frac{1}{a_0}\psi(t)\right].$$

Положим

$$V(x, t) = z(x, t)\, e^{-\lambda(t)},$$

где $\lambda(t)$ — пока неизвестная функция $t$, которую мы подберем так, чтобы выполнялось неравенство $LV \leqslant 0$.

Мы имеем:

$$LV \equiv a(x,t)\, z_{xx}\, e^{-\lambda(t)} + b(x,t)\, z_x\, e^{-\lambda(t)} + c(x,t)\, z\, e^{-\lambda(t)} - z_t\, e^{-\lambda(t)} + z\, e^{-\lambda(t)} \cdot \lambda'(t),$$

или

$$\frac{e^{\lambda(t)}\, LV}{z} \equiv \frac{a(x, t)\, z_{xx} + b(x, t)\, z_x + c(x, t)\, z}{z} - \frac{z_t}{z} + \lambda'(t) \leqslant -\frac{1}{z} - \frac{z_t}{z} + \lambda'(t) <$$

$$< -\frac{a_0}{\psi^2(t)}\, e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} - \frac{\psi'(t)\left[\frac{1}{B} + \frac{B}{2a_0^2}\psi^2(t) + \frac{1}{a_0}\psi(t)\right]\exp\left(\frac{B}{a_0}\psi(t)\right)}{\frac{1}{2a_0}\psi^2(t)\exp\left(\frac{B}{a_0}\psi(t)\right)} + \lambda'(t) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{a_0}{H}\cdot\frac{1}{\psi^2(t)} - \frac{2a_0}{B}\cdot\frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)} - \frac{B}{a_0}\psi'(t) - \frac{2\,\psi'(t)}{\psi(t)} + \lambda'(t).$$

Приравнивая правую часть последнего неравенства к нулю и интегрируя от 0 до $t$, находим:

$$\lambda(t) = \frac{a_0}{H}\int_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)} + \frac{2a_0}{B}\int_0^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi^2(\tau)}\, d\tau + \frac{B}{a_0}\psi(t) + \ln\psi^2(t).$$

Таким образом, функция

$$V(x, t) = z(x, t)\, e^{-\frac{a_0}{H}\int_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)} - \frac{2a_0}{B}\int_0^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi^2(\tau)}\, d\tau - \frac{B}{a_0}\psi(t) - \ln\psi^2(t)}$$

удовлетворяет требованиям леммы 2. Поэтому для всякого решения $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию (*), имеет место в $\overline{G}_2$ неравенство (2).

Для функции $V(x, t)$ справедливы оценки:

$$\frac{1}{2a_0}\, e^{-\frac{a_0}{H}\int_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}} \leqslant V(x, t) < \frac{1}{a_0}\, e^{-\frac{a_0}{H}\int_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(t)} - \frac{2a_0}{B}\int_0^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi^2(\tau)}\, d\tau} \quad (t \geqslant 0). \tag{7}$$

Из условия 3) теоремы следует, что

$$\frac{a_0}{2H}\int_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)} \geqslant -\frac{2a_0}{B}\int_0^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi^2(\tau)}\, d\tau \quad (t \geqslant 0),$$

а тогда

$$-\frac{a_0}{H}\int_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)} - \frac{2a_0}{B}\int_0^t \frac{\psi'(\tau)}{\psi^2(\tau)}\, d\tau \leqslant -\frac{a_0}{2H}\int_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)} \quad (t \geqslant 0).$$

Используя (7), окончательно получаем:

$$V(x, t) < \frac{1}{a_0} e^{-\frac{a_0}{2H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}} \quad (t \geqslant 0). \tag{8}$$

Таким образом, в $\overline{G}_2$

$$|u(x, t)| < \frac{k}{a_0} e^{-\frac{a_0}{2H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}} = 2 \cdot \max_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} |u(x, 0)| e^{-\frac{a_0}{2H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}}.$$

Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 2′. *Пусть рассматривается область* $G_2$ $(0 < x < \psi(t)$, $t > 0)$, *где функция* $x = \psi(t)$ *удовлетворяет при* $t \geqslant 0$ *требованиям:*

1) $\psi(t) \in C^{(1)}$,
2) $0 < \psi(t) \leqslant 1$,
3) $|\psi'(t)| \leqslant \frac{a_0 B}{4H(a_0 + B)^2}$.

*Пусть* $u(x, t)$ — *решение уравнения* (1) *в* $G_2$, *для которого выполняется условие* (*). *Тогда в* $\overline{G}_2$

$$|u(x, t)| < 2 \cdot \max_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} |u(x, 0)| e^{-\frac{a_0}{2H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}}.$$

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.

Если в условии (I) потребовать дополнительно ограниченности $b(x, t)$ по модулю ($|b(x, t)| \leqslant b_0$, $b_0 > 0$ — постоянная), то можно несколько улучшить постоянную в оценке для $|u(x, t)|$ в теореме 2.

ТЕОРЕМА 2″. *Пусть рассматривается область* $G_2$ $(0 < x < \psi(t)$, $t > 0)$, *где функция* $x = \psi(t)$ *удовлетворяет при* $t \geqslant 0$ *требованиям:*

1) $\psi(t) \in C^{(1)}$,
2) $\psi(t) > 0$,
3) $b_0 \psi(t) + |\psi'(t)| \psi(t) \leqslant \frac{a_0 \pi}{4}$ *.

*Пусть коэффициенты* $a(x, t)$ *и* $c(x, t)$ *уравнения* (1) *удовлетворяют условию* (I), $|b(x, t)| \leqslant b_0$ $(b_0 > 0)$, *и пусть* $u(x, t)$ — *решение уравнения* (1) *в* $G_2$, *для которого выполнено условие* (*). *Тогда в* $\overline{G}_2$

$$|u(x, t)| \leqslant \sqrt{2} \cdot \max_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} |u(x, 0)| \cdot e^{-\frac{a_0 \pi^2}{8}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$V(x, t) = \sin \frac{\pi(2x + \psi(t))}{4\psi(t)} e^{\lambda(t)}.$$

---

* Условие 3) теоремы будет выполнено для всех $t$, бóльших некоторого $t_0$, если $\psi(t) \underset{t \to \infty}{\to} 0$ $(\psi(t) > 0)$ и $|\psi'(t)| \leqslant N$ ($N$ — постоянная).

Будем искать функцию $\lambda(t)$ так, чтобы удовлетворялись условия 1) и 2) леммы 2, затем оценим сверху $V(x, t)$ (с использованием условия 3) теоремы), после чего получим требуемую оценку.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть рассматривается область* $G_2$ $(0 < x < \psi(t)$, $t > 0)$, *где функция* $x = \psi(t)$ *удовлетворяет при* $t \geqslant 0$ *требованиям:*

1) $\psi(t) \in C^{(1)}$,
2) $0 < \psi(t) \leqslant \Psi$, $\Psi$ — *постоянная,*
3) $|\psi'(t)| \leqslant N$, $N$ — *постоянная.*

$$\left.\begin{array}{l}\text{Пусть коэффициенты уравнения (1) непрерывны в } G_2 \text{ и} \\ 0 < a_0 \leqslant a \leqslant A, \quad |b| \leqslant b_0, \quad -c_0 \leqslant c \leqslant 0 \ (c_0 \text{ — постоянная}).\end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

*Пусть решение* $u(x, t)$ *уравнения* (1) *в* $G_2$ *удовлетворяет условию* (*).

*Если* $u(x, 0) > 0$ $(0 < x < \psi(0))$ *для некоторого* $n \geqslant 2$ *удовлетворяет условиям:*

$$x^n = O(u(x, 0)) \quad (x \to +0), \quad [\psi(0) - x]^n = O(u(x, 0)) \quad (x \to \psi(0) - 0),$$

*то в* $\overline{G}_2$ *будет выполняться неравенство*

$$u(x, t) \geqslant k \sin^n \frac{\pi x}{\psi(t)} e^{-\frac{S}{\beta}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}},$$

*где* $k > 0$ *зависит только от* $u(x, 0)$ *и от* $\sin^n \frac{\pi x}{\psi(0)}$, *а* $S$ *и* $\beta$ — *от* $a_0$, $A$, $b_0$, $c_0$, $\Psi$, $N$, $n$.

Доказательство. Рассмотрим в $\overline{G}_2$ функцию

$$v(x, t) = y(x, t) e^{-\lambda(t)},$$

где

$$y(x, t) = \sin^n \frac{x\pi}{\psi(t)} \quad (n \geqslant 2).$$

Выпишем частные производные функции $y(x, t)$:

$$y_x = n \sin^{n-1} \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \cos \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \frac{\pi}{\psi(t)},$$

$$y_{xx} = n(n-1) \sin^{n-2} \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \cos^2 \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \frac{\pi^2}{\psi^2(t)} - n \sin^n \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \frac{\pi^2}{\psi^2(t)},$$

$$y_t = -n \sin^{n-1} \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \cos \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \frac{x\pi\psi'(t)}{\psi^2(t)}.$$

Мы имеем в $G_2$:

$$e^{\lambda(t)} Lv \equiv a y_{xx} + b y_x + c y + \lambda' y - y_t =$$

$$= a\left[n(n-1)\sin^{n-2}\frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \cos^2 \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \frac{\pi^2}{\psi^2(t)} - n \sin^n \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \frac{\pi^2}{\psi^2(t)}\right] +$$

$$+ b\left[n \sin^{n-1}\frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \cos\frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \frac{\pi}{\psi(t)}\right] + c \cdot \sin^n \frac{x\pi}{\psi(t)} + \lambda' \sin^n \frac{x\pi}{\psi(t)} +$$

$$+ n \sin^{n-1} \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \cos \frac{x\pi}{\psi(t)} \cdot \frac{x\pi\psi'}{\psi^2},$$

или

$$\psi^2(t)\frac{e^{\lambda(t)}Lv}{\sin^{n-2}\frac{x\pi}{\psi(t)}} = an(n-1)\cdot\cos^2\frac{x\pi}{\psi(t)}\cdot\pi^2 - an\sin^2\frac{x\pi}{\psi(t)}\cdot\pi^2 \dots$$

$$+\frac{bn}{2}\sin\frac{2x\pi}{\psi(t)}\cdot\pi\psi(t) + c\cdot\sin^2\frac{x\pi}{\psi(t)}\cdot\psi^2(t) + \frac{n}{2}\sin\frac{2x\pi}{\psi(t)}\cdot x\pi\psi'(t)$$

$$+\lambda'\sin^2\frac{x\pi}{\psi(t)}\cdot\psi^2(t).$$

Нас будут интересовать те $\lambda(t)>0$, у которых $\lambda'(t)>0$.

Разобьем промежуток $(0, \psi(t))$ $(t\geqslant 0)$ на три части:

$$\Delta_1=(0,\alpha\psi(t)),\qquad \Delta_2=((1-\alpha)\psi(t),\psi(t)),\qquad \overline{\Delta}_3=[\alpha\psi(t),\ (1-\alpha)\psi(t)],$$

где $\alpha>0$ — малое число, которое мы подберем ниже.

Для $\Delta_1$ и $\Delta_2$ имеем:

$$\psi^2(t)\frac{e^{\lambda(t)}Lv}{\sin^{n-2}\frac{x\pi}{\psi(t)}} \geqslant a_0n(n-1)\cos^2\alpha\pi\cdot\pi^2 - An\sin^2\alpha\pi\cdot\pi^2 -$$

$$-\frac{b_0n}{2}\sin 2\alpha\pi\cdot\pi\Psi - c_0\sin^2\alpha\pi\cdot\Psi^2 - \frac{n}{2}\sin 2\alpha\pi\cdot\pi N\Psi > 0.$$

Последнее неравенство будет справедливо, если взять $\alpha$ достаточно малым.

На отрезке $\overline{\Delta}_3$

$$1\geqslant\sin^2\frac{\pi x}{\psi(t)}\geqslant\beta>0$$

и поэтому

$$\psi^2(t)\frac{e^{\lambda(t)}Lv}{\sin^{n-2}\frac{x\pi}{\psi(t)}} \geqslant \psi^2(t)\beta\lambda'(t) - An^2\pi^2 - \frac{b_0n}{2}\cdot\pi\Psi - c_0\Psi^2 - \frac{n}{2}\pi\Psi N = T.$$

Положим

$$\lambda'(t)=\frac{S}{\beta}\cdot\frac{1}{\psi^2(t)};$$

тогда

$$T = S - An^2\pi^2 - \frac{b_0n}{2}\pi\Psi - c_0\Psi^2 - \frac{n\pi\Psi N}{2} > 0,$$

если $S$ выбрать достаточно большим.

Таким образом, мы построили функцию

$$v(x,t)=\sin^n\frac{\pi x}{\psi(t)}\,e^{-\frac{S}{\beta}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}},$$

для которой в $G_2$ выполняется неравенство

$$Lv\geqslant 0.$$

Для $u(x, 0)$ найдется такое $k>0$, что

$$u(x,0)\geqslant k\sin^n\frac{\pi x}{\psi(0)}=kv(x,0)\quad (0\leqslant x\leqslant\psi(0)),$$

а тогда, по лемме 1,

$$u(x,t)\geqslant kv(x,t)$$

в $\overline{G}_2$. Теорема 3 доказана.

Рассмотрим случай, когда решение уравнения (1) не равно нулю на граничных кривых $x=\varphi(t)$ и $x=\psi(t)$ области $G$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть рассматривается область* $G_2 \,(0 < x < \psi(t),\ t > 0)$, *где функция* $x = \psi(t)$ *удовлетворяет при* $t \geqslant 0$ *требованиям* 1) — 3) *теоремы* 2, *и пусть коэффициенты* $a(x, t)$ *и* $b(x, t)$ *уравнения* (1) *удовлетворяют в* $G_2$ *условию* (I), *а* $c(x, t) \equiv 0$. *Пусть* $u(x, t)$ — *решение уравнения* (1) *в* $G_2$, *для которого выполняется условие:*

$$u(x, t)\,|_{x=0} = u(x, t)\,|_{x=\psi(t)} = \Phi(t) \quad (t \geqslant 0). \qquad (**)$$

*Пусть, наконец, функция* $\Phi(t) \in C^{(1)}$, $\Phi(t) > 0$, $\Phi'(t) \leqslant 0$ $(t \geqslant 0)$. *Тогда в* $\bar{G}_2$

$$u(x, t) > -2\,\big|\min_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} u(x, 0) - \Phi(0)\big|\, e^{-\frac{a_0}{2H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}} + \Phi(t).$$

Доказательство. Если $V(x, t)$ — функция, построенная при доказательстве теоремы 2, и

$$k = 2a_0\,\big|\min_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} u(x, 0) - \Phi(0)\big|,$$

то

$$u(x, 0) - \Phi(0) \geqslant -kV(x, 0) \quad (0 \leqslant x \leqslant \psi(0)).$$

Кроме того, очевидно, что

$$u(x, t) - \Phi(t) \geqslant -kV(x, t) \quad (x = 0, \quad x = \psi(t); \quad t \geqslant 0).$$

Следовательно,

$$u(x, t) \geqslant -kV(x, t) + \Phi(t) \ \text{ на } \ \bar{G}_2 \setminus G_2.$$

Поскольку

$$L[-kV + \Phi] = -kLV + L\Phi \geqslant -\Phi'(t) \geqslant 0,$$

то по лемме 1 имеем:

$$u(x, t) \geqslant -kV(x, t) + \Phi(t) \ \text{ в } \ \bar{G}_2,$$

или

$$u(x, t) > -\frac{k}{a_0}\, e^{-\frac{a_0}{2H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}} + \Phi(t) \ \text{ в } \ \bar{G}_2.$$

Теорема 4 доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть рассматривается область* $G_2 \,(0 < x < \psi(t),$ $t > 0)$, *где функция* $x = \psi(t)$ *удовлетворяет при* $t \geqslant 0$ *следующим требованиям:*

1) $\psi(t) \in C^{(1)}$,

2) $0 < \psi(t) \leqslant 1$,

3) $-\dfrac{a_0 B}{2H\,(2a_0 + B)} \leqslant \psi'(t) \leqslant 0$.

*Пусть коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют в* $G_2$ *условию* (I) *и пусть решение* $u(x, t)$ *уравнения* (1) *в* $G_2$ *удовлетворяет условию* (**).

*Пусть функция* $\Phi(t) \in C^{(1)}$, $\Phi(t) > 0$, $\Phi'(t) \leqslant 0$ $(t \geqslant 0)$. *Тогда если*

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \geqslant -\frac{a_0}{2H}\,\frac{1}{\psi^2(t)} \quad (t \geqslant 0), \qquad (9)$$

*то*

$$u(x,\ t) < 2\,(\max_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} u(x,\ 0) - \Phi(0))\, e^{-\frac{a_0}{2H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}} + 2\Phi(t) \ \text{в}\ \bar{G}_2. \tag{10}$$

*Если же*

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \leqslant -\frac{a_0}{H}\cdot\frac{1}{\psi^2(t)} \quad (t \geqslant 0), \tag{11}$$

*то*

$$|u(x,\ t)| < 2 \max_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} |u(x,\ 0)| \cdot e^{-\frac{a_0}{2H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}} \ \text{в}\ \bar{G}_2.$$

Доказательство. Если $V(x,\ t)$ — функция, построенная при доказательстве теоремы 2, $\bar{z}(x,\ t) \geqslant 1$ и $k = 2a_0(\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} u(x,\ 0) - \Phi(0))$, то

$$u(x,\ 0) \leqslant kV(x,\ 0) + \bar{z}(x,\ 0)\,\Phi(0) \quad (0 \leqslant x \leqslant \psi(0)).$$

Далее, ясно, что

$$u(x,\ t) \leqslant kV(x,\ t) + \bar{z}(x,\ t)\,\Phi(t) \ \text{при}\ x = 0,\ x = \psi(t) \quad (t \geqslant 0).$$

Положим

$$W(x,\ t) = kV(x,\ t) + \bar{z}(x,\ t)\,\Phi(t);$$

тогда

$$u(x,\ t) \leqslant W(x,\ t) \ \text{на}\ \bar{G}_2 \diagdown G_2.$$

Если $LW \leqslant 0$, то, по лемме 1,

$$u(x,\ t) \leqslant kV(x,\ t) + \bar{z}(x,\ t)\,\Phi(t) \ \text{в}\ \bar{G}_2. \tag{12}$$

За $\bar{z}(x,\ t)$ примем функцию

$$\bar{z}(x,\ t) = -\frac{2a_0^2}{B^2\psi^2(t)} e^{-\frac{B}{a_0}x} - \frac{2a_0 x}{B\psi^2(t)} e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} + 1 + \frac{2a_0^2}{B^2\psi^2(t)},$$

которая является решением дифференциального уравнения

$$a_0 \bar{z}_{xx} + B\bar{z}_x + \frac{2a_0}{\psi^2(t)} e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} = 0,$$

удовлетворяющим условиям:

$$\bar{z}_x(x,\ t) > 0 \ \text{при}\ 0 \leqslant x < \psi(t), \quad \bar{z}_x(\psi(t),\ t) = 0,$$

$$1 = \bar{z}(0,\ t) \leqslant \bar{z}(x,\ t) \leqslant \bar{z}(\psi(t),\ t) < 2\ {}^{*}, \quad \bar{z}_{xx}(x,\ t) < 0.$$

---

$$\bar{z}(\psi(t),\ t) = \frac{2a_0^2}{B^2\psi^2(t)}\left(-e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} + 1\right) + 1 - \frac{2a_0}{B\psi(t)} e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} =$$

$$= \frac{2a_0^2}{B^2\psi^2(t)} e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)}\left(e^{\frac{B}{a_0}\psi(t)} - 1\right) + 1 - \frac{2a_0}{B\psi(t)} e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} <$$

$$< \frac{2a_0^2}{B^2\psi^2(t)} e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)}\left(\frac{B}{a_0}\psi(t) + \frac{B^2\psi^2(t)}{2a_0^2} e^{\frac{B}{a_0}\psi(t)}\right) + 1 - \frac{2a_0}{B\psi(t)} e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} = 2.$$

$$-z_t \leqslant -\frac{4a_0}{B}\cdot\frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)}e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} - \frac{2\psi'(t)}{\psi(t)}e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)}\,{}^{*} \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \psi(t).$$

Покажем, что при таком выборе $\bar{z}(x, t)$ $LW < 0$ в $G_2$.

В самом деле,

$$LW \leqslant L[\bar{z}(x, t)\Phi(t)] \equiv a(x, t)\bar{z}_{xx}\Phi(t) + b(x, t)\bar{z}_x\Phi(t) + $$
$$+ c(x, t)\bar{z}\cdot\Phi(t) - \bar{z}_t\Phi(t) - \bar{z}\Phi'(t) <$$
$$< -\frac{2a_0}{\psi^2(t)}e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)}\cdot\Phi(t) - \frac{4a_0}{B}\cdot\frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)}e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)}\cdot\Phi(t) -$$
$$-\frac{2\psi'(t)}{\psi(t)}e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)}\cdot\Phi(t) - 2\Phi'(t) \leqslant -\frac{2a_0}{H}\frac{1}{\psi^2(t)}\Phi(t) -$$
$$-\frac{4a_0}{B}\frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)}\Phi(t) - \frac{2\psi'(t)}{\psi^2(t)}\Phi(t) - 2\Phi'(t) = D(t).$$

Если $D(t) \leqslant 0$, то

$$-\frac{a_0}{H}\cdot\frac{1}{\psi^2(t)} - \frac{2a_0}{B}\cdot\frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)} - \frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)} \leqslant \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}, \tag{13}$$

и обратно.

Так как $\psi'(t) \geqslant -\frac{a_0 B}{2H(2a_0 + B)}$, то

$$-\frac{a_0}{H}\cdot\frac{1}{\psi^2(t)} - \frac{2a_0}{B}\frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)} - \frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)} \leqslant -\frac{a_0}{2H}\cdot\frac{1}{\psi^2(t)},$$

и поэтому из условия (9) подавно следует (13).

Таким образом, $LW < 0$ в $G_2$.

Поскольку

$$\psi'(t) \geqslant -\frac{a_0 B}{2H(2a_0 + B)} > -\frac{B}{4H},$$

имеет место неравенство (8), а потому (12) можно переписать так:

$$u(x, t) < \frac{k}{a_0}e^{-\frac{a_0}{2H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}} + 2\Phi(t). \tag{10'}$$

Из (11) необходимо следует, что

$$\Phi(t) \leqslant \Phi(0)e^{-\frac{a_0}{H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}} \quad (t \geqslant 0).$$

Очевидно, что

$$|u(x, 0)| \leqslant 2a_0 \max_{0\leqslant x\leqslant\psi(0)} |u(x, 0)|\cdot V(x, 0). \tag{14}$$

Используя (7), получаем:

$$\Phi(t) \leqslant \Phi(0)e^{-\frac{a_0}{H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}} \leqslant 2a_0\Phi(0)V(x, t) \leqslant 2a_0 \max_{0\leqslant x\leqslant\psi(0)} |u(x, 0)|V(x, t). \tag{15}$$

---

*

$$-\bar{z}_t(x, t) = -\frac{4a_0^2}{B}\cdot\frac{\psi'(t)}{\psi^3(t)}e^{-\frac{B}{a_0}x} - \frac{4a_0 x}{B}\cdot\frac{\psi'(t)}{\psi^3(t)}e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} -$$
$$-2x\frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)}e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} + \frac{4a_0^2}{B^2}\cdot\frac{\psi'(t)}{\psi^3(t)} \leqslant -\psi'(t)\cdot\frac{4a_0^2}{B^2}\cdot\frac{1}{\psi^3(t)} - \psi'(t)\cdot\frac{4a_0}{B\psi^2(t)}e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} -$$
$$-\psi'(t)\cdot\frac{2}{\psi(t)}\cdot e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} + \psi'(t)\cdot\frac{4a_0^2}{B^2}\cdot\frac{1}{\psi^3(t)} = -\frac{4a_0\psi'(t)}{B\psi^2(t)}\cdot e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} - \frac{2\psi'(t)}{\psi(t)}\cdot e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)}.$$

Из (14) и (15), на основании леммы 1, следует, что

$$|u(x,t)| \leqslant 2a_0 \max_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} |u(x,0)| \cdot V(x,t) \text{ в } \overline{G}_2,$$

или, в силу (8),

$$|u(x,t)| < 2 \max_{0 \leqslant x \leqslant \psi(0)} |u(x,0)| \cdot e^{-\frac{a_0}{2H}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}}.$$

Теорема 5 доказана.

Рассмотрим случай расширяющейся области $G_3 (0 \equiv \varphi(t) < x < \psi(t), t > 0)$, где $\psi(t) \in C^{(1)}$, $\psi(0) > 0$, $\psi'(t) \geqslant 0$ $(t \geqslant 0)$.

Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют в $G_3$ условию (I).

Будем искать функцию $V(x,t)$ снова в виде

$$V(x,t) = z(x,t)\, e^{-\lambda(t)},$$

где

$$z(x,t) = -\frac{a_0}{B^2} e^{\frac{B}{a_0}(\psi(t)-x)} - \frac{x}{B} + \frac{\psi(t)}{B} + \frac{a_0}{B^2} e^{\frac{B}{a_0}\psi(t)} + \frac{a_0}{B^2}$$

есть решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям:

$$0 < \frac{a_0}{B^2} < z(x,t) \leqslant \frac{a_0}{B^2} e^{\frac{B}{a_0}\psi(t)},$$

$$z_x(x,t) \geqslant 0, \quad z_{xx}(x,t) < 0, \quad -z_t(x,t) \leqslant 0 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \psi(t).$$

Мы имеем:

$$LV \equiv a(x,t) z_{xx} e^{-\lambda(t)} + b(x,t) z_x e^{-\lambda(t)} + c(x,t) z e^{-\lambda(t)} - z_t e^{-\lambda(t)} + z\lambda'(t) e^{-\lambda(t)}$$

и

$$\frac{e^{\lambda(t)} LV}{z} \equiv \frac{a(x,t) z_{xx} + b(x,t) z_x + c(x,t) z}{z} - \frac{z_t}{z} + \lambda'(t) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{z} + \lambda'(t) \leqslant -\frac{B^2}{a_0} e^{-\frac{B}{a_0}\psi(t)} + \lambda'(t).$$

Приравнивая правую часть последнего неравенства нулю и интегрируя от 0 до $t$, находим:

$$\lambda(t) = \frac{B^2}{a_0} \int\limits_0^t e^{-\frac{B}{a_0}\psi(\tau)}\, d\tau.$$

При таком выборе $\lambda(t)$ $LV \leqslant 0$ в $G_3$.

Следовательно, если решение $u(x,t)$ уравнения (1) удовлетворяет условию (*), то, по лемме 2, в $\overline{G}_3$

$$|u(x,t)| \leqslant kV(x,t).$$

Оценим функцию

$$V(x,t) = z(x,t)\, e^{-\frac{B^2}{a_0}\int\limits_0^t e^{-\frac{B}{a_0}\psi(\tau)} d\tau}$$

в $\overline{G}_3$ снизу и сверху:

$$\frac{a_0}{B^2} e^{-\frac{B^2}{a_0}\int\limits_0^t e^{-\frac{B}{a_0}\psi(\tau)} d\tau} < V(x,t) \leqslant \frac{a_0}{B^2} e^{\frac{B}{a_0}\psi(t)} \cdot e^{-\frac{B^2}{a_0}\int\limits_0^t e^{-\frac{B}{a_0}\psi(\tau)} d\tau}.$$

Если, например, положить

$$\psi(t) = \frac{a_0}{B} \ln(t+d)$$

($d > 0$ — постоянная), то получим:

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\psi(0)} |u(x,0)|}{\min\limits_{0\leqslant x\leqslant\psi(0)} V(x,0)} V(x,t) < \frac{\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\psi(0)} |u(x,0)|}{\frac{a_0}{B^2}} \cdot \frac{a_0}{B^2} e^{\ln(t+d) - \frac{B^2}{a_0}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\tau+d}} =$$

$$= \max_{0\leqslant x\leqslant\psi(0)} |u(x,0)| \cdot e^{\frac{B^2}{a_0}\ln d} e^{\left(1-\frac{B^2}{a_0}\right)\ln(t+d)} = \max_{0\leqslant x\leqslant\psi(0)} |u(x,0)| \, d^{\frac{B^2}{a_0}} (t+d)^{-n},$$

где число $n = \frac{B^2}{a_0} - 1$ положительно при достаточно большом $B$.

Отсюда следует, что $|u(x,t)|$ в этом примере стремится к нулю равномерно по $0 \leqslant x \leqslant \psi(t)$ при $t \to \infty$.

Если функция $\psi(t)$ будет расти быстро, то, как показывает нижеследующий простой пример, решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (*), может стремиться к нулю при $t \to \infty$ неравномерно по $x$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} - x\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} u_x - u_t = 0;$$

здесь

$$a(t, x) = 1 > 0, \quad b(x, t) = -\frac{x\psi'(t)}{\psi(t)} \leqslant 0, \quad c(x, t) \equiv 0.$$

Функция

$$u(x, t) = \sin\frac{\pi x}{\psi(t)} e^{-\pi^2\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}}$$

есть решение этого уравнения.

Пусть $\psi(t) = t + \psi(0)$; тогда при любом $x_0 > 0$ $\lim\limits_{t\to\infty} u(x_0, t) = 0$, а

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t)\Big|_{x=\frac{\psi(t)}{2}} = \lim_{t\to\infty} e^{\frac{\pi^2}{t+\psi(0)}} \cdot e^{-\frac{\pi^2}{\psi(0)}} = e^{-\frac{\pi^2}{\psi(0)}} > 0.$$

Однако существуют такие уравнения, для которых равномерное стремление к нулю решений, удовлетворяющих условию (*), не зависит от степени роста функции $\psi(t)$.

Приведем пример такого уравнения.

Пример 2. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$Lu \equiv u_{xx} - u_t = 0.$$

Функция

$$V(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t+g}} e^{-\frac{x^2}{4(t+g)}} \quad (g > 0 \text{ — постоянная})$$

удовлетворяет условиям: 1) $V(x, t) > 0$ в $\bar{G}_3$, 2) $LV = 0$.

По лемме 2,

$$|u(x, t)| \leqslant kV(x, t) \leqslant \frac{k}{\sqrt{t+g}}.$$

Автор выражает глубокую признательность Е. М. Ландису за руководство и помощь в работе.

Поступило
5. VII. 1958

ЛИТЕРАТУРА

Кшижанский М., Об асимптотическом поведении решений уравнения параболического типа, Бюлл. Польской Ак. наук, отд. III, т. IV, № 5 (1956), 243—247.

**ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР**

**Серия математическая**

**23 (1959), 925—932**

**Я. И. ЖИТОМИРСКИЙ**

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПО Г. Е. ШИЛОВУ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)

**В работе изучаются вопросы существования и единственности решения задачи Коши для одного нового класса систем линейных уравнений в частных производных с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных.**

1. В известной работе И. Г. Петровского (1) был введен весьма широкий класс систем линейных уравнений в частных производных с коэффициентами, зависящими лишь от времени, для которых корректно поставлена задача Коши. Частными случаями таких систем являлись гиперболические и параболические системы. После появления работы (1) возник вопрос о корректной разрешимости задачи Коши для систем линейных уравнений в частных производных с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных. В случае гиперболических систем этот вопрос был решен в работах И. Г. Петровского. Впоследствии в работах ряда авторов изучались параболические по И. Г. Петровскому системы с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных и времени [см., например, (2), (9), (10) и др.].

В данной работе изучаются вопросы корректной разрешимости зададачи Коши для одного нового класса систем линейных уравнений в частных производных с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных, а именно для параболических по Г. Е. Шилову систем.

В работе Г. Е. Шилова (3) дано новое определение параболической системы, расширяющее определение И. Г. Петровского. Это определение состоит в следующем.

Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u\,(x,\,t)}{\partial t}=P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u\,(x,\,t), \qquad (1)$$

где $u\,(x,t)=\{u_1\,(x,t),\ldots,u_N\,(x,t)\}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица (из $N$ строк и $N$ столбцов), элементами которой являются многочлены от $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}$ с постоянными коэффициентами.

Пусть $\lambda_1(s),\ldots, \lambda_N(s)$ — характеристические корни матрицы $P(s)$, т. е. корни уравнения

$$\det \| P(s) - \lambda E \| = 0,$$

и пусть

$$\Lambda(s) = \max_k \operatorname{Re} \lambda_k(s).$$

Определение. Система (1) называется параболической по Г. Е. Шилову, если при вещественном $s = \sigma$ выполняется неравенство

$$\Lambda(\sigma) \leqslant -C |\sigma|^h + C_1, \tag{2}$$

где $C,\ C_1,\ h > 0$.

В определении параболичности по И. Г. Петровскому ([1]) по существу предполагается неравенство, аналогичное (2), для характеристических корней только главной части матрицы $P(s)$ (образованной из всех членов наивысшего порядка $p$) с $h = p$.

В п. 2 данной работы будут получены оценки функции Грина параболических по Г. Е. Шилову систем с постоянными коэффициентами. Эти оценки позволят доказать в п. 3 корректную разрешимость задачи Коши для некоторых типов систем с переменными коэффициентами в классе ограниченных функций.

2. Обозначим через $G(x, t)$ функцию Грина параболической по Г. Е. Шилову системы (1) с постоянными коэффициентами. Пусть $h$ — показатель пораболичности этой системы, $\nu$ — ее род, $p$ — порядок, $p_0$ — приведенный порядок [см. ([3])]. Тогда имеют место следующие оценки:

$$|G^{(k)}(x,t)| \leqslant \frac{A}{t^{\frac{n+k+\gamma}{h}}} e^{-A_1 t^{-\frac{\nu}{h-\nu}} |x|^{\frac{h}{h-\nu}}}, \quad \nu \leqslant 0, \tag{3}$$

$$|G^{(k)}(x,t)| \leqslant \frac{A_2}{t^{\frac{n+k+\gamma}{h}}} e^{-A_3 t^{-\frac{\nu}{p_0-\nu}} |x|^{\frac{p_0}{p_0-\nu}}}, \quad \nu > 0, \tag{4}$$

$$\gamma = (N-1)(p-h).$$

Здесь и в дальнейшем символ $(k)$ означает производную порядка $k = 0, 1, \ldots$ по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$; $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x < \infty$; $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ — положительные постоянные. Оценки (3), (4) являются уточнением соответствующих оценок, полученных в работе ([3]) [см. также ([4]), стр. 143]. Для системы (1), параболической по И. Г. Петровскому ($\nu = 1$, $h = p_0 = p$ — порядок системы), оценки (3), (4) совпадают с известными ранее оценками [см. ([5]), ([6])].

Докажем оценки (3), (4).

Воспользуемся тем, что разрешающая матрица $Q(s, t)$ системы (1) как функция переменного $s = \sigma + i\tau$ удовлетворяет неравенствам

$$|Q(s,t)| \leqslant A_4 (1 + t|s|^p)^{N-1} e^{A_5 t |s|^{p_0}} \tag{5}$$

и

$$|Q(\sigma, t)| \leqslant A_6 (1 + t|\sigma|^p)^{N-1} e^{-A_7 t |\sigma|^h}, \quad A_7 > 0 \tag{6}$$

[см. ([4]), стр. 78].

Повторяя прием, изложенный в работе (7) (стр. 259 264), и выделяя всюду зависимость от $t$, можно показать, что для производных функции $Q(s,t)$ на вещественной оси справедливы оценки:

$$|(\sigma^k Q(\sigma,t))^{(q)}| \leqslant \begin{cases} C_4^q q^{q\left(1-\frac{\nu}{h}\right)} t^{\frac{q\nu-\gamma}{h}} |\sigma|^k e^{-C_5 t|\sigma|^h}, & \nu \leqslant 0, \\ C_6^q q^{q\left(1-\frac{\nu}{p_0}\right)} \sum\limits_{q_1+q_2=q} t^{\frac{q_1\nu}{p_0}-\frac{\gamma}{h}} |\sigma|^{k-q_2} e^{-C_7 t|\sigma|^h}, & \nu > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $0 \leqslant t \leqslant T$, символом $\sigma^k$ обозначено произведение $\sigma_1^{k_1}\cdots\sigma_n^{k_n}$, $k_1+\ldots+k_n=k$, $k=0,1,\ldots$.

Из равенства

$$(-ix)^q G^{(k)}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} [(i\sigma)^k Q(\sigma,t)]^{(q)} e^{i\sigma x} d\sigma$$

в силу (7) получаем:

$$|G^{(k)}(x,t)| \leqslant \frac{A_9}{t^{\frac{n+k+\gamma}{h}}} \inf_q \left\{ C_4^q q^{q\left(1-\frac{\nu}{h}\right)} t^{\frac{q\nu}{h}} |x|^{-q} \right\}, \quad \nu \leqslant 0,$$

откуда вытекает оценка (3);

$$|G^{(k)}(x,t)| \leqslant \frac{A_{10}}{t^{\frac{n+k+\gamma}{h}}} \inf_q \left\{ C_6^q q^{q\left(1-\frac{\nu}{p_0}\right)} \sum_{q_1+q_2=q} t^{\frac{q_1\nu}{p_0}+\frac{q_2}{h}} |x|^{-q} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{10}}{t^{\frac{n+k+\gamma}{h}}} \inf_q \left\{ C_8^q q^{q\left(1-\frac{\nu}{p_0}\right)} t^{\frac{q\nu}{p_0}} |x|^{-q} \right\}, \quad \nu > 0.$$

Последнее неравенство справедливо, так как $\nu \leqslant 1$, $h \leqslant p_0$, откуда следует, что $\frac{1}{h} \geqslant \frac{\nu}{p_0}$. Из полученной оценки вытекает (4).

3. Рассмотрим систему

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t). \quad (8)$$

Допустим, что матрицу $P\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ можно разбить на два слагаемых $P_0\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $P_1\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ так, что система с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P_0\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) \quad (9)$$

имеет порядок $p$, приведенный порядок $p_0$, род $\nu$ и показатель параболичности $h$. Присоединим к системе (8) начальное условие

$$u(x,t_0) = \varphi(x) \quad (8')$$

и будем считать, что функция $\varphi(x)$ и все ее производные до порядка $l_1$

по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$ непрерывны и ограничены при всех $x$: $-\infty < x < \infty$.

ТЕОРЕМА. *Если порядок* $p_1$ *оператора* $P_1\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ *удовлетворяет условиям:*

$$0 \leqslant p_1 < h - n(1-\nu) - \gamma, \qquad \nu \leqslant 0, \tag{10}$$

$$0 \leqslant p_1 < h - n\left(1 - \frac{h\nu}{p_0}\right) - \gamma, \quad \nu > 0, \tag{10'}$$

*и коэффициенты этого оператора вместе с их производными до некоторого конечного порядка* $l_2$ *непрерывны и ограничены при всех* $x$, $-\infty < x < \infty$, *то решение* $u(x, t)$ *задачи Коши* (8) — (8′) *в полосе* $\Pi(-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t - t_0 \leqslant T < \infty)$ *существует, ограничено вместе со своими производными достаточно высокого порядка* $\alpha$ *по совокупности переменных* $x_1, \ldots, x_n$ *и является единственным. (Здесь число* $\alpha$ *может быть любым, числа* $l_1$ *и* $l_2$ *зависят от* $\alpha$, *а также от чисел* $n$ *и* $p$.)

Доказательство. Пусть $G_0(x, t-t_0)$ — функция Грина системы (9). Тогда достаточно гладкие решения задачи (8) — (8′) совпадают с достаточно гладкими решениями интегро-дифференциальной системы

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x-\xi, t-\tau) P_1\left(\xi, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi, \tau - t_0)\, d\xi, \tag{11}$$

где функция

$$u_0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x-\xi, t-t_0)\varphi(\xi)\, d\xi$$

является решением задачи Коши (9) — (8′).

Решение системы (11) будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{(m)}(x, t), \tag{12}$$

где

$$u_{(0)}(x, t) = u_0(x, t),$$

$$u_{(m+1)}(x, t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x-\xi, t-\tau) P_1\left(\xi, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_{(m)}(\xi, \tau - t_0)\, d\xi. \tag{13}$$

Пользуясь этими соотношениями, оценим члены ряда (12) и их производные до порядка $\alpha$ в полосе П. Для этого нам понадобятся оценки интегралов по всему пространству $x_1, \ldots, x_n$ от функции Грина $G_0(x, t)$ и ее производных. Из (3) и (4) получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_0^{(k)}(x, t)|\, dx \leqslant \frac{AD}{t^{\frac{k+n(1-\nu)+\gamma}{h}}}, \quad \nu \leqslant 0, \tag{14}$$

где

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A_1 |y|^{\frac{h}{h-\nu}}}\, dy,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_0^{(k)}(x, t)|\, dx \leqslant \frac{A_2 D_1}{t^{\frac{k+\gamma}{h} + n\left(\frac{1}{h} - \frac{\nu}{p_0}\right)}}, \quad \nu > 0, \tag{14'}$$

где

$$D_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-A_3 |y|^{\frac{p_0}{p_0 - \nu}}}\, dy.$$

Пусть число $l_1$ таково, что решение $u_0(x, t)$ задачи Коши (9) — (8′) имеет непрерывные и ограниченные в полосе П производные до порядка $\alpha$ по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_n$, и пусть в полосе П справедливо неравенство

$$|u_0^{(r)}(x, t)| \leqslant L, \tag{15}$$

где $L = \mathrm{const}$, $0 \leqslant r \leqslant \alpha$. Такое число $l_1$ существует в силу выполнения условия А И. Г. Петровского для системы (9) [см. ([1])].

Пусть, далее, $K$ — постоянная, ограничивающая при всех $x$, $-\infty < x < \infty$, коэффициенты оператора $P_1\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и их производные до порядка $l_2$. Тогда, в силу (15), в полосе П имеем:

$$\left| P_1\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u_0(x, t) \right| \leqslant L \cdot K \cdot \Lambda, \tag{16}$$

где $\Lambda$ — постоянная, зависящая от $N$ и наибольшего числа слагаемых в элементах матриц $P_1\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Используя (16) и (13) при $m = 0$ и учитывая (14) и (14′), получаем следующие оценки в полосе П:

$$|u_1(x, t)| \leqslant LK\Lambda AD \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{n(1-\nu)+\gamma}{h}}} \leqslant LK\Lambda AD \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{h-\varepsilon}{h}}} =$$

$$= LK\Lambda ADMB\left(1, \frac{\varepsilon}{h}\right)(t - t_0)^{\frac{\varepsilon}{h}}, \quad \nu \leqslant 0,$$

где $\varepsilon = h - \gamma - n(1-\nu) - [\{h - \gamma - n(1-\nu)\}]$, если $h - \gamma - n(1-\nu)$ — нецелое число, $\varepsilon = 1$, если $h - \gamma - n(1-\nu)$ — целое [см. (10)] и $M$ — постоянная, зависящая только от $T$,

$$|u_1(x, t)| \leqslant LK\Lambda A_2 D_1 \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{n\left(\frac{1}{h} - \frac{\nu}{p_0}\right) + \frac{\gamma}{h}}} \leqslant LK\Lambda A_2 D_1 M_1 \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{h-\delta}{h}}} =$$

$$= LK\Lambda A_2 D_1 M_1 B\left(1, \frac{\delta}{h}\right)(t - t_0)^{\frac{\delta}{h}}, \quad \nu > 0,$$

где

$$\delta = h - \gamma - n\left(1 - \frac{h\nu}{p_0}\right) - \left[\left\{h - \gamma - n\left(1 - \frac{h\nu}{p_0}\right)\right\}\right],$$

если $h - \gamma - n\left(1 - \frac{h\nu}{p_0}\right)$ — нецелое число, $\delta = 1$, если $h - \gamma - n\left(1 - \frac{h\nu}{p_0}\right)$ — целое [см. (10′)], и $M_1$ — постоянная, зависящая только от $T$.

Эти оценки справедливы также для всех производных функции $u_{(1)}(x, t)$ порядка $r \leqslant \alpha$. Последнее утверждение очевидно при $r \leqslant p_1$, в силу (10)

и (10′) и определения чисел $\varepsilon$ и $\delta$. Если же $p_1 < r \leqslant \alpha$, то оно вытекает из следующего равенства:

$$u_1^{(r)}(x, t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_0^{(p_1)}(y, t-\tau)\left[P_1\left(x-y, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0(x-y, \tau-t_0)\right]^{(r-p_1)} dy.$$

Применяя аналогичные рассуждения, нетрудно доказать по индукции следующие оценки:

$$|u_m^{(r)}(x, t)| \leqslant LK_1^m \prod_{l=1}^{m} B\left(1+(l-1)\frac{\varepsilon}{h}, \frac{\varepsilon}{h}\right)(t-t_0)^{\frac{m\varepsilon}{h}}, \quad \nu \leqslant 0, \qquad (17)$$

где $0 \leqslant r \leqslant \alpha$, $K_1 = K\Lambda ADM$,

$$|u_{(m)}^{(r)}(x, t)| \leqslant LK_2^m \prod_{l=1}^{m} B\left(1+(l-1)\frac{\delta}{h}, \frac{\delta}{h}\right)(t-t_0)^{\frac{m\delta}{h}}, \quad \nu > 0, \qquad (17')$$

где $0 \leqslant r \leqslant \alpha$, $K_2 = K\Lambda A_2 D_1 M_1$. Поскольку

$$\prod_{l=1}^{m} B\left(1+(l-1)\frac{\varepsilon}{h}, \frac{\varepsilon}{h}\right) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right]^m}{\Gamma\left(1+\frac{m\varepsilon}{h}\right)} \leqslant \Lambda_1^m \frac{\left[\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)\right]^m}{m^{\frac{m\varepsilon}{h}}}$$

и, аналогично,

$$\prod_{l=1}^{m} B\left(1+(l-1)\frac{\delta}{h}, \frac{\delta}{h}\right) \leqslant \Lambda_2^m \frac{\left[\Gamma\left(\frac{\delta}{h}\right)\right]^m}{m^{\frac{m\delta}{h}}},$$

где $\Lambda_1$ зависит от $\varepsilon$, а $\Lambda_2$ — от $\delta$, то

$$|u_{(m)}^{(r)}(x, t)| \leqslant L\frac{K_3^m}{m^{\frac{m\varepsilon}{h}}}, \quad \nu \leqslant 0, \qquad (18)$$

где $0 \leqslant r \leqslant \alpha$, $K_3 = K_1\Lambda_1\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)T^{\frac{\varepsilon}{h}}$, и

$$|u_{(m)}^{(r)}(x, t)| \leqslant L\frac{K_4^m}{m^{\frac{m\delta}{h}}}, \quad \nu > 0, \qquad (18')$$

где $0 \leqslant r \leqslant \alpha$, $K_4 = K_2\Lambda_2\Gamma\left(\frac{\delta}{h}\right)T^{\frac{\delta}{h}}$.

Оценки (18) и (18′) обеспечивают абсолютную и равномерную сходимость в полосе П ряда (12) и его формальных производных до порядка $\alpha$. При этом во всей полосе П для решения $u(x, t)$ системы (11) справедливы оценки:

$$|u^{(r)}(x, t)| \leqslant L_1, \quad \nu \leqslant 0, \qquad (19)$$

где $0 \leqslant r \leqslant \alpha$, $L_1 = L\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K_3^m}{m^{\frac{m\varepsilon}{h}}}$, $L_1 = L\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K_4^m}{m^{\frac{m\delta}{h}}}$, $\nu > 0$.

Тем самым существование достаточно гладкого решения системы (11) доказано. Остается доказать его единственность.

Пусть $v(x, t)$ — еще одно решение системы (11), удовлетворяющее в полосе П оценке (19):

$$|v^{(r)}(x, t)| \leqslant L_2.$$

Обозначим

$$\omega(x, t) = v(x, t) - u(x, t)$$

и

$$\sigma_{(m)}(x, t) = \sum_{k=0}^{m} u_{(k)}(x, t).$$

Тогда

$$\sigma_{(m)}(x, t) = u_0(x, t) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x-\xi, t-\tau)\, P_1\left(\xi, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) \sigma_{(m-1)}(\xi, \tau - t_0)\, d\xi .$$

Так как

$$v - \sigma_{(m)} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G_0(x-\xi, t-\tau)\, P_1\left(\xi, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) [v(\xi, \tau - t_0) - \sigma_{(m-1)}(\xi, \tau - t_0)]\, d\xi,$$

т. е. функции $v - \sigma_{(m)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (13), и так как

$$|(v(x, t) - \sigma_{(0)}(x, t))^{(r)}| \leqslant L_3,$$

то $v - \sigma_{(m)}$ вместе со своими производными порядка $r$, $0 \leqslant r \leqslant \alpha$, удовлетворяет оценкам (18) или (18′) с другими постоянными в правых частях неравенств. Поэтому

$$\omega(x, t) = \lim_{m\to\infty} (v(x, t) - \sigma_{(m)}(x, t)) = 0$$

в полосе П.

Тем самым теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Приведем примеры систем, удовлетворяющих условию (10).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left[i\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^p - \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^h + P_1\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u(x, t),$$

где $n = 1$, $h > 0$ — четное число, $p \geqslant h$. Уравнение

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left[i\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^p - \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^h\right] u(x, t)$$

является параболическим по Г. Е. Шилову с показателем параболичности $h$ и родом $\nu = -p + h + 1$ [см. ([8])]. В этом случае условие (10) принимает вид

$$p_1 < 2h - p.$$

Последнему условию удовлетворяют, например, уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + q(x)\right] u(x, t),$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left[-i\frac{\partial^6}{\partial x^6} - \frac{\partial^4}{\partial x^4} + q_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + q_2(x)\right] u(x, t).$$

Замечание 2. Условию (10′) удовлетворяют параболические по И. Г. Петровскому системы вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left[P_0\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) + P_1\left(x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u(x, t)$$

с постоянными коэффициентами в главной части $P_0\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$, содержащей все члены наивысшего порядка $p$. В этом случае для параболической по Г. Е. Шилову системы

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P_0\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t), \quad \nu = 1, \quad p = p_0 = h$$

[см. ([4]), стр. 132] условие (10′) принимает вид $p_1 < p$. Поэтому из доказанной теоремы вытекают результаты первой части работы ([2]).

Отметим, что в случае одного пространственного переменного ($n = 1$) в работе ([8]) доказано, что род $\nu$ параболической по Г. Е. Шилову системы (1) есть целое число. Таким образом, при $n = 1$ случай $\nu > 0$ исчерпывается случаем $\nu = 1$; при этом условие (10′) принимает вид $p_1 < h - \gamma$.

Автор пользуется случаем принести глубокую благодарность Г. Е. Шилову за руководство.

Поступило
17. I. 1959

ЛИТЕРАТУРА

1 Петровский И. Г., О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюл. МГУ, секция А, 1, вып. 7, 1938.

2 Брук С. З., О задаче Коши для систем дифференциальных уравнений параболического типа, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 10 (1946), 105—120.

3 Шилов Г. Е., Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Успехи матем. наук, т. X, вып. 4 (66) (1955), 89—101.

4 Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции, выпуск 3 (Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений), Гос. изд. физ.-матем. лит., М., 1958.

5 Ладыженская О. А., О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения, Матем. сборн., 27 (69) : 2 (1950), 175—184.

6 Эйдельман С. Д., Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения, Матем. сборн., 33 (75) : 2 (1953), 359—382.

7 Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции, выпуск 2 (Пространства основных и обобщенных функций), Гос. изд. физ.-матем. лит., М., 1958.

8 Борок В. М., О системах линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, Диссертация, МГУ, 1957.

9 Эйдельман С. Д., О фундаментальных решениях параболических систем, Матем. сборн., 38 (80) : 1 (1956), 51—92.

10 Житомирский Я. И., Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производных с растущими коэффициентами, Известия высших уч. заведений, Математика, 1 (1959).

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

23 (1959), 933—950



В. К. ДЗЯДЫК


## О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НА КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ЯДРАМИ, ЯВЛЯЮЩИМИСЯ ИНТЕГРАЛАМИ ОТ АБСОЛЮТНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)


В работе получена в метриках $C$ и $L$ точная верхняя грань наилучших приближений тригонометрическими полиномами $(n-1)$-го порядка $(n=1, 2, \ldots)$ на классах функций $f$ вида

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\xi)\,\varphi(t-\xi)\,d\xi,$$

где $K(\xi)$ — суммируемая на $[0, 2\pi]$ и абсолютно монотонная в $(-\infty, 2\pi)$ функция или же периодический интеграл от такой функции. В частности, при любом $s>0$ найдена точная верхняя грань наилучших приближений на классах периодических функций, имеющих ограниченную (в $C$ или в $L$) производную $s$-го порядка *.


### § 1. Введение

Обозначим через $\mathfrak{M}_M$ и $\mathfrak{M}_L$ классы периодических существенно ограниченных измеримых или, соответственно, суммируемых функций $\varphi(t)$, которые удовлетворяют соответственно условиям

$$\operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)|\leqslant 1 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi}|\varphi(t)|\,dt\leqslant 1. \tag{1.1}$$

Тогда каждая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция $K(t)$ будет определять два класса функций $f(t)$ вида

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\xi)\,\varphi(t-\xi)\,d\xi. \tag{1.2}$$

Эти классы мы будем обозначать через $K_C$, если $\varphi\in\mathfrak{M}_M$, и через $K_L$, если $\varphi\in\mathfrak{M}_L$. В том случае, когда функции $\varphi(t)$, кроме условия (1.1), удовлетворяют еще условиям

$$\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,{\cos kt \atop \sin kt}\,dt=0,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1, \tag{1.3}$$

* Этим самым, между прочим, полностью решена задача, поставленная в 1937 г. Ж. Фаваром [см. ([25]), п. 10, стр. 223—224].

мы получим некоторые подклассы классов $K_C$ и $K_L$, которые обозначим соответственно через $K_{Cm}$ и $K_{Lm}$, т. е. будем говорить, что $f(t) \in K_{Cm}$ (соответственно $f(t) \in K_{Lm}$), если функция $f(t)$ представима в виде (1.2), где $\varphi(t) \in \mathfrak{M}_M$ (соответственно $\varphi(t) \in \mathfrak{M}_L$) и, кроме того, удовлетворяет условиям (1.3).

Наилучшее приближение каждой отдельной функции $f(t)$ при помощи тригонометрических полиномов $T_{n-1}(t)$ порядка не выше $n-1$ в метриках $C$ и $L$ будем обозначать соответственно через $E_n(f)_C$ и $E_n(f)_L$.

Положим

$$\sup_{f \in K_C} E_n(f)_C = E_n[K_C], \qquad \sup_{f \in K_L} E_n(f)_L = E_n[K_L],$$
$$\sup_{f \in K_{Cm}} E_n(f)_C = E_n[K_{Cm}], \ldots \tag{1.4}$$

и будем величины $E_n[K_C]$, $E_n[K_L]$, $E_n[K_{Cm}]$ и $E_n[K_{Lm}]$ называть наилучшими приближениями на классах $K_C$, $K_L$, ...

В период с 1936 по 1946 г. в ряде работ Ж. Фавара [см. ([24]) и ([25])], Н. И. Ахиезера [см. ([1]) и ([2])], М. Г. Крейна [см. ([1]) и ([16])], Б. Надя [см. ([17])] и С. М. Никольского [см. ([18])] был успешно решен целый ряд задач отыскания наилучших приближений на различных классах функций $f$ вида (1.2). В частности, Ж. Фаваром ([25]) и независимо от него Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном ([1]) при всех натуральных $s$ были найдены наилучшие приближения на классах функций $f(t)$, определяемых ядрами $K(t) = \Psi_s(t)$ вида

$$\Psi_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{s\pi}{2}\right)}{k^s}, \tag{1.5}$$

или, что то же самое, наилучшие приближения на классах функций $f(t)$, имеющих ограниченную $s$-ю производную ($s = 1, 2, \ldots$).

Задача для случая дробного $s$, представляющая специфические трудности в связи с наличием при дробных $s$ в ряде Фурье для функции $\Psi_s(t)$ как синусов, так и косинусов, была в 1937 г. Ж. Фаваром только поставлена (см. сноску на стр. 933).

В 1938 г. Б. Надь оценил сверху величину $E_n[\Psi_{sC}]$ для всех $s > 0$.

В 1953 г. автором ([10]) было найдено точное значение величин

$$E_n[\Psi_{sC}] = E_n[\Psi_{sL}]$$

для случая $0 < s < 1$. Пользуясь этим результатом и упомянутыми выше результатами Б. Надя ([17]) и С. М. Никольского ([18]), С. Б. Стечкин в 1956 г. нашел значение

$$E_n[\Psi^{\alpha}_{sC}] = E_n[\Psi^{\alpha}_{sL}],$$

где

$$\Psi^{\alpha}_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^s},$$

для случая, когда $0 < s < 1$ и $s \leqslant \alpha \leqslant 2 - s$ [см. ([21])].

В 1958 г., развивая метод, примененный нами в работе ([10]), Сунь Юн-шен нашел точное значение величин

$$E_n[\Psi^{\alpha}_{sC}] = E_n[\Psi^{\alpha}_{sL}]$$

при достаточно больших $s$ ($s \geqslant 6$) и произвольных $\alpha$ [см. ([22]) и ([23])].

В настоящей работе мы при помощи нового метода находим точное значение величин

$$E_n[K_C] = E_n[K_L]$$

для случая, когда $K(t)$ — произвольная абсолютно монотонная на $(-\infty, 2\pi)$ и суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция (или же периодический интеграл от такой функции).

В § 2 мы доказываем несколько общих теорем, главная из которых показывает, что тригонометрический полином $n$-го порядка в промежутке $(0, 2\pi)$ не может интерполировать абсолютно монотонную на $(-\infty, 2\pi)$ функцию больше, чем в $2n+1$ точках.

В § 3 находятся точные значения величин $E_n[K_C]$, $E_n[K_L] = E_n(K_L)$, когда $K(t)$ — абсолютно монотонная на $(-\infty, 2\pi)$ и суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция.

В § 4 при всех $s > 0$ находятся точные значения величин

$$E_n[\Psi_{sC}] = E_n[\Psi_{sL}] = E_n(\Psi_s)_L.$$

В § 5 результаты, полученные в § 4, применяются для отыскания асимптотически наилучших в метрике $L$ приближений для функций с особенностями.

## § 2. Несколько теорем об абсолютно монотонных функциях

Следуя С. Н. Бернштейну, назовем функцию $K(t)$ абсолютно монотонной в некотором промежутке $(a, b)$, если она бесконечно дифференцируема в $(a, b)$ и если во всех точках $(a, b)$ функция $K(t)$ и все ее производные имеют одинаковый знак (например, все они неотрицательны). К этому же классу заменой $t$ на $b-t$ приводятся и те функции, последовательные производные которых имеют противоположные знаки.

Впервые на класс этих функций обратил внимание С. Н. Бернштейн в 1914 г. [см. ([4])] в связи с изучением аналитических функций. Детальное исследование свойств абсолютно монотонных функций проведено им в большом мемуаре ([5]) [см. также ([6]), ([7]) и ([8])]. В этом мемуаре, в частности, доказана следующая нужная нам в дальнейшем

ТЕОРЕМА 2.1 (С. Н. Бернштейн). *Любую функцию $K(t)$, абсолютно монотонную на отрицательной полуоси, можно представить в виде*

$$K(t) = \int_0^{\infty} e^{t\xi}\, d\psi(\xi), \tag{2.1}$$

*где $\psi(\xi)$ — некоторая неубывающая функция.*

В этом параграфе мы докажем несколько теорем и лемм, которые помогут выяснить роль абсолютно монотонных функций в теории приближения функций.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $K(t)$ — функция, абсолютно монотонная в*

*полуинтервале* $(-\infty, 0]$ (*или в интервале* $(-\infty, 0)$), *и пусть какой-нибудь тригонометрический полином* $T(t)$ *при некотором* $a \leqslant -2\pi$ *интерполирует функцию* $K(t)$ * *с учетом кратностей не меньше, чем в* $2N$ *точках полуинтервала* $(a, a+2\pi]$. *Тогда, каково бы ни было натуральное число* $r$, *найдется число* $b \leqslant a$ *такое, что* $r$*-я производная* $T^{(r)}(t)$ *от полинома* $T(t)$ *будет в полуинтервале* $(b, b+2\pi]$ *интерполировать* $r$*-ю производную* $K^{(r)}(t)$ *от функции* $K(t)$ *также по крайней мере в* $2N$ *точках.*

Доказательство. Будем считать, что $r = 1$, ибо для доказательства теоремы, очевидно, достаточно рассмотреть только этот случай.

Обозначим точки интерполяции функции $K(t)$ полиномом $T(t)$ через $t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2N)$:

$$a < t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{2N} \leqslant a + 2\pi$$

и будем считать, что в промежутке $(a, a+2\pi]$ других точек интерполяции нет (в противном случае справедливость теоремы 2.2 немедленно следует из теоремы Ролля) и что

$$t_{2N} = a + 2\pi \tag{2.2}$$

(от этого предположения условия, содержащиеся в теореме 2.2, не нарушаются).

Согласно теореме Ролля, в сегменте $[t_1, t_{2N}]$ ** найдется по крайней мере $2N-1$ точек $\tau_i$ интерполяции функции $K'(t)$ полиномом $T'(t)$:

$$t_1 \leqslant \tau_1 \leqslant t_2 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_{2N-1} \leqslant t_{2N} = a + 2\pi.$$

Рассмотрим два возможных случая.

1. Пусть $t_1 < a + 2\pi$. В этом случае

$$T'(\tau_{2N-1} - 2\pi) = T'(\tau_{2N-1}) = K'(\tau_{2N-1}) > K'(\tau_{2N-1} - 2\pi)$$

и, следовательно,

$$T'(\tau_{2N-1} - 2\pi) - K'(\tau_{2N-1} - 2\pi) > 0. \tag{2.3}$$

Так как

$$T(a) = T(a+2\pi) = K(a+2\pi) > K(t_1) = T(t_1),$$

то в интервале $(a, t_1)$ имеются точки строгого убывания функции $T(t)$, т. е. имеется по крайней мере одна точка $\xi \in (a, t_1)$ такая, что $T'(\xi) < 0$. В этой точке

$$T'(\xi) - K'(\xi) < 0. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что найдется по крайней мере одна точка

$$\tau_0 \in (\tau_{2N-1} - 2\pi, \xi) \subset (\tau_{2N-1} - 2\pi, t_1)$$

такая, что

$$T'(\tau_0) = K'(\tau_0).$$

2. Пусть $t_1 = a + 2\pi$ (т. е. точка $a + 2\pi$ является $2N$-кратным корнем разности $K(t) - T(t)$). В этом случае, в силу того обстоятельства, что на периоде $[a, a+2\pi]$ всегда существует (в силу теоремы Ролля) точка

---

* Т. е. совпадает с функцией $K(t)$.

** Случай кратных корней мы не исключаем.

$\xi$, $a < \xi < a + 2\pi$, для которой $T'(\xi) = 0$, будем иметь:

$$T'(a) - K'(a) = K'(a + 2\pi) - K'(a) > 0, \quad T'(\xi) - K'(\xi) < 0$$

и, значит, опять найдется по крайней мере одна точка

$$\tau_0 \in (a, \xi) \subset (\tau_{2N-1} - 2\pi, t_1)$$

такая, что

$$T'(\tau_0) = K'(\tau_0).$$

Следовательно, в обоих случаях полуинтервал $(\tau_{2N-1} - 2\pi, \tau_{2N-1}]$ будет удовлетворять условиям теоремы 2.2 (для случая $r = 1$). Теорема 2.2 доказана.

Замечание 1. Из процесса доказательства теоремы 2.2 видно, что после первого дифференцирования ($r = 1$) полуинтервал $(b, b + 2\pi]$, о котором идет речь в теореме 2.2, можно выбрать так, чтобы

$$b + 2\pi = \tau_{2N-1} \geqslant t_{2N-1};$$

после второго дифференцирования ($r = 2$) его можно выбрать так, чтобы

$$b + 2\pi \geqslant \tau_{2N-2} \geqslant t_{2N-2}, \ldots,$$

после $2N$-го дифференцирования — так, чтобы

$$b + 2\pi \geqslant t_{2N} - 2\pi = a,$$

т. е. мы видим, что после каждого дифференцирования полуинтервал $(b, b + 2\pi]$, вообще говоря, смещается влево, но настолько медленно, что, каково бы ни было натуральное число $r$, после $r$ дифференцирований полуинтервал $(b, b + 2\pi]$, о котором идет речь в теореме 2.2, может быть выбран так, чтобы

$$(b, b + 2\pi] \subset \left(a - 2\pi \frac{r + 2N - 1}{2N}, a + 2\pi\right]. \tag{2.5}$$

Замечание 2. Впредь, не оговаривая этого особо, мы всегда будем считать, что полуинтервал $(b, b + 2\pi]$ выбран таким образом, что точка $b + 2\pi$ является корнем для рассматриваемой разности $K^{(j)}(t) - T^{(j)}(t)$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Для каждой функции $K(t)$, абсолютно монотонной в интервале $(-\infty, 0)$, при любом $\delta > 0$ найдется постоянная $C > 0$, $C = C(K; \delta)$, такая, что, каково бы ни было натуральное число $N$, во всех точках $t \in \left[-\frac{N}{\delta}, 0\right)$ будет иметь место неравенство*

$$K^{(N+1)}(t) \geqslant CK^{(N)}(t). \tag{2.6}$$

Доказательство. Представим функцию $K(t)$ в виде [см. (2.1)]

$$K(t) = \int_0^\infty e^{t\xi}\, d\psi(\xi),$$

где $\psi(\xi)$ — неубывающая функция. В силу этого представления, при любом $t \in (-\infty, 0)$

$$K^{(N)}(t) = \int_0^\infty e^{t\xi} \xi^N d\psi(\xi), \quad K^{(N+1)}(t) = \int_0^\infty e^{t\xi} \xi^{N+1} d\psi(\xi). \tag{2.7}$$

Будем считать, что функция $\psi(\xi)$ в точке $\xi = 0$ является непрерывной

справа:

$$\psi(0+0)=\psi(0).$$

Если бы это было не так, то мы вместо $K(t)$ рассмотрели бы абсолютно монотонную функцию

$$K_1(t)=K(t)-[\psi(0+0)-\psi(0)]=\int_0^\infty e^{t\xi}\,d\psi_1(\xi),$$

где $\psi_1(\xi)=\psi(\xi)$, если $\xi>0$, и $\psi_1(0)=\psi(0+0)=\psi_1(0+0)$. Кроме того, будем предполагать, что $K(t)\not\equiv\text{const}$, ибо в этом случае теорема 2.3 тривиальна.

Зафиксируем произвольное число $\eta\in\left(0,\,\frac{1}{2}\right)$ и, пользуясь непрерывностью справа функции $\psi(\xi)$ при $\xi=0$, возьмем какую-нибудь точку $c\in\left(0,\,\frac{\delta}{2}\right)$ такую, чтобы выполнялось неравенство

$$\psi(c)-\psi(0)\leqslant\eta\,[\psi(\delta)-\psi(c)]. \tag{2.8}$$

Тогда при любом натуральном $N$ получим:

$$K^{(N+1)}(t)=\int_0^\infty e^{t\xi}\,\xi^{N+1}\,d\psi(\xi)\geqslant c\int_c^\infty e^{t\xi}\,\xi^N d\psi(\xi). \tag{2.9}$$

Так как при каждом фиксированном $t\in\left[-\frac{N}{\delta},\,0\right]$ и произвольном $\xi\in(0,\,\delta)$

$$(e^{t\xi}\xi^N)'=\xi^{N-1}e^{t\xi}(N+\xi t)>0,$$

то функция $e^{t\xi}\xi^N$ при каждом фиксированном $t\in\left[-\frac{N}{\delta},\,0\right]$ и $\xi\in[0,\,\delta]$ монотонно возрастает. Поэтому, принимая во внимание (2.8), получаем:

$$\int_0^c e^{t\xi}\xi^N d\psi(\xi)\leqslant\eta\int_c^\delta e^{t\xi}\xi^N d\psi(\xi). \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) следует:

$$K^{(N+1)}(t)\geqslant c(1-\eta)\int_c^\infty e^{t\xi}\,\xi^N d\psi(\xi)+c\eta\int_c^\delta e^{t\xi}\,\xi^N\,d\psi(\xi)\geqslant$$

$$\geqslant c(1-\eta)\int_0^\infty e^{t\xi}\,\xi^N d\psi(\xi)=c(1-\eta)\,K^{(N)}(t),$$

т. е. при всех $N=1,2,\ldots$ и $t\in\left[-\frac{N}{\delta},\,0\right)$

$$K^{(N+1)}(t)\geqslant c(1-\eta)\,K^{(N)}(t). \tag{2.11}$$

Теорема 2.3 доказана.

Отметим, что способ выбора постоянной $C=c(1-\eta)$ в неравенстве (2.11) (а следовательно, и само это неравенство) нельзя считать очень грубым, ибо если $c$ — фиксированное число из интервала $\left(0,\,\frac{\delta}{2}\right)$ и $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1=\min\{\eta,\,c\}$, то тогда для абсолютно монотонной

функции $K(t) = \varepsilon e^{\varepsilon t} + e^{ct}$ будет иметь место неравенство

$$K^{(N+1)}(t) < cK^{(N)}(t)$$

и в то же время число $c$ будет удовлетворять условию (2.8), если только в нем функцию $\psi(\xi)$ (ступенчатую) считать непрерывной слева. Таким образом, для данной функции постоянную $c(1-\eta)$ в неравенстве (2.11) нельзя заменить на $c$.

Приведем несколько простых утверждений, которые потребуются при доказательстве основной теоремы 2.4.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $K(t)$ — абсолютно монотонная в интервале $(-\infty, 0)$ функция, и пусть $t_0$ — произвольная точка из этого интервала. Тогда в точке $t_0 - 2\pi$ (а следовательно, и при всех $t < t_0 - 2\pi$) будем иметь:*

$$K^{(j)}(t_0 - 2\pi) < C_j K(t_0), \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{2.12}$$

*где $C_j$ — постоянная, не зависящая от вида функции $K(t)$ и от взятой точки $t_0$.*

Доказательство. Из равенства [см. (⁹), § 118 (1)]

$$\left(\frac{2\pi}{j}\right)^{-j} \Delta^j_{\frac{2\pi}{j}} K(t_0 - 2\pi) = K^{(j)}(t_0 - 2\pi + 2\pi\theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

следует:

$$K^{(j)}(t_0 - 2\pi) < K^{(j)}(t_0 - 2\pi + 2\pi\theta) =$$
$$= \left(\frac{j}{2\pi}\right)^j \sum_{l=1}^{j} (-1)^l \binom{j}{l} K\left(t_0 - 2\pi + l\frac{2\pi}{j}\right) < C_j K(t_0),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2.2. *Пусть*

$$T_n(t) = \rho_n \cos(nt + \alpha_n) + \rho_{n-1}\cos[(n-1)t + \alpha_{n-1}] + \ldots$$
$$\ldots + \rho_1 \cos(t + \alpha_1) + \rho_0, \quad \rho_n > 0,$$

*— произвольный тригонометрический полином порядка $n$ и $\varepsilon$ — любое положительное число. Тогда при достаточно больших натуральных $N$*

$$T_n^{(N)}(t) = n^N \rho_n \left[\cos\left(nt + \alpha_n + \frac{N\pi}{2}\right) + \varepsilon_{n-1}(t)\right],$$

*где $\varepsilon_{n-1}(t)$ — тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка (зависящий от $N$), удовлетворяющий при всех $t \in (-\infty, \infty)$ условиям:*

$$|\varepsilon_{n-1}(t)| < \varepsilon, \quad |\varepsilon'_{n-1}(t)| \leqslant \varepsilon, \quad |\varepsilon''_{n-1}(t)| < \varepsilon.$$

Эта лемма очевидна.

ЛЕММА 2.3. *Пусть $f(t)$ — выпуклая (т. е. вогнутая вверх), монотонная и положительная функция, заданная в некотором промежутке $(a, a+2\pi]$. Тогда, каково бы ни было натуральное число $n$ и каковы бы ни были числа $A$ и $\alpha \in (-\infty, \infty)$, функция $A\cos(nt+\alpha)$ сможет интерполировать функцию $f(t)$ не больше, чем в $2n+1$ точках.*

Действительно, график функции $A\cos(nt+\alpha)$ имеет в полуинтервале $(a, a+2\pi]$ над осью абсцисс всегда $n-1$ полных ветвей и, кроме того, еще одну $n$-ю ветвь, которая при одних $\alpha$ также будет цельной в $(a, a+2\pi]$, а при других $\alpha$ будет «разрезанной» на две части, одна из

которых будет прилегать к прямой $t = a$, а вторая — к прямой $t = a + 2\pi$. В первом случае каждая из $n$ ветвей, будучи вогнутой вниз, сможет пересекать график функции $f(t)$ не больше, чем в двух точках. Во втором случае каждая из $n - 1$ цельных ветвей также будет пересекать этот график не больше, чем в двух точках, в то время как две части разрезанной ветви смогут пересекать этот график и в трех точках, но не больше. Отсюда и следует справедливость леммы.

ЛЕММА 2.4. *Пусть $K(t)$ — абсолютно монотонная на $(-\infty, 0)$ функция, и пусть $\tau(t) = \cos(nt + \alpha_n) + \varepsilon_{n-1}(t)$, где $\alpha_n$ — произвольное фиксированное число, а $\varepsilon_{n-1}(t)$ — тригонометрический полином порядка $\leqslant n - 1$, удовлетворяющий при всех $t \in (-\infty, \infty)$ условию $|\varepsilon_{n-1}(t)| < 0{,}1$. Тогда если $t^0$ — какой-нибудь корень уравнения $K(t) - \tau(t) = 0$, а $t^{IV}$ — корень уравнения $K^{IV}(t) - \tau^{IV}(t)$, в который последовательно после четырех дифференцирований сместится влево корень $t^0$ *, то*

$$t^0 - t^{IV} > \frac{\pi}{2n}.$$

Доказательство. Из равенства

$$[\cos(nt + \alpha_n)]' = n\cos\left[n\left(t + \frac{\pi}{2n}\right) + \alpha_n\right]$$

следует, что после каждого дифференцирования любая положительная ветвь функции $\cos(nt + \alpha_n)$ сдвигается влево на $\frac{\pi}{2n}$. В силу этого, та положительная ветвь функции $\tau(t)$, которая пересекает функцию $K(t)$ в точке с абсциссой $t^0$, после четырех дифференцирований сдвинется влево на расстояние

$$\geqslant \frac{2\pi}{n} - \frac{2}{n}\arcsin\frac{1}{10}$$

и, значит, расстояние между положительными ветвями функций $\tau(t)$ и $\tau^{IV}(t)$, содержащими, соответственно, корни $t^0$ и $t^{IV}$, будет

$$\geqslant \frac{\pi}{n} - \frac{4}{n}\arcsin\frac{1}{10} > \frac{\pi}{2n}.$$

Отсюда и следует справедливость леммы.

ТЕОРЕМА 2.4 (основная). *Если $K(t)$ является функцией, абсолютно монотонной в интервале $(-\infty, 0)$ (или в полуинтервале $(-\infty, 0]$), то при любых $n = 1, 2, \ldots$ и $a < -2\pi$ (соответственно $a \leqslant -2\pi$), всякий тригонометрический полином $T_n(t)$ порядка не выше $n$ будет в полуинтервале $(a, a + 2\pi]$ интерполировать функцию $K(t)$ не больше, чем в $2n + 1$ точках.*

Доказательство. Произведя замену переменной, сведем рассуждения к случаю, когда $a = -2\pi$.

Для данной функции $K(t)$ обозначим через $\widetilde{C}$ константу

$$\widetilde{C} = \widetilde{C}\left(K; \frac{1}{2\pi}\right),$$

фигурирующую в теореме 2.3 (так, что если константу $\widetilde{C}$ подставить в неравенство (2.6), то это неравенство при любом натуральном $N$ будет

* Через $t^{(i)}$ мы обозначаем самый правый корень уравнения $K^{(i)}(t) - \tau^{(i)}(t) = 0$, удовлетворяющий условию $t^{(i)} \leqslant t^{(i-1)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $t^{(0)} = t^0$.

выполняться в промежутке $[-2\pi N, 0)$); через $\widetilde{C}_1$ обозначим константу

$$\widetilde{C}_1 = \max\{1, C_{32n}; C_{32n+1}\}$$

(см. лемму 2.1, неравенство (2.12) при $j = 32n$ и $j = 32n + 1$).

Положим, что полином $T_n(t)$ имеет вид

$T_n(t) = \rho_n \cos(nt + \alpha_n) + \rho_{n-1} \cos[(n-1)t + \alpha_{n-1}] + \ldots + \rho_1 \cos(t + \alpha_1) + \rho_0$ и возьмем натуральное число $N_1 \geqslant 4$ настолько большим, чтобы, в силу леммы 2.2, получить $T_n^{(N_1)}(t) = n^{N_1}\rho_n\ [\cos(nt + \widetilde{\alpha}_n) + \varepsilon_{n-1}(t)]$, где $\widetilde{\alpha}_n = \alpha_n + \frac{N_1\pi}{2}$ и $\varepsilon_{n-1}(t)$ — тригонометрический полином порядка $\leqslant n-1$, удовлетворяющий при всех $t \in (-\infty, \infty)$ условиям:

$$|\varepsilon_{n-1}(t)| < \frac{1}{C\widetilde{C}^2\widetilde{C}_1}, \quad |\varepsilon'_{n-1}(t)| < \min\left\{\frac{1}{\widetilde{C}c^2\widetilde{C}_1}, \frac{1}{C\widetilde{C}\widetilde{C}_1}\right\}, \quad |\varepsilon''_{n-1}(t)| < \frac{1}{C\widetilde{C}_1}.$$

Здесь постоянная $C \geqslant 1$ выбрана так, что $\frac{1}{C\widetilde{C}^2} < \frac{1}{10}$, и, значит, в силу неравенства С. Н. Бернштейна, при любом натуральном $k$

$$|n^{-k}\varepsilon^{(k)}_{n-1}(t)| < \frac{1}{C\widetilde{C}^2\widetilde{C}_1} \leqslant \frac{1}{C\widetilde{C}^2} < \frac{1}{10}, \quad |n^{-k}\varepsilon^{(k+1)}_{n-1}(t)| < \frac{1}{C\widetilde{C}^2\widetilde{C}_1} < \frac{1}{10}. \quad (2.13)$$

В силу замечания 1 к теореме 2.2, полуинтервал $(b, b + 2\pi]$, о котором шла речь в этой теореме, будет при любом натуральном $N_1$ содержаться в полуинтервале $\left(-2\pi - 2\pi\left(\frac{N_1}{2} + 1\right), 0\right] \subset [-2\pi N_1, 0]$ и во всех точках этого полуинтервала будем иметь:

$$K^{(N_1)}(t) - T_n^{(N_1)}(t) = n^{N_1}\rho_n\left\{\left[\frac{K^{(N_1)}(t)}{n^{N_1}\rho_n} - \varepsilon_{n-1}(t)\right] - \cos(nt + \widetilde{\alpha}_n)\right\}. (2.14)$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть во всех точках полуинтервала $(b, b + 2\pi] \subset [-2\pi N_1, 0]$

$$K^{(N_1)}(t)\, n^{-N_1}\rho_n^{-1} > \frac{1}{C\widetilde{C}^2\widetilde{C}_1}.$$

Тогда, в силу теоремы 2.3,

$$K^{(N_1+1)}(t)\, n^{-N_1}\rho^{-1} - \varepsilon'_{n-1}(t) > \frac{1}{C\widetilde{C}\,\widetilde{C}_1} - \varepsilon'_{n-1}(t) > 0,$$

$$K^{(N_1+2)}(t)\, n^{-N_1}\rho_n^{-1} - \varepsilon''_{n-1}(t) > \frac{1}{C\widetilde{C}_1} - \varepsilon''_{n-1}(t) > 0,$$

т. е. функция $K^{(N_1)}(t)\, n^{-N_1}\rho_n^{-1} - \varepsilon_{n-1}(t)$ является положительной, монотонной и выпуклой. Поэтому, на основании леммы 2.3, разность $K^{(N_1)}(t) - T_n^{(N_1)}(t)$ имеет в полуинтервале $(b, b + 2\pi]$ не больше, чем $2n + 1$ корень. Отсюда, в силу теоремы 2.2, и следует, что в первоначальном полуинтервале $(a, a + 2\pi]$ полином $T_n(t)$ может интерполировать функцию $K(t)$ не больше, чем в $2N + 1$ точках, что и требовалось доказать.

2. Пусть по крайней мере в одной точке $t_0 \in (b, b + 2\pi]$

$$K^{(N_1)}(t_0)\, n^{-N_1}\rho_n^{-1} \leqslant \frac{1}{C\widetilde{C}^2\widetilde{C}_1}.$$

Тогда, обозначая через $t^{(j)}$ самый правый в полуинтервале $(b, b+2\pi]$ корень уравнения $K^{(j)}(t) - T^{(j)}(t) = 0$ и учитывая, что после каждого дифференцирования этот корень последовательно смещается влево, мы после дифференцирования разности (2.14) $32n$ раз, в силу леммы 2.4. получим:

$$t^{(N_1)} - t^{(N_1+32n)} > 4\pi.$$

Поэтому, на основании леммы 2.1, во всех точках сегмента

$$[t^{(N_1+32n)} - 2\pi,\ t^{(N_1+32n)}]$$

имеем:

$$\begin{aligned} n^{-N_1}\rho_n^{-1}K^{(N_1+32n)}(t) &\leqslant \frac{C_{32n}}{C\tilde{C}^2\tilde{C}_1} \leqslant \frac{1}{C\tilde{C}^2} < \frac{1}{10}, \\ n^{-N_1}\rho_n^{-1}K^{(N_1+32n+1)}(t) &\leqslant \frac{C_{32n+1}}{C\tilde{C}^2\tilde{C}_1} \leqslant \frac{1}{C\tilde{C}^2} < \frac{1}{10}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Отсюда следует, что разность

$$K^{(N_1+32n)}(t) - T_n^{(N_1+32n)}(t) = n^{N_1+32n}\rho_n \Big\{[K^{(N_1+32n)}(t)\, n^{-(N_1+32n)}\rho_n^{-1} - \\ - n^{-32n}\varepsilon_{n-1}^{(32n)}(t)] - \cos\Big(nt + \alpha_n + \frac{N_1+32n}{2}\pi\Big)\Big\},$$

у которой в фигурных скобках, в силу (2.13) и (2.15), слагаемое

$$K^{(N_1+32n)}(t)\, n^{-(N_1+32n)}\rho_n^{-1} - n^{-32n}\varepsilon_{n-1}^{(32n)}(t)$$

и его производная по модулю $\leqslant \frac{1}{5}$, имеет в полуинтервале

$$I = (t^{(N_1+32n)} - 2\pi,\ t^{(N_1+32n)}]$$

не больше, чем $2N+1$ корень. Отсюда, как и в случае 1, применяя теорему 2.2, получаем утверждение теоремы 2.4. Теорема 2.4 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2.4′. *Если функция $K^*(t)$ имеет в интервале $(-\infty, 0)$ (или в полуинтервале $(-\infty, 0]$) абсолютно монотонную производную $\frac{d}{dt}K^*(t)$, то при любых $n = 1, 2, \ldots$ и $a < -2\pi$ (соответственно $a \leqslant -2\pi$) всякий тригонометрический полином $T_n(t)$ порядка не выше $n$ будет в полуинтервале $(a, a+2\pi]$ интерполировать функцию $K^*(t)$ не больше, чем в $2n+1$ точках.*

Доказательство. Так как функция $K^*(t)$ является монотонно возрастающей $\left(\text{ибо } \frac{d}{dt}K^*(t) \geqslant 0\right)$ и имеет абсолютно монотонную производную, то к этой функции применимы все рассуждения теоремы 2.2 (а следовательно, и сама эта теорема). Поэтому после дифференцирования мы возвращаемся к теореме 2.4.

Для дальнейшего нам потребуется следующее

Определение [см. ([14]), стр. 222]*. Пусть на каком-нибудь промежутке $[a, a+2\pi]$ задана суммируемая функция $K^*(t)$. Назовем первым

---

* Примечание при корректуре. Немного более удачное определение приведено нами в Докладах Ак. наук СССР, 129, № 1 (1959).

периодическим с периодом $2\pi$ интегралом от $K^*(t)$ функцию

$$K_1^*(t) = \int_a^t [K^*(\xi) + C]\, d\xi + C_1,$$

где постоянные $C$ и $C_1$ взяты так, что

$$K_1^*(a+2\pi) = K_1^*(a) \quad \text{и} \quad \int_a^{a+2\pi} K_1^*(\xi)\, d\xi = 0.$$

При любом натуральном $s > 1$ $s$-й периодический с периодом $2\pi$ интеграл $K_s^*(t)$ от $K^*(t)$ определим по индукции, полагая

$$K_s^*(t) = \int_a^t K_{s-1}^*(\xi)\, d\xi + C_s,$$

где $K_{s-1}^*$ — $(s-1)$-й периодический интеграл от $K^*(t)$ и постоянная $C_s$ взята так, что

$$\int_a^{a+2\pi} K_s^*(\xi)\, d\xi = 0.$$

Самое функцию $K^*(t)$ будем называть нулевым интегралом от $K^*(t)$ и обозначать через $K_0^*(t)$.

ТЕОРЕМА 2.5 *Пусть функция $K_s^*(t)$ ($s$ — целое $\geqslant 0$) является $s$-м периодическим с периодом $2\pi$ интегралом от суммируемой и непрерывной в $(-2\pi, 0]$ функции $K^*(t)$, которую при каждом $n = 1, 2, \ldots$ любой тригонометрический полином порядка $\leqslant n-1$ может в полуинтервале $(-2\pi, 0]$* * *интерполировать не больше, чем в $2n-1$ точке. Тогда при каждом целом $n \geqslant 1$ любой тригонометрический полином $T_{n-1}(t)$ порядка не выше $n-1$ может интерполировать функцию $K_s^*(t)$ не больше, чем в $2n$ точках из полуинтервала $(-2\pi, 0]$.*

Доказательство. Продолжим периодически функцию $K_s^*(t)$ с полуинтервала $(-2\pi, 0]$ на всю числовую ось. Полученная после продолжения функция, в силу определения периодических интегралов, будет на всей оси периодической и непрерывной вместе со своими производными до $(s-1)$-го порядка включительно. Поэтому, если предположить, что некоторый тригонометрический полином $T_{n-1}(t)$ порядка $\leqslant n-1$ интерполирует в полуинтервале $(-2\pi, 0]$ функцию $K_s^*(t)$ в количестве точек, которое $\geqslant 2n+1$, то разность

$$K_1^*(t) - T_n^{(s-1)}(t) = \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} [K_s^*(t) - T_{n-1}(t)],$$

в силу теоремы Ролля для периодических функций, будет иметь в полуинтервале $(-2\pi, 0]$ также $\geqslant 2n+1$ корень и, следовательно, разность

$$K^*(t) - T_{n-1}^{(s)}(t) = \frac{d}{dt} [K_1^*(t) - T_n^{(s-1)}(t)]$$

будет иметь в промежутке $(-2\pi, 0]$ количество корней $\geqslant 2n$. Мы пришли в противоречие с условием теоремы. Теорема 2.5 доказана.

---

* Или в каком-нибудь другом полуинтервале длиной $2\pi$.

## § 3. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых абсолютно монотонными ядрами

1. ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $K(t)$ — суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция, имеющая в интервале $(-\infty, 2\pi)$ абсолютно монотонную производную $K'(t)$, и пусть $T^*_{n-1}(t)$ — тригонометрический полином порядка не выше $n-1$, интерполирующий функцию $K(t)$ в точках $t_k = \frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n-1)$. Тогда среди всевозможных тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n-1$ полином $T^*_{n-1}(t)$ является полиномом наилучшего приближения функции $K(t)$ в метрике $L$ и*

$$E_n(K)_L = \int_0^{2\pi} |K(t) - T^*_{n-1}(t)|\, dt = -\int_0^{2\pi} K(t) \operatorname{sign} \sin nt\, dt. \tag{3.1}$$

Доказательство. Так как в силу теоремы 2.4′ разность $K(t) - T^*_{n-1}(t)$ меняет знак в точках, являющихся нулями функции $\sin nt$, и только в этих точках, то утверждение теоремы немедленно следует из теоремы А. А. Маркова [см. (3), стр. 96].

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть функция $K^*_s(t)$ ($s$ — целое $\geqslant 1$) является $s$-м периодическим с периодом $2\pi$ интегралом от суммируемой непрерывной в $(0, 2\pi]$ функции $K^*(t)$, которую при каждом $n = 1, 2, \ldots$ любой тригонометрический полином порядка $\leqslant n-1$ может в полуинтервале $(0, 2\pi]$ интерполировать не больше, чем в $2n-1$ точках. Тогда*

*1) в полуинтервале $\left(0, \frac{\pi}{n}\right]$ найдется единственная точка $\alpha$ такая, что*

$$K^*_s(\alpha) - K^*_s\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + \ldots - K^*_s\left(\alpha + \frac{2n-1}{n}\pi\right) = 0; \tag{3.2}$$

*2) тригонометрический полином $T^*_{n-1}(t)$ порядка не выше $n-1$, интерполирующий функцию $K^*_s(t)$ в точках $\alpha, \alpha + \frac{\pi}{n}, \ldots, \alpha + \frac{2n-2}{n}\pi$, является среди всевозможных полиномов порядка $\leqslant n-1$ полиномом наилучшего приближения функции $K^*_s(t)$ в метрике $L$ и*

$$E_n(K^*_s)_L = \int_0^{2\pi} |K^*_s(t) - T^*_{n-1}(t)|\, dt = \left|\int_0^{2\pi} K^*_s(t) \operatorname{sign} \sin n(t-\alpha)\, dt\right|; \tag{3.3}$$

*3) если*

$$K^*_s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{3.4}$$

*(при $s \geqslant 1$ $a_0 = 0$), то число $\alpha$ будет корнем уравнения*

$$\sum_{j=0}^{\infty} [a_{(2j+1)n} \cos(2j+1)n\alpha + b_{(2j+1)n} \sin(2j+1)n\alpha] = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. 1) Продолжим (как при доказательстве теоремы 2.5) периодически функцию $K^*_s(t)$ на всю числовую прямую и положим, следуя М. Г. Крейну [см. (16)],

$$H(\varphi) = K^*_s(\varphi) - K^*_s\left(\varphi + \frac{\pi}{n}\right) + \ldots - K^*_s\left(\varphi + \frac{2n-1}{n}\pi\right). \tag{3.6}$$

Так как функция $H(\varphi)$ непрерывна и $H\left(\frac{\pi}{n}\right) = -H(0)$, то в полуинтервале $\left(0, \frac{\pi}{n}\right]$ действительно найдется по крайней мере одна точка $\alpha$ такая, что $H(\alpha) = 0$. Единственность этой точки будет доказана ниже.

2) При каждом действительном $\alpha$ и при любых натуральных $l$ и $n$ имеют место неравенства:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k e^{il\left(\frac{k\pi}{n}+\alpha\right)} = \frac{e^{il\alpha}}{1+e^{i\frac{l\pi}{n}}}\left[1-\left(-e^{i\frac{l\pi}{n}}\right)^{2n}\right] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq (2j+1)n, \\ 2ne^{i(2j+1)n\alpha}, & \text{если } l = (2j+1)n. \end{cases} \tag{3.7}$$

Из этих неравенств вытекает, что для всякого тригонометрического полинома $T_{n-1}(t)$ порядка $\leqslant n-1$ справедливо соотношение

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k T_{n-1}\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = 0.$$

Отсюда и из условия (3.2) следует, что если некоторый тригонометрический полином $T^*_{n-1}(t)$ порядка $\leqslant n-1$ интерполирует функцию $K^*_s(t)$ в $2n-1$ точках $\alpha, \alpha+\frac{\pi}{n}, \ldots, \alpha+\frac{2n-2}{n}\pi$, то он будет ее интерполировать также в точке $\alpha+\frac{2n-1}{n}\pi$. В силу теоремы 2.5, кроме этих $2n$ точек, никаких других точек интерполяции функции $K^*_s(t)$ полиномом $T^*_{n-1}(t)$ не будет, так что разность $K^*_s(t) - T^*_{n-1}(t)$ будет менять знак в точках, являющихся нулями функции $\sin(nt - n\alpha)$ (и только в этих точках). Поэтому, в силу теоремы А. А. Маркова, среди всевозможных полиномов порядка $\leqslant n-1$ полином $T^*_{n-1}(t)$ будет являться полиномом наилучшего приближения функции $K^*_s(t)$ в метрике $L$ и, очевидно, будет удовлетворять соотношению (3.3).

3) Так как, в силу теоремы Джексона [см. ([3]), стр. 89], при заданном порядке $n-1$ полином $T^*_{n-1}(t)$ наилучшего приближения непрерывной функции $K^*_s(t)$ в метрике $L$ является единственным, то других точек $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right]$, удовлетворяющих уравнению $H(\varphi) = 0$, быть не может.

4) Подставляя значения $K^*_s(t)$ из (3.4) в (3.6) и учитывая при этом равенства (3.7), мы найдем, что число $\alpha$ должно быть корнем уравнения

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k K^*_s\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= 2n\sum_{j=0}^{\infty} \left[a_{(2j+1)n}\cos(2j+1)n\alpha + b_{(2j+1)n}\sin(2j+1)n\alpha\right] = 0.$$

Отсюда следует (3.5). Теорема 3.2 доказана.

2. Теоремы 3.1 и 3.2 вместе с теоремами 2.4, 2.4′ и 2.5 дают возможность автоматически применять к приближению различных классов функций $f(t)$ вида (1.2) ряд общих предложений, доказанных С. М. Никольским [см. ([18]), стр. 225—243]. При этом получаются следующие теоремы 3.3—3.5.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть функция $K_s^*(t)$ является s-м (s — целое $\geqslant 0$) периодическим интегралом от некоторой суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции $K^*(t)$, имеющей в интервале $(-\infty, 2\pi)$ абсолютно монотонную производную $\frac{d}{dt}K^*(t)$. Тогда если функции f выражаются через φ при помощи* (1.2), *то при каждом* $m = 1, 2, \ldots, n$

$$E_n[K_{sCm}^*] = \sup_{f \in K_{sCn}^*} \|f\|_C = E_n(K_s^*)_L =$$

$$= \int_0^{2\pi} |K_s^*(t) - T_{n-1}^*(t)|\, dt = \left| \int_0^{2\pi} K_s^*(t) \operatorname{sign} \sin n(t-\alpha)\, dt \right|,$$

$$E_n[K_{sLm}^*] = \sup_{f \in K_{sLm}^*} \|f\|_L = E_n(K_s^*)_L =$$

$$= \int_0^{2\pi} |K_s^*(t) - T_{n-1}^*(t)|\, dt = \left| \int_0^{2\pi} K_s^*(t) \operatorname{sign} \sin (nt+\alpha)\, dt \right|,$$

*где полином $T_{n-1}^*(t)$ и число α определяются так же, как в теореме* 3.2.

Укажем линейный метод, дающий на классах функций $K_{sC}^*$ и $K_{sL}^*$ приближение, равное наилучшему.

Зададим, следуя Б. Надю [см. ([17])], систему чисел

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}; \quad \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1} \tag{3.8}$$

и построим для каждой функции $f(t) \in K_{sC}^*$ (или соответственно $f(t) \in K_{sL}^*$) тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка

$$T_{n-1}(f;\, t;\, \mu, \nu) = \frac{1}{2}\mu_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \{\mu_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \nu_k (a_k \sin kt - b_k \cos kt)\}, \tag{3.9}$$

определяемый системой чисел (3.8), где $a_k$ и $b_k$ — коэффициенты Фурье функции φ, которой соответствует при помощи равенства (1.2) функция f.

Полином $T_{n-1}(f;\, t;\, \mu, \nu)$ можно рассматривать как приближение функции f. Он линейно зависит от φ и называется линейным методом (определяемым системой чисел (3.8)) приближения функции f вида (1.2).

В качестве меры приближения функций f классов $K_{sC}^*$ и $K_{sL}^*$ при помощи этих полиномов, определяемых фиксированной системой чисел (3.8), можно рассматривать верхние грани

$$\mathscr{E}_n[K_{sC}^*;\, \mu, \nu] = \sup_{f \in K_{sC}^*} \|f - T_{n-1}(f;\, t;\, \mu, \nu)\|_C \tag{3.10}$$

и

$$\mathscr{E}_n[K_{sL}^*;\, \mu, \nu] = \sup_{f \in K_{sL}^*} \|f - T_{n-1}(f;\, t;\, \mu, \nu)\|_L. \tag{3.10'}$$

Метод приближения вида (3.9) называется наилучшим для класса $K_{sC}^*$ (соответственно $K_{sL}^*$), если он определяется такой системой чисел (3.8), для которой верхняя грань (3.10) (соответственно (3.10′)) будет наименьшей среди возможных.

ТЕОРЕМА 3.4. *Линейный метод* (3.9) *является наилучшим для класса* $K^*_{sC}$ *при* $\mu_k = \mu^*_k$ *и* $\nu_k = \nu^*_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, *где* $\mu^*_k$ *и* $\nu^*_k$ — *коэффициенты Фурье тригонометрического полинома*

$$T^*_{n-1}(t) = \frac{1}{2}\mu^*_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(\mu^*_k \cos kt + \nu^*_k \sin kt),$$

*который среди всевозможных полиномов порядка* $\leqslant n-1$ *является полиномом наилучшего приближения функции* $K^*_s(t)$ *в метрике* $L$ *и, следовательно, является полиномом, интерполирующим функцию* $K^*_s(t)$ *в точках* $\alpha + \frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$. *При этом*

$$\mathscr{E}_n[K^*_{sC}; \mu^*, \nu^*] = \frac{1}{\pi}E_n(K^*_s)_L = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|K^*_s(t) - T^*_{n-1}(t)|\,dt. \qquad (3.11)$$

*Этот наилучший линейный метод для класса* $K^*_{sC}$ *является единственным.*

ТЕОРЕМА 3.5. *Линейный метод* (3.9) *является наилучшим для класса* $K^*_{sL}$ *при тех же* $\mu^*_k$ *и* $\nu^*_k$, *что и в теореме* 3.4. *При этом*

$$\mathscr{E}_n[K^*_{sL}; \mu^*, \nu^*] = \frac{1}{\pi}E_n(K^*_s)_L = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|K^*_s(t) - T^*_{n-1}(t)|\,dt. \qquad (3.12)$$

## § 4. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную $s$-ю производную при произвольных $s > 0$

Будем говорить, что функция $f(t)$ периода $2\pi$ имеет производную $s$-го порядка $(s > 0)$ в смысле Вейля, равную $f^{(s)}(t) = \varphi(t)$, если $\varphi(t)$ есть функция периода $2\pi$, суммируемая на периоде и удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt = 0,$$

и если $f(t)$ связана с $\varphi(t)$ при помощи равенства

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_s(\xi)\,\varphi(t-\xi)\,d\xi,$$

где [см. (1.5)]

$$\Psi_s(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(k\xi - \frac{s\pi}{2}\right)}{k^s}.$$

Известно [см. ([15]), § 6, или ([14]), стр. 223], что при $s \in (0, 1)$ функция $\Psi_s(\xi)$ может быть представлена в виде

$$\Psi_s(\xi) = \frac{\pi}{\Gamma(s)}\lim_{n\to\infty}\left\{\xi^{s-1} + (\xi + 2\pi)^{s-1} + \cdots + (\xi + 2n\pi)^{s-1} - (2\pi)^{s-1}\frac{n^s}{s}\right\},$$
$$0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi. \qquad (4.1)$$

При $s = 1$ мы можем считать, что

$$\Psi_s(\xi) = \frac{\pi - \xi}{2}, \quad 0 < \xi < 2\pi. \qquad (4.2)$$

Наконец, легко проверить, что при $s = r + s'$, где $r$ — натуральное число и $0 < s' \leqslant 1$ (т. е. при $s > 1$), функция $\Psi_s(\xi) = \Psi_{r+s}(\xi)$ является $r$-м периодическим интегралом от $\Psi_{s'}(\xi)$.

Из (4.1) и (4.2) соответственно следует:

$$\Psi_s'(\xi) = -(1-s)\frac{\pi}{\Gamma(s)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\xi+2k\pi)^{2-s}}, \quad \text{если } 0 < s < 1, \tag{4.3}$$

$$\Psi_s'(\xi) = -\frac{1}{2}, \qquad \text{если } s = 1. \tag{4.4}$$

Из соотношений (4.1) — (4.4) легко видеть, что при $0 < s \leqslant 1$ функция $\Psi_s(\xi)$ после замены $\xi$ на $-\xi$ будет суммируемой в промежутке $[-2\pi, 0]$ и может быть продолжена на всю отрицательную полуось * таким образом, что ее производная будет абсолютно монотонной в интервале $(-\infty, 0)$. Отсюда, в силу теоремы 2.4′, следует, что при всех $s \in (0, 1]$ любой тригонометрический полином $T_{n-1}(\xi)$ порядка $\leqslant n-1$ может интерполировать функцию $\Psi_s(\xi)$ не больше, чем в $2n-1$ точках полуинтервала $(0, 2\pi]$. Поэтому в силу теорем 3.1 и 3.2 с последующим применением обобщенного равенства Парсеваля после некоторых выкладок получим, соответственно, два результата:

ТЕОРЕМА 4.1. *При любом* $s \in (0, 1]$

$$E_n[\Psi_{sC}] = E_n[\Psi_{sL}] = \sup_{f\in\Psi_{sC_n}}\|f\|_C = \sup_{f\in\Psi_{sL_n}}\|f\|_L = \frac{1}{\pi}E_n(\Psi_s)_L = \frac{4}{\pi}\frac{M_s}{n^s}, \tag{4.5}$$

*где*

$$M_s = \sin\frac{s\pi}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)^{s+1}}.$$

ТЕОРЕМА 4.2. *При всех* $s \geqslant 1$

$$E_n[\Psi_{sC}] = E_n[\Psi_{sL}] = \sup_{f\in\Psi_{sC_n}}\|f\|_C = \sup_{f\in\Psi_{sL_n}}\|f\|_L =$$

$$= \frac{1}{\pi}E_n(\Psi_s)_L = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\Psi_s(t) - T_{n-1}^*(t)|\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\Psi_s(t)\operatorname{sign}\sin(nt-\alpha)\,dt\right| = \frac{4}{\pi}\frac{M_s}{n^s}, \tag{4.6}$$

*где*

$$M_s = \left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2j+1)\alpha - \frac{s\pi}{2}\right]}{(2j+1)^{s+1}}\right|, \tag{4.7}$$

$T_{n-1}^*(t)$ — *тригонометрический полином порядка* $\leqslant n-1$, *интерполирующий функцию* $\Psi_s(t)$ *в точках* $\frac{\alpha+k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, *и* $\alpha$ — *число, удовлетворяющее условию*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\cos\left[(2j+1)\alpha - \frac{s\pi}{2}\right]}{(2j+1)^s} = 0. \tag{4.8}$$

---

* Ибо предел выражения, находящегося в фигурных скобках (4.1), существует при всех $\xi > 0$.

Нетрудно было бы, подобно тому как это было сделано в нашей работе ([10]) (стр. 152), указать наилучший линейный метод суммирования рядов Фурье для функций классов $\Psi_{sC}$ и $\Psi_{sL}$. Мы не будем выписывать соответствующие формулы, которые имеют довольно сложный вид.

Отметим, что теоремы 4.1 и 4.2 полностью решают задачу, поставленную в 1937 г. Ж. Фаваром [см. ([25]), п. 10, стр. 223—224].

## § 5. О наилучшем приближении в среднем функций с особенностями

Так как при любом $s > 1$ функция $\Psi_s(t)$ является одной из простейших периодических функций, $(s-1)$-я производная которой имеет в точке $t=0$ разрыв первого рода: $\Psi_s^{(s-1)}(0+0) - \Psi_s^{(s-1)}(0-0) = -1$, то формула (4.6) может быть использована для нахождения асимптотически наилучшего приближения в среднем для одного довольно широкого класса функций.

Впервые задача подобного рода была поставлена для непериодических функций и была в 1947 г. решена в большой работе С. М. Никольского ([19]) [см. также ([20])]. В периодическом случае задачи подобного рода при натуральных значениях $s$ и при $0 < s < 1$ были решены позже автором в работах ([11]), ([12]), ([10]) и ([13]) *.

Рассуждая, как и в предыдущих работах, получим следующий результат для случая, когда $s$ — произвольное число $> 1$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть функция $f(t)$ с периодом $2\pi$ имеет абсолютно непрерывную производную $(s-1)$-го порядка, которая, в свою очередь, является неопределенным интегралом от функции $\varphi(t) = f^{(s)}(t)$, обладающей следующими свойствами:*

1. *$\varphi(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, 2\pi]$ и представляется в виде суммы $\varphi(t) = g(t) + h(t)$, где $g(t)$ — функция скачков, а $h(t)$ — абсолютно непрерывная функция;*

2. *$\varphi(t)$ имеет хотя бы один разрыв в промежутке $[0, 2\pi]$.*

*Тогда*

$$E_n(f)_L \approx \frac{4}{\pi} \frac{M_{s+1}}{n^{s+1}} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|, \tag{5.1}$$

*где $A_k = \varphi(a_k+0) - \varphi(a_k-0)$ ($a_k$ — точки из $(0, 2\pi]$, в которых функция $\varphi(t)$ имеет существенный разрыв) и $M_{s+1}$ — постоянная, определяемая по формуле (4.7).*

Поступило
8. XII. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 15 (1937), 107—112.

[2] Ахиезер Н. И., О наилучшем приближении одного класса непрерывных периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 17 (1937), 451—453.

[3] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.— Л., 1947.

[4] Бернштейн С. Н., Sur la définition et les propriétés des fonctions analitiques d'une variable réelle, Math. Ann., Bd. 75 (1914), 449—468, или Собр. соч., т. I, Конструктивная теория функций (1905—1930), АН СССР (1952), 231—250.

* Отметим, что в работах ([11]) и ([12]) получены результаты, большинство из которых было впервые без доказательства высказано С. М. Никольским.

[5] Бернштейн С. Н., Sur les fonctions absolument monotones, Acta Math., 52 (1928), 1—66, или Собр. соч., т. I, Конструктивная теория функций (1905—1930), АН СССР (1952), 370—425.

[6] Бернштейн С. Н., Sur un problème rélatif aux fonction absolument monotones, Comptes rendus, 185 (1927), 495—496, или Собр. соч., т. I, Конструктивная теория функций (1905—1930), АН СССР (1952), 333—334.

[7] Бернштейн С. Н., Sur les polynômes multiplement monotones, Сообщ. Харьк. матем. об-ва, серия 4, т. 1 (1927), 1—11, или Собр. соч., т. I. Конструктивная теория функций (1905—1930), АН СССР (1952), 339—349.

[8] Бернштейн С. Н., Sur une propriété de la fonction exponentielle, Наукові зап. н.-д., матем. кафедр України, т. 3 (1928), 65—71, или Собр. соч., т. I. Конструктивная теория функций (1905—1930), АН СССР (1952), 363—369.

[9] Валле-Пуссен Ш. Ж., Курс анализа бесконечно малых, т. I, М.— Л., ГТТИ, 1933.

[10] Дзядык В. К., О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную $s$-ю производную $(0 < s < 1)$, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 17 (1953), 135—162.

[11] Дзядык В. К., О наилучшем приближении в среднем периодических функций с особенностями, Доклады Ак. наук СССР, 77 (1951), 949—952.

[12] Дзядык В. К., Про найкраще наближення в середньому періодичних функцій з особливостями, Наук. зап. Луцького педінституту, вип. I (1953), 51—65.

[13] Дзядык В. К., О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых периодических функций, Диссертация, ДГУ, 1954.

[14] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.— Л., 1939.

[15] Zygmund A., Smooth functions, Duke matem. J., 12, № 1 (1945), 47—76.

[16] Крейн М. Г., К теории наилучшего приближения периодических функций, Доклады Ак. наук СССР, 18 (1938), 241—244.

[17] Nagy B., Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I, Periodischer Fall, Berichte der math.-phys. Kl. Akademie d. Wiss. zu Leipzig, XC (1938), 103—134.

[18] Никольский С. М., Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 10 (1946), 207—256.

[19] Никольский С. М. О наилучшем приближении многочленами в среднем функций $|a - x|^s$, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 11 (1947), 139—180.

[20] Никольский С. М., О наилучшем приближении многочленами в среднем функций с особенностями вида $|a - x|^s$, Доклады Ак. наук СССР, 60 (1947), 195—198.

[21] Стечкин С. Б., О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 20 (1956), 643—648.

[22] Сунь Юн-шен, О наилучшем приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами, Успехи матем. наук, т. XIII, вып. 2 (80) (1958), 238—241.

[23] Сунь Юн-шен, Наилучшие приближения преобразованных функций тригонометрическими полиномами, Диссертация, МГУ, 1957.

[24] Favard J., Application de la formule sommatoire d'Euler à la démonstration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques ou presque-périodiques, Matematisk Tidskrift, København, B. H. 4 (1936), 81—94.

[25] Favard J., Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynômes trigonométriques, Bull. de Sci. Math., LXI (1937), 209—224; 243—256.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
23 (1959), 951—962

Е. В. ВОРОНОВСКАЯ

# ФУНКЦИОНАЛ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И УТОЧНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ А. А. МАРКОВА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В статье дается приложение метода функционалов к доказательству неравенства А. А. Маркова для первой производной от алгебраического полинома. Этот же метод дает возможность уточнить неравенство в каждой внутренней точке основного интервала.

В работе А. А. Маркова (1) дается следующая оценка производной от алгебраического полинома на конечном промежутке: если

$$\max_{[a,\,b]} |P_n(x)| = M,$$

то

$$\max_{[a,\,b]} |P_n'(x)| \leqslant \frac{2n^2}{b-a} M. \qquad (*)$$

Оценка (*), превращаясь в равенство на границах, и только для $P_n(x) = T_n(x)$, является весьма грубой для внутренних точек интервала. Этот существенный пробел был до некоторой степени восполнен С. Н. Бернштейном [(2), стр. 27], который доказал неравенство ($a = -1$, $b = +1$)

$$|P_n^{(k)}(x)| \leqslant \left(\frac{K}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot n(n-1)\ldots(n-k+1)M. \qquad (*')$$

В работе (1) изучаются также свойства полиномов, дающих максимум модуля производной в фиксированных внутренних точках $x$ основного интервала; эти исследования не доведены до конца; отсутствуют и вопросы об аналитических свойствах этого максимума как функции от $x$.

В настоящей статье автор, пользуясь методом функционалов *, дает точную мажоранту для первой производной полинома во всех внутренних точках основного интервала, за который принят промежуток [0,1].

## ЧАСТЬ I

## ФУНКЦИОНАЛ ПРОИЗВОДНОЙ И ЕГО ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

### § 1. Постановка задачи, предварительные замечания

Для метода, которым мы будем пользоваться, переход к сегменту [0, 1] представляет большие вычислительные удобства. Формула (*) при

$$T_n(x) = \cos n \arccos(2x-1)$$

---

* Мы не приводим здесь всех нужных для дальнейшего результатов теории функционалов. Их подробный обзор имеется в работах, которые цитируются по мере изложения статьи.

примет в этом случае вид:

$$\max_{[0,1]} |P'_n(x)| \leqslant M_{[0,1]} T'_n(1); \qquad (*'')$$

в дальнейшем она получится из более детальных оценок.

Будем рассматривать производную от $P_n(x)$ в некоторой (любой) точке $\xi$ как линейный функционал $F_\xi$, заданный конечной последовательностью $(\mu_i)_0^n$ (или отрезком-функционалом):

$$(\mu_i)_0^n = 0,\ 1,\ 2\xi,\ 3\xi^2, \ldots, n\xi^{n-1}. \qquad (1)$$

Положим

$$F_\xi(x^k) = k\,\xi^{k-1} \quad (k = 0, 1, \ldots, n);$$

тогда

$$F_\xi(P_n) = P'_n(\xi)$$

и $N(\xi)$ — норма отрезка (1) — явится точной мажорантой для всего множества $\{P'_n(\xi)\}$:

$$\max_{[0,1]} |P'_n(\xi)| \leqslant M \cdot N(\xi).$$

Напомним, что экстремальным или обслуживающим полиномом отрезка-функционала называется полином $Q_n(x)$, на котором $F(Q_n) = +N$, при условии

$$\max_{[0,1]} |Q_n(x)| = 1$$

(приведенный полином). Экстремальный полином всегда существует [см. ([3])].

Наша задача будет состоять в изучении нормы и экстремального полинома отрезка (1).

Начнем исследование с нескольких необходимых замечаний.

Замечание 1. Обозначив $\mu_i = \mu_{i,0}$, составим таблицу разностей $(\mu_{k,p})$ отрезка (1), где

$$\mu_{k,p} = \mu_{k,p-1} - \mu_{k+1,p-1};$$

мы получим:

$$(\mu_{0,k})_{k=0}^n = 0,\ -1,\ -2(1-\xi), \ldots, -n(1-\xi)^{n-1}. \qquad (2)$$

Этот функционал имеет ту же норму [см. ([3])], что и отрезок (1). Следовательно,

$$N(\xi) = N(1-\xi). \qquad (3)$$

Если экстремальный полином (1) есть $Q_n(x)$, то экстремальный полином (2) есть $Q_n(1-x)$ [см. ([3])].

Замечание 2. При $\xi < 0$ отрезок (1) имеет чередующиеся знаки и, следовательно, при нечетном $n$ он обслуживается полиномом $+T_n(x)$, а при четном — полиномом $-T_n(x)$. Таким образом, при любом $\xi$, не находящемся внутри $[0, 1]$, экстремальный полином есть $\pm T_n(x)$.

Замечание 3. Функционалы

$$(\mu_k)_2^{n+2} = 2\xi,\ 3\xi^2, \ldots, (n+2)\,\xi^{n+1}, \ldots$$

дают на $(P_n)$ соответственно

$$[\xi P_n(\xi)]'_\xi,\quad [\xi^2 P_n(\xi)]'_\xi, \ldots .$$

## § 2. Обслуживание $F_\xi$ полиномами Чебышева $\pm T_n(x)$

Напомним необходимый и достаточный критерий для того, чтобы данный приведенный полином $Q_n(x)$ обслуживал *любой* данный отрезок-функционал $(\mu_i)_0^n = F$ [см. (4), (5)].

Обозначим через $(\overset{\pm}{\sigma}_i)_1^s$ распределение $Q_n(x)$, т. е. набор всех его точек extrema на $[0, 1]$, в которых $Q_n(x) = \pm 1$, с отнесением каждой из них знака $+$, если $Q_n(\sigma) = +1$, и знака $-$, если $Q_n(\sigma) = -1$.

Если система $(n+1)$ уравнений с $S$ неизвестными $\delta_i$ вида

$$\sum_{i=1}^{S} \delta_i \sigma_i^k = \mu_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{V}$$

удовлетворяет условиям:

1) система совместна;

2) система решается в таких знаках, что либо $\operatorname{sgn} \delta_i = Q_n(\sigma_i)$, либо $\delta_i = 0$ (вообще говоря, не все),

то эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы полином $Q_n(x)$ был экстремальным, т. е. чтобы $F(Q_n) = +N$.

Очевидно, что для $Q_n(x) = \pm T_n(x)$ условие 1) отпадает, так как $\rho = n + 1$. Заметим, что определитель системы $(V)$ есть определитель Вандермонда.

Найдем условия, при которых функционал (1) обслуживается полиномами $\pm T_n(x)$.

Обозначим через $(\tau_i)_0^n$ точки extrema $T_n$ и отметим полином, который назовем чебышевской резольвентой:

$$R_{n+1}(x) = \prod_0^n (x - \tau_i).$$

Система $(V)$ в этом случае примет вид:

$$\sum_{i=0}^{n} \delta_i \tau_i^k = k\xi^{k-1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Мы имеем:

$$\delta_k = \frac{(-1)^{n-k}}{\prod\limits_{i \neq k} |\tau_k - \tau_i|} \frac{R'_{n+1}(\xi)(\xi - \tau_k) - R_{n+1}(\xi)}{(\xi - \tau_k)^2}. \tag{4}$$

Это — полином $(n-1)$-й степени относительно $\xi$.

Пусть $(\vartheta_i)_1^n$ суть точки extrema $R_{n+1}(\xi)$; очевидно, что в этих точках $\delta_k$ имеют чередующиеся знаки. Следовательно, $F_{\vartheta_i}$ обслуживается одним из полиномов $\pm T_n(x)$, а так как $\delta_k \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, то обслуживание распространяется на некоторый интервал [см. (3)]. Между тем в точках $(\tau_k)_1^{n-1}$ $F_{\tau_k}$ заведомо имеет другие экстремальные полиномы, так как $T'_n(\tau_k) = 0$. Эти точки мы можем сейчас не рассматривать, но они указывают на то, что область обслуживания чебышевскими полиномами образует на $[0, 1]$ по меньшей мере $n$ разобщенных сегментов (назовем их чебышевскими). Ввиду того, что для $\xi = 0$ или $\xi = 1$ также $\delta_k \neq 0$ при всех $k$, то для двух крайних чебышевских промежутков $[\alpha, +\infty)$ и $(-\infty, \beta]$ имеем: $\alpha < 1$ и $\beta > 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Положим* $R'_{n+1}(\xi)(\xi-\tau_k)-R_{n+1}(\xi)=\Delta_k(\xi)$.

1°. *Пусть* $R'_{n+1}(\xi)>0$; *тогда если* $\Delta_0(\xi)\leqslant 0$, *то* $\Delta_k(\xi)<0$ $(k\neq 0)$; *если* $\Delta_n(\xi)\geqslant 0$, *то* $\Delta_k(\xi)>0$ $(k\neq n)$; *если* $\Delta_k(\xi)=0$, *то* $\Delta_{k-i}(\xi)>0$ *и* $\Delta_{k+i}(\xi)<0$ $(i>0,\ k\neq 0, n)$.

2°. *Пусть* $R'_{n+1}(\xi)<0$; *тогда если* $\Delta_0(\xi)\geqslant 0$, *то* $\Delta_k(\xi)>0$ $(k\neq 0)$; *если* $\Delta_n(\xi)\leqslant 0$, *то* $\Delta_k(\xi)<0$ $(k\neq n)$; *если* $\Delta_k(\xi)=0$ *при* $k\neq 0, n$, *то* $\Delta_{k-i}(\xi)<0$ *и* $\Delta_{k+i}(\xi)>0$.

Действительно, при закрепленном $\xi$ для $\Delta_k(\xi)=\varphi(\tau_k)$ имеем

$$\varphi'(\tau)=-R'_{n+1}(\xi),$$

откуда немедленно следуют все утверждения теоремы 1.

Заметим, что обслуживание отрезка-функционала (1) полиномами $\pm T_n(x)$ заканчивается (или начинается) тогда и только тогда, когда при выполнении условий 1) и 2) критерия экстремальности (стр. 953) хоть одна из нагрузок $\delta_i$ обращается в нуль [см. (3), (4)].

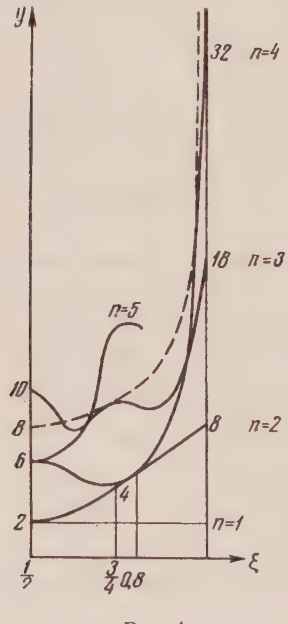


Рис. 1

Следствие 1. *Обозначим через* $\alpha$ *и* $\beta$ *левую и правую границы одного из чебышевских сегментов; тогда на границах сегмента* $[\alpha,\beta]$ *выбывает нагрузка одного крайнего узла, а именно: при* $\xi=\alpha$ *имеем* $\delta_0=0$, *при* $\xi=\beta$ *имеем* $\delta_n=0$.

Следствие 2. $\alpha$ *и* $\beta$ *являются, соответственно, корнями уравнений*

$$R'_{n+1}(\alpha)\alpha-R_{n+1}(\alpha)=0, \tag{5}$$

$$R'_{n+1}(\beta)(\beta-1)-R_{n+1}(\beta)=0, \tag{6}$$

*в первом из которых надо исключить двойной корень* $\alpha=0$, *а во втором — двойной корень* $\beta=1$. *Таким образом,* $\alpha$ *и* $\beta$ *удовлетворяют уравнениям* $(n-1)$*-й степени; отсюда следует, что общее число чебышевских сегментов на* $[0, 1]$, *включая крайние, не превышает* $n$, *а значит, точно равно* $n$.

Обозначим эти сегменты через

$$[0,\beta_1],\quad [\alpha_2,\beta_2],\ \ldots,\ [\alpha_{n-1},\beta_{n-1}],\quad [\alpha_n, 1]$$

(можно положить $\alpha_1=0$; $\beta_n=1$). Чередование обслуживания $F_\xi$ полиномами $+T_n(x)$ и $-T_n(x)$ осуществляется следующим образом: экстремальный полином $+T_n(x)$ обслуживает $F_\xi$ на сегментах

$$[\alpha_n, 1],\ [\alpha_{n-2},\beta_{n-2}],\ldots;$$

на остальных сегментах экстремальный полином есть $-T_n(x)$.

Замечание. Характер расположения чебышевских сегментов на сегменте [0, 1] легко представить графически. Учитывая, что $R_{n+1}(\tau_k)=0$, имеем:

$$R_{n+1}(x)-R_{n+1}(\tau)=(x-\tau)R'_{n+1}(\xi),$$

где $\tau = 0$ или 1, $x = \alpha$ или $\beta$. Но, согласно уравнениям (5) и (6), здесь можно взять $\xi = \alpha$ или $\beta$. Итак, касательные к кривой $y = R_{n+1}(x)$, проведенные из точек 0 и 1, числом $n-1$ из каждой, дают точки касания, абсциссы которых суть соответственно $(\alpha_i)_2^n$ и $(\beta_i)_1^{n-1}$ (см. рис. 1, на котором приведено построение для $n = 5$; пунктиром изображена кривая $T_5(x)$, сплошной линией — кривая $R_6(x)$).

## § 3. Обслуживание $F_\xi$ полиномами паспорта $[n, n, 0]$

Полиномы паспорта $[n, n, 0]$ были нами подробно изучены в работе (5). Напомним вкратце их основные свойства: это — приведенные полиномы $n$-й степени с распределением, содержащим $n$ узлов $(\overset{\pm}{\sigma_i})_1^n$, которым отнесены чередующиеся знаки; все они образуют семейство, зависящее от одного переменного параметра; в качестве такого параметра можно взять старший коэффициент. В этом случае полиномы имеют вид

$$\vartheta x^n + y_{n-1}(\vartheta)\, x^{n-1} + \ldots + y_1(\vartheta)\, x + y_0(\vartheta).$$

Если $0 < \vartheta < 2^{2n-1}$, то обозначим это семейство через $Q_n(x, \vartheta)$. При $-2^{2n-1} < \vartheta < 0$ будем иметь полиномы

$$(-1)^{n-1} Q_n(1-x, \vartheta);$$

при $\vartheta = 0$ имеем

$$Q_n(x, 0) = -T_{n-1}(x).$$

(Заметим, что $2^{2n-1}$ — старший коэффициент $T_n(x)$, поэтому неравенство $|\vartheta| > 2^{2n-1}$ невозможно.) Все полиномы паспорта $[n, n, 0]$ исчерпываются полиномами $\pm Q_n(x, \vartheta)$ и $\pm Q_n(1-x, \vartheta)$. Назовем их общими полиномами Золотарева. Эти полиномы разбиваются на два класса, резко отличных по своему аналитическому (и геометрическому) виду, что было установлено еще самим Е. И. Золотаревым (6). Один класс представляет собою трансформации $T_n(x)$, весьма просто выражающиеся через коэффициент растяжения $\nu$, а именно, это будут $\pm T_n(\nu x)$ и $\pm T_n(\nu\cdot\overline{1-x})$, где $\cos^2\frac{\pi}{2n} \leqslant \nu < 1$, что обеспечивает сохранение $n$ узлов на сегменте $[0, 1]$. Зависимость между параметрами деформации $\vartheta$ и $\nu$, очевидно, такова:

$$\vartheta = 2^{2n-1}\cdot\nu^n.$$

Другой класс, при условии $0 < \vartheta < 2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}$, обозначим через $Z_n(x, \vartheta)$ — собственно полиномы Золотарева, выраженные им через эллиптические функции [см. (6)]. Все множество этих специальных полиномов исчерпывается следующими:

$$\pm Z_n(x, \vartheta); \quad \pm Z_n(1-x, \vartheta).$$

Согласно теореме о непрерывной деформации [см. (3), (4)], при непрерывном убывании $\vartheta$ от $2^{2n-1}$ до $-2^{2n-2}$ полином $Q_n(x, \vartheta)$ деформируется непрерывным образом от $+T_n(x)$ до $-T_n(x)$, пробегая последовательно $T_n(\nu x)$, $Z_n(x, \vartheta)$ через $-T_{n-1}(x)$, затем $(-1)^{n-1} Z_n(1-x, \vartheta)$, $(-1)^{n-1} T_n(\nu\cdot\overline{1-x})$ и, наконец, в точке $\vartheta = -2^{2n-1}$ превращается в

$-T_n(x)$. Отметим, что при этом процессе все переменные узлы $\sigma_i(\vartheta)$ смещаются на сегменте [0, 1] непрерывным образом вправо, кроме узлов 0 и 1, которые для собственно золотаревских полиномов остаются неподвижными.

Полиномы $Z_n(x, \vartheta)$ связаны со своей резольвентой

$$R_n(x, \vartheta) = \prod_{i=1}^{n} (x - \sigma_i)$$

следующей основной зависимостью [см. ([5])]:

$$\frac{\partial Z_n(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} = R_n(x, \vartheta). \quad (7)$$

Этих сведений нам достаточно, чтобы иметь возможность перейти к исследованию $F_\xi$ в тех точках [0, 1], которые лежат вне чебышевских сегментов.

ТЕОРЕМА 2. *Всякий полином* $L_n(x)$ *паспорта* $[n, n, 0]$ *обслуживает* $F_\xi$ *в тех и только в тех точках* $\xi$, *числом* $n-1$, *в которых* $R_n'(\xi) = 0$, *т. е. в точках extrema своей резольвенты*

$$R_n(x) = \sum_{0}^{n} r_k x^k.$$

Пусть $(\overset{\pm}{\sigma}_i)_1^n$ — распределение $L_n(x)$, и пусть для $\xi_0$

$$R_n'(\xi_0) = 0.$$

Убедимся, что $L_n(x)$ обслуживает $F_{\xi_0}$. Действительно, решая систему $n$ уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \sigma_i^k = k\xi_0^{n-1} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

получаем:

$$\delta_k = (-1)^{n-k} \frac{R_n(\xi_0)}{\prod\limits_{i \neq k} |\sigma_k - \sigma_i| (\xi_0 - \sigma_k)^2};$$

таким образом, условие 2) критерия экстремальности — чередование знаков — выполнено при любых $(\sigma_i)$.

Условие 1), требующее, чтобы и

$$n\xi_0^{n-1} = \sum_{1}^{n} \delta_i \sigma_i^k,$$

т. е. условие совместности всей системы $(V)$, дает равенство

$$F_\xi(R) = R_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n} r_k \sum_{i=1}^{n} \delta_i \sigma_i^k = \sum_{1}^{n} \delta_i R_n(\sigma_i),$$

т. е. $R_n(\xi) = 0$, что выполнено в точке $\xi_0$.

Теорема 2 полностью доказана.

Обозначим любой промежуток сегмента [0, 1], лежащий между двумя соседними чебышевскими интервалами, через $(\beta, \alpha)$; таких промежутков всего $n-1$. Мы получили, что каждый полином $L_n(x)$ обслуживает $F_\xi$

ровно в $n-1$ точках — корнях $R_n'(\xi)=0$, расположенных по одной в каждом промежутке вида $(\beta, \alpha)$.

Положим, для определенности, что в ближайшем чебышевском интервале, лежащем слева от $(\beta, \alpha)$, $+T_n(x)$ обслуживает $F_\xi$.

Следствие. *Так как на границах* $\beta$ *и* $\alpha$ $F_\xi$ *теряет соответственно нагрузку в узлах* $\tau_n=1$ *и* $\tau_0=0$, *то обслуживание передается при движении* $\xi$ *внутрь* $(\beta, \alpha)$ *от* $\beta$ *к* $\alpha$ *общим золотаревским полиномам в той последовательности, как указано выше, и, согласно теореме о непрерывной деформации, без единого пропуска до превращения полинома в* $-T_n(x)$ *в точке* $\alpha$.

Таким образом, $F_\xi$ обслуживается в $(\beta, \alpha)$ только полиномами Золотарева, а ими исчерпываются, с точностью до знака, все полиномы паспорта $[n, n, 0]$. Назовем эти промежутки золотаревскими. В золотаревских промежутках, соседних с $(\beta, \alpha)$, обслуживающие полиномы отличаются только знаком.

Отрезки-функционалы с переменными параметрами, которые в области своего изменения обслуживаются, помимо полиномов Чебышева, только полиномами одного постоянного паспорта, назовем *устойчивыми*.

Итак, функционал производной $F_\xi$ является устойчивым функционалом. Другими важными примерами устойчивых функционалов являются тригонометрические функционалы

$$F_{\cos}=(\cos k\varphi)_{k=0}^{n} \text{ и } F_{\sin}=(\sin k\varphi)_{k=0}^{n}$$

[см. ([7])], а также функционалы производных высших порядков на полиномах.

## ЧАСТЬ II

## НОРМА ФУНКЦИОНАЛА ПРОИЗВОДНОЙ НА [0, 1]

Обозначим через $E_T$ множество точек чебышевских сегментов, а через $E_Z$ — множество точек открытых золотаревских интервалов. Тогда, согласно результатам части I, имеем:

$$|P_n'(\xi)|\leqslant\begin{cases}|T_n'(\xi)|=N(\xi) & \text{при } \xi\in E_T,\\ |Z_n'(\xi, \vartheta_\xi)|=N(\xi) & \text{при } \xi\in E_Z.\end{cases}$$

Во втором случае $\vartheta_\xi$ есть корень уравнения $R_n'(\xi, \vartheta)=0$.

Функция $N(\xi)$ непрерывна [см. ([5])], и, вследствие (3), достаточно рассматривать ее на половине интервала [0, 1].

### § 1. Норма $N(\xi)$ на чебышевских сегментах $[\alpha, \beta]$

ТЕОРЕМА 3. *Корни* $(\gamma_i)_1^{n-2}$ *полинома* $T_n''(x)$ *лежат по одному во внутренних чебышевских сегментах.*

Пусть $[\alpha, \beta]$ — один из таких сегментов при $\alpha>\frac{1}{2}$. Из зависимости

$$n2^{2n-1}R_{n+1}(x)=T_n'(x)\,x\,(x-1)$$

следует, что на [0, 1] $R_{n+1}(x)$ и $T_n'(x)$ будут разных знаков.

Далее, имеем:

$$\operatorname{sgn} R_{n+1}(\alpha) = \operatorname{sgn} R_{n+1}(\beta).$$

Таким образом,

$$n2^{2n-1} R'_{n+1}(x) = T''_n(x)\, x\,(x-1) + T'_n(x)\,(2x-1). \qquad (8)$$

На основании (5) и (6), отсюда следует, что

$$n2^{2n-1} R_{n+1}(\alpha) = T''_n(\alpha)\,\alpha^2(\alpha-1) + T'_n(\alpha)\,\alpha\,(2\alpha-1) \qquad (=I'_1+I'_2),$$
$$n2^{2n-1} R_{n+1}(\beta) = T''_n(\beta)\,\beta\,(\beta-1)^2 + T'_n(\beta)\,(\beta-1)\,(2\beta-1) \qquad (=I''_1+I''_2).$$

Если $R_{n+1}(\alpha) > 0$ и $R_{n+1}(\beta) > 0$, то, так как $I'_2 < 0$, имеем $I'_2 > 0$, т. е.

$$T''_n(\alpha) < 0.$$

Далее, $I''_2 > 0$. Докажем, что

$$n2^{2n-1} R_{n+1}(\beta) > T'_n(\beta)\,(2\beta-1)\,(\beta-1);$$

но это равносильно утверждению, что $\beta < 1$. Итак, $I''_1 > 0$ и, следовательно, $T''_n(\beta) > 0$.

Если $R_{n+1}(\alpha) < 0$ и $R_{n+1}(\beta) < 0$, то доказательство проходит аналогично.

ТЕОРЕМА 4. *Корни* $(\vartheta_i)_1^n$ *полинома* $T_n(x)$ *лежат по одному во всех чебышевских сегментах.*

1) Пусть $[\alpha, \beta]$ — один из таких внутренних сегментов при $\alpha > \frac{1}{2}$.

Возьмем дифференциальное уравнение для $T_n(x)$ (с заменой $x$ на $2x-1$):

$$x\,(1-x)\, T''_n(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) T'_n(x) + n^2\, T_n(x) = 0. \qquad (9)$$

Пусть, для определенности, $F_\xi$ обслуживается в $[\alpha, \beta]$ полиномом $+T_n(x)$, и пусть $\gamma$ — корень $T''_n(x)$ в этом интервале. Так как здесь $T'_n(x) > 0$, то, в силу (9), и $T_n(\gamma) > 0$, а тогда и подавно $T_n(\beta) > 0$. Остается убедиться в том, что $T_n(\alpha) < 0$. Мы имеем $R'_{n+1}(\alpha) < 0$, а из (8) следует, что $T''_n(\alpha) > 0$. Таким образом, из (9) получаем:

$$n^2 T_n(\alpha) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) T'_n(\alpha) - \alpha\,(1-\alpha)\, T''_n(\alpha).$$

Но из (8) вытекает, что

$$-T''_n(\alpha)\,\alpha\,(1-\alpha) + T'_n(\alpha)\,(2\alpha-1) < 0,$$

следовательно, $T_n(\alpha) < 0$.

2) Для крайнего чебышевского сегмента $[\alpha, 1]$ имеем: $T''_n(x) > 0$, $T'_n(x) > 0$. Следовательно, и здесь справедливо неравенство $T'_n(\alpha) > 0$, а из (8) и (9) вытекает, что $T_n(\alpha) < 0$.

Теорема 4 доказана.

Следствие теоремы 3. *В каждом внутреннем чебышевском сегменте норма достигает один раз своего максимума*

$$N(\gamma_k) = |\, T'_n(\gamma_k) \,|.$$

*В крайних чебышевских сегментах норма монотонно убывает от границ*

*внутрь, т. е.*

$$\max N(\xi) = T'_n(1) = |T'_n(0)|.$$

Замечание. Если $n$ нечетное, то существует чебышевский сегмент, содержащий точку $\frac{1}{2}$, вида $[\alpha, 1-\alpha]$. В этом случае $\gamma = \vartheta = \frac{1}{2}$ и теоремы 3, 4 сохраняют силу. В каждом из остальных чебышевских сегментов $\left(\text{справа от } \frac{1}{2}\right)$ имеем $\gamma > \vartheta$, так как из (9) следует, что

$$\operatorname{sgn} T_n(\gamma) = \operatorname{sgn} T'_n(\gamma).$$

Итак, на $[\alpha, \beta]$

$$N(\xi) = |T'_n(\xi)| = \frac{n\,|\sin n\theta|}{\sqrt{\xi(1-\xi)}}, \tag{10}$$

где $\theta = \arccos(2\xi - 1)$.

Отметим некоторые дальнейшие следствия. Соотношение

$$N(\xi) \leqslant \frac{n}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \quad (\xi \in [\alpha, \beta])$$

превращается в равенство только в точках $|\sin n\theta| = 1$, т. е. для корней $(\vartheta_i)_1^n$ $\left(\vartheta_i = \cos^2\frac{(2i-1)\pi}{4n}\right)$ полинома $\cos n\theta = T_n(x)$. Таким образом, $\max N(\xi)$ от одного чебышевского интервала к другому растет на сегменте $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ как последовательность чисел

$$2n,\ \frac{2n}{\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}},\ \ldots,\ \frac{2n}{\sin\frac{\pi}{2n}},\ 2n^2 \quad (n \text{ — нечетное}).$$

Это также следует и из неравенства $(*')$ при $k = 1$, которое для приведенного $P_n(x)$ на $[0, 1]$ имеет вид:

$$|P'_n(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{x(1-x)}}. \tag{11}$$

Мажоранта С. Н. Бернштейна (11) касается точной мажоранты $N(\xi)$ в точках $(\vartheta_i)_1^n$.

## § 2. Норма $N(\xi)$ на золотаревских интервалах $(\beta, \alpha)$

Рассмотрим какой-либо золотаревский интервал. Согласно § 3, ч. I, внутри $(\beta, \alpha)$ существует одна и только одна точка $\xi^*$, в которой $F_\xi$ обслуживается полиномом $-T_{n-1}(x)$. Назовем $(\beta, \xi^*)$ и $(\xi^*, \alpha)$ соответственно левой и правой частью интервала $(\beta, \alpha)$. Точки $\xi^*$ определяются как корни $R'_n(\xi) = 0$, где $R_n(x)$ есть резольвента $T_{n-1}(x)$:

$$R_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - \tau'_i),$$

где $T_{n-1}(\tau'_i) = \pm 1$.

ТЕОРЕМА 5. *На интервале $(\beta, \alpha)$ норма $N(\xi)$ изменяется монотонно в каждой точке $\xi$, в которой вторая производная экстремального полинома не обращается в нуль.*

Положим, для определенности, что $N(\beta) = +T_n'(\beta)$. Тогда (см. стр. 955) в некотором промежутке $(\beta, A)$, где $\beta < \xi < A < \xi^*$, экстремальными полиномами являются $T_n(\nu x)$; они обслуживают $F_\xi$ при $\cos^2\frac{\pi}{2n} < \nu < 1$. Мы имеем:

$$N(\xi) = T_n'(\nu\xi)\,\nu, \quad N'(\xi) = -T_n'(\nu\xi)\frac{\beta}{\xi^2}.$$

Зависимость между параметрами $\nu$ и $\xi$ находится так: величина $T_n'(\nu\xi)\cdot\nu$ должна быть максимумом по $\nu$, т. е.

$$T_n''(\nu\xi)\,\nu\xi + T_n'(\nu\xi) = 0;$$

отсюда следует, что $\nu\xi = \mathrm{const}$ (эта постоянная $> 0$ и различна на различных интервалах). Таким образом, $\nu = \frac{\beta}{\xi}$ (при $\nu = 1$, $\xi = \beta$). Мы получаем: $T_n'(\nu\xi) > 0$, $N'(\xi) < 0$ и $N(\xi)$ убывает. Так как для $(\beta, \alpha)$ имеет место $\nu\xi = \beta$, то $A = \dfrac{\beta}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}$. Для остальных чебышевских трансформаций монотонность нормы доказывается аналогично.

Итак, точка extremum $N(\xi)$ находится в той части $(\beta, \alpha)$, где $F_\xi$ обслуживается собственно золотаревскими полиномами (стр. 955). Остается доказать теорему 5 именно для них.

Положим $A < \xi_1, < \xi_1^*$, и пусть для $F_{\xi_1}$ экстремальный полином есть $Z_n(x, \vartheta_{\xi_1})$ с резольвентой $R_n(x, \vartheta_{\xi_1})$. Тогда

$$N(\xi_1) = \left(\frac{\partial Z_n(\xi, \vartheta_{\xi_1})}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_1} \text{ и } \left(\frac{\partial R_n(\xi, \vartheta_{\xi_1})}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_1} = 0 \qquad (12)$$

последнее равенство справедливо в силу теоремы 2). Мы имеем:

$$N'(\xi) = \frac{\partial^2 Z_n(\xi, \vartheta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Z_n(\xi, \vartheta)}{\partial \xi\, \partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{d\xi}$$

и, согласно (7) и (12),

$$N'(\xi_1) = \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \xi^2}\right)_{\xi=\xi_1} + \left(\frac{\partial R_n(\xi, \vartheta)}{\partial \xi}\frac{d\vartheta}{d\xi}\right)_{\substack{\xi=\xi_1 \\ \vartheta=\vartheta_{\xi_1}=\vartheta_1}} = Z_n''(\xi_1, \vartheta_1).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *В каждом интервале* $(\beta, \alpha)$ *имеется одна и только одна точка* $\xi_0$, *в которой* $N'(\xi) = 0$, *причем*

$$N(\xi_0) = \min_{(\beta, \alpha)} N(\xi) \leqslant |T_{n-1}'(\xi^*)|;$$

*если* $\beta > \frac{1}{2}$, *то* $\beta < \xi_0 < \xi^*$, *если* $\alpha < \frac{1}{2}$, *то* $\xi^* < \xi_0 < \alpha$.

Действительно, для полинома $Z_n(x, \vartheta)$ и его резольвенты $R_n(x, \vartheta)$ справедливо равенство

$$Z_n'(x, \vartheta) = n\vartheta\,\frac{R_n(x, \vartheta)(x-\lambda)}{x(x-1)}, \qquad (13)$$

где $\lambda = \lambda(\vartheta)$ — корень $Z_n'(x, \vartheta)$, лежащий вне $[0, 1]$. Если $\vartheta$ убывает от $2^{2n-1}\cos^{2n}\frac{\pi}{2n}$ до нуля, то $\lambda$ возрастает от 1 до $\infty$.

Пусть $Z_n''(\xi_0, \vartheta_{\xi_0}) = 0$. Так как $Z_n'(\xi_0, \vartheta_{\xi_0}) > 0$, то из (13) следует:

$$R_n(\xi_0, \vartheta_{\xi_0}) > 0.$$

На основании (12) имеем:

$$N'(\xi_0) = Z_n''(\xi_0, \vartheta_{\xi_0}) = n\vartheta R_n(\xi_0, \vartheta_{\xi_0}) \left[\frac{\xi - \lambda}{\xi(\xi - 1)}\right]'_{\xi=\xi_0}.$$

Следовательно, $\xi_0$ находится из условия

$$\lambda(2\xi_0 - 1) - \xi_0^2 = 0.$$

Итак, при $\alpha < \frac{1}{2}$ такой точки $\xi_0$ нет, и в левой части интервала $(\beta, \alpha)$ необходимый $\min N(\xi) = N(\xi_0)$ возможен только при $\beta > \frac{1}{2}$. Этим, на

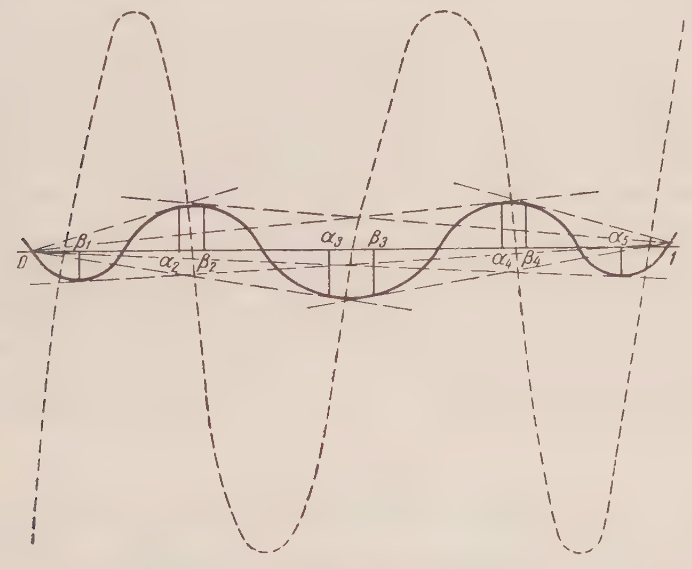



Рис. 2

основе симметрии $N(\xi)$, доказана вторая часть теоремы. Остается найти $\xi_0$ для $Z_n(x, \vartheta)$ при $\beta > \frac{1}{2}$. Для этого удобнее заменить параметр $\vartheta$ на $\lambda$, рассматривая $Z_n(x, \lambda)$ при $1 < \lambda < +\infty$, где $\lambda(\xi)$ монотонно возрастает вместе с $\xi$ на $(A, \xi^*)$. Пусть $\lambda = \varphi(\xi)$. В точке $\xi_0$ одновременно выполняются требования $\lambda = \varphi(\xi)$ и $\lambda = \frac{\xi^2}{2\xi - 1}$; так как первая кривая монотонно возрастает на $(A, \xi^*)$ от 1 до $\infty$, а вторая (гипербола) на $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ монотонно убывает от $+\infty$ до 1, то существует единственная точка пересечения.

Замечание. Для золотаревского интервала вида $(\beta, 1 - \beta)$, т. е. при $n$ четном, $\xi_0 = \xi^* = \frac{1}{2}$ и $\min\limits_{[0,1]} N(\xi) = 2(n - 1)$.

Сравним ход смежных кривых $N(\xi)$ при различных $n$, обозначив их для соответственных $F_\xi^{(n)}$ и $F_\xi^{(n-1)}$ через $N_n(\xi)$. Заметим, что две кривые

$N_n(\xi)$ и $N_{n-1}(\xi)$ не могут иметь более одной общей точки в каждом золотаревском интервале $F_\xi^{(n)}$, так как это противоречило бы теореме единственности экстремального полинома. В точке касания $\xi^*$

$$N(\xi^*) = |T'_{n-1}(\xi^*)| = N_{n-1}(\xi^*),$$

но

$$\min_{(\beta, \alpha)} N_n(\xi) < |T'_{n-1}(\xi^*)| \text{ при } \beta < \xi^* < \alpha.$$

На рис. 2 (см. стр. 961) сплошной линией изображены кривые $y = N_n(\xi)$ при $n=2, 3, 4, 5$ и пунктирной линией — мажоранта Бернштейна $y = \frac{4}{\sqrt{x(1-x)}}$ (для $n = 4$). Она вообще дает плохое приближение в точках $E_z$ к $N_n(\xi)$.

В заключение заметим, что теорема А. А. Маркова была обобщена В. А. Марковым ([8]), доказавшим неравенство

$$\max_{[-1, +1]} |P_n^{(k)}(x)| \leqslant MT_n^{(k)}(1).$$

К этому неравенству также применимы замечания, сделанные во введении настоящей статьи, а так как функционал $k$-й производной является устойчивым (см. стр. 957), то метод функционалов может быть применен без видоизменений и для случая производных любого порядка и притом с получением аналогичных результатов.

Заметим, наконец, что и А. А. Марков и В. А. Марков изучали вопрос об оценке производных во внутренних точках основного интервала, но из-за нежелания воспользоваться полиномами Е. И. Золотарева [см. ([1]), стр. 64 и ([8]), стр. 55] они не довели своих задач до конца.

Ленинградский институт
авиационного приборостроения

Поступило
12. XII. 1958

ЛИТЕРАТУРА

[1] Марков А. А., Об одном вопросе Д. И. Менделеева, Изв. СПБ акад. наук, т. 62 (1889), 1—24.

[2] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Собр. соч., т. I, М., 1952.

[3] Вороновская Е. В., Экстремальные полиномы конечных функционалов, Автореферат диссертации, ЛГУ, 1955.

[4] Вороновская Е. В., Приложение функционального анализа к полиномам наименьшего отклонения, Доклады Ак. наук СССР, 99, № 1 (1954), 5—8.

[5] Вороновская Е. В., Экстремальные полиномы некоторых простейших функционалов, Доклады Ак. наук СССР, 99, № 2 (1954), 193—196.

[6] Золотарев Е. И., Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее уклоняющихся от нуля (1887), Полн. Собр. соч., вып. 2, Ленинград, Издательство Академии наук СССР, 1932.

[7] Вороновская Е. В., Структура тригонометрических функционалов и ее следствия, Успехи матем. наук, XII, вып. 5 (77) (1957), 254—257.

[8] Марков В. А., О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПБ, 1892.

# ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

**Серия математическая**

23 (1959), 963—964


## СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 23